

TI, Mechanik, WS 95/96

Inhalt (tatsächlich)

	Seite	Stud-
0. Vorbemerkung	1	
1. Physikalische Grundlage	8	
1.1 Allg. Bemerk., Historisches	8	
1.2 Raum und Zeit	10	
1.3 Newton'sche Dynamik	12	<u>2</u>
		2
2. Elementare Newton'sche Dynamik	19	
2.1 Bsp. des NG	19	
2.2 1D-Bewegung, Phase-raum	21	2
2.3 Kinematik, Koordinatensyst.	25	
2.4 Erhaltungssätze (MP), Potential	28	2
2.5 Zentralfeldbeweg.	34	2
2.6 Keplerproble	44	2
2.7 Streuung, (WA, Streukinetik)	47	2
2.8 Systeme von MP	57	2
2.9 Beschleunigte Bezugssysteme	62	<u>2</u>
		14
3. Lagrange'sche Mechanik	68	
3.1 Lagrange fkt	68	
3.2 Verallg. Koordin., LG2	71	2
3.3 Zwangsbeding.	76	2
3.4 D'Alembert'sches Prinzip, LG1	83	2
3.5 Lagr. ys. 2. Art	92	
3.6 Zykl. Koordinat.	95	
Route fkt., Energieerh.		

3.7	Symmetrie und Erh. sätze	103
3.8	Variationsrechnung	108
3.9	Hamiltons Prinzip	115
4.	Starrer Körper	119
4.1	Rotationen, Drehgruppe	120
4.1.1	Eddl. Drehze	121
4.1.2	Zuf. Drehze, Sternecke	127
4.1.3	Winkelgeschw.	130
4.2	Rotation des starren Körpers	132
4.2.1	Trägheitstensor	132
4.2.2	Tensoren, Dyade	136
4.2.3	Hauptträgheitsachse	141
4.3	Bewegungsgl. des starren Körper	144
4.3.1	Euler'sche Gleich.	145
4.3.2	Lagrange'sche Behndl. (Schweres Kreisel)	150
5.	Kleine Schwingungen	156
5.1	Schwingung eines MP	156
5.2	Zwei harmon. gekopp. MP	160
5.3	Allg. Systeme mit endl. v. Fg	165
6.	Relativistische Mechanik	172
6.1	Zwangsbedingungen	173
6.2	Leitungen und Leiter	181
6.3	Zwangsbedingungen	186
6.4	Relativ. Dynamik	189
6.5	Relativ-Lagrange Form.	194

7. Hamilton'sche Mechanik	200
7.1 Hamiltongleichungen	202
7.2 Zyk. Variable	
7.2 Poissonklammern	212
7.3 kanonische Transformation	215
7.3.1 Hamilton Prinzip	215
7.3.2 ka. Transform.	218
7.3.3 Hamilton-Jacobi-pp	223
7.4 Integrierte ka. Transform. und Erhaltungsgrößen	226
7.5 Liouville'scher Satz	228

8. Integrierte und nichtintegrierte Systeme, Chaos	232
(Ende)	234
+ Transparenz.	

6. Relativistische Mechanik

Bisheriger Aufbau der Mechanik gegriindet auf Galilei Relativitätsprinzip:

- Alle Inertialsysteme sind physikalisch gleichwertig, d.h. phys. Gesetze kovariant,
- Newton'sche Gesetze in allen IS.

Daraus folgt als Transform. zw. IS die Galilei-Transform.

$$\vec{r}' = \hat{R} \vec{r} - \vec{v}t - \vec{a}, \quad t' = t + s_1$$

Dreh. gleichf. Versh. Zeitversh.
Beweg.

[oder spez. Galileitransf. $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t, t' = t$

GT bilden Gruppe.

Eine Konsequenz: Addit. von Geschw.

IS' Beweg. $x' = ct'$

IS: $x = x' + vt = (c+v)t$

Widerspruch zu Lichtausbreitung,

und später auch bei schrägen Teilchen

→ Maxwell + Gleichg., spezielle Wellengleich. nicht in variant form GT. (s. üb ~)

Steine nur in bewegte BS zu gelte

→ Ätherhyp.

- ⇒ Versuch Äther nachzuweisen negativ
(Michelson-Morley-Versuch).
- Folgerung: Lichtgeschw. in alle IS gleich
GT muß revidiert werden

Daher neue Postulate:

Einsten'sches Relativitätsprinzip

1. Alle IS sind gleichwertig, d.h. Naturgesetze ^{invariant}
(Relativitätsprinzip = Kovarianzprinzip)
2. Konstanz der Lichtgeschw. in jeder IS.
(Lichtgeschw. ist Grenzgeschw.)

Postulat 2. mit GT unvereinbar. Wund
muss verallgemeinert. Neue Transform.
zw. IS muß gefunden werden.

6.1 Lorentztransformation

Zur Formulierung der Transformations

Koordinat: x, y, z, t

Neue Schreibweise: $x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

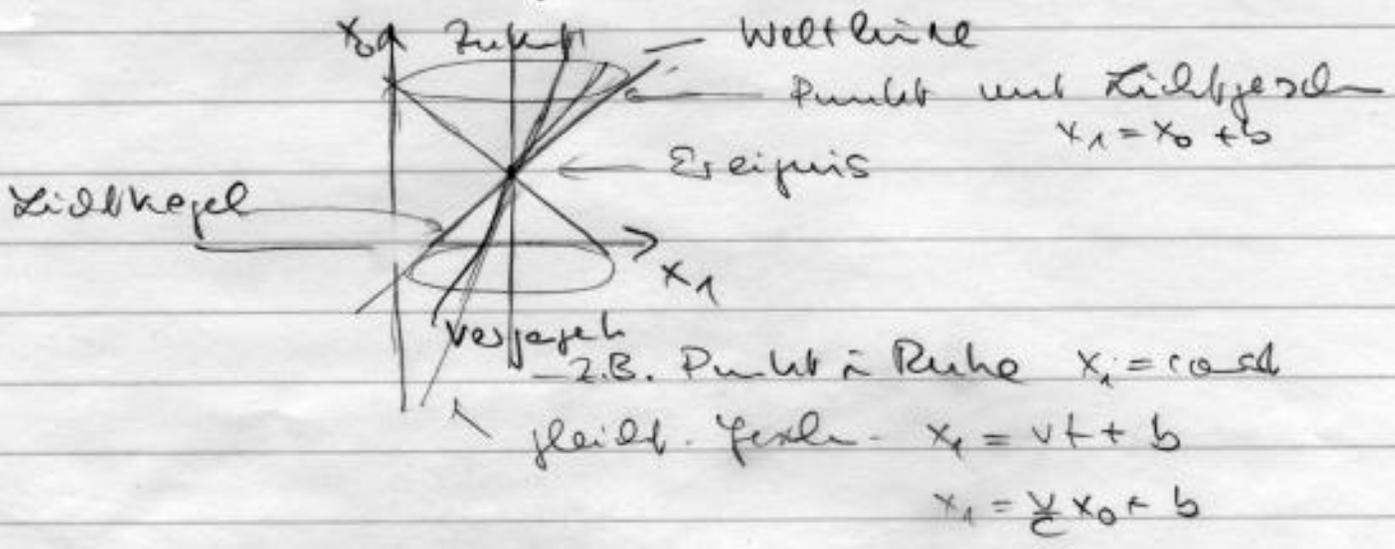
Oder $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) = \{x^\alpha\}, \alpha = 0, 1, 2, 3$
 $= (x_0, \vec{x}) \quad | \quad \vec{x} = \{x_i\} \quad i = 1, 2, 3$ (ed)

Bedeutung: $x :=$ Ereignis

↳ Punkt (Weltpunkt) in einer 4-dimensionalen
Raum (Minkowski-Raum).

Bewegung $\vec{x}(t)$: $x = (x_0, \vec{x}(x_0))$ durchläuft Folge von Ereignissen
→ Weltlinie.

Übl. Darstellung: 1 Raum und 1-Zeitdimension



Weltlinie nur innerhalb des Lichtkegels, da von jedem Pkt ausgeht.

Formulierung von Post. 2:

IS und IS' stimmen für $t = t' = 0$ überein.

Lichtkegel: Wellenfront

IS $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$; $s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$

IS' $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$; $s'^2 = x_0'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 = 0$

→ Post. 2: $s^2 = s'^2 = 0$ für Lichtkegel.

"Abstand" von Ereignissen: x_1 und x_2 :

dh. $x_i = (x_i^0, x_i^1, x_i^2, x_i^3)$, $x_i = \dots$

Def: $s_{12}^2 = (x_1^0 - x_2^0)^2 - (x_1^1 - x_2^1)^2 - (x_1^2 - x_2^2)^2 - (x_1^3 - x_2^3)^2$

Schreibweise mit Metrik tensor:

$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \{\delta_{\mu\nu}\}$

Dann $S_{12}^2 = \sum_{\alpha \neq \beta} g_{\alpha\beta} (x_1^\alpha - x_2^\alpha)(x_1^\beta - x_2^\beta)$

1.2.

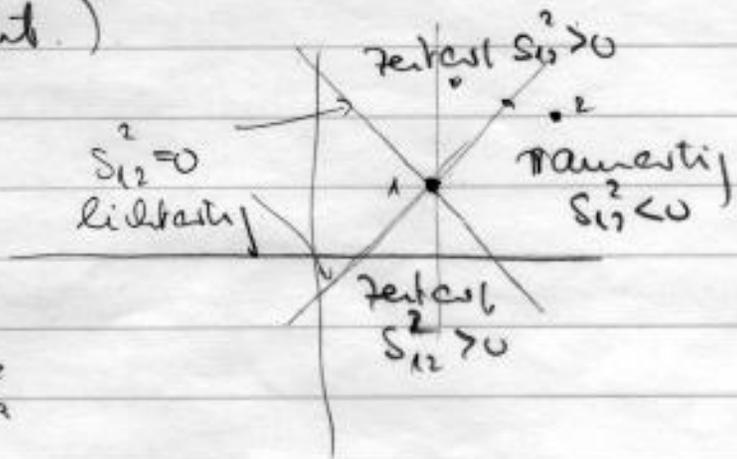
Metrik in \mathbb{R}^3 : $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $S_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \sum_{i,j} g_{ij} x_i x_j$

So def. Metrik nicht positiv definit:

$S_{12}^2 \leq 0$

z.B. gleichz. Ereignisse ($t_1 = t_2$) $\rightarrow S_{12}^2 < 0$.
 (Keine Schwere n.igkeit, da in Def., die in \mathbb{R}^3 bild. übersetzt.)

Sprechweise:



\rightarrow Wogelement:
 $ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$

Verallg. Postulat 2:

Bei Transf. zw. IS bleibt der Abstand
 von Ereignissen invariant: $S'_{12} = S_{12}$

Begründung: Zusammen mit Post. 1 (Kovarianz)
 Naturgesetztes die sich behaltel
 Experiment.

Aufgabe: Transf. zu finden, die diese
 Bedg. erfüllt.

Bestimmte Untergruppe der GT erfüllt das auch

and, z.B. $\vec{r}' = \hat{R} \vec{r}$ Rotation
 $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}, t' = t + s$ Translation:

aber nicht $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$

z.B. $x' = x - vt, t' = t$

$$S_{12} = c(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2$$

$$S'_{12} = c(t'_1 - t'_2)^2 - (x'_1 - x'_2)^2$$

$$= c(t_1 - t_2)^2 - ((x_1 - x_2)^2 - v(t_1 - t_2)^2) + S_{12}$$

Ausatz: $x^{\alpha'} = \sum_{\beta} \Lambda^{\alpha'}_{\beta} x^{\beta} + b^{\alpha'}$

inher. Lorentztransf. (Λ, b)

Translation trivial, meist nicht betrachtet

kon. Lorentztransf. ($b=0$).

LT: linear, da so oft Hauptgerade
 von Raum-Zeit verläuft
 (affine Abb.).

Formul. des Post.

$$S'^2 = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} x^{\alpha'} x^{\beta'} = \sum_{\alpha\beta} \sum_{\gamma\delta} g_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\gamma} x^{\gamma} \Lambda^{\beta}_{\delta} x^{\delta}$$

$$= \sum_{\gamma\delta} g_{\gamma\delta} x^{\gamma} x^{\delta}$$

$$\rightarrow g_{\gamma\delta} = \sum_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\gamma} g_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}_{\delta}$$

oder $\underline{g} = \underline{\Lambda}^T \underline{g} \underline{\Lambda}$ } tritt an Stelle
 von Orthog. Transf.
 $A^T A = 1$

z.B. $\underline{g}' = \underline{g}$ linksinvert:

$$\rightarrow 1 = \underline{g} \underline{\Lambda}^T \underline{g} \underline{\Lambda} \rightarrow \underline{\Lambda}^{-1} = \underline{g} \underline{\Lambda}^T \underline{g}$$

Bestimmung von Λ aus dieser Bedingung.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_0^1 & \Lambda_0^2 & \dots \\ \Lambda_1^0 & \Lambda_1^1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \Lambda_3^3 \end{pmatrix}$$

Aber Drehungen \uparrow unter Raumwert in \mathbb{R}^3 ,
daher spez. LT betrachtet:

Spez. LT: Relativbeweg. langs x-Achse mit

"Boost" \uparrow Geschw. v
(Trest $\sim (x^0, x^1)$ -Raum)



Beschreibung $v = \vec{0}'$.

IS: $(x^0 = ct, x^1 = vt = \frac{v}{c}x^0, 0, 0)$
IS': $(x^0' = ct', x^1' = 0, 0, 0)$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_0^1 & 0 & 0 \\ \Lambda_1^0 & \Lambda_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_3^3 \end{pmatrix}$$

Bedingung $g = \Lambda^T g \Lambda \rightarrow (\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^1)^2 = 1$ (1)

$$-(\Lambda_1^0)^2 + (\Lambda_1^1)^2 = -1$$
 (2)

$$\Lambda_0^0 \Lambda_1^0 - \Lambda_0^1 \Lambda_1^1 = 0$$
 (3)

Setze BOA : $\Lambda_1^0 = -\sinh \varphi \xrightarrow{(1)} \Lambda_0^0 = \cosh \varphi$

$$\Lambda_1^1 = -\cosh \varphi \xrightarrow{(2)} \Lambda_1^1 = \cosh \varphi$$

$$\varphi \stackrel{(3)}{=} \varphi$$

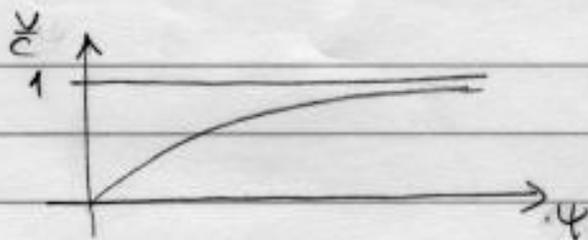
Aufgabe:

$$x^{0'} = \Lambda_0^0 x^0 + \Lambda_0^1 x^1$$

$$0 = x^{1'} = \Lambda_1^0 x^0 + \Lambda_1^1 x^1 = (\underbrace{\Lambda_1^0}_{-\sinh \varphi} + \underbrace{\frac{v}{c} \Lambda_1^1}_{\cosh \varphi}) x^0$$

$$\rightarrow \tanh \varphi = \frac{v}{c} \quad ; \quad \boxed{\varphi = \text{arsinh} \frac{v}{c}}$$

Maßwert φ Rapidität,
oft auch als geschwindigkeit (oft auch η oder α)



$-\infty < \varphi < +\infty$
 $-1 < \frac{v}{c} < +1$
 Relativgesch $v < c!$

Spez. LT:

$$\begin{pmatrix} x^0' \\ x^1' \\ x^2' \\ x^3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Versp. Rot. in R^2 : $\begin{pmatrix} x^1' \\ x^2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$

d.h. Metrik von M ist durch hyperbol. Fkt. statt trigonometrisch Fkt.!

Andere Schreibweise: $\beta := \frac{v}{c}$

$$\tanh \varphi = \beta, \quad \cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} =: \gamma$$

$$\sinh \varphi = \frac{\tanh \varphi}{\sqrt{1 - \tanh^2 \varphi}} = \beta \gamma$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oder explizit:

$$\begin{cases} x^0' = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x^1' = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x^2' = x^2 \\ x^3' = x^3 \end{cases}$$

Rückwert: $\Lambda^{-1} = g \Lambda^T g$

$$= \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & -\Lambda^1_0 & -\Lambda^2_0 & -\Lambda^3_0 \\ -\Lambda^0_1 & \Lambda^1_1 & \Lambda^2_1 & \Lambda^3_1 \\ -\Lambda^0_2 & \Lambda^1_2 & \Lambda^2_2 & \Lambda^3_2 \\ -\Lambda^0_3 & \Lambda^1_3 & \Lambda^2_3 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix}$$

weil \mathbb{R}^3
 $A^{-1} = A^T$

Für spezielle LT:

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi & 0 & 0 \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta \gamma & 0 & 0 \\ \beta \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \Lambda(-\beta)$$

→ ändert aus Rel. perspekt. da sich ja IS relativ zu IS mit $-\beta$ bewegt!

Nichtrel. Grenzfall: $\beta \ll 1$

$$\tanh \varphi \approx \sinh \varphi \approx \varphi = \beta$$

$$\cosh \varphi \approx \gamma \approx 1$$

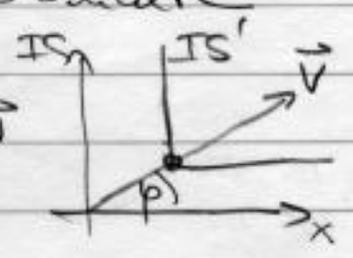
$$x^0 = ct' = \gamma(x^0 - \beta x^1) \approx ct - \frac{v}{c} x^1 \rightarrow t' \approx t$$

$$x^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \approx x^1 - \frac{v}{c} ct \rightarrow x' = x - vt \quad \Big| \stackrel{GT}{=} \Big|$$

Beliebige LT durch Hintereinanderschaltung von Spez. LT: z.B.

1) Drehung der x-Achse im Rückw. \vec{v}

$$\Lambda_{12}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



2) "Boost" $\Lambda_{01}(\beta)$

3) Rückdrehung $\Lambda_{12}(-\varphi)$

$$\Lambda = \Lambda_{12}(-\varphi) \Lambda_{01}(\beta) \Lambda_{12}(\varphi)$$

Gruppe Eigenschaften (Hilfsaussagen)

- i) inhom. Lorentzgruppe (LG) (Λ, b) (LT + Transl.)
bildet Gruppe.
- ii) hom. LG: $(b=0)$ Λ
- iii) $(\det \Lambda)^2 = 1$ (aus $\Lambda^T g \Lambda = g$)
man wählt $\det \Lambda = 1$ eigentliche LT
- iv) $\Lambda_0^0 \geq +1$ orthochron LT } ebenfalls
oder $\Lambda_0^0 \leq -1$ } als

d.h. vier Klassen:

$$L \begin{matrix} \uparrow \leftarrow \Lambda_0^0 \\ \pm \leftarrow \det \Lambda \end{matrix}$$

etw. Op: I, P, T, PT

Metrische Eigenschaften

man wählt:

(üblich)

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

flach,
nicht euklid.

$$\text{äquivalent: } g' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Andere Konvent: Findet man, aber wird
mehr so üblich.

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4 = ict)$$

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

d.h. Quasi-Euklidische Metrik

$$g_{\text{QE}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \Lambda_{\text{QE}}$ orthogonal $\Lambda^T \Lambda = 1$

Das findet man für Boost in x_2 -Richtung

$$\Lambda_{qe} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i\beta\gamma \\ 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\varphi & i\sinh\varphi \\ 0 & -i\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}$$

auch beschreibbar mit $(\tanh\varphi = \beta)$

komplexer Winkel $\varphi = i\psi$

$$\begin{aligned} \cosh\varphi &= \cosh i\psi = \cos\psi \\ \sinh\varphi &= \sinh i\psi = i\sin\psi \end{aligned} \Rightarrow \Lambda_{qe} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

d.h. wie normale Rotation

Quasieuclid. Metrik in Spez. Rel. Theorie einfacher aber

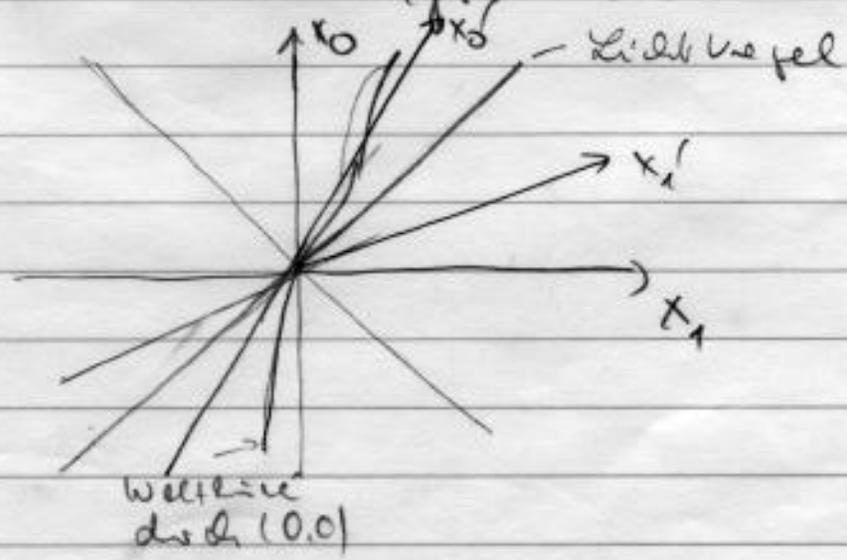
- indef. Metrik nicht überdeckt!
 - nicht mehr müßl. bei nicht-flaches Metrik
 - komplex. Koord. Gollid in QRT mit inhärente komplex. der Strukt. oder Rivacep
- also: wie nicht verwenden.



1819

6.2 Zeigen und Zeite

Minkowski-Diagramm bereits eingeführt



geschw. additiv:

Hinterwärtsschalte von "boosts". z.B. in

x_1 -Richtung mit β_1 und β_2 . bzw. $\beta_1 = \tanh \varphi_1, \beta_2 = \tanh \varphi_2$

$$\Lambda = \Lambda(\beta_2) \Lambda(\beta_1) = \begin{pmatrix} \cosh \varphi_2 & -\sinh \varphi_2 & 0 \\ -\sinh \varphi_2 & \cosh \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \varphi_1 & -\sinh \varphi_1 \\ -\sinh \varphi_1 & \cosh \varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(\varphi_1 + \varphi_2) & -\sinh(\varphi_1 + \varphi_2) \\ -\sinh(\varphi_1 + \varphi_2) & \cosh(\varphi_1 + \varphi_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(unter Benutzung von Relativ-hyperbol-Fkt.)

→ Rapidität additiv!

$$\boxed{\varphi = \varphi_1 + \varphi_2}$$

Wskliche auf Geschwindigkeit:

$$\beta = \tanh \varphi = \tanh(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\tanh \varphi_1 + \tanh \varphi_2}{1 + \tanh \varphi_1 \tanh \varphi_2}$$

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \quad \text{oder} \quad \boxed{v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}}$$

Interpret als Gesch-add.



IS'': Ruhesystem des NP

Gesch. $\hat{=}$ IS' sei v'

Rel. gesch IS' $\hat{=}$ IS sei v_{rel} .

Gesch von NP $\hat{=}$ IS sei v :

$$v = \frac{v' + v_{rel}}{1 + \frac{v' v_{rel}}{c^2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Spezialfälle:} \\ \text{i) } \frac{v_{rel}}{c} \ll 1 \quad v = v' + v_{rel} \quad \text{GT} \\ \text{ii) } \frac{v'}{c} \approx 1 \quad v = \frac{c + v_{rel}}{1 + \frac{v_{rel}}{c}} = c \quad \text{Post.(2)} \end{array} \right.$$

Allg. Fall: Nicht parallel gesch.

Infinite. Ereignis in IS und IS': (parallel x_1 -Richtung)

$$ds = (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3)$$

$$ds' = (dx'_0, dx'_1, \dots)$$

wobei $dx_0 = \gamma (dx'_0 + \beta_{\text{rel}} dx'_1) = \gamma (1 + \beta_{\text{rel}} \frac{dx'_1}{dx'_0}) dx'_0$

$$dx_1 = \gamma (dx'_1 + \beta_{\text{rel}} dx'_0) = \gamma (\beta'_{\text{rel}} + \beta_{\text{rel}}) dx'_0$$

$$dx_2 = dx'_2 \quad dx_3 = dx'_3$$

geschw. in IS:

$$\beta_1 = \frac{dx_1}{dx_0} = \frac{\beta'_{\text{rel}} + \beta_{\text{rel}}}{1 + \beta_{\text{rel}} \beta'_{\text{rel}}} \rightarrow v_{\parallel} = \frac{v'_1 + v_{\text{rel}}}{1 + \frac{v'_1 v_{\text{rel}}}{c^2}} \quad \text{S.O.}$$

$$\beta_2 = \frac{dx_2}{dx_0} = \frac{\beta'_2}{\gamma (1 + \beta_{\text{rel}} \beta'_{\text{rel}})} \quad \text{d.h. } v_{\perp} = \frac{v'_1}{\gamma (1 + \frac{v'_1 v_{\text{rel}}}{c^2})}$$

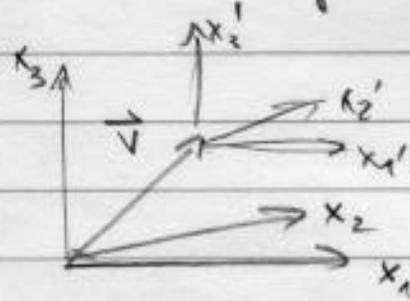
β_3 entspr.

Transv. von geschw. kompliziert, da sich auch Zeitintervalle transformieren.

d.h. \vec{v} sind nicht komp. eines 4-Vektors (s. später)

Lorentztransformation für beliebige Geschwindigkeit:

$$\frac{\vec{v}}{c} = \vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$



$$\Lambda(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_1 \gamma & -\beta_2 \gamma & -\beta_3 \gamma \\ -\beta_1 \gamma & & & \\ -\beta_2 \gamma & & \delta_{ij} + \frac{\beta_i \beta_j}{\beta^2} (\gamma - 1) & \\ -\beta_3 \gamma & & & \end{pmatrix} \leftarrow \text{Lor}$$

↑
Lor

↑
3-Tensor 2. Stufe, der
hilf auf spec LT reduces

z.B. $\vec{v} = (v_1, 0, 0)$, $\Lambda_1^1 = 1 + \frac{v_1^2}{v^2} (\gamma - 1) = \gamma$

$$\Lambda_2^2 = 1$$

explizit nachrechnen bc nach S. 179

(allerding Vorsicht: Abweichung bei
Nichtdiagonalen ...)

oder a.a. $\Lambda(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\vec{\beta} \gamma \\ -\vec{\beta} \gamma & 1 + \frac{\gamma - 1}{v^2} \vec{v} \vec{v} \end{pmatrix}$

Relativ zu (0,0) bewegtes Koordinatensystem.

$$x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x_1) \equiv 0 \rightarrow x'_1 - \text{Achse } x_0 = \beta x_1$$

$$x'_1 = \gamma(x_1 - \beta x_0) \equiv 0 \rightarrow x'_0 - \text{Achse } x_0 = \frac{1}{\beta} x_1$$

(d.h. Änderung des Winkels statt Rotation in \mathbb{R}^3)

Abstände $(x - x_{(0)})^2$ in Variante Klassik

$$\text{z.B. } x_{(0)} = (0,0) \quad x^2 = \begin{cases} > 0 & \text{zeitartig} \\ = 0 & \text{lichtartig} \\ < 0 & \text{raumartig} \end{cases}$$



→ Sei z.B. $x = (x_0, x_1, 0, 0)$ raumartig bzgl. 0.
 Dann exist. KS, sodass gleichzeitig ($\beta = \frac{x_0}{x_1}$)
 und entsp. für zeitart. Ereignis, sodass
 Δ gleich 0 ist.

aber für zeitart. Ereignis kein KS, sodass
 gleichzeitig. u.u.

→ Linie Konst. Abstände:

$$x^2 = \text{const} = x_0^2 - x_1^2 \rightarrow \text{Hyperbolen} \text{ oder}$$

(Rot. sym. in anderen Dimensionen)