TI, Mechanik WS95/96

Inhalt (tatsächlich)

6. Relativistische Mechanik

Bisheriger Aufbau der Mechanik gegründet auf Galilei Relativitätsprinzip:

- Alle Inertialsysteme sind physikalisch gleichwertig, d.h. phys. Gesetze kovariant,
- Newton Gl. gelten in allen IS.

Daraus folgt als Trafo zw. IS die Galilei-Trafo.

$$\vec{r}' = \underbrace{\hat{R}\vec{r}}_{\text{Dreh.}} \underbrace{-\vec{v}t}_{\text{gleichf. Bewegung}} \underbrace{-\vec{a}}_{\text{Versch.}}, \quad t' = \underbrace{t+s}_{\text{Zeitfacsl.}}$$

oder spez. Galileitrafo $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$, $t' = t$

GT bilden Gruppe.

Eine Konsequenz: Addit. von Geschw.

IS' Bewegung $x' = ct'$

IS: $x = x' + vt = (c+v)t$

Widerspruch zur Lichtausbreitung, und später auch bei schnellen Teilchen

$\Rightarrow$ Maxwell + Gleichungen, spezielle Wellengleichung nicht invariant gegen GT. (s. Übung).

Scheinen nur in bevorzugtem BS zu gelten

$\rightarrow$ Äthershyp.

⇒ Versuch Äthernachweise negativ (Michelson Morley-Versuch).
→ Folgerung: Lichtgeschw. in allen IS gleich
GT muß verändert werden.

Daher neue Postulate:
<u>Einsteinsches Relativitätsprinzip</u>

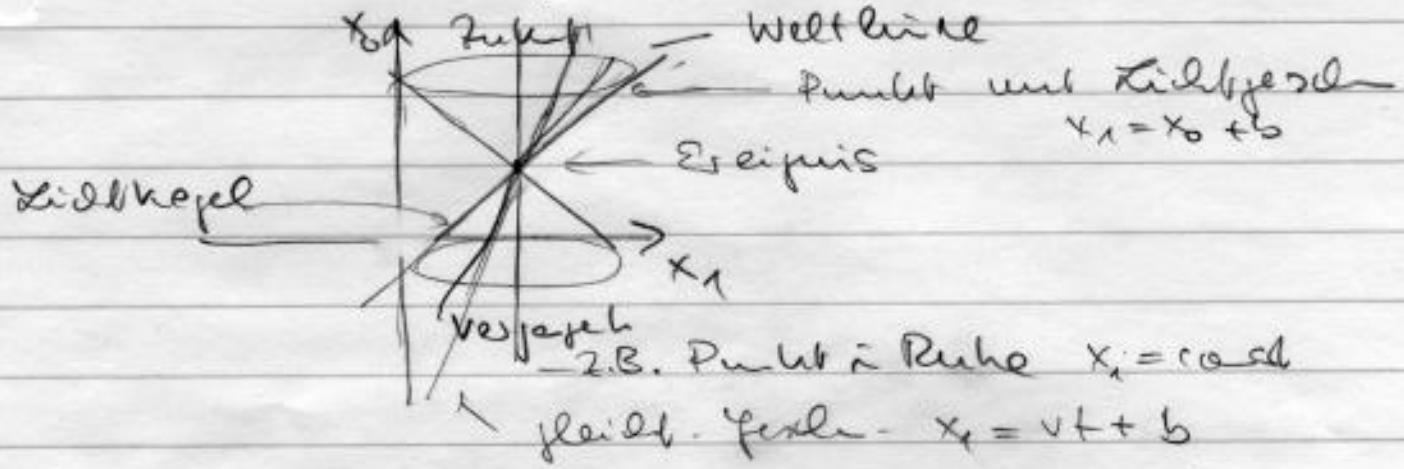
1. Alle IS sind gleichwertig, d.h. Naturgesetze invariant (Relativitätsprinzip = Kovarianzprinzip)
2. Konstanz der Lichtgeschw. c in jedem IS. (Lichtgeschw. ist Grenzgeschw.)

Postulat 2. mit GT unvereinbar. Wird noch verallgemeinert. Neue Transf. zw. IS muß gefunden werden.

<u>6.1 Lorentztransformation</u>

Zur Formulierung der Transformation:
Koord: x, y, z, t (Lb. Index evtl. noch Relevanz)
Neue Schreibweise: $x_0 = ct,\ x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$
Oder $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) = \{x^\alpha\}$, $\alpha = 0,1,2,3$ (griech.)
$= (x_0, \vec{x})$ | $\vec{x} = \{x_i\}$ $i = 1,2,3$ (lat.)
Bezeichn.: <u>x := Ereignis</u>,
- Punkt (Weltpunkt) in einem 4-dim Raum (Minkowski-Raum).
Bewegung $\vec{x}(t)$: $x = (x_0, \vec{x}(x_0))$ durchläuft Folge von Ereignissen
→ Weltlinie.

übl. Darstellung: 1 Raum und 1-Zeitdimension



Weltlinie nur innerhalb des Lichtkegels, die von jedem Pkt ausgeht.

Formulierung von Post. 2:
IS und IS' stimmen für $t = t' = 0$ überein.
Lichtblitz: Wellenfront
IS $\quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2; \quad s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$
IS' $\quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2; \quad s'^2 = x_0'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 = 0$
$\Rightarrow$ Post. 2: $\underline{s^2 = s'^2 = 0}$ für Lichtblitz.

"Abstand" von Ereignissen: x_1 und x_2:
d.h. $x_1 = (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3)$, $x_2 = \ldots$
Def: $\underline{\underline{s_{12}^2 = (x_1^0 - x_2^0)^2 - (x_1^1 - x_2^1)^2 - (x_1^2 - x_2^2)^2 - (\quad)^2}}$

Schreibweise mit <u>Metriktensor</u>:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \{g_{\alpha\beta}\}.$$

Dann $\boxed{s_{12}^2 = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(x_1^\alpha - x_2^\alpha)(x_1^\beta - x_2^\beta)}$ //12.

[Metrik in $\mathbb{R}^3$: $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$s_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \sum_{i,j} g_{ij} x_i x_j$]

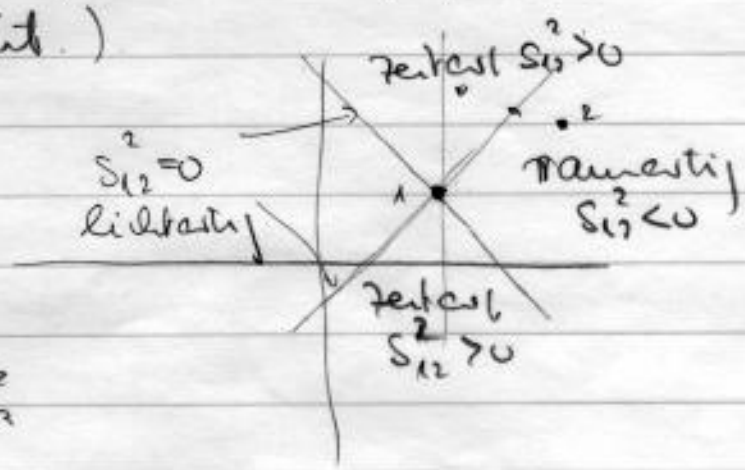
So def. Metrik nicht positiv definit:

$s_{12}^2 \lesseqgtr 0$

z.B. gleichz. Ereignisse ($t_1 = t_2$) $\rightarrow s_{12}^2 < 0$.

(Keine Schwierigkeit, da nur Ref., die in $\mathbb{R}^3$ i. übl. übergeht.)

Sprechweise:



→ Wegelement:

$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$

=

Verall. Postulat 2:

Bei Trasf. zw. IS bleibt der Abstand von Ereignissen invariant: $s_{12}' = s_{12}$

Begründung: Zusammenhang mit Post. 1 (Kovarianz)

Naturgesetze dürfen sich bei Experiment.

Aufgabe: Trasf. zu finden, die diese Bed. erfüllt.

[Bestimmte Untergruppe der GT erfüllen das auch,

auch, z.B. $\vec{r}' = \hat{R}\vec{r}$ Rotation

$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$, $t' = t + s$ Translat.

aber nicht $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$

z.B. $x' = x - vt$, $t' = t$

$$s_{12} = c(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2$$

$$s_{12}' = c(t_1' - t_2')^2 - (x_1' - x_2')^2$$

$$= c(t_1 - t_2)^2 - ((x_1 - x_2)^2 - v(t_1 - t_2))^2 \neq s_{12}^2$$

Ansatz: $\boxed{x^{\alpha\prime} = \sum \Lambda^{\alpha}_{\ \beta} x^{\beta} + b^{\alpha}}$

inhom. Lorentztrafo. (Λ, b)

Translat trivial, meist nicht betrachtet

hom. Lorentztrafo. $(b = 0)$.

LT: linear, da sonst Homogenität von Raum-Zeit verletzt (affine Abb).

Formel. der Poik:

$$s_{12}'^2 = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} x^{\alpha\prime} x^{\beta\prime} = \sum_{\alpha\beta}\sum_{\gamma\delta} g_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\ \gamma} x^{\gamma} \Lambda^{\beta}_{\ \delta} x^{\delta}$$

$$\overset{!}{=} \sum_{\gamma\delta} g_{\gamma\delta} x^{\gamma} x^{\delta}$$

$$\rightarrow \quad g_{\gamma\delta} = \sum_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\ \gamma} g_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}_{\ \delta}$$

bzw. $\boxed{\underline{g} = \underline{\Lambda}^T \underline{g}\, \underline{\Lambda}}$ [tritt an Stelle von Orthog. Trafo $A^T A = 1$]

z.B. $\underline{g}^{-1} = \underline{g}$ linksmult.:

$$\rightarrow 1 = \underline{g}\, \Lambda^T \underline{g}\, \Lambda \rightarrow \boxed{\underline{\Lambda}^{-1} = g \Lambda^T g}$$

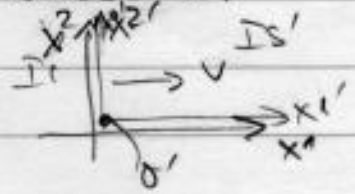
Bestimmung von Λ aus dieser Bedingung.

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \cdots \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \cdots & \\ \vdots & & \Lambda^3_3 & \end{pmatrix}$$

Aber Drehungen im Unterraum wie in $\mathbb{R}^3$, daher spez. LT betrachten:

<u>Spez. LT</u>: Relativbewegung längs x-Achse mit gleicher v (Transf. in (x^0, x^1)-Ebene)

<u>"Boost"</u>



Beschreibung von O'.

IS: $(x^0 = ct, x^1 = vt = \frac{v}{c}x^0, 0, 0)$

IS': $(x^{0\prime} = ct', x^{1\prime} = 0, 0, 0)$

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & 0 & 0 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bedingung $g = \Lambda^T g \Lambda \rightarrow$

$$(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 = 1 \quad (1)$$
$$-(\Lambda^1_1)^2 + (\Lambda^0_1)^2 = -1 \quad (2)$$
$$\Lambda^0_0 \Lambda^0_1 - \Lambda^1_0 \Lambda^1_1 = 0 \quad (3)$$

Setze OBDA:

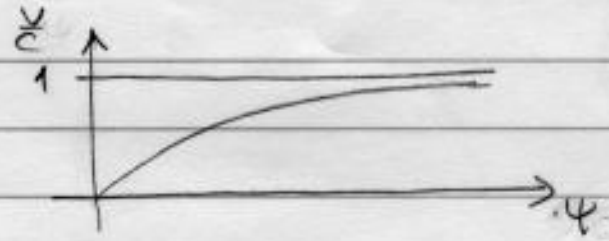
$$\Lambda^0_1 = -\sinh\varphi \overset{(1)}{\rightarrow} \Lambda^0_0 = \cosh\varphi$$
$$\Lambda^1_0 = -\sinh\varphi \overset{(2)}{\rightarrow} \Lambda^1_1 = \cosh\varphi$$
$$\varphi \overset{(3)}{=} \varphi$$

Anpassen:

$$x^{0\prime} = \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1$$
$$0 = x^{1\prime} = \Lambda^1_0 x^0 + \Lambda^1_1 x^1 = (\underbrace{\Lambda^1_0}_{-\sinh\varphi} + \frac{v}{c}\underbrace{\Lambda^1_1}_{\cosh\varphi}) x^0$$

$$\rightarrow \tanh\varphi = \frac{v}{c} \; ; \; \boxed{\varphi = \operatorname{arctanh}\frac{v}{c}}$$

Man nennt φ <u>Rapidität</u>, oft anstelle der Geschwindigkeit (oft auch η oder χ)



$-\infty < \psi < +\infty$

$-1 < \frac{v}{c} < +1$

Relativgesetz $v < c$!

Spez. LT:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi & 0 & 0 \\ -\sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

[Vergl. Rot. in $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$]

d.h. Metrik von M in durch hyperbol. Fkt. statt trigonometr. Fkt!

Andere Schreibweise: $\underline{\underline{\beta := \frac{v}{c}}}$

$$\tanh\psi = \beta, \quad \cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\psi}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} =: \gamma}}$$

$$\sinh\psi = \frac{\tanh\psi}{\sqrt{1-\tanh^2\psi}} = \beta\gamma$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

oder explizit:

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x^{1'} &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \end{aligned}$$

Rücktrafo: $\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g$

$$= \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & -\Lambda^1{}_0 & -\Lambda^2{}_0 & -\Lambda^3{}_0 \\ -\Lambda^0{}_1 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^3{}_1 \\ -\Lambda^0{}_2 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^3{}_2 \\ -\Lambda^0{}_3 & \Lambda^1{}_3 & \Lambda^2{}_3 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix}$$

wie in $\mathbb{R}^3$
$A^{-1} = A^T$

Für spezielle LT:

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi & 0 & 0 \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \Lambda(-\beta)$$

→ auch aus Rel. prinzip, da sich ja IS relativ zu IS mit $-\beta$ bewegt!

Nichtrel. Grenzfall: $\beta \ll 1$

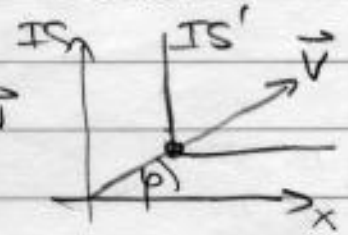
$\tanh\varphi \approx \sinh\varphi \approx \varphi = \beta$

$\cosh\varphi \approx \gamma \approx 1$

$x^{0\prime} = ct' = \gamma(x^0 - \beta x^1) \approx ct - \frac{v}{c}x \rightarrow t' \approx t$

$x^{1\prime} = \gamma(x^1 - \beta x^0) \approx x^1 - \frac{v}{c}ct \rightarrow x^{1\prime} = x - vt$ | GT

Beliebige LT durch Hintereinanderschalten von Spez. LT: z.B.



1) Drehung der x-Achse in Richtung $\vec{v}$

$$\Lambda_{12}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) "Boost" $\Lambda_{01}(\beta)$

3) Rückdrehung $\Lambda_{12}(-\varphi)$

$$\Lambda = \Lambda_{12}(-\varphi)\,\Lambda_{01}(\beta)\,\Lambda_{12}(\varphi)$$

Gruppeneigenschaften (Untersuchung der Ausführung)

i) inhom. Lorentzgruppe (LG) (Λ, b) (LT + Trafo)
bilden Gruppe.

ii) hom LG: $(b=0)$ Λ

iii) $(\det \Lambda)^2 = 1$ (aus $\Lambda^T g \Lambda = g$)
hier gewählt $\det \Lambda = 1$ eigentl. LT

(iv) $\Lambda^0_0 \geq +1$ orthochrone LT } ebenfalls aus
oder $\Lambda^0_0 \leq -1$

d.h. vier Klassen:

$L^{\uparrow\downarrow}_{\pm}$ $\leftarrow \Lambda^0_0$, $\leftarrow \det \Lambda$ entspr. Op: 1, P, T, PT

Metrische Eigenschaften:

hier gewählt:
(üblich) $g = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ flach, nicht euklid.

äquivalent: $g' = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

Andere Konvent.: Findet man, aber nicht mehr so üblich.

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4 = ict)$$

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

d.h. Quasi-Euklidische Metrik

$$g_{qe} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \Lambda_{qe}$ orthogonal $\Lambda^T \Lambda = 1$

Dann findet man für Boost in x_2-Richtung

$$\Lambda_{qe} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & \gamma & i\beta\gamma \\ & & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & \cosh\psi & i\sinh\psi \\ & & -i\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix}$$

$(\tanh\psi = \beta)$

auch schreibbar mit komplexem Winkel $\varphi = i\psi$

$$\cos\varphi = \cos i\psi = \cosh\psi$$
$$\sin\varphi = \sin i\psi = i\sinh\psi$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & \cos\varphi & \sin\varphi \\ & & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

d.h. wie normale Rotation.

Quasieuklid. Metrik in Spez. Rel. Theorie einfacher aber

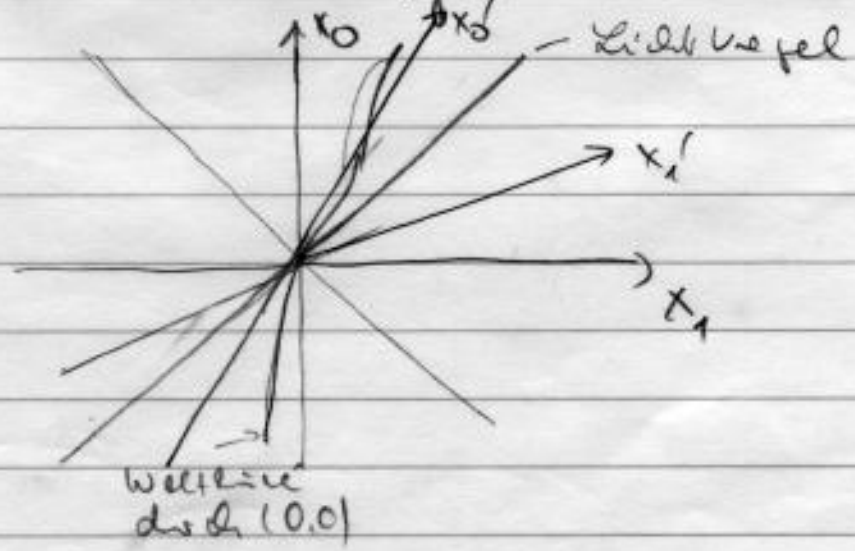
- indef. Metrik nicht verboten!
- nicht mehr möglich bei nicht-flacher Metrik
- komplex. Koord. kollid. in QM mit inhärenter Komplex. der Schröd. oder Dirac-Gl.

also: wir nicht verwenden.

(1819)

6.2 Längen und Zeiten

Minkowski-Diagramm beweist eigentlich



Geschw. addition:

Hintereinanderschalten von "boosts". z.B. in x_1-Richtung mit β_1 und β_2, bzw. $\beta_1 = \tanh\varphi_1$, $\beta_2 = \tanh\varphi_2$

$$\Lambda = \Lambda(\beta_2)\Lambda(\beta_1) = \begin{pmatrix} \cosh\varphi_2 & -\sinh\varphi_2 & 0 & \\ -\sinh\varphi_2 & \cosh\varphi_2 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\varphi_1 & -\sinh\varphi_1 & & \\ - & - & & \\ - & - & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(\varphi_1+\varphi_2) & -\sinh(\varphi_1+\varphi_2) & & \\ - & - & - & \\ & - & - & \end{pmatrix}$$

(mit Benutzung von Relat. hyperbol. Fkt.)

→ Rapidität additiv!

$$\boxed{\varphi = \varphi_1 + \varphi_2}$$

Umschreiben auf Geschwindigkeit:

$$\beta = \tanh\varphi = \tanh(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{\tanh\varphi_1 + \tanh\varphi_2}{1+\tanh\varphi_1\tanh\varphi_2}$$

$$\beta = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\cdot\beta_2} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}}$$

Interpret. als Gesch.-add.

IS'': Ruhesystem des MP

Gesch. in IS' sei v'

Rel. Gesch. IS' in IS sei v_{rel}.

Gesch. von MP in IS sei v:

$$v = \frac{v'+v_{rel}}{1+\frac{v' v_{rel}}{c^2}}$$

Grenzfälle:

i) $\frac{v_{rel}}{c} \ll 1$ $\quad v = v' + v_{rel}$ GT

ii) $\frac{v'}{c} \approx 1$ $\quad v = \frac{c+v_{rel}}{1+\frac{v_{rel}}{c}} = c$

Postl. (2)

Allg. Fall: Nicht parallel gesch.

Infinites. Ereignis in IS und IS': (β_{rel} in x_1-Richtung)

$$ds = (dx_0, dx_1, dx_1, dx_2)$$

$$ds' = (dx_0', dx_1' \ldots)$$

wobei $$dx_0 = \gamma(dx_0' + \underset{\beta_{rel}}{\beta} dx_1') = \gamma\Big(1 + \beta_{rel} \underbrace{\frac{dx_1'}{dx_0'}}_{\beta_1'}\Big) dx_0'$$

$$dx_1 = \gamma(dx_1' + \beta_{rel} dx_0') = \gamma(\beta_1' + \beta_{rel}) dx_0'$$

$$dx_2 = dx_2' \quad dx_3 = dx_3'$$

Geschw. in IS:

$$\beta_1 = \frac{dx_1}{dx_0} = \frac{\beta_1' + \beta_{rel}}{1 + \beta_1'\beta_{rel}} \rightarrow v_{\parallel} = \frac{v_1' + v_{rel}}{1 + \frac{v_1' v_{rel}}{c^2}} \quad \text{s.o.}$$

$$\beta_2 = \frac{dx_2}{dx_0} = \frac{\beta_2'}{\gamma(1 + \beta_1'\beta_{rel})}, \quad \text{d.h.} \quad v_{\perp} = \frac{v_{\perp}'}{\gamma\left(1 - \frac{v_1' v_{rel}}{c^2}\right)}$$

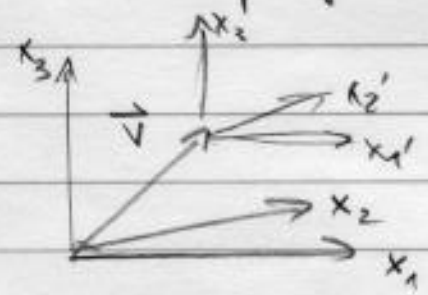
β_3 entsp.

Transf. von Geschw. kompliziert, da sich auch Zeitintervalle transformiert.

d.h. $\vec{v}$ sind nicht Komp. eines 4-Vektors (s. später)

Lorentztransform für beliebige Geschw. nachtrage:

$$\frac{\vec{v}}{c} = \vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$



$$\boxed{\Lambda(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_1\gamma & -\beta_2\gamma & -\beta_3\gamma \\ -\beta_1\gamma & & & \\ -\beta_2\gamma & & \delta_{ij} + \frac{\beta_i\beta_j}{\vec{\beta}^2}(\gamma-1) & \\ -\beta_3\gamma & & & \end{pmatrix}}$$

← Vlc

↑ Vlc

↑ 3-Tensor 2. Stufe, der sich auf spez LT reduz

z.B. $\vec{v} = (v_1, 0, 0)$, $\Lambda^1_1 = 1 + \frac{v_1^2}{v_1^2}(\gamma - 1) = \gamma$

$$\Lambda^2_2 = 1$$

explizit nachrechnen bis nach S. 179 (allerdings Vorzeichenschwierigkeit bei Nichtdiagonalen ??)

oder auch $\Lambda(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\vec{\beta}\gamma \\ -\vec{\beta}\gamma & 1 + \frac{\gamma-1}{v^2}\vec{v}^2 \end{pmatrix}$

Relativ zu (0,0) bewegtes Koord. sytem.

$x_0' = \gamma(x_0 - \beta x_1) \equiv 0 \rightarrow x_1'$-Achse $\quad x_0 = \beta x_1$

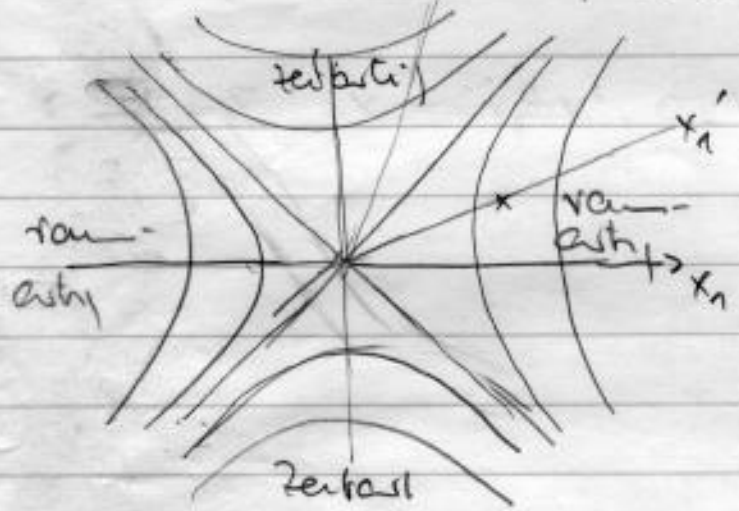
$x_1' = \gamma(x_1 - \beta x_0) \equiv 0 \rightarrow x_0'$-Achse $\quad x_0 = \frac{1}{\beta} x_1$

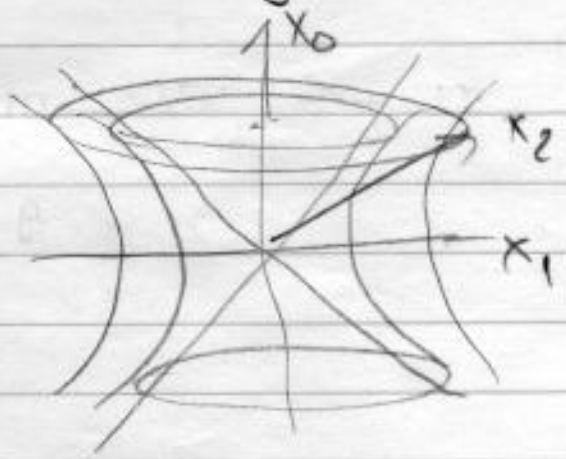
(d.h. Änderung des Winkels statt Rotation in $\mathbb{R}^3$)

Abstände $(x - x_{(0)})^2$ invariante Klassif.

z.B. $x_{(0)} = (0,0)$

$$x^2 = \begin{cases} > 0 & \text{zeitartig} \\ = 0 & \text{lichtartig} \\ < 0 & \text{raumartig} \end{cases}$$





→ Sei z.B. $x = (x_0, x_1, 0, 0)$ raumartig bzgl 0.
Dann exist. KS, sodaß gleichzeitig ($\beta = \frac{x_0}{x_1}$) und entsp. für zeitart. Ereignis, sodaß am gleichen Ort.
– aber für zeitart. Ereignis kein KS, sodaß gleichzeitig u.u.

→ Linien konst. Abstandes:
$x^2 = \text{const} = x_0^2 - x_1^2 \rightarrow$ Hyperbelschar
(Rot. sym. in anderen Dimensionen)