

Simulation polarisierter, mehrfach gestreuter LIDAR Rücksignale

Diplomarbeit in Physik bei
Prof. U. G. Opper
an der
Ludwig-Maximilians-Universität München

Vorgelegt von

Martin Kerscher

am 11. August 1994

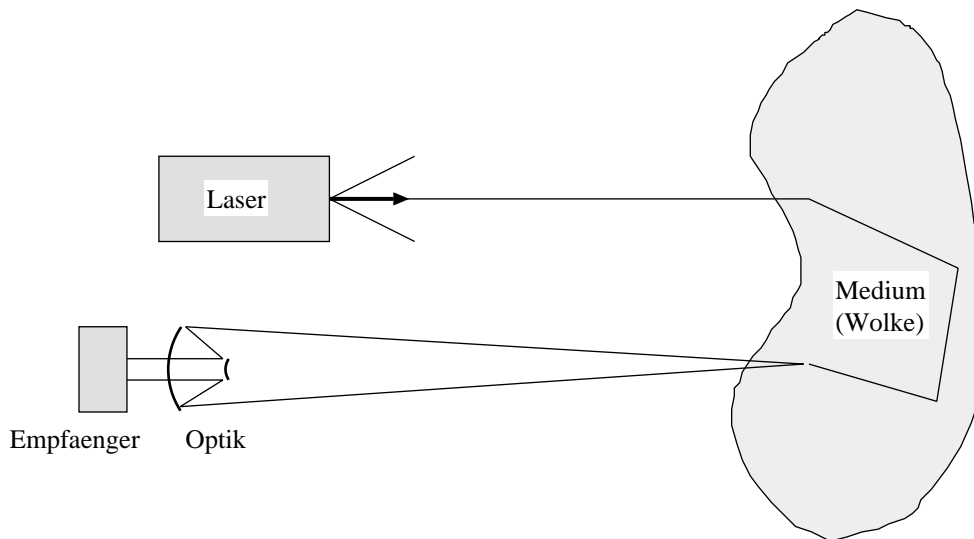
Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Übersicht	3
1. Einfachstreuung polarisierten Lichts	5
2. Der Streuprozeß für polarisiertes Licht	19
3. Die LIDAR-Gleichung für polarisiertes Licht	35
4. Charakterisierung der Extinktions- und Streuerverteilung	45
5. Der Simulationsalgorithmus	49
6. Ergebnisse von Simulationsrechnungen	55
7. Zusammenfassung und Ausblick.	65
8. Anhang	67
Symbolverzeichnis	75

Einleitung und Übersicht

Ein LIDAR besteht aus einem gepulsten Laser und einem Empfänger. Beide sind im monostatischen Fall am selben Ort und blicken in dieselbe Richtung auf ein Medium. Befinden sich der Laser und der Empfänger nicht am selben Ort, oder blicken sie in unterschiedliche Richtungen, so nennt man die Anordnung bistatisch (siehe Bild 0.1). Das zurückgestreute Signal wird zeitaufgelöst gemessen. In der Meteorologie werden mit einem LIDAR unter anderem Wolken und Aerosole untersucht. In vielen Situationen tritt hierbei Mehrfachstreuung auf.

Bild 0.1 : Schema einer (bistatischen) LIDAR Anordnung.



Im Rahmen dieser Diplomarbeit werden wir das stochastische Modell, wie es bei Ooppel et al. [21] und Noormohammadian [19] beschrieben wird, für die Mehrfachstreuung *polarisierten* Lichts verallgemeinern. Als Spezialfall werden wir die Streuung an sphärischen Teilchen (Mie Teilchen) behandeln. Dieses Modell dient als Grundlage für ein Programm zur Simulation von polarisierten, mehrfachgestreuten LIDAR Signalen (vgl. Kapitel 5 und 6).

Hier nun eine Übersicht der Kapitel:

- In Kapitel 1 *Einfachstreuung polarisierten Lichts* werden wir die physikalischen Grundlagen der Einfachstreuung polarisierten Lichts erläutern. Hierzu führen wir den Begriff des Stokes-Vektors ein. Wir diskutieren dessen Eigenschaft bei der Streuung an einem sphärischen Teilchen mittels Mueller-Matrizen. Mit diesen Ergebnissen leiten wir dann eine Phasenfunktion für polarisiertes Licht ab.
- In Kapitel 2 *Der Streuprozess für polarisiertes Licht* definieren wir den physikalischen Streuprozess, und zeigen die einfache Markoveigenschaft.
- In Kapitel 3 *Die LIDAR-Gleichung für polarisiertes Licht* definieren wir, was wir unter einem LIDAR verstehen wollen. Dann können wir mit Hilfe des in Kapitel 2 definierten Streuprozesses eine zeitabhängige und eine zeitunabhängige LIDAR-Gleichung für polarisiertes Licht angeben. Kapitel 2 und 3 sind unabhängig von der Annahme der Streuung an *sphärischen* Teilchen.
- In Kapitel 4 *Charakterisierung der Extinktions- und Streuverteilung* geben wir die in Kapitel 2 definierten Markov-Kerne explizit an, und erläutern die physikalische Bedeutung.
- In Kapitel 5 *Der Simulationsalgorithmus* diskutieren wir Verfahren, die zur Auswertung der LIDAR-Gleichung aus Kapitel 3 mit Hilfe eines Monte-Carlo Programmes benötigt wurden.
- In Kapitel 6 *Ergebnisse einer Simulationsrechnung* untersuchen wir die Ergebnisse einer Simulationsrechnungen mit den beschriebenen Verfahren aus Kapitel 5 in Bezug auf ihre physikalische Relevanz. Wir geben Gründe an, die für deren Richtigkeit sprechen. Zum Schluß vergleichen wir diese Rechnungen mit Meßergebnissen des DLR-Microlidars.

1. Einfachstreuung polarisierten Lichts

In diesem Kapitel werden wir zuerst die Beschreibung polarisierten Lichts mittels Stokes-Vektoren einführen, und dann deren Verhalten bei Einfachstreuung diskutieren. Am Ende des Kapitels werden wir die Phasenfunktion für polarisiertes Licht in Abhängigkeit von der Intensität des gestreuten polarisierten Lichts angeben.

Wenn es nicht ausdrücklich anders vermerkt ist, verwenden wir grundlegende Bezeichnungen, in diesem wie in den folgenden Kapiteln, in dem im Symbolverzeichnis angegebenen Sinne.

1.1. Definition und Bemerkung : (Stokes-Vektor)

Für die Beschreibung polarisierten Lichts werden oft, gerade im Bereich der Meteorologie, Stokes-Vektoren verwendet. Die physikalische Motivation für die Einführung der Stokes-Vektoren liegt darin, daß die zwei komplexen Felder, die im Rahmen der klassischen Elektrodynamik zur Beschreibung des elektromagnetischen Feldes benutzt werden, durch vier reelle Parameter ausgedrückt werden können, die sich alle durch Intensitäten, bzw. Differenzen von Intensitäten, also meßbaren Größen, darstellen lassen (siehe Bohren-Huffman [2], Seite 47ff, und Born-Wolf [3], Seite 554ff). Die Definition des Stokes-Vektors ist in der Literatur nicht einheitlich. Wir verwenden im folgenden die Definition nach Chandrasekhar [4] bzw. Deirmendjian [5].

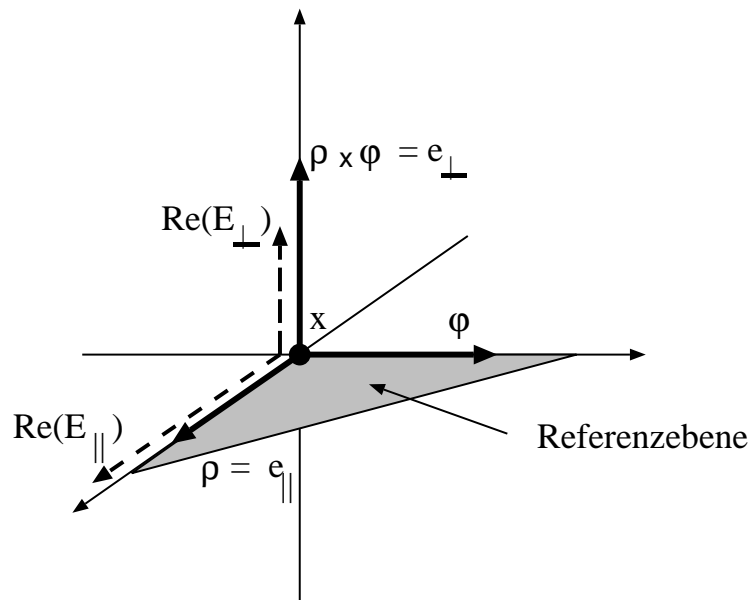
Wir betrachten, da wir in einem LIDAR einen Laser als Lichtquelle benutzen, eine monochromatische ebene Welle, beschrieben durch das zeitabhängige komplexwertige Vektorfeld $E : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^3$, mit Ausbreitungsrichtung $\varphi \in S^2$ dargestellt bezüglich dem lokalen rechtwinkligen Koordinatensystem $e_{\parallel} := \rho \in S^2$, mit $\rho \perp \varphi$, und $e_{\perp} := \rho \times \varphi \in S^2$ am Ort x (siehe Bild 1.1).

Wie im Symbolverzeichnis angegeben beschreibe \times das Kreuzprodukt in \mathbb{R}^3 , ω sei die Kreisfrequenz und i die imaginäre Einheit. Wir definieren:

$$E(x) := E_0(x) \exp(-i\omega t)$$

Wobei $E_0(x) := E_{\parallel}(x)e_{\parallel}(x) + E_{\perp}(x)e_{\perp}(x)$ mit den komplexen Feldern $E_{\parallel}, E_{\perp} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ und den reellen Vektorfeldern $e_{\parallel}, e_{\perp} : \mathbb{R}^3 \rightarrow S^2$. Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ legen $e_{\perp}(x), e_{\parallel}(x)$ und $e_{\perp}(x) \times e_{\parallel}(x)$ ein durch ρ und φ bestimmtes lokales orthogonales Koordinatensystem fest. Die durch φ und ρ aufgespannte Ebene bezeichnen wir als Referenzebene, ρ bezeichnen wir als Referenzvektor.

Bild 1.1 : Das lokale Koordinatensystem zur Definition des Stokes Vektors für ein Feld E mit Ausbreitungsrichtung φ und Referenzvektor ρ . Eingezeichnet sind die Realteile der Feldern E_{\parallel} und E_{\perp} am Ort x .



Wir definieren nun den Stokes-Vektor am Ort x als Spaltenvektor $ST(x)$ mit den folgenden vier reellen Größen. Mit $*$ bezeichnen wir die komplexe Konjugation.

$$ST(x) := \left(I_{\parallel}(x), I_{\perp}(x), U(x), V(x) \right)^T \quad \text{wobei}$$

$$I_{\parallel}(x) := E_{\parallel}(x)E_{\parallel}^*(x)$$

$$I_{\perp}(x) := E_{\perp}(x)E_{\perp}^*(x)$$

$$U(x) := E_{\parallel}(x)E_{\perp}^*(x) + E_{\perp}(x)E_{\parallel}^*(x)$$

$$V(x) := i(E_{\parallel}(x)E_{\perp}^*(x) - E_{\perp}(x)E_{\parallel}^*(x))$$

Die Intensität $I(x) := I_{\parallel}(x) + I_{\perp}(x)$ ist die Summe der Intensität des parallel polarisierten Lichts I_{\parallel} und der Intensität des senkrecht polarisierten Lichts I_{\perp} . Eine ausführliche physikalische Motivation für diese Definitionen wird bei Bohren-Huffman [2], Seite 46ff, und auch bei Born-Wolf [3], Seite 554ff, gegeben.

Oft wird in der Literatur auch folgende äquivalente Kombination als Stokes-Vektor verwendet (siehe Bohren-Huffman [2], van de Hulst [10] und Born-Wolf [3]), mit

$$\left(I(x), Q(x), U(x), V(x) \right)^T \quad \text{wobei}$$

$$I(x) := I_{\parallel}(x) + I_{\perp}(x) \quad \text{und} \quad Q(x) := I_{\parallel}(x) - I_{\perp}(x).$$

Der normierte Stokes-Vektor sei folgendermaßen definiert:

$$st(x) := \begin{cases} \left(i_{\parallel}(x), i_{\perp}(x), u(x), v(x) \right)^T, & \text{falls } I(x) \neq 0, \\ (0, 0, 0, 0) & \text{falls } I(x) = 0, \end{cases}$$

wobei

$$i_{\parallel}(x) := \frac{I_{\parallel}(x)}{I(x)}, \quad i_{\perp}(x) := \frac{I_{\perp}(x)}{I(x)}, \quad u(x) := \frac{U(x)}{I(x)}, \quad v(x) := \frac{V(x)}{I(x)}.$$

Für $I(x) \neq 0$ gilt dann $i_{\parallel}(x) + i_{\perp}(x) = 1$.

1.2. Bemerkung : (Photonenbild)

Der normierte Stokes-Vektor st läßt sich als Zustandsvektor eines Photons verstehen, der dessen Polarisationszustand beschreibt. Zwischen zwei Streuungen, bzw. zwischen Streuung und Absorption, ändert sich der Polarisationszustand nicht. Im stochastischen Modell wird dann das Photon zwischen zwei Streuungen einen Stokes-Vektor $st(x) = st$ tragen. Dies berechtigt uns dazu den Stokes-Vektor im

stochastischen Modell unabhängig vom Ort x anzugeben. Wir betrachten also ein „polarisiertes Photon“, das seinen Polarisationszustand zwischen den Streuungen, b.z.w. zwischen Streuung und Absorption, behält. Ein „polarisiertes Photon“ wird durch das Tupel (x, φ, st, ρ) beschrieben, wobei x den Ort, φ die Flugrichtung, st den normierten Stokes-Vektor und ρ den Referenzvektor, der mit φ zusammen die Referenzebene (ρ, φ) aufspannt, beschreibt. Die Intensität des Strahlungsflusses ist in diesem Bild proportional zur Anzahl der Photonen. Der Stokes-Vektor des gesamten Strahlungsflusses ergibt sich durch (gewichtete) Summation der Stokes-Vektoren (einzelner Photonen). Zwei Stokes-Vektoren können, falls sie unabhängige Felder beschreiben, wie folgt addiert werden (siehe Born-Wolf [3], Seite 555):

$$ST + ST' = (I_{\parallel} + I'_{\parallel}, I_{\perp} + I'_{\perp}, U + U', V + V')^T$$

Für eine ausführlichere Beschreibung dieses Bildes siehe Krichbaumer [14], Seite 197.

1.3. Definition und Bemerkung : (Menge der normierten Stokes-Vektoren)

Wir definieren nun die Menge der normierten Stokes-Vektoren:

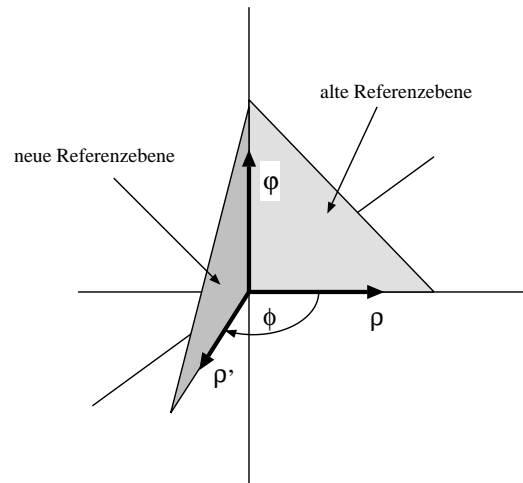
$$Pol := \{(i_{\parallel}, i_{\perp}, u, v) \in \mathbb{R}^4 : i_{\parallel}, i_{\perp} \in [0, 1], u, v \in [-1, 1], \\ i_{\parallel} + i_{\perp} = 1, 4i_{\parallel}i_{\perp} = u^2 + v^2\} \cup \{(0, 0, 0, 0)\}$$

Die letzte Bedingung in Pol folgt aus der Eigenschaft von Stokes-Vektoren für monochromatisches Licht $(I_{\parallel} + I_{\perp})^2 = (I_{\parallel} - I_{\perp})^2 + U^2 + V^2$ (vgl. Bohren-Huffman [2] Seite 51). Jeder Stokes-Vektor aus Pol , ist ein normierter Stokes-Vektor nach Definition 1.1..

1.4. Definition und Bemerkung : (Drehung eines Stokes-Vektors)

Sei $st \in Pol$ bezüglich der Referenzebene (ρ, φ) . Rotieren wir nun die Referenzebene (ρ, φ) um φ linkshändig (also in Richtung von φ blickend gegen den Uhrzeigersinn) mit dem Winkel $\phi \in [0, 2\pi]$, so berechnen wir den neuen Stokes-Vektor st_{rot} , dargestellt bezüglich der neuen Referenzebene (ρ', φ) , mit $\rho' \in S^2$ und $\rho' \perp \varphi$, mit der folgenden linearen Transformation aus dem ursprünglichen Stokes-Vektor st , wie sie bei Chandrasekhar [4], Seite 35, angegeben wird. (Für die Definition von ϕ und ρ' siehe Bild 1.2 oder Bemerkung 1.10.).

Bild 1.2 : Rotation der Referenzebene



$$st_{rot} := \mathcal{L}(\phi) \cdot st \quad \text{mit}$$

$$\mathcal{L}(\phi) := \begin{pmatrix} \cos^2(\phi) & \sin^2(\phi) & \frac{1}{2} \sin(2\phi) & 0 \\ \sin^2(\phi) & \cos^2(\phi) & -\frac{1}{2} \sin(2\phi) & 0 \\ -\sin(2\phi) & \sin(2\phi) & \cos(2\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir erkennen, daß $\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(\phi + \pi)$ gilt, d.h. eine Rotation der Referenzebene um 180 Grad hat keinen Einfluß auf die Darstellung der Rotationsmatrix und der Stokes-Vektoren. Wir müssen also für die Berechnung des rotierten Stokes-Vektors den Winkel zwischen den Referenzebenen nur modulo π bestimmen. Die Orientierung der Referenzebene muß jedoch erhalten bleiben, da die Komponenten u und v sonst das Vorzeichen wechseln würden. Es gilt weiterhin $st_{rot} \in Pol$, das heißt die Normierung $i_{\parallel,rot} + i_{\perp,rot} = 1$ des Stokes-Vektors bleibt erhalten, was auch physikalisch klar ist, da nur das zugrunde liegende E -Feld bezüglich eines neuen lokalen Koordinatensystems dargestellt wird und kein physikalischer Prozeß, der die Intensität I verändert, stattfindet. Die Abbildung $\mathcal{L} : [0, 2\pi] \times Pol \rightarrow Pol$ ist $\mathfrak{B}([0, 2\pi] \times Pol) \text{-}\mathfrak{B}(Pol)$ meßbar und beschränkt.

1.5. Definition und Bemerkung : (Streuung an einem sphärischen Teilchen)

Die Streuung polarisierten Lichts an einem sphärischen (Mie-) Teilchen läßt sich durch eine lineare Transformation des Stoke-Vektors mit der Matrix $\mathcal{M}(x, \theta)$ am

Ort $x \in \mathbb{R}^3$ und mit dem Winkel $\theta \in [0, \pi]$ beschreiben (siehe Deirmendjian [5] Seite 69ff).

$$ST' := \mathcal{M}(x, \theta) \cdot st_{rot} \quad \text{wobei}$$

$$\mathcal{M}(x, \theta) := \begin{pmatrix} m_1(x, \theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2(x, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3(x, \theta) & -m_4(x, \theta) \\ 0 & 0 & m_4(x, \theta) & m_3(x, \theta) \end{pmatrix}$$

Die Gestalt von \mathcal{M} sowie die Eigenschaften der Abbildungen $(m_j)_{j=1, \dots, 4}$ können wir im Rahmen der Mie-Theorie angeben. Dies wird in Bemerkung 8.5. näher erläutert. Wir können \mathcal{M} für jedes Medium und die notwendige Winkelauflösung numerisch bestimmen.

Der Winkel θ ist der Elevationswinkel, d.h. der Winkel zwischen der Ausbreitungsrichtung vor und nach der Streuung (siehe Bild 1.3).

Der Stokes-Vektor ST' ist hierbei bezüglich derselben Referenzebene wie $st_{rot} \in Pol$ dargestellt. Er ist im allgemeinen nicht mehr normiert.

$\mathcal{M}(x, \theta)$ wird oft als die Mueller-Matrix für das Streuzentrum (Mie-Teilchen) am Ort x bezeichnet. Wir können also Streuung an unterschiedlichen Mie-Teilchen (unterschiedliche Größe oder Größenverteilung, unterschiedlicher Brechungsindex, etc. an verschiedenen Orten x) im stochastischen Prozeß betrachten. Für die Normierung der ersten beiden Elemente der Mueller-Matrix gilt (siehe Deirmendjian [5], Seite 73):

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} (m_1(x, \theta) + m_2(x, \theta)) \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi,$$

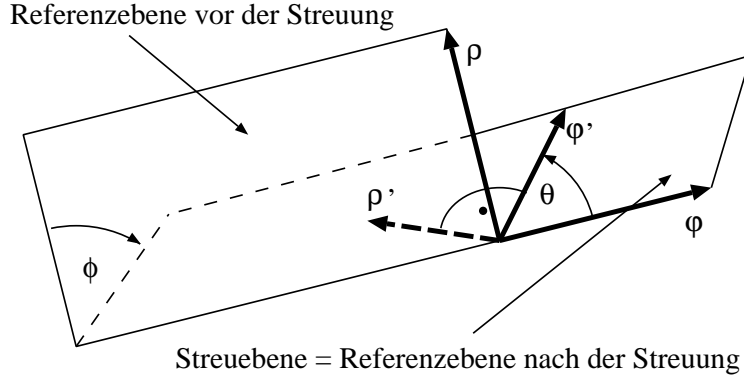
somit folgt

$$\int_0^\pi \frac{1}{2} (m_1(x, \theta) + m_2(x, \theta)) \sin(\theta) d\theta = 2.$$

Die gesamte Streuung läßt sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} ST' &:= \mathcal{M}(x, \theta) \cdot L(\phi) \cdot st \\ &= \begin{pmatrix} m_1(x, \theta) \cos^2(\phi) & m_1(x, \theta) \sin^2(\phi) & \frac{1}{2} m_1(x, \theta) \sin(2\phi) & 0 \\ m_2(x, \theta) \sin^2(\phi) & m_2(x, \theta) \cos^2(\phi) & -\frac{1}{2} m_2(x, \theta) \sin(2\phi) & 0 \\ -m_3(x, \theta) \sin(2\phi) & m_3(x, \theta) \sin(2\phi) & m_3(x, \theta) \cos(2\phi) & m_4(x, \theta) \\ m_4(x, \theta) \sin(2\phi) & -m_4(x, \theta) \sin(2\phi) & -m_4(x, \theta) \cos(2\phi) & m_3(x, \theta) \end{pmatrix} \cdot st \end{aligned}$$

Bild 1.3 : Die Geometrie für die polarisierten Streuung am Ort x mit Einfallrichtung φ und Referenzvektor ρ vor der Streuung, und Streurichtung φ' und Referenzvektor ρ' nach der Streuung.



Wir stellen also st zuerst bezüglich der Ebene, aufgespannt durch φ (Ausbreitungsrichtung vor der Streuung) und $\varphi' \in S^2$ (neue Ausbreitungsrichtung) dar. Dies geschieht mit der Rotation $\mathcal{L}(\phi)$ nach Bemerkung 1.4.. Die Ebene (ρ', φ') ist durch die Ebene (φ, φ') gegeben; ρ' mit $\rho' \perp \varphi$ und $\rho' \perp \varphi'$ liegt in der Ebene (φ, φ') . Dann führen wir die Transformation mit der Mueller-Matrix durch (siehe Bild 1.3).

Für die Iteration des Streuvorgang, wie im stochastischen Modell notwendig, benötigen wir, analog zum nicht polarisierten Fall, die Phasenfunktion, die uns dann nach Bemerkung 4.4. die Streuerverteilung liefert.

1.6. Bemerkung : (Intensität nach der Streuung)

Die Intensität ist nach Bemerkung 1.1. gegeben durch

$$I'(x, \theta, \phi, st) = (I'_{\parallel} + I'_{\perp})(x, \theta, \phi, st)$$

I'_{\parallel} und I'_{\perp} sind die Komponenten des gestreuten Stokes-Vektor $ST' = (I'_{\parallel}, I'_{\perp}, U', V')^T = \mathcal{M}(x, \theta) \cdot \mathcal{L}(\phi) \cdot st$ (siehe Bemerkung 1.5.). Es seien $x, \varphi, \rho, \varphi'$ und der einfallende normierte Stokes-Vektor $st = (i_{\parallel}, i_{\perp}, u, v)^T$ gegeben, und nach 1.10. sei $\theta = \theta(\varphi, \varphi')$, $\phi = \phi(\varphi, \rho, \varphi')$. Es gilt dann:

$$I'(x, \theta, \phi, st) =$$

$$= i_{\parallel} m_1(x, \theta) \cos^2(\phi) + i_{\perp} m_1(x, \theta) \sin^2(\phi) + u \frac{1}{2} m_1(x, \theta) \sin(2\phi) + \\ + i_{\parallel} m_2(x, \theta) \sin^2(\phi) + i_{\perp} m_2(x, \theta) \cos^2(\phi) - u \frac{1}{2} m_2(x, \theta) \sin(2\phi)$$

$$= m_1(x, \theta) (i_{\parallel} \cos^2(\phi) + i_{\perp} \sin^2(\phi)) + m_2(x, \theta) (i_{\parallel} \sin^2(\phi) + i_{\perp} \cos^2(\phi)) + \\ + (m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)) u \frac{1}{2} \sin(2\phi).$$

Mit der Normierung des einfallenden Stokes-Vektors $i_{\parallel} + i_{\perp} = 1$ folgt

$$I'(x, \theta, \phi, st) = \\ = m_1(x, \theta) [\sin^2(\phi) + i_{\parallel} (\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi))] + m_2(x, \theta) [\cos^2(\phi) + \\ + i_{\parallel} (\sin^2(\phi) - \cos^2(\phi))] + (m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)) u \frac{1}{2} \sin(2\phi).$$

Einsetzen von $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)$ liefert

$$I'(x, \theta, \phi, st) = \\ = m_1(x, \theta) (\sin^2(\phi) + i_{\parallel} \cos(2\phi)) + m_2(x, \theta) (\cos^2(\phi) - i_{\parallel} \cos(2\phi)) + \\ + (m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)) u \frac{1}{2} \sin(2\phi),$$

und mit $\cos^2(\phi) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\phi))$ und $\sin^2(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\phi))$ folgt

$$I'(x, \theta, \phi, st) = \\ = m_1(x, \theta) (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\phi) + i_{\parallel} \cos(2\phi)) + \\ + m_2(x, \theta) (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\phi) - i_{\parallel} \cos(2\phi)) + \\ + (m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)) u \frac{1}{2} \sin(2\phi) \\ = \frac{1}{2} (m_1(x, \theta) + m_2(x, \theta)) - \frac{1}{2} (m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)) \cos(2\phi) + \\ + (m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)) i_{\parallel} \cos(2\phi) + (m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)) u \frac{1}{2} \sin(2\phi) \\ = \frac{1}{2} (m_1(x, \theta) + m_2(x, \theta)) + \frac{1}{2} (m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)) \left((2i_{\parallel} - 1) \cos(2\phi) + u \sin(2\phi) \right).$$

Es gilt nach der Normierungsbedingung für die Mueller-Matrix \mathcal{M} (vgl. 1.5.)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I'(x, \theta, \phi, st) \sin(\theta) d\theta d\phi = \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (m_1(x, \theta) + m_2(x, \theta)) \sin(\theta) d\theta d\phi + \\ + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} (m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)) ((2i_{\parallel} - 1) \cos(2\phi) + u \sin(2\phi)) \right) \sin(\theta) d\theta d\phi \\ = 4\pi.$$

1.7. Definition und Bemerkung : (Phasenfunktion für polarisiertes Licht)

Die Phasenfunktion ist im Fernfeld gegeben durch die Intensität der Strahlung nach der Streuung am Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ (siehe z.B. Krichbaumer [14] Seite 197). Wir definieren nun die Phasenfunktion für polarisiertes Licht:

$$\begin{aligned}
 ph_{pol} &: \mathbb{R}^3 \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \times Pol \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad \text{mit} \\
 ph_{pol}(x, \theta, \phi, st) &:= \frac{1}{4\pi} I'(x, \theta, \phi, st) = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2}(m_1(x, \theta) + m_2(x, \theta)) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}(m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)) \left((2i_{\parallel} - 1) \cos(2\phi) + u \sin(2\phi) \right) \right]
 \end{aligned}$$

Die Phasenfunktion ph_{pol} ist offensichtlich eine $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^3 \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \times Pol) - \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$ meßbare, beschränkte Abbildung, da die Abbildungen m_1 und m_2 , $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^3 \times [0, \pi]) - \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$ -meßbar und beschränkt sind (siehe im Anhang Bemerkung 8.5.).

1.8. Definition und Bemerkung :

Um den Streuvorgang im Sinne des stochastischen Modells iterieren zu können, normieren wir ST' und erhalten den normierten gestreuten Stokes-Vektor st' :

$$st' := N(x, \theta, \phi, st) \cdot ST' = N(x, \theta, \phi, st) \cdot \mathcal{M}(x, \theta) \cdot \mathcal{L}(\phi) \cdot st$$

$$\text{wobei } N : \mathbb{R}^3 \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \times Pol \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad \text{mit}$$

$$N(x, \theta, \phi, st) := \begin{cases} \frac{1}{I'(x, \theta, \phi, st)}, & \text{falls } I'(x, \theta, \phi, st) \neq 0, \\ 0, & \text{falls } I'(x, \theta, \phi, st) = 0. \end{cases}$$

$I'(x, \theta, \phi, st)$ ist die Intensität des Stokes-Vektors ST' nach der Streuung am Ort x mit einfallendem normierten Stokes-Vektor st und den Streuwinkeln θ und ϕ ist (siehe auch 1.7.). Die Multiplikation des Stokes-Vektors mit einem Skalar ist komponentenweise zu verstehen. Mit dieser Konstruktion bleibt für $I'(x, \theta, \phi, st) \neq 0$ die Normierung von st' , $i'_{\parallel} + i'_{\perp} = 1$, erhalten und es gilt $st' \in Pol$.

1.9. Lemma :

Wir stellen folgende Bedingungen an \mathcal{M} . Eine (zum Teil physikalische) Begründung für diese Bedingungen wird in Bemerkung 8.5. in Anhang gegeben. Es sei

1. m_j für $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ eine $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^3 \times [0, \pi]) - \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -meßbare und beschränkte Abbildung, und

2. für $x \in \mathbb{R}^3$ und $\theta \in [0, \pi]$ gelte $m_1(x, \theta), m_2(x, \theta) \geq 0$.

Dann ist $N \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{L}$ eine $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^3 \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \times Pol)$ - $\mathfrak{B}(Pol)$ -meßbare Abbildung.

Beweis :

Wir betrachten dazu die einzelnen Faktoren.

- Mit Bedingung 1 und Bedingung 2 ist die Abbildung N wohldefiniert sowie $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^3 \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \times Pol)$ - $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$ -meßbar.
- Nach Bemerkung 1.5. und Bedingung 1 ist \mathcal{M} komponentenweise $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^3 \times [0, \pi] \times [0, 2\pi])$ - $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -meßbar und beschränkt, somit ist dann $N \cdot \mathcal{M}$, nach Konstruktion in 1.5. $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^3 \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \times Pol)$ - $\mathfrak{B}(Pol)$ -meßbar.
- \mathcal{L} ist nach Definition 1.4. $\mathfrak{B}([0, 2\pi] \times Pol)$ - $\mathfrak{B}(Pol)$ -meßbar.

Damit ist auch die Meßbarkeit für das Produkt gezeigt. ■

1.10. Definition und Bemerkung : (Geometrie der Streuung)

Im stochastischen Prozeß müssen wir bei gegebener Richtung φ' nach der Streuung nicht nur den Stokes-Vektor rotieren und streuen, sondern auch noch die Referenzebene nach der Streuung neu berechnen. Hierzu bestimmen wir den Referenzvektor $\rho' \in S^2$ mit $\rho' \perp \varphi'$ nach der Streuung aus der Einfallrichtung φ und dem einfallenden Referenzvektor ρ , wobei $\rho \perp \varphi$ gilt.

Im folgenden werden wir sowohl die Funktionen als auch die entsprechenden Variablen (Winkel) mit θ und ϕ bezeichnen.

Wir definieren:

$$\begin{aligned} \theta : S^2 \times S^2 &\rightarrow [0, \pi] \quad \text{mit} \\ \theta(\varphi, \varphi') &:= \arccos(\langle \varphi, \varphi' \rangle). \end{aligned}$$

$\theta(\cdot)$ liefert den Winkel zwischen der einfallenden Richtung φ und der ausfallenden Richtung φ' des Photons (siehe Bild 1.3). Weiterhin definieren wir:

$$\phi : S^2 \times S^2 \times S^2 \rightarrow [0, 2\pi[\text{ mit}$$

$$\phi(\varphi, \rho, \varphi') := \begin{cases} \arccos \left(\langle \varphi \times \rho, \frac{\varphi \times \varphi'}{\|\varphi \times \varphi'\|} \rangle \right), & \text{falls } \langle \varphi, \varphi' \rangle \neq 0, \varphi \perp \rho \\ & \text{und } \|\rho - \frac{\varphi \times \varphi'}{\|\varphi \times \varphi'\|}\| < \sqrt{2}, \\ \pi + \arccos \left(\langle \varphi \times \rho, \frac{\varphi \times \varphi'}{\|\varphi \times \varphi'\|} \rangle \right), & \text{falls } \langle \varphi, \varphi' \rangle \neq 0, \varphi \perp \rho \\ & \text{und } \|\rho - \frac{\varphi \times \varphi'}{\|\varphi \times \varphi'\|}\| \geq \sqrt{2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\phi(\cdot)$ liefert den Winkel ϕ zwischen der Referenzebene des Photons vor der Streuung, aufgespannt durch φ und ρ , und der Streuebene (der Referenzebene nach der Streuung), aufgespannt durch φ und φ' , b.z.w. ρ' und φ' (siehe Bild 1.3).

Wir können nun zwei Rotationen $Rot'_1, Rot'_2 : S^2 \times S^2 \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow SO(3)$ angeben (wir machen im Rahmen dieser Arbeit keinen Unterschied zwischen der (hier) 3-dimensionalen reellen Matrixdarstellung der $SO(3)$ und der Gruppe $SO(3)$ an sich), so daß gilt:

$$\begin{aligned} \varphi' &= Rot'_1(\varphi, \rho, \theta, \phi) \cdot \varphi \quad \text{und} \\ \rho' &= Rot'_2(\varphi, \rho, \theta, \phi) \cdot \rho. \end{aligned}$$

Durch die Einschränkung auf Darstellungen der $SO(3)$ bleibt die Orientierung der Referenzebene, wie in Bemerkung 1.4. gefordert, bei diesen Transformationen erhalten.

Die explizite Darstellung der zwei Rotationen wird gleich anschließend in 1.11. angegeben.

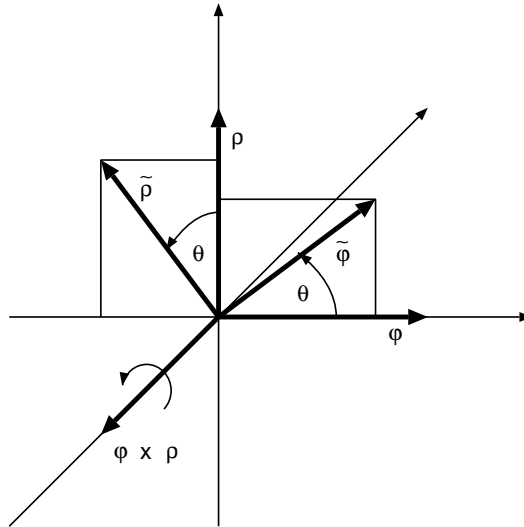
Mit den Abbildungen $\theta(\cdot)$ und $\phi(\cdot)$ definieren wir die zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} Rot_1, Rot_2 &: S^2 \times S^2 \times S^2 \rightarrow SO(3) \quad \text{mit} \\ Rot_1(\varphi, \rho, \varphi') &:= Rot'_1(\varphi, \rho, \theta(\varphi, \varphi'), \phi(\varphi, \rho, \varphi')) \quad \text{und} \\ Rot_2(\varphi, \rho, \varphi') &:= Rot'_2(\varphi, \rho, \theta(\varphi, \varphi'), \phi(\varphi, \rho, \varphi')). \end{aligned}$$

1.11. Definition und Bemerkung : (Drehung von φ und ρ)

Wir werden in diesem Abschnitt die Drehungen Rot'_1 und Rot'_2 (siehe Definition 1.10.) von φ und ρ bei gegebenem θ und ϕ explizit angeben.

Bild 1.4 : Die Rotation der Vektoren φ und ρ um θ



Eine Drehung $O_{\vec{u}}(\beta)$ eines Vektors $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ rechtshändig mit Winkel β um die Achse $\vec{u} \in S^2$ läßt sich wie folgt parametrisieren:

$$O_{\vec{u}}(\beta) \cdot \vec{v} := \vec{v} \cos \beta - \vec{u} \times \vec{v} \sin \beta + (1 - \cos \beta) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u}$$

Jedes Element der $SO(3)$ läßt sich so darstellen, und jede solche Parametrisierung ist eine Darstellung eines Elements der $SO(3)$. (Beweis siehe Scheck [24] Seite 76.)

Wir betrachten nun die Abfolge der Drehungen, die nötig sind φ und ρ bei gegebenem θ und ϕ in φ' und ρ' (siehe Bild 1.3) zu transformieren.

- Wir drehen zuerst die Flugrichtung φ und den Referenzvektor ρ um den Winkel θ mit dem Vektor $\varphi \times \rho$ als Drehachse. Dabei sei nach Bild 1.4

$$\tilde{\varphi} := O_{\varphi \times \rho}(\theta) \cdot \varphi \quad \text{und}$$

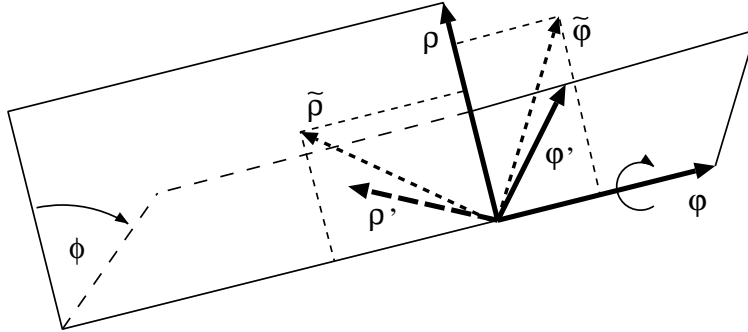
$$\tilde{\rho} := O_{\varphi \times \rho}(\theta) \cdot \rho.$$

- Dann drehen wir $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\rho}$ um den Winkel $-\phi$ um die Flugrichtung φ , siehe Bild 1.5

$$\varphi' := O_{\varphi}(-\phi) \cdot \tilde{\varphi}$$

$$\rho' := O_{\varphi}(-\phi) \cdot \tilde{\rho},$$

Bild 1.5 : Die Rotation der Vektoren $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\rho}$ um ϕ



Die Drehungen Rot'_1 und Rot'_2 lassen sich nun explizit wie folgt schreiben

$$Rot'_1(\varphi, \rho, \theta, \phi) = O_{\varphi \times \rho}(\theta) \cdot O_{\varphi}(-\phi)$$

$$Rot'_2(\varphi, \rho, \theta, \phi) = O_{\varphi \times \rho}(\theta) \cdot O_{\varphi}(-\phi).$$

Beide sind Darstellungen der $SO(3)$ wie in Bemerkung 1.10. gefordert.

Rot'_1 und Rot'_2 sind nach Konstruktion $\mathfrak{B}(S^2 \times S^2 \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \times S^2)$ - $\mathfrak{B}(S^2)$ -meßbar. Ebenfalls sind dann mit der Definition von $\theta(\cdot)$ und $\phi(\cdot)$ die Abbildungen Rot_1 und Rot_2 , $\mathfrak{B}(S^2 \times S^2 \times S^2 \times S^2)$ - $\mathfrak{B}(S^2)$ -meßbar.

2. Der Streuprozess für polarisiertes Licht

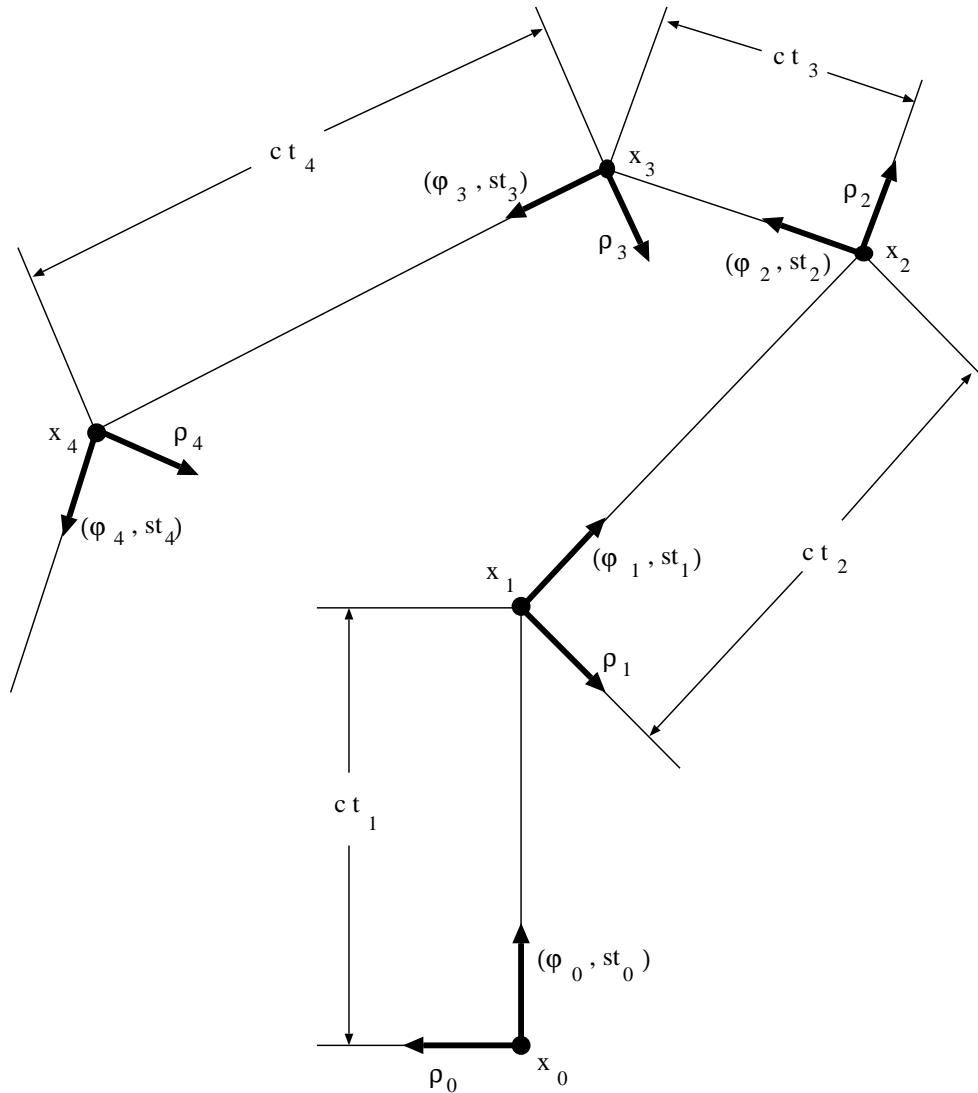
In diesem Paragraphen werden wir ein stochastisches Modell darstellen, welches den Prozeß der mehrfachen Streuung von polarisiertem Licht an atmosphärischen Teilchen beschreiben soll (vgl. Oppel et al. [21], § 4 b.z.w. Noormohammadian [19]). Dieser Prozeß kann auf kanonische Weise in elementare Streuprozesse, wie sie in Kapitel 1 beschrieben werden, zerlegt werden, die ihrerseits den Prozeß der multiplen Streuung eines Photons oder eines monochromatischen kollimierten Strahls von Photonen beschreiben. Wir werden zeigen, daß der dazugehörige Orts-Richtungsprozeß, der den n -ten Streuort bzw. die n -te Streurichtung beschreibt, ein Markovprozeß ist.

2.1. Motivation : (Physikalischer Streuprozess)

Wir nehmen in unserem Modell an, daß wir Licht durch Photonen beschreiben können, die an atmosphärischen Partikeln z.B. Moleküle, Eiskristalle, Wassertröpfchen, Staubteilchen oder an Latexkügelchen einer Latexemulsion gestreut werden und sich zwischen zwei Streupunkten geradlinig fortbewegen. Es gehen hierbei mehrere Hypothesen („single particle“, „independent scattering“, „far field“) ein, die bei Oppel et al. [21], § 2 näher erläutert werden.

Wir wollen die zugrundeliegende Idee des stochastischen Modells für polarisiertes Licht kurz beschreiben (vgl. Bild 2.1), und betrachten hierzu ein Photon, welches in einer bestimmten Richtung $\varphi_0 \in S^2$ von einem gegebenen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ zu einer Startzeit t_0 mit dem normierten Stokes-Vektor $st_0 \in Pol$ starten möge. Da ein Stokes-Vektor immer nur bezüglich einer Referenzebene angegeben werden kann, benötigen wir noch einen Referenzvektor $\rho_0 \in S^2$ mit $\rho_0 \perp \varphi_0$, der dann mit φ_0 die Referenzebene aufspannt. Das Tupel $\omega_0 := (x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0)$ beschreibt einen LIDAR-Sender, mit Standort im Punkt x_0 , der einen exakt kollimierten Sendestrahl in Richtung φ_0 aussendet, mit einer durch den Stokes-Vektor st_0 bezüglich der Referenzebene (ρ_0, φ_0) gegebenen Polarisation. Dieses Photon bewege sich mit konstanter

Bild 2.1 : Der Pfad eines mehrfach gestreuten Teilchens, das im Punkt x_0 in Richtung φ_0 mit Stokes-Vektor st_0 und Referenzvektor ρ_0 gestartet ist.



Geschwindigkeit c , d.h. der Lichtgeschwindigkeit im jeweiligen Medium, entlang des von x_0 ausgehenden und in Richtung φ_0 zeigenden Halbstrahls.

Nach einer Zeit $\omega_1 := t_1$ werde es zum ersten Mal im Punkt $x_{(1)} := x_0 + ct_1\varphi_0$ durch ein Teilchen in eine Richtung φ_1 gestreut oder absorbiert. Im Fall der Streuung erhält es einen neuen Stokes-Vektor st_1 , mit Referenzvektor ρ_1 , $\rho_1 \perp \varphi_1$. Wir definieren $\omega_2 := (\varphi_1, st_1, \rho_1)$. Anschließend bewege sich das Teilchen, falls es nicht absorbiert wurde, entlang des von $x_{(1)}$ ausgehenden und in Richtung φ_1 zeigenden Halbstrahls weiter mit der konstanten Geschwindigkeit c .

Wiederum nach einer Zeit $\omega_3 := t_2$ werde es im Punkt $x_{(2)} := x_{(1)} + ct_2\varphi_1$ in Richtung φ_2 mit Stokes-Vektor st_2 und Referenzvektor ρ_2 , $\rho_2 \perp \varphi_2$, gestreut bzw. absorbiert. Wir setzen $\omega_4 := (\varphi_2, st_2, \rho_2)$.

Der Pfad dieses Teilchens wird also durch die Streusequenz

$$\begin{aligned}\omega &:= (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots) \\ &:= \left((x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0); t_1, \varphi_1, st_1, \rho_1; t_2, \varphi_2, st_2, \rho_2; \dots \right)\end{aligned}$$

eindeutig bestimmt. Bild 2.1 illustriert die Situation.

2.2. Definition und Bemerkung : (Streuprozeß)

Sei $c \in \mathbb{R}^+$ eine fest vorgegebene Konstante. Wir definieren nun für $i \in \{1, 2, 3\}$, $k \in \mathbb{N}$ und $l, n \in \mathbb{N}_0$ mit $l \leq n$:

$$\begin{aligned}\Omega_{01} &:= \mathbb{R}^3, & \Omega_{02} &:= S^2, & \Omega_{03} &:= Pol, & \Omega_{04} &:= S^2, & \Omega_{05} &:= \mathbb{R}_0^+ \\ \Omega_0 &:= \Omega_{01} \times \Omega_{02} \times \Omega_{03} \times \Omega_{04} \times \Omega_{05}, \\ \Omega_{k,dir} &:= S_\infty^2, & \Omega_{k,pol} &:= Pol, & \Omega_{k,ref} &:= S^2, \\ \Omega_k &:= \begin{cases} \mathbb{R}_{0,\infty}^+, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ \Omega_{k,dir} \times \Omega_{k,pol} \times \Omega_{k,ref}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \end{cases} \\ \Omega^{(n)} &:= \prod_{m=0}^n \Omega_m \quad \text{und} \quad \Omega := \prod_{m=0}^{\infty} \Omega_m\end{aligned}$$

sowie die dazugehörigen (Produkt-) σ -Algebren :

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_{0i} &:= \mathfrak{B}(\Omega_{0i}), & \mathfrak{K}_0 &:= \mathfrak{B}(\Omega_0), \\ \mathfrak{K}_{2k,dir} &:= \mathfrak{B}(\Omega_{2k,dir}), & \mathfrak{K}_{2k,pol} &:= \mathfrak{B}(\Omega_{2k,pol}), & \mathfrak{K}_{2k,ref} &:= \mathfrak{B}(\Omega_{2k,ref}), \\ \mathfrak{K}_k &:= \begin{cases} \mathfrak{B}(\Omega_k), & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ \mathfrak{K}_{k,dir} \otimes \mathfrak{K}_{k,pol} \otimes \mathfrak{K}_{k,ref} & \text{falls } k \text{ gerade,} \end{cases} \\ \mathfrak{K}^{(n)} &:= \bigotimes_{m=0}^n \mathfrak{K}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{K} := \bigotimes_{m=0}^{\infty} \mathfrak{K}_m.\end{aligned}$$

Die Konstante c beschreibe die Geschwindigkeit eines Photons, d.h. die *Lichtgeschwindigkeit im jeweiligen Medium*. Wir nehmen ab sofort an, daß c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beschreibe, was für atmosphärische Mehrfachstreuung

sehr gut erfüllt ist. Verschiedene Medien bedingen, ohne Einschränkung der Allgemeinheit des Modells, nur unterschiedliche Extinktions- bzw. Streuerverteilungen (siehe Kapitel 4), jedoch nicht unterschiedliche Lichtgeschwindigkeiten in den Medien.

Wir betrachten folgende Projektionen :

$$\begin{aligned}
 pr_{0i} : \Omega_0 &\rightarrow \Omega_{0i} && \text{die kanonische Projektion auf die } i\text{-te Komponente von } \Omega_0, \\
 pr_n : \Omega &\rightarrow \Omega_n && \text{die kanonische Projektion,} \\
 pr_{dir} : \Omega_{2k} &\rightarrow \Omega_{2k,dir} && \text{die kanonische Projektion auf die Richtungen,} \\
 pr_{pol} : \Omega_{2k} &\rightarrow \Omega_{2k,pol} && \text{die kanonische Projektion auf die Stokes-Vektoren,} \\
 pr_{ref} : \Omega_{2k} &\rightarrow \Omega_{2k,ref} && \text{die kanonische Projektion auf die Referenzvektoren,} \\
 pr_{n,l} : \Omega^{(n)} &\rightarrow \Omega_l && \text{die kanonische Projektion auf die } l\text{-te Komponente,} \\
 \pi_n : \Omega &\rightarrow \Omega^{(n)} && \text{mit } \omega := (\omega_m : m \in \mathbb{N}_0) \mapsto \pi_n(\omega) := (\omega_m : 0 \leq m \leq n).
 \end{aligned}$$

Es beschreibe für ein Photon (vgl. Bild 2.1) :

$$\begin{aligned}
 \Omega_{01} &&& \text{den Raum der Startpunkte } x_0, \\
 \Omega_{02} &&& \text{den Raum der Startrichtungen } \varphi_0, \\
 \Omega_{03} &&& \text{den Raum der normierten Stokes-Vektoren } st_0 \text{ des startenden Photons,} \\
 \Omega_{04} &&& \text{den Raum der Referenzvektoren } \rho_0 \text{ des startenden Photons,} \\
 \Omega_{05} &&& \text{den Raum der Startzeiten } t_0, \\
 \Omega_{2k-1} &&& \text{den Raum der Zeiten zwischen dem } (k-1)\text{-ten und } k\text{-ten Streuereignis,} \\
 \Omega_{2k,dir} &&& \text{den Raum der Streurichtungen } \varphi_k \text{ nach dem } k\text{-ten Streuereignis,} \\
 \Omega_{2k,pol} &&& \text{den Raum der normierten Stokes-Vektoren } st_k \text{ nach dem } k\text{-ten Streuereignis,} \\
 \Omega_{2k,ref} &&& \text{den Raum der Referenzvektoren } \rho_k \text{ nach dem } k\text{-ten Streuereignis und} \\
 \Omega_{2k} &&& \text{den Produktraum aus dem Raum der Streurichtungen } \varphi_k, \text{ dem Raum der} \\
 &&& \text{Stokes-Vektoren } st_k \text{ und dem Raum der Referenzvektoren } \rho_k \text{ nach dem} \\
 &&& k\text{-ten Streuereignis.}
 \end{aligned}$$

Versehen mit der Produkt- σ -Algebra \mathfrak{A} nennen wir Ω den *Raum der Streufolgen* ω .

Ferner seien :

$$\begin{aligned}
E_k &\in \mathfrak{M}(\Omega^{(2k-2)}, \Omega_{2k-1}) && \text{bzw.} \\
P_k &\in \mathfrak{M}(\Omega^{(2k-1)}, \Omega_{2k}) && \text{vorgegebene Markovkerne und ferner} \\
\mathcal{P}_k &\in \mathfrak{M}(\Omega^{(k-1)}, \Omega_k) && \text{mit } \mathcal{P}_k := \begin{cases} E_{(k+1)/2}, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ P_{k/2}, & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Wegen der ungeordneten Struktur der Atmosphäre sind die Streurichtungen und die Zeiten zwischen zwei aufeinanderfolgenden Streueignissen zufällig (vgl. Oppel et al. [21] § 2). Diese Zufälligkeit wird durch die Markov-Kerne E_k und P_k für $k \in \mathbb{N}$ beschrieben.

$E_k(\omega_0, \dots, \omega_{2k-2}; A)$ möge die Wahrscheinlichkeit sein, mit der ein Photon mit der Streusequenz $(\omega_0, \dots, \omega_{2k-2})$ zur einer Zeit $t_k = \omega_{2k-1} \in A \in \mathfrak{K}_{2k-1}$ ausgehend vom $(k-1)$ -ten Streuort zum k -ten Mal gestreut wird. $E_k(\omega_0, \dots, \omega_{2k-2}; \{\infty\})$ beschreibe die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Photon nach $k-1$ Streuungen nicht mehr gestreut wird. Wir nennen E_k die k -te *Extinktionswahrscheinlichkeit*.

$P_k(\omega_0, \dots, \omega_{2k-1}; B)$ möge die Wahrscheinlichkeit sein, mit der ein Photon mit der Streusequenz $(\omega_0, \dots, \omega_{2k-1})$ bei der k -ten Streuung in eine Richtung $\varphi_k = pr_{dir}(\omega_{2k})$ mit einen Stokes-Vektor $st_k = pr_{pol}(\omega_{2k})$ und Referenzvektor $\rho_k = pr_{ref}(\omega_{2k})$ gestreut wird, wobei $\omega_{2k} \in B \in \mathfrak{K}_{2k}$ ist. $P_k(\omega_0, \dots, \omega_{2k-1}; \{\infty\} \times A)$ beschreibe für alle $A \in \mathfrak{B}(\Omega_{2k,pol} \times \Omega_{2k,ref})$, $A \neq \emptyset$, die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Photon bei der k -ten Streuung absorbiert wird. Wir nennen P_k die k -te *Streuwahrscheinlichkeit*.

Nach dem Satz von Ionescu-Tulcea (vgl. Neveu [18], Satz 5.1.1 und Corollar 2 auf Seite 194 bzw. 197) gilt, daß es für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\tau : \mathfrak{K}_0 \rightarrow [0, 1]$ genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\tau : \mathfrak{K} \rightarrow [0, 1]$ gibt, so daß für jedes Rechteck $R := \bigcap_{m=0}^n pr_m^{-1}(K_m)$ mit $K_m \in \mathfrak{K}_m$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt :

$$\mathbb{P}^\tau(R) = \int_{K_0} \int_{K_1} \dots \int_{K_n} \mathcal{P}_n(\omega_0, \dots, \omega_{n-1}; d\omega_n) \dots \mathcal{P}_1(\omega_0; d\omega_1) \tau(d\omega_0).$$

Wir nennen \mathbb{P}^τ den *physikalischen (multiplen) Streuprozeß* (oder auch Rayleigh's Random Flight) *mit der Startverteilung* τ .

Wir definieren nun noch einige Größen, die wir später benötigen :

2.3. Definition und Bemerkung :

Für $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ seien :

$$\mathfrak{P}_n := \pi_n^{-1}(\mathfrak{K}^{(n)}),$$

$$\Psi_k := \begin{cases} \mathbb{R}_0^+, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ S^2 \times Pol \times S^2, & \text{falls } k \text{ gerade,} \end{cases}$$

$$\mathcal{X}_{(k)} := \{\omega \in \Omega : pr_i(\omega) \in \Psi_i \text{ für } i = 1, \dots, k\},$$

und

$$X_{(0)} := pr_{01} \circ pr_0, \quad \Phi_0 := pr_{02} \circ pr_0, \quad St_0 := pr_{03} \circ pr_0,$$

$$R_0 := pr_{03} \circ pr_0, \quad T_0 := pr_{05} \circ pr_0,$$

$$T_k := pr_{2k-1}, \quad St_k := pr_{pol} \circ pr_{2k}, \quad R_k := pr_{ref} \circ pr_{2k},$$

$$\Phi_k : \Omega \rightarrow S_\infty^2, \quad \Phi_k(\omega) := \begin{cases} pr_{dir} \circ pr_{2k}, & \text{falls } \omega \in \mathcal{X}_{(2k)}, \\ \overset{d}{\infty}, & \text{falls } \omega \in \Omega \setminus \mathcal{X}_{(2k)}, \end{cases}$$

$$X_{(k)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_\infty^3, \quad X_{(k)}(\omega) := \begin{cases} X_{(0)}(\omega) + c \sum_{i=1}^k \Phi_{i-1}(\omega) T_i(\omega), & \text{falls } \omega \in \mathcal{X}_{(2k-1)}, \\ \overset{d}{\infty}, & \text{falls } \omega \in \Omega \setminus \mathcal{X}_{(2k-1)}, \end{cases}$$

und für $t \in \mathbb{R}_0^+$:

$$N_t : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_{0,\infty}, \quad \text{mit } N_t(\omega) := \begin{cases} \inf \left\{ j \in \mathbb{N}_0 : t < \sum_{i=1}^{j+1} T_i(\omega) \right\}, & \text{falls } \{\dots\} \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{falls } \{\dots\} = \emptyset, \end{cases}$$

$$X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_\infty^3, \quad \text{mit } X_t(\omega) := \begin{cases} X_{(N_t(\omega))}(\omega) + c \Phi_{N_t(\omega)} \left(t - \sum_{i=1}^{N_t(\omega)} T_i(\omega) \right), & \text{falls } \omega \in \mathcal{X}_t, \\ \overset{d}{\infty}, & \text{falls } \omega \in \Omega \setminus \mathcal{X}_t, \end{cases}$$

wobei

$$\mathcal{X}_t := \{\omega \in \Omega : pr_i(\omega) \in \Psi_i \text{ für } i = 1, \dots, 2N_t(\omega)\} \cap \{\omega \in \Omega : N_t(\omega) \in \mathbb{N}\}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ folgt sofort aus der Definition, daß $\mathcal{X}_{(k)} \in \mathfrak{P}_k$, $X_{(0)}$ eine \mathfrak{P}_0 - \mathfrak{K}_{01} -meßbare -, Φ_0 eine \mathfrak{P}_0 - \mathfrak{K}_{02} -meßbare -, St_0 eine \mathfrak{P}_0 - \mathfrak{K}_{03} -meßbare -, R_0 eine \mathfrak{P}_0 - \mathfrak{K}_{04} -meßbare -, T_0 eine \mathfrak{P}_0 - \mathfrak{K}_{05} -meßbare -, Φ_k eine \mathfrak{P}_{2k} - $\mathfrak{K}_{2k,dir}$ -meßbare -, St_k

eine $\mathfrak{P}_{2k} - \mathfrak{R}_{2k, pol}$ -meßbare -, R_k eine $\mathfrak{P}_{2k} - \mathfrak{R}_{2k, ref}$ -meßbare -, T_k eine $\mathfrak{P}_{2k-1} - \mathfrak{R}_{2k-1}$ -meßbare - und $X_{(k)}$ eine $\mathfrak{P}_{2k-1} - \mathfrak{B}(\mathbb{R}_\infty^3)$ -meßbare Abbildung ist. Ferner gilt für $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} \{N_t = n\} &\in \sigma(\{T_1, \dots, T_{n+1}\}) \subset \mathfrak{P}_{2n+1}, \\ \{N_t = \infty\} &= \Omega \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \{N_t = i\} \in \sigma\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \mathfrak{P}_{2i+1}\right), \\ \mathcal{X}_t &= \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \bigcap_{k=1}^{2m} \left(pr_k^{-1}(\Psi_k) \cap N_t^{-1}(\{m\}) \right) \in \mathfrak{R}, \end{aligned}$$

d.h. für $t \in \mathbb{R}_0^+$ ist $N_t + 1$ eine Stopzeit bezüglich der monoton wachsenden Folge $(\mathfrak{P}_{2k-1} : k \in \mathbb{N})$ von Sub- σ -Algebren von \mathfrak{R} und X_t eine $\mathfrak{R} - \mathfrak{B}(\mathbb{R}_\infty^3)$ -meßbare Abbildung.

Für $\omega \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschreibe :

- $\mathcal{X}_{(2k-1)}$ die Menge der Photonen, die mindestens k -mal gestreut werden (d.h. insbesondere bis zur k -ten Streuung noch nicht absorbiert wurden),
- \mathcal{X}_t die Menge der Photonen, die bis zur Zeit t nach endlich vielen Streuungen noch nicht absorbiert wurden,
- $X_{(0)}(\omega)$ den Startpunkt des Photons,
- $\Phi_0(\omega)$ die Startrichtung des Photons,
- $St_0(\omega)$ der normierte Stokes-Vektor des startenden Photons,
- $R_0(\omega)$ der Referenzvektor des startenden Photons,
- $T_0(\omega)$ die Startzeit des Photons (vgl. Sendepuls des LIDAR Senders in Definition 3.1.),
- $\Phi_k(\omega)$ die Richtung des Photons nach der k -ten Streuung, falls $\Phi_k(\omega) \in S^2$,
- $St_k(\omega)$ der normierte Stokes-Vektor des Photons nach der k -ten Streuung,
- $R_k(\omega)$ der Referenzvektor des Photons nach der k -ten Streuung,
- $T_k(\omega)$ die Zeit zwischen der $(k-1)$ -ten und k -ten Streuung, falls $T_k(\omega) \in \mathbb{R}_0^+$,
- $X_{(k)}(\omega)$ den k -ten Streuort, falls $X_{(k)}(\omega) \in \mathbb{R}^3$,
- $N_t(\omega)$ die Anzahl der Streuungen bis zum Zeitpunkt t , falls $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0$,
- $X_t(\omega)$ den Ort des Photons zum Zeitpunkt t , falls $X_t(\omega) \in \mathbb{R}^3$.

Für jede Startverteilung τ beschreibt der stochastische Prozeß $(X_t : t \in \mathbb{R}_0^+)$ über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{R}, \mathbb{P}^\tau)$ die räumliche Diffusion der Photonen des

multiplen Streuprozesses \mathbb{P}^τ .

Da die Funktionen $X_{(0)}, \Phi_0, St_0, R_0, T_0, \Phi_k, St_k, R_k, T_k$ und $X_{(k)}$ für $k \in \mathbb{N}$ nur von der ersten bzw. den ersten $2k$ bzw. $2k+1$ Koordinate(n) abhängen, werden wir diese Bezeichnungen auch verwenden, wenn gemeint ist, daß diese Funktionen auf den entsprechenden Räumen $\Omega^{(0)}, \Omega^{(2k-1)}$, bzw. $\Omega^{(2k)}$ definiert sind.

Wir werden jetzt zeigen, (vgl. Satz 2.7.), daß der stochastische Prozeß $((X_{(n)}, \Phi_n, St_n, R_n) : n \in \mathbb{N}_0)$ über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}^\tau)$ unter gewissen Annahmen an die Familien von Markov-Kernen $(E_k : k \in \mathbb{N})$ und $(P_k : k \in \mathbb{N})$ die einfache Markov-Eigenschaft (vgl. z.B. Gämbler-Stute [7] Seite 298) erfüllt.

Wir führen dazu den stochastischen Prozeß $((X_{(n)}, \Phi_n, St_n, R_n) : n \in \mathbb{N}_0)$ über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}^\tau)$ mittels einer geeigneten Transformation T (vgl. Definition 2.5. und Lemma 2.6.) auf den Markov-Streuprozeß zurück, von dem wir die einfache Markov-Eigenschaft kennen (vgl. Definition und Bemerkung 2.4.).

2.4. Definition und Bemerkung : (Markov-Streuprozeß)

Für $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir :

$$\hat{\Omega}_0 := \Omega_0, \quad \hat{\Omega}_k := \mathbb{R}_\infty^3 \times S_\infty^2 \times Pol \times S^2 \quad \text{und} \quad \hat{\Omega} := \prod_{m=0}^{\infty} \hat{\Omega}_m$$

und die dazugehörigen (Produkt-) σ -Algebren :

$$\hat{\mathfrak{A}}_0 := \mathfrak{A}_0, \quad \hat{\mathfrak{A}}_k := \mathfrak{B}(\hat{\Omega}_k) \quad \text{und} \quad \hat{\mathfrak{A}} := \bigotimes_{m=0}^{\infty} \hat{\mathfrak{A}}_m.$$

Ferner seien

$$\begin{aligned} \widehat{pr}_n & : \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}_n \quad \text{die kanonische Projektion,} \\ \hat{\mathcal{P}} & \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_\infty^3 \times S_\infty^2 \times Pol \times S^2, \mathbb{R}_\infty^3 \times S_\infty^2 \times Pol \times S^2) \quad \text{ein Markovkern und} \\ \tau & : \hat{\mathfrak{A}}_0 \rightarrow [0, 1] \quad \text{wie zuvor ein Wahrscheinlichkeitsmaß.} \end{aligned}$$

Dann gibt es nach dem Satz von Ionescu-Tulcea zur Konstruktion kanonischer Markov-Prozesse mit diskreter Zeit (vgl. Neveu [18], Satz 5.2.3, Seite 206) genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\widehat{\mathbb{P}}^\tau : \hat{\mathfrak{A}} \rightarrow [0, 1]$, so daß für jedes Rechteck $\hat{R} := \bigcap_{m=0}^n \widehat{pr}_m^{-1}(\hat{K}_m)$ mit $\hat{K}_m \in \hat{\mathfrak{A}}_m$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{P}}^\tau(R) & = \int_{\hat{K}_0} \int_{\hat{K}_1} \dots \int_{\hat{K}_n} \hat{\mathcal{P}}(x_{n-1}, \varphi_{n-1}, st_{n-1}, \rho_{n-1}; d(x_n, \varphi_n, st_n, \rho_n)) \dots \\ & \dots \hat{\mathcal{P}}(x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0; d(x_1, \varphi_1, st_1, \rho_1)) \tau(d(x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0)). \end{aligned}$$

Insbesondere erfüllt der stochastische Prozeß $(\widehat{pr}_n : n \in \mathbb{N}_0)$ über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathfrak{K}}, \widehat{\mathbb{P}}^\tau)$ die einfache Markov-Eigenschaft. Wir werden daher auch $\widehat{\mathbb{P}}^\tau$ den *Markov-Streuprozess mit der Startverteilung τ* nennen.

2.5. Definition :

Seien $\xi_0 := pr_0$ und $\xi_i := (X_{(i)}, \Phi_i, St_i, R_i) : \Omega \rightarrow \widehat{\Omega}_i$ für $i \in \mathbb{N}$. Ferner definieren wir :

$$T : \Omega \rightarrow \widehat{\Omega}, \quad \text{mit} \quad T(\omega) := (\xi_n(\omega) : n \in \mathbb{N}_0),$$

T bildet, anschaulich gesprochen, den Zeit-Richtungsprozeß auf einen Orts-Richtungsprozeß ab.

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &:= \left\{ \omega \in \Omega : pr_k(\omega) \in \Omega_k \setminus \Psi_k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \Rightarrow pr_m(\omega) \in \Omega_m \setminus \Psi_m \text{ für alle } m \geq k \right\} \\ &= \bigcap_{\substack{k, m \in \mathbb{N} \\ k < m}} \left(pr_k^{-1}(\Psi_k) \cup pr_m^{-1}(\Omega_m \setminus \Psi_m) \right). \end{aligned}$$

\mathcal{O} bezeichne dabei die Menge der „physikalischen“ Photonenpfade. Diese beschreiben die Photonen, welche nach einer Absorption nicht weiterfliegen und erneut gestreut werden können.

Im folgenden bezeichnen wir mit dem Index \mathcal{O} bzw. \mathcal{M} die Einschränkung auf die Menge \mathcal{O} bzw. $\mathcal{M} := T(\mathcal{O})$, d.h. für $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir :

$$T_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M}, \quad \text{mit} \quad T_{\mathcal{O}}(\omega) := T(\omega),$$

$$\mathfrak{K}_{\mathcal{O}} := \{A \cap \mathcal{O} : A \in \mathfrak{K}\},$$

$$\widehat{\mathfrak{K}}_{\mathcal{M}} := \{B \cap \mathcal{M} : B \in \widehat{\mathfrak{K}}\},$$

$$\mathbb{P}_{\mathcal{O}}^\tau : \mathfrak{K}_{\mathcal{O}} \rightarrow [0, 1], \quad \text{mit} \quad \mathbb{P}_{\mathcal{O}}^\tau(\cdot) := \mathbb{P}^\tau(\cdot \cap \mathcal{O}),$$

$$\widehat{\mathbb{P}}_{\mathcal{M}}^\tau : \widehat{\mathfrak{K}}_{\mathcal{M}} \rightarrow [0, 1], \quad \text{mit} \quad \widehat{\mathbb{P}}_{\mathcal{M}}^\tau(\cdot) := \widehat{\mathbb{P}}^\tau(\cdot \cap \mathcal{M}),$$

$$\xi_{\mathcal{O},n} : \mathcal{O} \rightarrow \widehat{\Omega}_n, \quad \text{mit} \quad \xi_{\mathcal{O},n}(\cdot) := \xi_n(\cdot),$$

$$\widehat{pr}_{\mathcal{M},n} : \mathcal{M} \rightarrow \widehat{\Omega}_n, \quad \text{mit} \quad \widehat{pr}_{\mathcal{M},n}(\cdot) := \widehat{pr}_n(\cdot).$$

Das folgende Lemma ist technischer Natur und charakterisiert die Abbildung T näher. Wir benötigen es für den Beweis von Satz 2.7.

2.6. Lemma :

1. T ist eine wohldefinierte, \mathfrak{K} - $\widehat{\mathfrak{K}}$ -meßbare Abbildung, $\mathcal{O} \in \mathfrak{K}$ und $\mathcal{M} \in \widehat{\mathfrak{K}}$.
2. $T_{\mathcal{O}}$ ist eine bijektive, $\mathfrak{K}_{\mathcal{O}}$ - $\widehat{\mathfrak{K}}_{\mathcal{M}}$ -meßbare Abbildung, $T_{\mathcal{O}}^{-1}$ eine $\widehat{\mathfrak{K}}_{\mathcal{M}}$ - $\mathfrak{K}_{\mathcal{O}}$ -meßbare Abbildung.
3. $\widehat{pr}_n(\widehat{\omega}) = \widehat{pr}_{\mathcal{M},n}(\widehat{\omega}) = \xi_{\mathcal{O},n}(T_{\mathcal{O}}^{-1}(\widehat{\omega})) = \xi_n(T_{\mathcal{O}}^{-1}(\widehat{\omega}))$ für alle $\widehat{\omega} \in \mathcal{M}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.
4. $T_{\mathcal{O}}(A) \in \sigma(\{\widehat{pr}_{\mathcal{M},i} : m \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}_0\})$ für alle $A \in \sigma(\{\xi_{\mathcal{O},i} : m \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}_0\})$ mit $m \leq n$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis :

Zu 1: Klar.

Zu 2: Die Surjektivität von $T_{\mathcal{O}}$ folgt sofort aus der Definition.

Zum Beweis der Injektivität von $T_{\mathcal{O}}$ seien

$$\begin{aligned} \omega^1 &= ((x_0^1, \varphi_0^1, st_0^1, \rho_0^1, t_0^1); t_1^1, \varphi_1^1, st_1^1, \rho_1^1; t_2^1, \varphi_2^1, st_2^1, \rho_2^1; \dots) \in \mathcal{O} \quad \text{und} \\ \omega^2 &= ((x_0^2, \varphi_0^2, st_0^2, \rho_0^2, t_0^2); t_1^2, \varphi_1^2, st_1^2, \rho_1^2; t_2^2, \varphi_2^2, st_2^2, \rho_2^2; \dots) \in \mathcal{O}, \quad \text{mit} \\ ((x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0); x_1, \varphi_1, st_1, \rho_1; x_2, \varphi_2, st_2, \rho_2; \dots) &:= T_{\mathcal{O}}(\omega^1) = T_{\mathcal{O}}(\omega^2) \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Dann gilt nach der Definition von $T_{\mathcal{O}}$ für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (x_0^1, \varphi_0^1, st_0^1, \rho_0^1, t_0^1) &= pr_0(\omega^1) = (x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0) = pr_0(\omega^2) = (x_0^2, \varphi_0^2, st_0^2, \rho_0^2, t_0^2), \\ \varphi_n^1 &= \Phi_n(\omega^1) = \varphi_n = \Phi_n(\omega^2) = \varphi_n^2, \\ st_n^1 &= St_n(\omega^1) = st_n = St_n(\omega^2) = st_n^2, \\ \rho_n^1 &= R_n(\omega^1) = \rho_n = R_n(\omega^2) = \rho_n^2. \end{aligned}$$

Ferner gilt für $n \in \mathbb{N}$:

Bei $x_n = \vec{\infty}$ gilt nach der Definition von $T_{\mathcal{O}}$ und $X_{(n)}$, daß $x_{n-1} = \vec{\infty}$ oder $\varphi_0^1 = \varphi_0^2 = \vec{\infty}$ oder $t_n^1 = t_n^2 = \infty$. Gilt $x_{n-1} = \vec{\infty}$ (beachte $x_0 \in \mathbb{R}^3$!) oder $\varphi_0^1 = \varphi_0^2 = \vec{\infty}$, so folgt nach der Definition von $X_{(n-1)}$ bzw. $X_{(n)}$ und \mathcal{O} , daß $t_n^1 = t_n^2 = \infty$.

Bei $x_n \in \mathbb{R}^3$ gilt nach der Definition von $T_{\mathcal{O}}$ und $X_{(n)}$, daß $t_i^1, t_i^2 \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi_{i-1}^1 = \varphi_{i-1}^2 \in S^2$ für alle $i = 1, \dots, n$ ist. Zusammen mit der iterativen Anwendung der Definition von $X_{(i)}$ und $x_i^1 = X_{(i)}(\omega^1) = x_i = X_{(i)}(\omega^2) = x_i^2$ für $i = 1, \dots, n$ folgt, daß $t_n^1 = t_n^2 \in \mathbb{R}_0^+$.

Damit ist die Injektivität und somit auch die Bijektivität von $T_{\mathcal{O}}$ gezeigt. Für alle $\hat{\omega} := ((x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0); x_1, \varphi_1, st_1, \rho_1; x_2, \varphi_2, st_2, \rho_2; \dots) \in \mathcal{M}$ gilt insbesondere :

$$T_{\mathcal{O}}^{-1}(\hat{\omega}) := \left((x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0); \frac{\|x_1 - x_0\|}{c}, \varphi_1, st_1, \rho_1; \frac{\|x_2 - x_1\|}{c}, \varphi_2, st_2, \rho_2; \dots \right),$$

wobei $\|x - y\| := \infty$, falls $x = \vec{\infty}$ oder $y = \vec{\infty}$. Die $\hat{\mathfrak{K}}_{\mathcal{M}}\text{-}\hat{\mathfrak{K}}_{\mathcal{O}}$ -Meßbarkeit von $T_{\mathcal{O}}^{-1}$ folgt sofort zusammen mit der Bijektivität von $T_{\mathcal{O}}$. Die $\hat{\mathfrak{K}}_{\mathcal{O}}\text{-}\hat{\mathfrak{K}}_{\mathcal{M}}$ -Meßbarkeit von $T_{\mathcal{O}}$ ist klar.

Zu 3: Folgt sofort aus 2.

Zu 4: Sei $A \in \sigma(\{\xi_{\mathcal{O},i}, m \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}_0\})$ mit $m \leq n$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt :

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{O}}(A) &\in T_{\mathcal{O}} \left(\sigma \left(\bigcup_{m \leq i \leq n} \xi_{\mathcal{O},i}^{-1}(\hat{\mathfrak{K}}_i) \right) \right) \stackrel{2.6.2}{=} \sigma \left(\bigcup_{m \leq i \leq n} T_{\mathcal{O}} \circ \xi_{\mathcal{O},i}^{-1}(\hat{\mathfrak{K}}_i) \right) \\ &\stackrel{2.6.3}{=} \sigma \left(\bigcup_{m \leq i \leq n} \widehat{pr}_{\mathcal{M},i}^{-1}(\hat{\mathfrak{K}}_i) \right) = \sigma(\{\widehat{pr}_{\mathcal{M},i}, m \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}_0\}). \blacksquare \end{aligned}$$

2.7. Satz : (Markov-Eigenschaft)

Sei $E \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_{\infty}^3 \times S_{\infty}^2, \mathbb{R}_{0,\infty}^+)$ und $P \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_{\infty}^3 \times S_{\infty}^2 \times Pol \times S^2, S_{\infty}^2 \times Pol \times S^2)$ mit :

$$\begin{aligned} E(x, \varphi; \cdot) &= \delta_{\infty}(\cdot), \quad \text{falls } (x, \varphi) \in (\mathbb{R}_{\infty}^3 \times S_{\infty}^2) \setminus (\mathbb{R}^3 \times S^2) \text{ und} \\ P(x, \varphi, st, \rho; \cdot) &= \left(\delta_{\mathbb{d}} \times \delta_{st} \times \delta_{\rho} \right)(\cdot), \\ &\quad \text{falls } (x, \varphi, st, \rho) \in (\mathbb{R}_{\infty}^3 \times S_{\infty}^2 \times Pol \times S^2) \setminus (\mathbb{R}^3 \times S^2 \times Pol \times S^2), \end{aligned}$$

wobei E_k, P_k für $k \in \mathbb{N}$, $\tau, \widehat{\mathcal{P}}, \mathbb{P}^{\tau}$ und $\widehat{\mathbb{P}}^{\tau}$ wie in Definition 2.2. und 2.4. gegeben seien. Ferner sei $\widehat{\mathcal{P}} = E \times P$, d.h. für alle $(x, \varphi, st, \rho) \in \mathbb{R}_{\infty}^3 \times S_{\infty}^2 \times Pol \times S^2$ und $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_{\infty}^3 \times S_{\infty}^2 \times Pol \times S^2)$ gelte :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{P}}(x, \varphi, st, \rho; C) &= \int_{\mathbb{R}_{0,\infty}^+} \int_{S_{\infty}^2 \times Pol \times S^2} 1_C(x + ct'\varphi, \varphi', st', \rho') \\ &\quad P(x + ct'\varphi, \varphi, st, \rho; d(\varphi', st', \rho')) E(x, \varphi; dt'). \end{aligned}$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathfrak{K}_{2k-1}$, $B \in \mathfrak{K}_{2k}$, $\omega_{(2k-2)} \in \Omega^{(2k-2)}$ und $\omega_{(2k-1)} \in \Omega^{(2k-1)}$ gelte :

$$\begin{aligned} E_k(\omega_{(2k-2)}; A) &= E\left(X_{(k-1)}(\omega_{(2k-2)}), \Phi_{k-1}(\omega_{(2k-2)}); A\right), \\ P_k(\omega_{(2k-1)}; B) &= P\left(X_{(k)}(\omega_{(2k-1)}), \Phi_{k-1}(\omega_{(2k-1)}), St_{k-1}(\omega_{(2k-1)}), R_{k-1}(\omega_{(2k-1)}); B\right). \end{aligned}$$

Dann folgt :

1. E_k und P_k für $k \in \mathbb{N}$ bzw. $\widehat{\mathcal{P}}$ sind im Sinne von Definition 2.2. bzw. Definition 2.4. wohldefiniert.
2. $\mathbb{P}^\tau(\mathcal{O}) = 1$.
3. $\widehat{\mathbb{P}}^\tau = \mathbb{P}^\tau \circ T^{-1}$ und $\widehat{\mathbb{P}}_{\mathcal{M}}^\tau = \mathbb{P}_{\mathcal{O}}^\tau \circ T_{\mathcal{O}}^{-1}$.
4. Der stochastische Prozeß $(X_{(n)}, \Phi_n, St_n, R_n) : n \in \mathbb{N}_0$ über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{R}, \mathbb{P}^\tau)$ erfüllt die einfache Markov-Eigenschaft.

Beweis :

Zu 1: Klar für E_k und P_k mit $k \in \mathbb{N}$ wegen Bemerkung 2.3.

Für $\widehat{\mathcal{P}}$ folgt die Behauptung sofort aus dem Satz von Fubini für Übergangswahrscheinlichkeiten, wegen $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_\infty^3 \times S_\infty^2 \times Pol \times S^2) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}_\infty^3) \otimes \mathfrak{B}(S_\infty^2) \otimes \mathfrak{B}(Pol) \otimes \mathfrak{B}(S^2)$ und mit der zweimaligen Anwendung von Lemma 1.8.7 aus Gämbler–Stute [7].

Zu 2: Es gilt :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O} &= \bigcap_{\substack{k,m \in \mathbb{N} \\ k < m}} \left(pr_k^{-1}(\Psi_k) \cup pr_m^{-1}(\Omega_m \setminus \Psi_m) \right) \\
 &= \bigcap_{\substack{k,m \in \mathbb{N} \\ k < m}} \left[\left(\Omega \setminus pr_k^{-1}(\Omega_k \setminus \Psi_k) \right) \cup \left(\Omega \setminus pr_m^{-1}(\Psi_m) \right) \right] \\
 &= \Omega \setminus \bigcup_{\substack{k,m \in \mathbb{N} \\ k < m}} \left(pr_k^{-1}(\Omega_k \setminus \Psi_k) \cap pr_m^{-1}(\Psi_m) \right),
 \end{aligned}$$

woraus mit Bemerkung 2.2. folgt :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}^\tau(\mathcal{O}) &= 1 - \mathbb{P}^\tau \left(\bigcup_{\substack{k,m \in \mathbb{N} \\ k < m}} \left(pr_k^{-1}(\Omega_k \setminus \Psi_k) \cap pr_m^{-1}(\Psi_m) \right) \right) \\
 &\geq 1 - \sum_{\substack{k,m \in \mathbb{N} \\ k < m}} \mathbb{P}^\tau \left(pr_k^{-1}(\Omega_k \setminus \Psi_k) \cap pr_m^{-1}(\Psi_m) \right) \\
 &\stackrel{2.2.}{=} 1 - \sum_{\substack{k,m \in \mathbb{N} \\ k < m}} \int_{\Omega_0} \dots \int_{\Omega_k \setminus \Psi_k} \dots \int_{\Psi_m} \mathcal{P}_m(\omega_0, \dots, \omega_{m-1}; d\omega_m) \dots \\
 &\quad \mathcal{P}_k(\omega_0, \dots, \omega_{k-1}; d\omega_k) \dots \mathcal{P}_1(\omega_0; d\omega_1) \tau(d\omega_0). \quad (\#)
 \end{aligned}$$

Für $k, m \in \mathbb{N}$ mit $k < m$ und $\omega_i \in \Omega_i$ für $i = 0, \dots, k-1, k+1, \dots, m-1$ und $\omega_k \in \Omega_k \setminus \Psi_k$ gilt nach Voraussetzung, falls m ungerade ist :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_m(\omega_0, \dots, \omega_{m-1}; \Psi_m) &= \\
&= E\left(X_{(\frac{m-1}{2})}(\omega_0, \dots, \omega_{m-1}), \Phi_{(\frac{m-1}{2})}(\omega_0, \dots, \omega_{m-1}); \Psi_m\right) \\
&= E\left(X_{(\frac{m-1}{2})}(\omega_0, \dots, \omega_{m-1}), \overset{\text{d}}{\infty}; \Psi_m\right) \\
&= \delta_{\infty}(\Psi_m) \\
&= 0
\end{aligned}$$

und falls m gerade ist :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_m(\omega_0, \dots, \omega_{m-1}; \Psi_m) &= \\
&= P\left(X_{(\frac{m}{2})}(\omega_0, \dots, \omega_{m-1}), \Phi_{(\frac{m-1}{2})}(\omega_0, \dots, \omega_{m-1}), \right. \\
&\quad \left. St_{(\frac{m-1}{2})}(\omega_0, \dots, \omega_{m-1}), R_{(\frac{m-1}{2})}(\omega_0, \dots, \omega_{m-1}); \Psi_m\right) \\
&= P\left(\overset{\text{d}}{\infty}, \Phi_{(\frac{m-1}{2})}(\omega_0, \dots, \omega_{m-1}), St_{(\frac{m-1}{2})}(\omega_0, \dots, \omega_{m-1}), R_{(\frac{m-1}{2})}(\omega_0, \dots, \omega_{m-1}); \Psi_m\right) \\
&= \delta_{\infty}^{\text{d}} \circ pr_{dir}(\Psi_m) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Mit (#) folgt damit $\mathbb{P}^{\tau}(\mathcal{O}) = 1$.

Zu 3: Da $\widehat{\mathbb{P}}^{\tau}$ und $\mathbb{P}^{\tau} \circ T^{-1}$ normierte Maße sind und die Menge $\widehat{\mathfrak{R}}$ der meßbaren Rechtecke von $\widehat{\Omega}$ ein \cap -stabiles Erzeugendensystem der σ -Algebra $\widehat{\mathfrak{K}}$ ist, genügt es nach dem Eindeutigkeitssatz zum Beweis von $\widehat{\mathbb{P}}^{\tau} = \mathbb{P}^{\tau} \circ T^{-1}$ Folgendes zu zeigen :

$$\widehat{\mathbb{P}}^{\tau}(\widehat{R}) = \mathbb{P}^{\tau} \circ T^{-1}(\widehat{R}) \quad \text{für alle } \widehat{R} \in \widehat{\mathfrak{R}}.$$

Sei nun $\widehat{R} \in \widehat{\mathfrak{R}}$ fest vorgegeben, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$ und Mengen $\widehat{K}_m \in \widehat{\mathfrak{K}}_m$ für $m = 0, \dots, n$, so daß $\widehat{R} = \bigcap_{m=0}^n \widehat{pr}_m^{-1}(\widehat{K}_m)$. Dann gilt wegen der Definition und Meßbarkeit von T :

$$\begin{aligned}
T^{-1}(\widehat{R}) &= \bigcap_{m=0}^n T^{-1}(\widehat{pr}_m^{-1}(\widehat{K}_m)) \\
&= (X_{(0)}, \Phi_0, St_0, R_0, T_0)^{-1}(\widehat{K}_0) \cap \bigcap_{m=1}^n (X_{(m)}, \Phi_m, St_m, R_m)^{-1}(\widehat{K}_m) \\
&\in \pi_{2n}^{-1}(\mathfrak{K}^{(2n)}) = \mathfrak{P}_{2n}
\end{aligned}$$

und es folgt mit dem Satz von Ionescu–Tulcea (vgl. Neveu [18], Satz 5.1.1), dem Faktorisationssatz (vgl. Gänßler–Stute [7], Satz 1.2.24) und der Voraussetzung dieses Satzes :

$$\mathbb{P}^\tau \circ T^{-1}(\widehat{R}) = \int_{\Omega} 1_{T^{-1}(\widehat{R})}(\omega) \mathbb{P}^\tau(d\omega)$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{Ionescu-Tulcea}}{=} & \int_{\Omega_0} \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_{2n}} 1_{\pi_{2n}(T^{-1}(\widehat{R}))} \left((x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0); t_1, \varphi_1, st_1, \rho_1; \dots; t_n, \varphi_n, st_n, \rho_n \right) \\ & P_n((x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0); t_1, \varphi_1, st_1, \rho_1; \dots; t_n; d(\varphi_n, st_n, \rho_n)) \\ & E_n((x_0, \varphi_0, t_0); t_1, \varphi_1; \dots; t_{n-1}, \varphi_{n-1}; dt_n) \\ & \dots P_1((x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0); t_1; d(\varphi_1, st_1, \rho_1)) E_1((x_0, \varphi_0, t_0); dt_1) \\ & \tau(d(x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{Vor.}}{=} & \int_{\Omega_0} \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_{2n}} 1_{\widehat{K}_0 \times \dots \times \widehat{K}_n} \left((x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0); x_{(1)}, \varphi_1, st_1, \rho_1; \dots; x_{(n)}, \varphi_n, st_n, \rho_n \right) \\ & P(x_{(n)}, \varphi_{n-1}, st_{n-1}, \rho_{n-1}; d(\varphi_n, st_n, \rho_n)) E(x_{(n-1)}, \varphi_{n-1}; dt_n) \\ & \dots P(x_{(1)}, \varphi_0, st_0, \rho_0; d(\varphi_1, st_1, \rho_1)) E(x_0, \varphi_0; dt_1) \\ & \tau(d(x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{Def. } \widehat{\mathcal{P}}}{=} & \int_{\widehat{\Omega}_0} \int_{\widehat{\Omega}_1} \dots \int_{\widehat{\Omega}_n} 1_{\widehat{K}_0 \times \dots \times \widehat{K}_n} \left((x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0); x_1, \varphi_1, st_1, \rho_1; \dots; x_n, \varphi_n, st_n, \rho_n \right) \\ & \widehat{\mathcal{P}}(x_{n-1}, \varphi_{n-1}, st_{n-1}, \rho_{n-1}; d(x_n, \varphi_n, st_n, \rho_n)) \\ & \dots \widehat{\mathcal{P}}(x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0; d(x_1, \varphi_1, st_1, \rho_1)) \tau(d(x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0)) \end{aligned}$$

$$\stackrel{2.4.}{=} \widehat{\mathbb{P}}^\tau(\widehat{R}).$$

Wobei $x_{(i)} := x_0 + \sum_{j=1}^i ct_j \varphi_{j-1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dabei verwenden wir die entsprechenden Konventionen wie im Symbolverzeichnis, d.h. $\infty \cdot \varphi = \infty$ für $\varphi \in S^2$, usw. Damit ist $\widehat{\mathbb{P}}^\tau = \mathbb{P}^\tau \circ T^{-1}$ bewiesen, woraus mit Behauptung 2 und Lemma 2.6. für $\widehat{K} \in \widehat{\mathfrak{K}}_{\mathcal{M}}$ folgt :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{P}}_{\mathcal{M}}^\tau(\widehat{K}) &= \widehat{\mathbb{P}}^\tau(\widehat{K} \cap \mathcal{M}) = \mathbb{P}^\tau \circ T^{-1}(\widehat{K} \cap \mathcal{M}) = \mathbb{P}^\tau(T^{-1}(\widehat{K}) \cap \mathcal{O}) \\ &= \mathbb{P}_{\mathcal{O}}^\tau \circ T_{\mathcal{O}}^{-1}(\widehat{K}). \end{aligned}$$

Zu 4: Wegen Lemma 8.2. im Anhang und Aussage 2 dieses Satzes, genügt es zu zeigen, daß der stochastische Prozeß $(\xi_{\mathcal{O},n} : n \in \mathbb{N}_0)$ über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{O}, \widehat{\mathfrak{K}}_{\mathcal{O}}, \mathbb{P}_{\mathcal{O}}^\tau)$ die einfache Markov-Eigenschaft erfüllt. D.h. nach der Definition

der einfachen Markov-Eigenschaft haben wir für alle $X \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_\infty^3 \times S_\infty^2 \times \text{Pol} \times S^2)$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq m < n$ zu zeigen :

$$\mathbb{P}_\mathcal{O}^\tau(\xi_{\mathcal{O},n} \in X \mid \xi_{\mathcal{O},i}, 0 \leq i \leq m, i \in \mathbb{N}_0) \stackrel{[\mathbb{P}_\mathcal{O}^\tau]}{=} \mathbb{P}_\mathcal{O}^\tau(\xi_{\mathcal{O},n} \in X \mid \xi_{\mathcal{O},m}),$$

aber da $\mathbb{P}_\mathcal{O}^\tau(\xi_{\mathcal{O},n} \in X \mid \xi_{\mathcal{O},m})$ insbesondere $\sigma(\{\xi_{\mathcal{O},i}, 0 \leq i \leq m, i \in \mathbb{N}_0\})$ -meßbar ist, reicht es, wenn wir für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq m < n$, $A \in \sigma(\{\xi_{\mathcal{O},i}, 0 \leq i \leq m, i \in \mathbb{N}_0\})$ und $X \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_\infty^3 \times S_\infty^2 \times \text{Pol} \times S^2)$ im folgenden zeigen, daß :

$$\int_A 1_{\{\xi_{\mathcal{O},n} \in X\}} d\mathbb{P}_\mathcal{O}^\tau = \int_A \mathbb{P}_\mathcal{O}^\tau(\xi_{\mathcal{O},n} \in X \mid \xi_{\mathcal{O},m}) d\mathbb{P}_\mathcal{O}^\tau.$$

Seien dazu m, n, A und X wie zuvor fest vorgegeben. Dann gilt mit Lemma 2.6., daß $B := T_\mathcal{O}(A) \in \sigma(\{\widehat{pr}_{\mathcal{M},i}, 0 \leq i \leq m, i \in \mathbb{N}_0\}) \subset \widehat{\mathfrak{K}}_\mathcal{M}$ und $A = T_\mathcal{O}^{-1}(B)$. Also :

$$\begin{aligned} \int_A 1_{\{\xi_{\mathcal{O},n} \in X\}} d\mathbb{P}_\mathcal{O}^\tau &\stackrel{2.6.3}{=} \int_{T_\mathcal{O}^{-1}(B)} 1_X \circ \widehat{pr}_{\mathcal{M},n} \circ T_\mathcal{O} d\mathbb{P}_\mathcal{O}^\tau \\ &\stackrel{\text{Transf.-satz}}{=} \int_B 1_X \circ \widehat{pr}_{\mathcal{M},n} d(\mathbb{P}_\mathcal{O}^\tau \circ T_\mathcal{O}^{-1}) \\ &\stackrel{2.7.3}{=} \int_B 1_X \circ \widehat{pr}_{\mathcal{M},n} d\widehat{\mathbb{P}}_\mathcal{M}^\tau \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_B \widehat{\mathbb{P}}_\mathcal{M}^\tau(\widehat{pr}_{\mathcal{M},n} \in X \mid \widehat{pr}_{\mathcal{M},m}) d\widehat{\mathbb{P}}_\mathcal{M}^\tau \\ &\stackrel{2.7.3}{=} \int_B \widehat{\mathbb{P}}_\mathcal{M}^\tau(\widehat{pr}_{\mathcal{M},n} \in X \mid \widehat{pr}_{\mathcal{M},m}) d(\mathbb{P}_\mathcal{O}^\tau \circ T_\mathcal{O}^{-1}) \\ &\stackrel{\text{Transf.-satz}}{=} \int_A \widehat{\mathbb{P}}_\mathcal{M}^\tau(\widehat{pr}_{\mathcal{M},n} \in X \mid \widehat{pr}_{\mathcal{M},m}) \circ T_\mathcal{O} d\mathbb{P}_\mathcal{O}^\tau \\ &\stackrel{(**)}{=} \int_A \mathbb{P}_\mathcal{O}^\tau(\xi_{\mathcal{O},n} \in X \mid \xi_{\mathcal{O},m}) d\mathbb{P}_\mathcal{O}^\tau. \end{aligned}$$

Die Gleichheit (*) gilt, da der stochastische Prozeß $(\widehat{pr}_{\mathcal{M},n} : n \in \mathbb{N}_0)$ über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{M}, \widehat{\mathfrak{K}}_\mathcal{M}, \widehat{\mathbb{P}}_\mathcal{M}^\tau)$ nach Lemma 8.2. im Anhang die einfache Markov-Eigenschaft erfüllt, wobei die Voraussetzungen von Lemma 8.2. wegen Bemerkung 2.4. und

$$\widehat{\mathbb{P}}_\mathcal{M}^\tau(\mathcal{M}) = \widehat{\mathbb{P}}_\mathcal{M}^\tau(\mathcal{M}) \stackrel{2.7.3}{=} \mathbb{P}_\mathcal{O}^\tau \circ T_\mathcal{O}^{-1}(\mathcal{M}) = \mathbb{P}_\mathcal{O}^\tau(\mathcal{O}) = \mathbb{P}^\tau(\mathcal{O}) \stackrel{2.7.2}{=} 1$$

erfüllt sind.

Die Behauptung des Satzes folgt sobald wir (**) gezeigt haben. Dazu genügt es Folgendes zu beweisen :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{O}}^{\tau}(\xi_{\mathcal{O},n} \in X \mid \xi_{\mathcal{O},m}) \stackrel{[\mathbb{P}_{\mathcal{O}}^{\tau}]}{=} \widehat{\mathbb{P}}_{\mathcal{M}}^{\tau}(\widehat{pr}_{\mathcal{M},n} \in X \mid \widehat{pr}_{\mathcal{M},m}) \circ T_{\mathcal{O}}.$$

Wegen $\sigma(\{\xi_{\mathcal{O},m}\}) = \sigma(\{\widehat{pr}_{\mathcal{M},m} \circ T_{\mathcal{O}}\}) = T_{\mathcal{O}}^{-1}(\sigma(\{\widehat{pr}_{\mathcal{M},m}\}))$ ist die rechte Seite $\sigma(\{\xi_{\mathcal{O},m}\})$ -meßbar, d.h. analog wie oben folgt die „Gleichheit“, da wegen Lemma 2.6. für $C \in \sigma(\{\xi_{\mathcal{O},m}\})$ gilt, daß $D := T_{\mathcal{O}}(C) \in \sigma(\{\widehat{pr}_{\mathcal{M},m}\})$ und $C = T_{\mathcal{O}}^{-1}(D)$. Also :

$$\begin{aligned} \int_C \widehat{\mathbb{P}}_{\mathcal{M}}^{\tau}(\widehat{pr}_{\mathcal{M},n} \in X \mid \widehat{pr}_{\mathcal{M},m}) \circ T_{\mathcal{O}} \quad d\mathbb{P}_{\mathcal{O}}^{\tau} &\stackrel{\text{Transf.-} \\ \text{satz und} \\ 2.7.3.}{=} &\int_D \widehat{\mathbb{P}}_{\mathcal{M}}^{\tau}(\widehat{pr}_{\mathcal{M},n} \in X \mid \widehat{pr}_{\mathcal{M},m}) \quad d\widehat{\mathbb{P}}_{\mathcal{M}}^{\tau} \\ &\stackrel{\text{wie } (*)}{=} &\int_D 1_X \circ \widehat{pr}_{\mathcal{M},n} \quad d\widehat{\mathbb{P}}_{\mathcal{M}}^{\tau} \\ &\stackrel{\text{Transf.-} \\ \text{satz und} \\ 2.7.3.}{=} &\int_C 1_X \circ \widehat{pr}_{\mathcal{M},n} \circ T_{\mathcal{O}} \quad d\mathbb{P}_{\mathcal{O}}^{\tau} \\ &\stackrel{2.6.3}{=} &\int_C \mathbb{P}_{\mathcal{O}}^{\tau}(\xi_{\mathcal{O},n} \mid \xi_{\mathcal{O},m}) \quad d\mathbb{P}_{\mathcal{O}}^{\tau}. \end{aligned}$$

Damit ist Satz 2.7. bewiesen. ■

3. Die LIDAR–Gleichung für polarisiertes Licht

Ausgehend vom stochastischen Modell zur Beschreibung der mehrfachen Streuung von polarisiertem Licht an atmosphärischen Teilchen (vgl. Kapitel 2) werden wir eine zeitunabhängige und eine zeitabhängige LIDAR–Gleichung für den (normierten) polarisierten Strahlungsfluß ableiten. Zunächst charakterisieren wir jedoch, was wir unter einem LIDAR verstehen wollen :

3.1. Definition und Bemerkung : (LIDAR–Sender und –Empfänger)

Es seien $x_R \in \mathbb{R}^3$, $\vec{n}_R \in S^2$, $\rho_R \in S^2$ mit $\rho_R \perp \vec{n}_R$, $r_R \in \mathbb{R}^+$, $S_R^2 := \{\varphi \in S^2 : \langle \varphi, \vec{n}_R \rangle > 0\}$, $FOV \subset S_R^2$ eine offene Menge in S^2 und $\tau : \mathfrak{A}_0 \rightarrow [0, 1]$ ein gegebenes Wahrscheinlichkeitsmaß.

Die Eigenschaften des *LIDAR–Senders* seien durch die Startverteilung τ , die sowohl die Lage– und die Richtungsverteilung des Sendestrahls, die zeitliche Verteilung des Sendepulses als auch den Stokes–Vektor des Sendestrahls charakterisiert, gegeben.

O.B.d.A. setzen wir $x_R := (0, 0, 0)$ und $\vec{n}_R := (0, 0, -1)$ in kartesischen Koordinaten; d.h. wir legen den Ursprung des Koordinatensystems in das Zentrum des LIDAR–Empfängers. Damit beschreiben wir den *LIDAR–Empfänger* mit Hilfe des Empfängerblickfeldes („field of view“) FOV und der Menge

$$\begin{aligned} REC &:= \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, \vec{n}_R \rangle = 0 \text{ und } \|x - x_R\| < r_R\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < r_R \right\}, \end{aligned}$$

wobei

x_R das Zentrum des Empfängers,

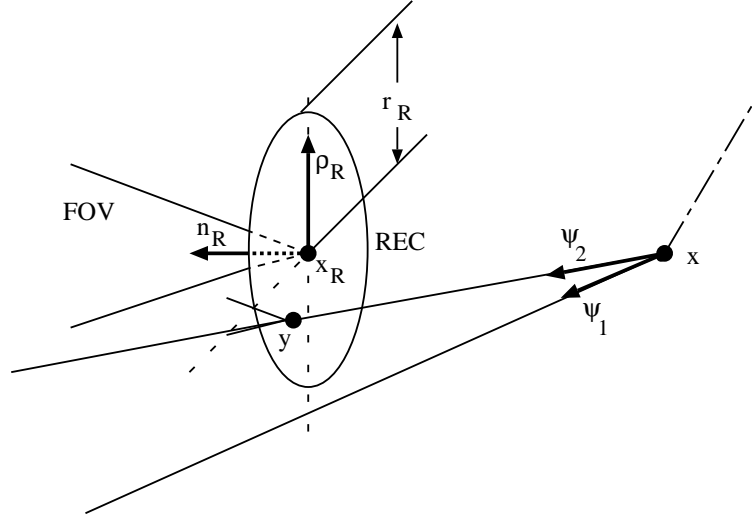
r_R den Empfängerradius,

\vec{n}_R die Normale zur Empfängerfläche *REC* in Empfangs-Flußrichtung und

ρ_R den Referenzvektor des Empfängers

bezeichnen. Durch ρ_R und \vec{n}_R wird die Referenzebene (ρ_R, \vec{n}_R) des Empfängers aufgespannt.

Bild 3.1 : Geometrie des LIDAR-Empfängers. Im Bild ist dabei $(x, \psi_1, t) \notin \mathcal{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $(x, \psi_2, t) \in \mathcal{R}$ für alle $t > \|y - x\|/c$.



Ferner seien:

$$\mathcal{H}^+ := \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, \vec{n}_R \rangle > 0\},$$

$$\mathcal{H}^- := \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, \vec{n}_R \rangle < 0\},$$

$$\mathcal{C}_x := \left\{ \psi \in S^2 : \psi = \frac{x' - x}{\|x' - x\|} \text{ mit } x' \in REC \right\} \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{H}^-,$$

$$\mathcal{R} := \left\{ (x, \varphi, t) \in \mathbb{R}^3 \times S^2 \times \mathbb{R}_0^+ : x \in \mathcal{H}^-, \varphi \in \mathcal{C}_x \cap FOV \text{ und } t > \frac{-\langle x, \vec{n}_R \rangle}{c \cdot \langle \varphi, \vec{n}_R \rangle} \right\},$$

$N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_{0,\infty}$, mit

$$N(\omega) := \begin{cases} \inf \{n \in \mathbb{N}_0 : (X_{(n)}(\psi), \Phi_n(\psi), T_{n+1}(\psi)) \in \mathcal{R}\}, & \text{falls } \{\dots\} \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{falls } \{\dots\} = \emptyset, \end{cases}$$

$\mathcal{N} := \{\omega \in \Omega : N(\omega) \in \mathbb{N}_0\}$,

$$\Phi : \Omega \rightarrow S_\infty^2, \quad \text{mit} \quad \Phi(\omega) := \begin{cases} \Phi_{N(\omega)}(\omega), & \text{falls } \omega \in \mathcal{N}, \\ \text{d}, & \text{falls } \omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
St : \Omega &\rightarrow Pol, \quad \text{mit } \Phi(\omega) := \begin{cases} St_{N(\omega)}(\omega), & \text{falls } \omega \in \mathcal{N}, \\ St_0, & \text{falls } \omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}, \end{cases} \\
R : \Omega &\rightarrow S^2, \quad \text{mit } R(\omega) := \begin{cases} R_{N(\omega)}(\omega), & \text{falls } \omega \in \mathcal{N}, \\ R_0, & \text{falls } \omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}, \end{cases} \\
X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}_{\infty}^3, \quad \text{mit } X(\omega) := \begin{cases} X_{(N(\omega))}(\omega), & \text{falls } \omega \in \mathcal{N}, \\ \vec{\infty}, & \text{falls } \omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}. \end{cases}
\end{aligned}$$

In allen relevanten physikalischen Situationen können wir davon ausgehen, daß:

$$\mathbb{P}^{\tau} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} T_k < \infty \right) = 0,$$

d.h. in einem endlichen Zeitintervall finden \mathbb{P}^{τ} -fast sicher nur endlich viele Streuungen statt. Ein physikalisches Argument dafür ist die endliche Anzahl der Streuzentren und die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit c ; vgl. Oppel et al. [21], Seite 27, und Marchuk et al. [16], Seite 19–21.

Damit, und da $N(\omega) < \infty$ bereits impliziert, daß $\langle X(\omega), \vec{n}_R \rangle < 0$ und $\langle \Phi(\omega), \vec{n}_R \rangle > 0$, können wir definieren, daß ein Photon mit der Streufolge $\omega \in \Omega$ genau dann *im Empfänger registriert*, d.h. *empfangen* wird, falls $N(\omega) < \infty$ ist. Ein solches Photon befindet sich genau zur Zeit

$$t := \left(\sum_{i=0}^{N(\omega)} T_i(\omega) \right) + \frac{-\langle X(\omega), \vec{n}_R \rangle}{c \cdot \langle \Phi(\omega), \vec{n}_R \rangle} \in \mathbb{R}^+$$

im Empfänger, d.h. $X_i(\omega) \in REC$. Wir sagen, das Photon wird *zur Zeit t empfangen*. Insbesondere gilt für $\omega \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
N(\omega) = n &\iff (X_{(n)}(\omega), \Phi_n(\omega), T_{n+1}(\omega)) \in \mathcal{R} \quad \text{und} \\
&(X_{(i)}(\omega), \Phi_i(\omega), T_{i+1}(\omega)) \in (\mathbb{R}^3 \times S^2 \times \mathbb{R}_0^+) \setminus \mathcal{R} \\
&\text{für alle } i = 0, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß der Empfänger genau dann das Photon empfängt, wenn es den Empfänger (d.h. die Empfängerfläche REC) zum ersten Mal in einer Richtung $\psi \in FOV$ kreuzt.

Es beschreibe :

\mathcal{H}^+ den Halbraum „hinter dem Empfänger“,

\mathcal{H}^- den Halbraum „vor dem Empfänger“,

- \mathcal{C}_x für $x \in \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{H}^-$ den Kegel der Richtungen ψ , so daß die von x ausgehenden Halbgeraden $\{x + ct\psi : t \in \mathbb{R}_0^+\}$ die Empfängerfläche REC schneiden,
- \mathcal{R} die Menge der Tripel (x, φ, t) , so daß die Strecke von x bis $x + ct\varphi$ den Empfänger im Empfängerblickfeld FOV kreuzt, wobei x ein Punkt „vor dem Empfänger“ ist,
- \mathcal{N} die Menge der Photonen, die nach endlich vielen oder keiner Streuung(en) empfangen werden

und für $\omega \in \mathcal{N}$:

- $N(\omega)$ die Anzahl der Streuungen, bis das Photon empfangen wird,
- $X(\omega)$ den letzten Streuort, bevor das Photon empfangen wird, falls $N(\omega) > 0$,
- $\Phi(\omega)$ die Richtung des Photons nach der Streuung am letzten Punkt „vor dem Empfänger“, also die Richtung des Photons im Empfänger,
- $St(\omega)$ den Stokes-Vektor des Photons nach der Streuung am letzten Punkt „vor dem Empfänger“, und
- $R(\omega)$ den Referenzvektor des Photons nach der Streuung am letzten Punkt „vor dem Empfänger“.

3.2. Lemma :

1. $\mathcal{C}_x \cap FOV$ ist eine offene Menge in S^2 für alle $x \in \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{H}^-$.
2. \mathcal{R} ist eine offene Menge in $\mathbb{R}^3 \times S^2 \times \mathbb{R}_0^+$.
3. $N + 1$ ist eine Stopzeit bezüglich der monoton wachsenden Folge $(\mathfrak{B}_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ von Sub- σ -Algebren von \mathfrak{K} .
4. Φ , St , R und X sind \mathfrak{K} - $\mathfrak{B}(S_\infty^2)$ -, \mathfrak{K} - $\mathfrak{B}(Pol)$ -, \mathfrak{K} - $\mathfrak{B}(S^2)$ - bzw. \mathfrak{K} - $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_\infty^3)$ -meßbare Abbildungen.

Beweis :

Zu 1: Die Behauptung folgt sofort, da FOV nach der Voraussetzung eine offene Menge in S^2 ist und $\mathcal{C}_x = f(x, \cdot)^{-1}([0, r_R[)$ für alle $x \in \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{H}^-$, wobei

$$f : \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{H}^- \times S_R^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad \text{mit} \quad f(x, \varphi) := \left\| x + \frac{-\langle x, \vec{n}_R \rangle}{\langle \varphi, \vec{n}_R \rangle} \varphi \right\|$$

eine stetige Abbildung ist.

Zu 2: Wir verwenden dazu die Abbildungen f (wie zuvor) und

$$g : \mathbb{R}^3 \times S^2 \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{mit} \quad g(x, \varphi, t) := \langle x + ct\varphi, \vec{n}_R \rangle.$$

Die Menge \mathcal{R} kann wie folgt dargestellt werden :

$$\mathcal{R} = \bigcup_{(x, \varphi) \in \mathcal{R}'} \{(x, \varphi)\} \times g(x, \varphi, \cdot)^{-1}(\mathbb{R}^+),$$

wobei (vgl. 1.)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}' &:= \{(x, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \times S^2 : x \in \mathcal{H}^- \text{ und } \varphi \in \mathcal{C}_x \cap FOV\} \\ &= \bigcup_{x \in \mathcal{H}^-} \{x\} \times \left(f(x, \cdot)^{-1}([0, r_R]) \cap FOV \right) \\ &= \left(\bigcup_{x \in \mathcal{H}^-} \{x\} \times f(x, \cdot)^{-1}([0, r_R]) \right) \cap pr_\varphi^{-1}(FOV) \end{aligned}$$

und $pr_\varphi : \mathbb{R}^3 \times S^2 \rightarrow S^2$ die Projektion auf die zweite Koordinate bezeichne. Mit der Stetigkeit der Abbildungen f und g , Lemma 8.1. aus dem Anhang und da FOV eine offene Menge ist, folgt, daß \mathcal{R}' und damit auch \mathcal{R} offene Mengen sind.

Zu 3: Folgt wegen Behauptung 2. und Bemerkung 2.3., da für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt :

$$\begin{aligned} \{N = n\} &= (X_{(n)}, \Phi_n, T_{n+1})^{-1}(\mathcal{R}) \cap \\ &\quad \bigcap_{i=0}^{n-1} (X_{(n)}, \Phi_n, T_{n+1})^{-1} \left((\mathbb{R}^3 \times S^2 \times \mathbb{R}_0^+) \setminus \mathcal{R} \right) \in \mathfrak{P}_{2n+1}, \\ \{N = \infty\} &= \Omega \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \{N = i\} \in \sigma \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \mathfrak{P}_{2i+1} \right). \end{aligned}$$

Zu 4: Folgt sofort aus Behauptung 3. und Bemerkung 2.3. ■

Wir führen nun die Begriffe des (normierten) zeit(un)abhängigen polarisierten Strahlungsflusses und des Meßzeitintervalls ein, welche wir später unter anderem in „der“ LIDAR-Gleichung näher charakterisieren. (vgl. Satz 3.4.)

3.3. Definition und Bemerkung : (Polarisierter Strahlungsfluß, Meßzeitintervall)

Wie wir bereits in 1.1. gesehen haben, wird ein Stokes-Vektor immer bezüglich einer Referenzebene dargestellt. Für festes $\vec{n}_R \in S^2$ und $\rho_R \in S^2$ mit $\vec{n}_R \perp \rho_R$ liefert uns die meßbare Abbildung $\Gamma : S^2 \times S^2 \rightarrow [0, \pi]$, mit

$$\Gamma(\varphi, \rho) := \begin{cases} \arccos(\langle n_R \times \rho_R, \varphi \times \rho \rangle), & \text{falls } \omega \in \mathcal{N} \text{ und } \varphi \in S_R^2, \\ 0, & \text{falls } \omega \in \Omega \setminus \mathcal{N} \end{cases}$$

den Winkel zwischen der Referenzebene des Photons nach der letzten Streuung vor dem Empfänger, und der Referenzebene des Empfängers, modulo π . Dies genügt, da nach Bemerkung 1.4. $\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(\phi + \pi)$ gilt. Die Orientierung der Referenzebene und Streuebene bleibt erhalten, da für $\varphi \in S_R^2$ nach Bemerkung 3.1. mit $N(\omega) < \infty$ bereits $\langle \Phi(\omega), \vec{n}_R \rangle > 0$ gilt. Die Rotation des Stokes-Vektors nach der letzten Streuung vor dem Empfänger, in die Referenzebene des Empfängers, ist durch die Rotationsmatrix $\mathcal{L}(\Gamma(\Phi(\omega), R(\omega)))$ nach Bemerkung 1.4. gegeben. $\mathcal{L} \circ \Gamma \circ (\Phi, R)$ ist analog zu Lemma 1.9., und mit Lemma 3.2.4 eine wohldefinierte $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{B}(Pol)$ - $\mathfrak{B}(Pol)$ -meßbare Abbildung. (Diese Abbildung ist nach der Definition von Pol , für jede einzelne Komponente des Stokes-Vektors beschränkt.)

Sei $\Theta \in \mathbb{R}^+$ ein technischer Parameter und $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^+$ sei ein offenes, beschränktes Intervall. Dann definieren wir die Abbildungen $\mathcal{f}, \mathcal{f}_\Theta : \mathbb{R}_\infty^3 \times S_\infty^2 \times Pol \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ und $\mathcal{f}_\mathcal{T}, \mathcal{f}_{\Theta, \mathcal{T}} : \mathbb{R}_\infty^3 \times S_\infty^2 \times Pol \times S^2 \times \mathbb{R}_{0, \infty}^+ \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit:

$$\mathcal{f}(x, \varphi, st, \rho) := \begin{cases} \langle \varphi, \vec{n}_R \rangle \cdot \mathcal{L}(\Gamma(\varphi, \rho)) \cdot st, & \\ \text{falls } (x, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \times S^2, & \\ (0, 0, 0, 0), & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mathcal{f}_\Theta(x, \varphi, st, \rho) := \begin{cases} \min \left\{ \Theta, \frac{\langle \varphi, \vec{n}_R \rangle}{\langle x, \vec{n}_R \rangle^2} \right\} \cdot \mathcal{L}(\Gamma(\varphi, \rho)) \cdot st, & \\ \text{falls } (x, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \times S^2 & \\ \text{und } \langle x, \vec{n}_R \rangle \neq 0, & \\ (0, 0, 0, 0), & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\beta_T(x, \varphi, st, \rho, t) &:= \begin{cases} \langle \varphi, \vec{n}_R \rangle \cdot 1_T \left[t + \frac{-\langle x, \vec{n}_R \rangle}{c \cdot \langle \varphi, \vec{n}_R \rangle} \right] \cdot \mathcal{L}(\Gamma(\varphi, \rho)) \cdot st, \\ \text{falls } (x, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \times S^2, \\ \text{und } \langle \varphi, \vec{n}_R \rangle \neq 0, \\ (0, 0, 0, 0), \quad \text{sonst,} \end{cases} \\
\beta_{\Theta, T}(x, \varphi, st, \rho, t) &:= \begin{cases} \min \left\{ \Theta, \frac{\langle \varphi, \vec{n}_R \rangle}{\langle x, \vec{n}_R \rangle^2} \right\} \cdot 1_T \left[t + \frac{-\langle x, \vec{n}_R \rangle}{c \cdot \langle \varphi, \vec{n}_R \rangle} \right] \cdot \mathcal{L}(\Gamma(\varphi, \rho)) \cdot st, \\ \text{falls } (x, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \times S^2 \\ \text{und } \langle x, \vec{n}_R \rangle \cdot \langle \varphi, \vec{n}_R \rangle \neq 0, \\ (0, 0, 0, 0), \quad \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ sind $\beta_i, \beta_{\Theta, i}, \beta_{T, i}$ und $\beta_{\Theta, T, i}$ wohldefinierte, meßbare, beschränkte Abbildungen, wobei $\beta = (\beta_i)_{i=1, \dots, 4}$ etc. gilt. Für $n \in \mathbb{N}_0$ existieren die folgenden Integrale :

$$\begin{aligned}
F_i &:= \int_{\Omega} \beta_i(X(\omega), \Phi(\omega), St(\omega), R(\omega)) \mathbb{P}^\tau(d\omega) \\
&= \mathbb{E}^\tau(\beta_i \circ (X, \Phi, St, R)), \\
F_{n, i} &:= \int_{\Omega} \beta_i(X(\omega), \Phi(\omega), St(\omega), R(\omega)) 1_{\{N=n\}}(\omega) \mathbb{P}^\tau(d\omega) \\
&= \mathbb{E}^\tau(\beta_i \circ (X, \Phi, St, R)) 1_{\{N=n\}}, \\
F_{T, i} &:= \int_{\Omega} \beta_{T, i}\left(X(\omega), \Phi(\omega), St(\omega), R(\omega), \sum_{i=0}^{N(\omega)} T_i(\omega)\right) \mathbb{P}^\tau(d\omega) \\
&= \mathbb{E}^\tau\left(\beta_i \circ \left(X, \Phi, St, R, \sum_{i=0}^N T_i\right)\right) \quad \text{und} \\
F_{T, n, i} &:= \int_{\Omega} \beta_{T, i}\left(X(\omega), \Phi(\omega), St(\omega), R(\omega), \sum_{i=0}^{N(\omega)} T_i(\omega)\right) 1_{\{N=n\}}(\omega) \mathbb{P}^\tau(d\omega) \\
&= \mathbb{E}^\tau\left(\beta_i \circ \left(X, \Phi, St, R, \sum_{i=0}^N T_i\right) 1_{\{N=n\}}\right).
\end{aligned}$$

Wir fassen $F := (F_i)_{i=1,\dots,4}$ etc. wieder zusammen. F_Θ und $F_{\Theta,n}$ bzw. $F_{\Theta,\mathcal{T}}$ und $F_{\Theta,\mathcal{T},n}$ definieren wir für $n \in \mathbb{N}_0$ in analoger Weise wie in der Definition für F und F_n bzw. $F_\mathcal{T}$ und $F_{\mathcal{T},n}$, indem wir im Integranden die Funktion \mathcal{f} bzw. $\mathcal{f}_\mathcal{T}$ durch die Funktion \mathcal{f}_Θ bzw. $\mathcal{f}_{\Theta,\mathcal{T}}$ ersetzen.

Im Sinne von Marchuk et al. [16], Seite 5, nennen wir:

- \mathcal{T} Meßzeitintervall,
- F den zeitunabhängigen, polarisierten Strahlungsfluß,
- F_Θ den normierten(Θ -kupierten), zeitunabhängigen, polarisierten Strahlungsfluß,
- $F_\mathcal{T}$ den zeitabhängigen, polarisierten Strahlungsfluß und
- $F_{\Theta,\mathcal{T}}$ den normierten(Θ -kupierten), zeitabhängigen, polarisierten Strahlungsfluß.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ nennen wir $F_n, F_{\Theta,n}, F_{\mathcal{T},n}$ bzw. $F_{\Theta,\mathcal{T},n}$ den n -fach gestreuten Anteil von $F, F_\Theta, F_\mathcal{T}$ bzw. $F_{\Theta,\mathcal{T}}$.

Für $\omega \in \mathcal{N}$ beschreibe :

$$1_\mathcal{T} \left[\left(\sum_{i=0}^{N(\omega)} T_i(\omega) \right) + \frac{-\langle X(\omega), \vec{n}_R \rangle}{c \cdot \langle \Phi(\omega), \vec{n}_R \rangle} \right]$$

genau die Photonen, deren Flugbahn den Empfänger zu einem Zeitpunkt innerhalb des Meßzeitintervalls \mathcal{T} durchkreuzt. (vgl. Bemerkung 3.1.) Der Faktor

$$\frac{1}{\langle X(\omega), \vec{n}_R \rangle^2} = \frac{4\pi}{4\pi \langle X(\omega), \vec{n}_R \rangle^2}$$

gibt die Normierung des Flusses $\langle \Phi(\omega), \vec{n}_R \rangle$ und somit auch die Normierung des polarisierten Flusses im Verhältnis der Oberfläche der Einheitskugel zur Oberfläche der Kugel an, deren Radius genau der Entfernung des letzten Streupunktes $X(\omega)$ zur Empfängerebene entspricht. (Beachte: das Zentrum x_R des Empfängers befindet sich wie oben bemerkt o.B.d.A. im Ursprung !) Da dieser Normierungsfaktor für $\langle X(\omega), \vec{n}_R \rangle \rightarrow 0$ eine Polstelle hat, ist es notwendig, den Strahlungsfluß nach oben zu beschränken; wir realisieren dies hier, in dem wir „mit Θ nach oben abschneiden“. Physikalisch heißt das, daß in einem kleinen Abstand vor dem Empfänger keine Streuung mehr stattfinden darf. Ein anderes Argument ist, daß jeder physikalische Empfänger übersteuert, und somit das Signal abschneidet (kupiert).

Der folgende Satz liefert die Darstellungen für den (normierten) zeit(un)abhängigen, polarisierten Strahlungsfluß, analog zur „wohlbekannteren“ Darstellungen für den „normalen“ (normierten) zeit(un)abhängigen Strahlungsfluß (siehe Noormohammadian [19]):

3.4. Satz : (Zeit(un)abhängige „physikalische“ LIDAR–Gleichung)

Sei $\overline{\mathcal{R}} := (\mathbb{R}^3 \times S^2 \times \mathbb{R}_0^+) \setminus \mathcal{R}$ und seien \mathcal{R} wie in Definition 3.1. und Θ bzw. \mathcal{T} wie in Definition 3.3. gegeben, dann gilt für $j \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$F_j = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} F_{n,j} \quad \text{und} \quad F_{\mathcal{T},j} = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} F_{\mathcal{T},n,j}, \quad \text{wobei}$$

$$\begin{aligned} F_{n,j} &= \int_{\Omega_0} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_{2n}} \int_{\Omega_{2n+1}} \ell_j(x(n), \varphi_n, st_n, \rho_n) \, 1_{\mathcal{R}}(x(n), \varphi_n, t_{n+1}) \\ &\quad \left(\prod_{i=0}^{n-1} 1_{\overline{\mathcal{R}}}(x(i), \varphi_i, t_{i+1}) \right) \, E_{n+1}((x_0, \varphi_0, t_0); t_1, \varphi_1; \dots; t_n, \varphi_n; dt_{n+1}) \\ &\quad P_n((x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0); t_1, \varphi_1, st_1, \rho_1; \dots; t_n, d(\varphi_n, st_n, \rho_n)) \\ &\quad \dots \, P_1((x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0); t_1; d(\varphi_1, st_1, \rho_1)) \, E_1((x_0, \varphi_0, t_0); dt_1) \\ &\quad \tau(d(x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{T},n,j} &= \int_{\Omega_0} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_{2n}} \int_{\Omega_{2n+1}} \ell_{\mathcal{T},j} \left(x(n), \varphi_n, st_n, \rho_n, \sum_{i=0}^n t_i \right) \, 1_{\mathcal{R}}(x(n), \varphi_n, t_{n+1}) \\ &\quad \left(\prod_{i=0}^{n-1} 1_{\overline{\mathcal{R}}}(x(i), \varphi_i, t_{i+1}) \right) \, E_{n+1}((x_0, \varphi_0, t_0); t_1, \varphi_1; \dots; t_n, \varphi_n; dt_{n+1}) \\ &\quad P_n((x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0); t_1, \varphi_1, st_1, \rho_1; \dots; t_n, d(\varphi_n, st_n, \rho_n)) \\ &\quad \dots \, P_1((x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0); t_1; d(\varphi_1, st_1, \rho_1)) \\ &\quad E_1((x_0, \varphi_0, t_0); dt_1) \, \tau(d(x_0, \varphi_0, st_0, \rho_0, t_0)) \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$x_{(i)} := x_0 + \sum_{j=1}^i ct_j \varphi_{j-1} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}_0.$$

Die Komponenten von F_{Θ} und $F_{\Theta,n}$ bzw. $F_{\Theta,\mathcal{T}}$ und $F_{\Theta,\mathcal{T},n}$ können wir für $n \in \mathbb{N}_0$ in analoger Weise wie bereits F und F_n bzw. $F_{\mathcal{T}}$ und $F_{\mathcal{T},n}$ darstellen, indem wir im Integranden wie bereits in Definition 3.3. die Funktion ℓ_j bzw. $\ell_{\mathcal{T},j}$ durch die Funktion $\ell_{\Theta,j}$ bzw. $\ell_{\Theta,\mathcal{T},j}$ ersetzen.

Wir nennen die Darstellung für $F = (F_j)_{j=1,\dots,4}$ bzw. $F_\Theta = (F_{\Theta,j})_{j=1,\dots,4}$ die (*normierte*) *zeitunabhängige*, „*physikalische*“ LIDAR-Gleichung für polarisiertes Licht und die Darstellung für $F_T = (F_{T,j})_{j=1,\dots,4}$ b.z.w. $F_{\Theta,T} = (F_{\Theta,T,j})_{j=1,\dots,4}$ (*normierte*) *zeitabhängige*, „*physikalische*“ LIDAR-Gleichung für polarisiertes Licht.

Beweis :

Wir zeigen nur die Aussage für F_T und $F_{T,n}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, denn alle anderen Aussagen folgen in analoger Weise. Mit den obigen Bezeichnungen gilt wegen den Definitionen von \mathcal{R} , $\overline{\mathcal{R}}$, N und ℓ_T für $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} N(\omega) = \infty &\implies \\ \ell_T\left(X(\omega), \Phi(\omega), St(\omega), R(\omega), \sum_{i=0}^{N(\omega)} T_i(\omega)\right) &= \\ = \ell_T\left(\vec{\infty}, \overset{d}{\infty}, St(\omega), R(\omega), \sum_{i=0}^{\infty} T_i(\omega)\right) &= (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Damit gilt wegen der Meßbarkeit von N und der Beschränktheit von $\ell_{T,j}$:

$$\begin{aligned} F_{T,j} &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} F_{T,n,j} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \int_{\Omega} \ell_{T,j}\left(X_{(n)}(\omega), \Phi_n(\omega), St_n(\omega), R_n(\omega), \sum_{i=0}^n T_i(\omega)\right) 1_{\{N=n\}}(\omega) \mathbb{P}^\tau(d\omega) \end{aligned}$$

und für $n \in \mathbb{N}_0$ wegen Bemerkung 3.1. :

$$\begin{aligned} F_{T,n,j} &= \int_{\Omega} \ell_{T,j}\left(X_{(n)}(\omega), \Phi_n(\omega), St_n(\omega), R_n(\omega), \sum_{i=0}^n T_i(\omega)\right) 1_{\mathcal{R}}\left(X_{(n)}(\omega), \Phi_n(\omega), T_{n+1}(\omega)\right) \\ &\quad \left(\prod_{i=0}^{n-1} 1_{\overline{\mathcal{R}}}\left(X_{(i)}(\omega), \Phi_i(\omega), T_{i+1}(\omega)\right)\right) \mathbb{P}^\tau(d\omega). \end{aligned}$$

Wegen der $\mathfrak{P}_{2n+1}\text{-}\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -Meßbarkeit des Integranden für $n \in \mathbb{N}_0$ (vgl. Lemma 3.2.) folgt mit dem Satz von Ionescu-Tulcea (vgl. Neveu [18], Satz 5.1.1, oder Oppel et al. [21] Abschnitt A.2, Theorem 2) und dem Faktorisierungssatz (vgl. Gänbler-Stute [7], Satz 1.2.24) sofort die Behauptung für $F_{T,n,j}$. ■

4. Charakterisierung der Extinktions- und Streuerverteilung

Wir werden in diesem Kapitel die Markov-Kerne E_k bzw. P_k für $k \in \mathbb{N}$ genauer charakterisieren und sie physikalisch interpretieren. Dazu führen wir die Begriffe „verallgemeinerte Exponentialverteilung“, „Extinktionsverteilung“, „Phasenfunktion“ und „Streuverteilung“ ein :

4.1. Definition und Bemerkung : (Verallgemeinerte Exponentialverteilung)

Sei $\Sigma : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine Borel-meßbare und auf \mathbb{R}_0^+ lokal integrierbare Funktion mit $\int_{\mathbb{R}_0^+} \Sigma(s) ds = \infty$, dann besitzt die Abbildung (vgl. Ooppel et al. [21])

$$\mathcal{E}_\Sigma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad \text{mit} \quad \mathcal{E}_\Sigma(t) := \begin{cases} 1 - \exp\left(-\int_0^t \Sigma(s) ds\right), & \text{falls } t \geq 0, \\ 0, & \text{falls } t < 0, \end{cases}$$

die folgenden Eigenschaften :

1. \mathcal{E}_Σ ist eine Verteilungsfunktion mit $\mathcal{E}_\Sigma(t) = 0$ für alle $t \leq 0$.
2. \mathcal{E}_Σ ist absolut stetig und in \mathbb{R} fast überall differenzierbar.
3. $\mathcal{E}_\Sigma(t) = \int_0^t \Sigma(s) \exp\left(-\int_0^s \Sigma(r) dr\right) ds$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$.

Das durch \mathcal{E}_Σ eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaß $\varepsilon_\Sigma : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ nennen wir *die verallgemeinerte Exponentialverteilung mit der Extinktion Σ* .

4.2. Definition : (Extinktionsverteilung)

Sei $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine Borel-meßbare Funktion, so daß für alle $(x, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \times S^2$ gilt:

1. $\int_{\mathbb{R}_0^+} \sigma(x + s\varphi) ds = \infty$ und
2. $\sigma(x + \cdot \varphi)$ ist eine lokal integrierbare Funktion auf \mathbb{R}_0^+ ,

dann nennen wir die Abbildung $E_\sigma : (\mathbb{R}^3 \times S^2) \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+) \rightarrow [0, 1]$, mit:

$$E_\sigma(x, \varphi; A) := \varepsilon_{\Sigma_{x, \varphi}}(A)$$

Extinktionsverteilung mit der Extinktion σ , wobei wir für $(x, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \times S^2$ definieren :

$$\Sigma_{x, \varphi} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad \text{mit} \quad \Sigma_{x, \varphi}(t) := c \sigma(x + ct\varphi).$$

Für $(x, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \times S^2$ und $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ mit $a < b$ bezeichne $E_\sigma(x, \varphi; [a, b])$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Photon, das sich entlang des Halbstrahls $\{x + ct\varphi : t > 0\}$ bewegt, zwischen den Punkten $x + ca\varphi$ und $x + cb\varphi$ gestreut wird.

Im folgenden Lemma 4.3. fassen wir einige wichtige Eigenschaften von E_σ und E'_σ zusammen, die wir später noch benötigen :

4.3. Lemma :

Sei $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ wie in 4.2. definiert, dann gilt :

1. E_σ ist eine Übergangswahrscheinlichkeit von $((\mathbb{R}^3 \times S^2), \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3 \times S^2))$ nach $(\mathbb{R}_0^+, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+))$.
2. Für $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$ und $(x, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \times S^2$ gilt :

$$E_\sigma(x, \varphi; A) = \int_A c \sigma(x + cs\varphi) \exp\left(-\int_0^s c \sigma(x + cr\varphi) dr\right) ds.$$

Beweis :

Zu 1 : Siehe Ooppel et al. [21], S. 22 und S. 40.

Zu 2 : Folgt sofort aus Bemerkung 4.1.

4.4. Definition und Bemerkung : (Phasenfunktion, Streuverteilung)

Seien Θ und Φ wie in 1.10. gegeben; wir werden sowohl die Funktionen als auch die entsprechenden Variablen mit θ bzw. ϕ bezeichnen.

Nach 1.7. gilt für die polarisierte Phasenfunktion ph_{pol}

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi ph_{pol}(x, \theta, \phi, st) \sin(\theta) d\theta d\phi = 1.$$

Wir definieren die Abbildung $P_{pol} : (\mathbb{R}^3 \times S^2 \times Pol \times S^2) \times \mathfrak{B}(S^2 \times Pol \times S^2) \rightarrow [0, 1]$ mittels:

$$P_{pol}(x, \varphi, st, \rho; B) := \int_B ph_{pol}(x, \theta(\varphi, \varphi'), \phi(\varphi, \rho, \varphi'), st) \\ \left(\lambda \times \delta_{N(x, \theta(\varphi, \varphi'), \phi(\varphi, \rho, \varphi'), st) \cdot \mathcal{M}(x, \theta(\varphi, \varphi')) \cdot \mathcal{L}(\phi(\varphi, \rho, \varphi')) \cdot st} \times \delta_{Rot_2(\varphi, \rho, \varphi') \cdot \rho} \right) \left(d(\varphi', st', \rho') \right).$$

Dabei ist \mathcal{L} die Drehung des Stokes-Vektors nach 1.4., \mathcal{M} die Mueller-Matrix für die Streuung des Stokes-Vektors nach 1.5., und $Rot_2(\varphi, \rho, \varphi')$ die Rotationsmatrix nach 1.10.. Wir nennen P_{pol} die Streuverteilung.

Durch die Konstruktion mit dem Dirac-Maß ist der gestreute Stokes-Vektor $st' = N(x, \theta(\varphi, \varphi'), \phi(\varphi, \rho, \varphi'), st) \cdot \mathcal{M}(x, \theta(\varphi, \varphi')) \cdot \mathcal{L}(\phi(\varphi, \rho, \varphi')) \cdot st$ mit Wahrscheinlichkeit 1 durch die Richtung des gestreuten Photons φ' und durch (φ, st, ρ) des einfallenden Photons bestimmt.

Ebenfalls durch das Dirac-Maß ist der gestreute Referenzvektor $\rho' = Rot_2(\varphi, \rho, \varphi') \cdot \rho$ mit Wahrscheinlichkeit 1 durch die Richtung des gestreuten Photons φ' und durch (φ, ρ) des einfallenden Photons bestimmt.

Für $(x, \varphi, st, \rho) \in \mathbb{R}^3 \times S^2 \times Pol \times S^2$ und $B \in \mathfrak{B}(S^2 \times Pol \times S^2)$, $B \neq \emptyset$ bezeichnet $P_{pol}(x, \varphi, st, \rho; B)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Photon, das aus der Richtung φ mit Stokes-Vektor st bezüglich Referenzvektor ρ kommt und im Punkt x gestreut wird, sich in Richtung $\varphi' \in pr_{dir}(B)$ fortbewegt. Der gestreute Stokes-Vektor ist dann durch

$$st' = N(x, \theta(\varphi, \varphi'), \phi(\varphi, \rho, \varphi'), st) \cdot \mathcal{M}(x, \theta(\varphi, \varphi')) \cdot \mathcal{L}(\phi(\varphi, \rho, \varphi')) \cdot st$$

und der gestreute Referenzvektor durch $\rho' = Rot_2(\varphi, \rho, \varphi') \cdot \rho$ gegeben.

4.5. Lemma :

Mit den Bezeichnungen von Definition 4.4. gilt: P_{pol} ist ein Markov-Kern von $(\mathbb{R}^3 \times S^2 \times Pol \times S^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3 \times S^2 \times Pol \times S^2))$ nach $(S^2 \times Pol \times S^2, \mathfrak{B}(S^2 \times Pol \times S^2))$.

Beweis :

Dies folgt sofort mit Lemma 8.3. im Anhang, sowie der Normierungsbedingung für ph_{pol} und der Meßbarkeit der Abbildungen $N \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{L}$ (siehe Lemma 1.9.) und Rot_2 (siehe Bemerkung 1.11.).

4.6. Definition und Bemerkung : (Vergleich der Phasenfunktionen)

Wir definieren nun $ph_D(x, \theta) := \frac{1}{4} (m_1(x, \theta) + m_2(x, \theta))$, dann können wir ph_{pol} wie folgt schreiben:

$$ph_{pol}(x, \theta, \phi, st) = \frac{1}{2\pi} ph_D(x, \theta) + \frac{1}{8\pi} (m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)) \left((2i_1 - 1) \cos(2\phi) + u \sin(2\phi) \right)$$

wobei wir mit ph_D die *Phasenfunktion nach Deirmendjian* bezeichnen, die für die Bestimmung der Streuerverteilung für unpolarisiertes Licht benutzt wird (siehe Noor-mohammadian [19] und Deirmendjian [5]). Wir sehen, daß ph_{pol} von ϕ und st nur dann wesentlich abhängt, wenn $m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)$ groß wird. In diesem Fall weicht die Streuerverteilung P_{pol} von der Streuerverteilung für unpolarisiertes Licht signifikant ab. Siehe hierzu auch Bemerkung 5.4. und Bild 5.2.

4.7. Definition und Bemerkung : (Die Markovkerne E_k und P_k)

Für $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathfrak{K}_{2k-1}$, $B \in \mathfrak{K}_{2k}$, $\psi \in \Omega^{(2k-2)}$ und $\omega \in \Omega^{(2k-1)}$ (vgl. Satz 2.7.) sind

$$E_k(\psi; A) := \begin{cases} E_\sigma(X_{(k-1)}(\psi), \Phi_{k-1}(\psi); A \cap \mathbb{R}_0^+), \\ \text{falls } (X_{(k-1)}(\psi), \Phi_{k-1}(\psi)) \in \mathbb{R}^3 \times S^2, \\ \delta_\infty(A), \quad \text{sonst,} \end{cases}$$

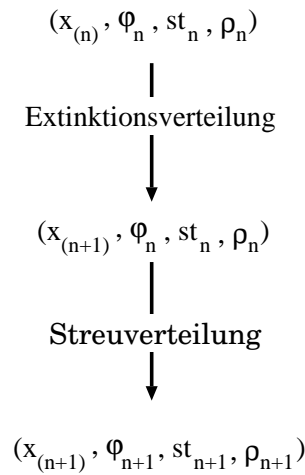
$$P_k(\omega; B) := \begin{cases} P_{pol}(X_{(k)}(\omega), \Phi_{k-1}(\omega), St_{k-1}(\omega), R_{k-1}(\omega); B \cap S^2 \times Pol \times S^2), \\ \text{falls } (X_{(k)}(\omega), \Phi_{k-1}(\omega), St_{k-1}(\omega), R_{k-1}(\omega)) \in \\ \quad \in \mathbb{R}^3 \times S^2 \times Pol \times S^2, \\ (\delta_\infty(B), St_0, R_0), \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Markovkerne mit den in Satz 2.7. geforderten Eigenschaften.

5. Der Simulationsalgorithmus

Da der Fluß im stochastischen Modell nach Kapitel 2 als Markov-Prozeß beschrieben werden kann, ist die Simulation mit einem Monte-Carlo-Algorithmus naheliegend. Die *direkte* Monte-Carlo-Simulation läßt sich für einen Schritt mit folgendem Flußdiagramm 5.1 veranschaulichen.

Bild 5.1 : Flußdiagramm für die direkte Monte-Carlo-Simulation. Dargestellt ist nur ein Simulationsschritt.



Wir haben ein Photon gegeben mit letztem Streuort $x_{(n)}$, Flugrichtung φ_n , Stokes-Vektor st_n und Referenzvektor ρ_n . Mittels der Extinktionsverteilung E_σ (bestimmt durch den Extinktionskoeffizienten σ) können wir die Flugzeit t_{n+1} zufällig bestimmen, wobei wir dann mit $x_{(n+1)} = x_{(n)} + ct_{n+1}\varphi_n$ den neuen Streuort $x_{(n+1)}$ erhalten. Nun können wir mit der Streuverteilung P_{pol} (gegeben durch die Phasenfunktion ph_{pol}) die neue Flugrichtung φ_{n+1} und somit auch den gestreuten Stokes-Vektor st_{n+1} und den neuen Referenzvektor ρ_{n+1} zufällig bestimmen. Diesen Simulationsschritt können wir nun iterieren und mit dem simulierten Pfad dann den polarisierten Fluß nach 3.3. berechnen. Bei der direkten Monte-Carlo-Simulation werden

die Stokes-Vektoren nach der letzten Streuung in die Empfängerebene rotiert und, je nach dem welchen Fluß (aus 3.3.) man berechnen will, entsprechend gewichtet aufaddiert (siehe Bemerkung 1.2.).

In den folgenden Abschnitten werden wir einen einzelnen Simulationsschritt näher untersuchen.

Im Simulationsprogramm wird kein *direktes* Monte-Carlo-Verfahren sondern ein *varianzreduzierendes* verwendet. Die exakte Theorie der Varianzreduktion, angepaßt auf das stochastische Modell, wird bei Noormohammadian [19] ausgeführt. Diese Verfahren werden auch mit transporttheoretische Methoden bei Marchuk et al. [16] erläutert.

5.1. Bemerkung : (Flugzeit bzw. Streuort)

Die Flugzeit bzw. der nächste Streuort, wird mit Hilfe der Extinktionsverteilung E_k simuliert. Da E_k nicht vom Stokes-Vektor abhängt, ergibt sich keine Änderung zu den Verfahren, wie sie bei Noormohammadian [19] beschrieben werden.

5.2. Definition und Bemerkung : (Streuverteilung, Flugrichtung)

Wir wollen nun zeigen, wie man mit Hilfe der Streuverteilung, bzw. der Phasenfunktion ph_{pol} die neue Flugrichtung simulieren kann.

Da st' und ρ' nach Bemerkung 4.4. bereits durch Die Richtungsvektoren φ' und φ festgelegt sind, und nach Bemerkung 1.10. auch $\varphi' = Rot_1(\theta, \phi) \cdot \varphi$ gilt, sind für gegebene φ, θ und ϕ , st' und ρ' bereits eindeutig (mit Wahrscheinlichkeit 1) bestimmt. Wir interessieren uns also für die gemeinsame Verteilungsfunktion P' von (θ, ϕ) , welche bei gegebenem x und st durch ihre Dichte, die polarisierte Phasenfunktion ph_{pol} , bestimmt ist:

$$P' : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow [0, 1] \quad \text{mit}$$

$$P'(\theta, \phi) := \int_0^\theta \int_0^\phi ph_{pol}(x, \theta', \phi', st) \sin(\theta') d\theta' d\phi'$$

Da die Dichte ph_{pol} und somit auch P' nicht faktorisieren, müssen wir, um θ und ϕ simulieren zu können, die Marginaldichte ph_1 bestimmen, um mit ihr dann den Winkel θ zu simulieren. Anschließend berechnen wir die bedingte Dichte ph_2 bei gegebenen θ und bestimmen dann ϕ zufällig gemäß ph_2 . Wir betrachten also für

festes x und st

$$ph_1(x, \theta) := \int_0^{2\pi} ph_{pol}(x, \theta, \phi, st) d\phi \quad \text{und}$$

$$ph_2(x, \phi, st | \theta) := \begin{cases} \frac{ph_{pol}(x, \theta, \phi, st)}{ph_1(x, \theta)}, & \text{falls } ph_1(x, \theta) \neq 0, \\ 0, & \text{falls } ph_1(x, \theta) = 0. \end{cases}$$

Wird nun θ mit der Marginaldichte ph_1 simuliert und ϕ mit der bedingten Dichte ph_2 simuliert, so hat der Zufallsvektor (θ, ϕ) , bei stochastisch unabhängiger Simulierung von θ und ϕ , die Verteilung P' mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $ph_{pol}(x, \theta, \phi, st) = ph_1(x, \theta) ph_2(x, \phi, st | \theta)$. Siehe Schmitz–Lehmann [25], Seite 87.

5.3. Bemerkung : (Marginaldichte und Simulation von θ)

Die Marginaldichte ph_1 von ph_{pol} für θ ist für festes x und st eindeutig gegeben durch (siehe Richter [23], Seite 225):

$$\begin{aligned} ph_1(x, \theta) &= \int_0^{2\pi} ph_{pol}(x, \theta, \phi, st) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} (m_1(x, \theta) + m_2(x, \theta)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)) \left((2i_{||} - 1) \cos(2\phi) + u \sin(2\phi) \right) \right] d\phi \\ &= \frac{1}{4} (m_1(x, \theta) + m_2(x, \theta)). \end{aligned}$$

Wir sehen daß $ph_1(x, \theta)$ unabhängig von st ist und auch $ph_1(x, \theta) = ph_D(x, \theta)$ gilt (siehe 4.6.). Die Dichte der Verteilung des Winkels zwischen der Flugrichtung vor und nach der Streuung ist also *identisch mit der entsprechenden Dichte im unpolarisierten Fall*.

Wir haben die Abbildungen $(m_i)_{i=1..4}$ tabellarisch für diskrete θ_j gegeben. Damit ist die Wahrscheinlichkeitsdichte ph_1 diskret als Polygonzug gegeben und wir können ein zufälliges θ durch Invertieren der Verteilungsfunktion gewinnen. Siehe Schmitz–Lehmann [25], Seite 63.

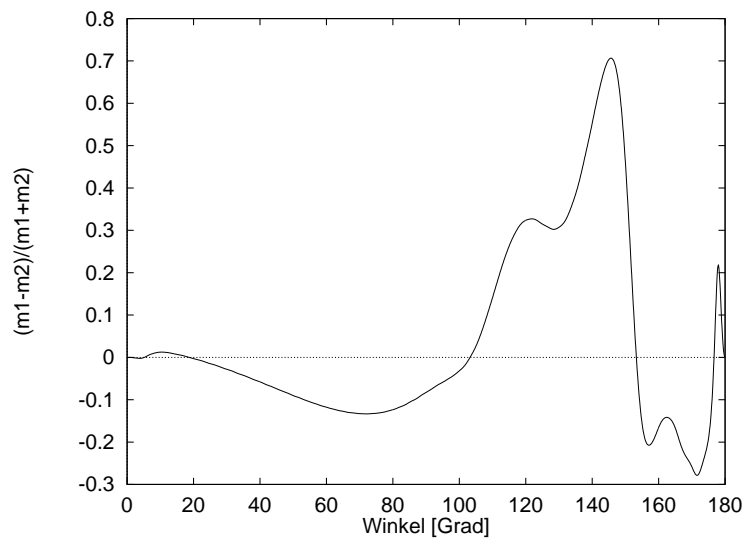
5.4. Bemerkung : (Bedingte Dichte von ϕ bei gegebenem θ)

Die bedingte Dichte ph_2 von ph_{pol} für ϕ unter der Bedingung θ ist für festes x und st wie in Definition 5.2. gegeben. Siehe Richter [23], Seite 282ff, sowie Schmitz–Lehmann [25], Seite 87. Sei nun $ph_1(x, \theta) \neq 0$, so gilt

$$ph_2(x, \phi, st | \theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)}{m_1(x, \theta) + m_2(x, \theta)} \left((2i_{\parallel} - 1) \cos(2\phi) + u \sin(2\phi) \right)$$

Der erste Term der Summe $1/(2\pi)$ ist die Dichte der Gleichverteilung von ϕ auf $[0, 2\pi]$, wie sie im unpolarisierten Fall benutzt wird. Der zweite Teil der Summe kann somit als „Korrektur“ bei Berücksichtigung der Polarisation aufgefaßt werden. Dieser Term ist direkt proportional zu $(m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)) / (m_1(x, \theta) + m_2(x, \theta))$. Anhand von Bild 5.2 erkennen wir, daß auch im Fall der Mie–Streuung die Abweichungen von der Gleichverteilung groß werden können.

Bild 5.2 : $(m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)) / (m_1(x, \theta) + m_2(x, \theta))$ für eine Deirmendjian C1–Wolke (siehe hierzu Bemerkung 8.5.).

**5.5. Bemerkung : (Simulation von ϕ)**

Um nun ϕ bei bereits bestimmten θ anhand von ph_2 zu simulieren, verwenden wir die Verwerfungsmethode, oft auch Neumannsche Zurückweisungsmethode genannt. Siehe Schmitz–Lehmann [25], Seite 66ff.

Wir betrachten hierzu für festes x, st und θ eine integrierbare Funktion $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

$$g(\phi) \geq ph_2(x, \phi, st \mid \theta) \quad \forall \phi \in [0, 2\pi] \quad \text{und}$$

$$\alpha := \int_0^{2\pi} g(\phi) d\phi < \infty.$$

Die Funktion $g(\cdot)/\alpha$ können wir als eine Wahrscheinlichkeitsdichte für $\phi \in [0, 2\pi]$ betrachten. Der Verwerfungsalgorithmus lautet:

1. Erzeuge eine Zufallszahl $\tilde{\phi}$ mit der Dichte $g(\cdot)/\alpha$.
2. Erzeuge eine von $\tilde{\phi}$ stochastisch unabhängige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallszahl Z .
3. Ist nun $g(\tilde{\phi}) > 0$ und $ph_2(x, \tilde{\phi}, st \mid \theta) / g(\tilde{\phi}) \geq Z$, dann sei $\tilde{\phi}$ unser gesuchtes ϕ , andernfalls gehe zu Punkt 1. und wiederhole den Algorithmus, bis er von Erfolg gekrönt ist.

Bei Schmitz–Lehmann [25] auf Seite 67 findet sich der Beweis, daß ein mit diesem Algorithmus bestimmtes ϕ gemäß der Dichte ph_2 verteilt ist.

Im Zuge des Verwerfungsalgorithmus wird $\tilde{\phi}$ zuerst gemäß der Dichte $g(\cdot)/\alpha$ bestimmt. Wir sind also an einer möglichst einfachen Gestalt von $g(\cdot)/\alpha$ interessiert, da wir dann in der Lage sind, ϕ effizient zufällig zu bestimmen. Die „einfachste“ Gestalt ist in diesem Fall die Gleichverteilung auf $[0, 2\pi]$, es gilt dann

$$\frac{g(\phi)}{\alpha} = \frac{1}{2\pi} \quad \text{und somit} \quad g(\phi) = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Mit dieser Gestalt von $g(\cdot)$ ist zusätzlich $g(\phi) > 0, \forall \phi \in [0, 2\pi]$ sichergestellt.

Es ist noch α so zu bestimmen, daß für alle $\phi \in [0, 2\pi]$ immer $g(\phi) \geq ph_2(x, \phi, st \mid \theta)$ gilt. Der Erwartungswert für die Anzahl der Schritte, bis ein ϕ akzeptiert wird, ist α . Siehe hierzu Schmitz–Lehmann [25] auf Seite 68. Daher müssen wir aus Effizienzgründen α so klein als möglich wählen. Wählen wir also $g(\cdot) = \alpha/(2\pi)$, so wäre die effizienteste Wahl für α ,

$$\begin{aligned} g(\phi) &= \max_{\phi' \in [0, 2\pi]} \left(ph_2(x, \phi', st \mid \theta) \right) \\ &=: \max(x, st, \theta), \end{aligned}$$

das globale Maximum der bedingten Dichte ph_2 . Wir können dieses globale Maximum jedoch nur nach oben abschätzen:

5.6. Bemerkung : (Abschätzung für das globale Maximum von ph_2)

Wir wollen eine obere Schranke für das globale Maximum $max(x, st, \theta)$ bei gegebenem x, st und θ und für $ph_1(\theta) > 0$ angeben.

Nach Bemerkung 8.5. gilt $m_1(x, \theta) \geq 0$ sowie $m_2(x, \theta) \geq 0$, und es folgt

$$-1 \leq \frac{m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)}{m_1(x, \theta) + m_2(x, \theta)} \leq 1.$$

Weiterhin gilt nach der Definition des normierten Stokes Vektors

$$0 \leq i_{\parallel} \leq 1 \quad \text{und} \quad -1 \leq u \leq 1.$$

Wir können damit ph_2 für beliebiges x, st und θ abschätzen:

$$\begin{aligned} ph_2(x, \phi, st \mid \theta) &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)}{m_1(x, \theta) + m_2(x, \theta)} \left((2i_{\parallel} - 1) \cos(2\phi) + u \sin(2\phi) \right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \left| \frac{m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta)}{m_1(x, \theta) + m_2(x, \theta)} \right| \left(|2i_{\parallel} - 1| |\cos(2\phi)| + |u| |\sin(2\phi)| \right) \\ &\leq \frac{3}{2\pi}. \end{aligned}$$

Wir erhalten $max(x, st, \theta) \leq \frac{3}{2\pi}$ und können daher $\alpha = 3$ wählen.

Die Winkel θ und ϕ sind nun simuliert. Mit den Rotationen Rot'_1 und Rot'_2 aus Bemerkung 1.10. lassen sich die Ausbreitungsrichtung und der Referenzvektor nach der Streuung berechnen. Der gestreute Stokes-Vektor läßt sich mit der Transformation $N \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{L}$ nach Lemma 1.9. berechnen. Die Beschreibung eines Simulationsschritts ist somit abgeschlossen.

5.7. Bemerkung : (Varianzreduzierende Monte-Carlo-Methoden)

Ein typisches LIDAR hat einen Empfänger in der Größenordnung von Zentimetern, wobei die Wolken einige Kilometern entfernt sind. Würde man mit direkten Monte-Carlo-Verfahren simulieren, so wäre die Varianz des simulierten Rücksignals sehr groß, da nur sehr wenige Photonen in den simulierten Empfänger kommen. Ich konnte auf einem Simulationsprogramm für nichtpolarisierte LIDAR Signale aufbauen, das bereits einige wirkungsvolle varianzreduzierende Verfahren enthielt. Diese werden bei Noormohammadian [19] näher beschrieben. Für die Polarisation mußte das Verfahren des „scattering splitting“ angepaßt werden, da im allgemeinen $ph_{pol} \neq ph_d$ gilt.

6. Ergebnisse von Simulationsrechnungen

In diesem Kapitel werden wir als Beispiel für die Leistungsfähigkeit des in den vorangehenden Kapiteln vorgestellten Modells die Ergebnisse einer Simulationsrechnung diskutieren.

Wir werden sehen, daß die Simulationsergebnisse den qualitativen Erwartungen aus physikalischen Überlegungen entsprechen. Auch ein Vergleich mit Meßdaten des DLR–Microlidars ist möglich. Eine Beschreibung des DLR–Microlidars findet man bei Krichbaumer et al. [15].

6.1. Bemerkung : (Eingabedaten für die Simulation)

Wir betrachten in den Simulationsrechnungen einen LIDAR mit folgenden Daten:

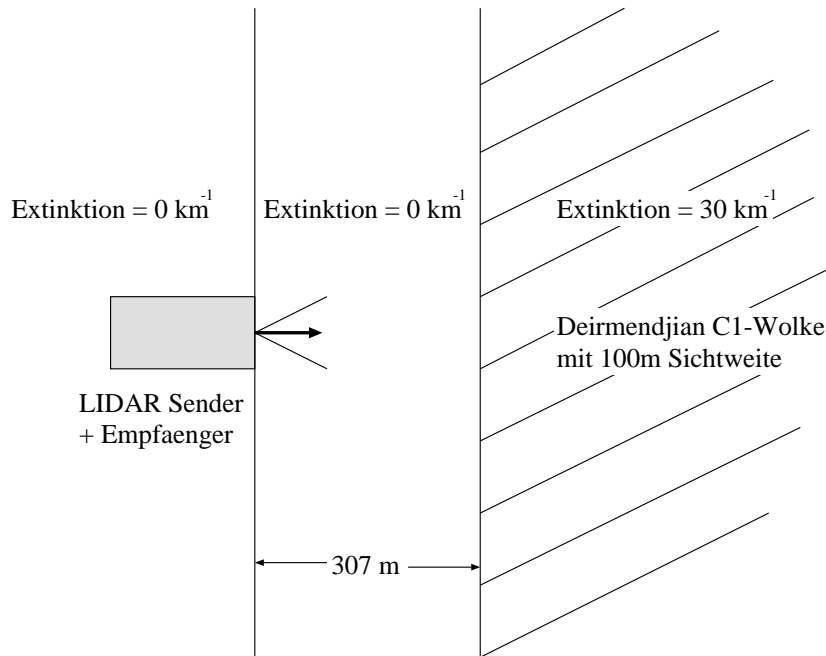
LIDAR Sender:

Divergenz (halber Öffnungswinkel):	1.75 mrad
Fleckgröße:	1 mm
Pulslänge:	12 ns (entspricht 3.6 m)
Wellenlänge:	1064 nm

LIDAR Empfänger:

FOV (Field of View, halber Öffnungswinkel):	3 mrad
Radius der effektiven Empfängerfläche:	2.71 cm

Der normierte Stokes–Vektor des Sendestrahls in Ausbreitungsrichtung ist $st = (1, 0, 0, 0)^T$. Sender und Empfänger stehen am selben Ort und haben dieselbe Blickrichtung (monostatischer LIDAR) und Referenzebene. Diese Daten sind ein einfaches Modell für den DLR–Microlidar, wobei ich in diesem Fall nur das zentrale FOV (Field of View) des DLR–Microlidar Empfängers betrachte. Mit dem DLR–Microlidar wurden Messungen aus einem Flugzeug heraus, nach unten auf eine Wolke blickend, durchgeführt. In Bild 6.1 ist die geometrische Situation, die in

Bild 6.1 : Geometrische Situation der Simulation.

der Simulation verwendet wurde und die den Gegebenheiten während der Messung nahekommt, dargestellt. Als weitere Eingabe verwenden wir in diesem Fall eine Deirmendjian C1-Mueller-Matrix (siehe Bild 6.2 und Bild 6.3). Die Parameter und die Form der Größenverteilung, die der C1-Größenverteilung zugrunde liegen, findet man bei Deirmendjian [5] Seite 75ff. Die C1-Mueller-Matrix wurde mit einem Mie-Programm berechnet, das in Bemerkung 8.5. näher erläutert wird.

6.2. Bemerkung : (Simulationsergebnisse)

Zu Anfang sehen wir in Bild 6.4 das relative Gesamtsignal der einzelnen Komponenten des Stokes-Vektors, aufgetragen gegen die halbe Photonenpfadlänge, die bei Einfachstreuung der Eindringtiefe der Photonen entspricht.

Im Bild 6.5 sind die Komponenten U und V des Stokes-Vektors des Gesamtsignals aufgetragen, die im Vergleich zu den Komponenten I_{\parallel} und I_{\perp} verschwinden. Das heißt, daß kein zirkular polarisiertes Signal aus dem linear polarisierten Laserpuls entsteht, bzw. daß jegliche Phaseninformation durch das unabhängige (nicht kohärente) Streuen an den zufällig verteilten Teilchen weggemittelt wird.

Wir erkennen eine deutliche Differenz in der Position der Maxima von I_{\parallel} und von I_{\perp} . Sie liegen bei 309 m bzw. bei 321 m. Dies folgt aus der Tatsache, daß ein Beitrag

Bild 6.2 : Die Elemente m_1, m_2, m_3 der C1-Mueller-Matrix, logarithmisch aufgetragen.

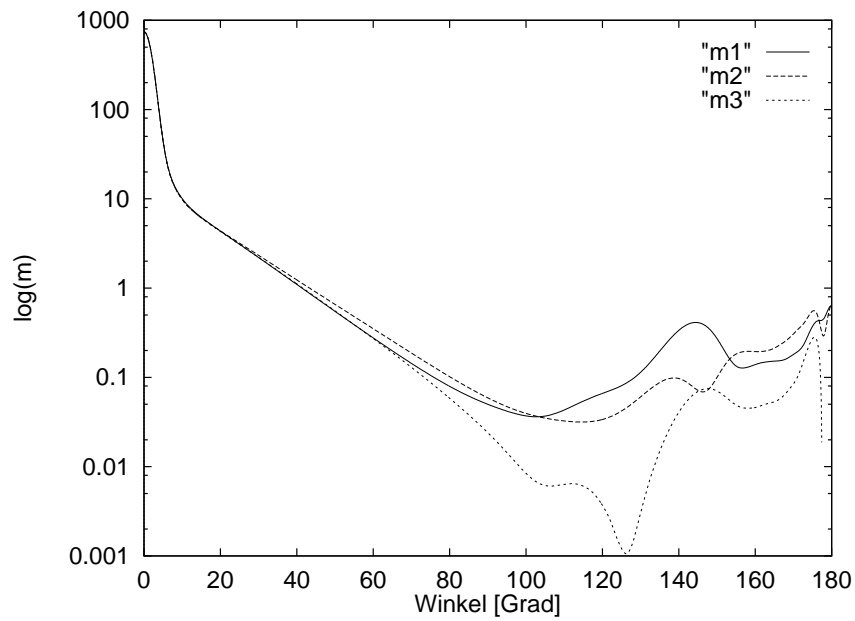


Bild 6.3 : Die Elemente m_3 und m_4 der C1-Mueller-Matrix, linear aufgetragen.

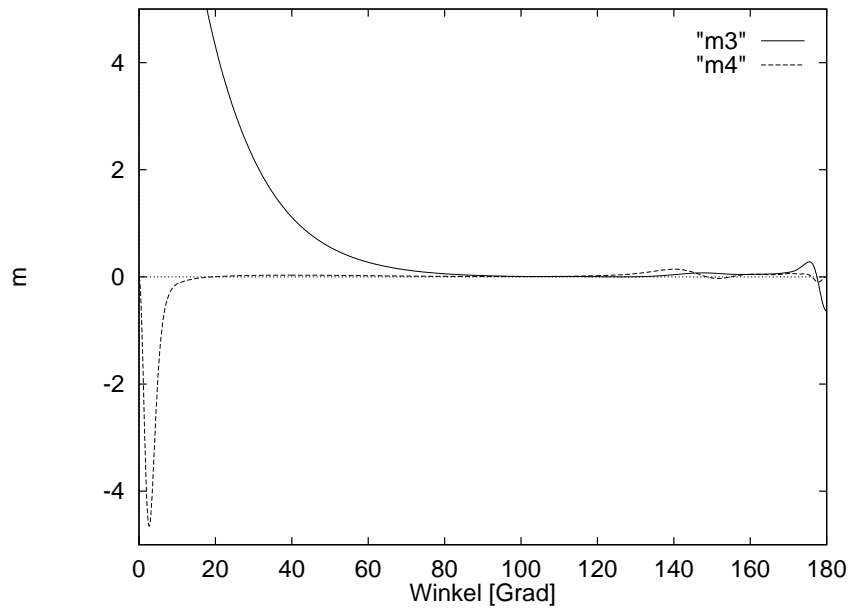


Bild 6.4 : Der Stokes-Vektor des Gesamtsignals (alle Streuordnungen, relative Einheiten) wobei $I_1 = I_{\parallel}$ und $I_2 = I_{\perp}$.

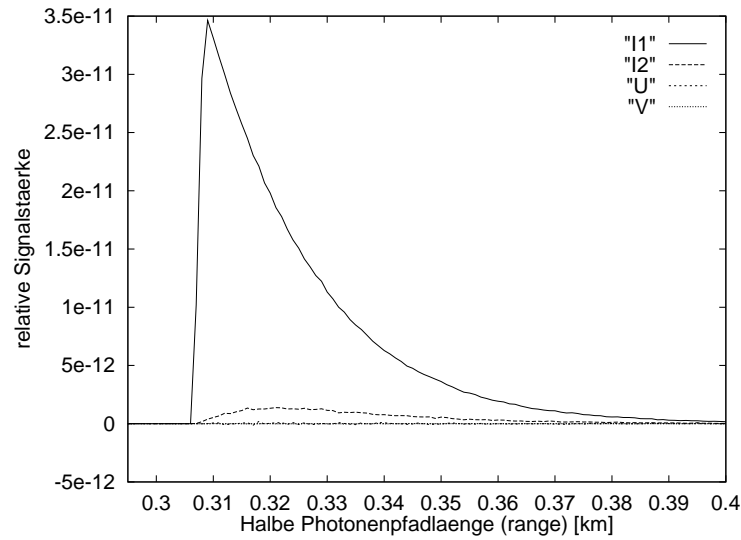
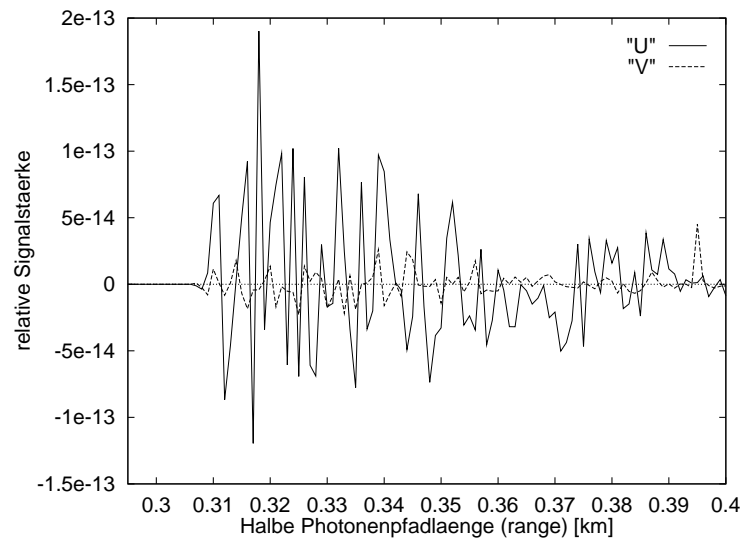
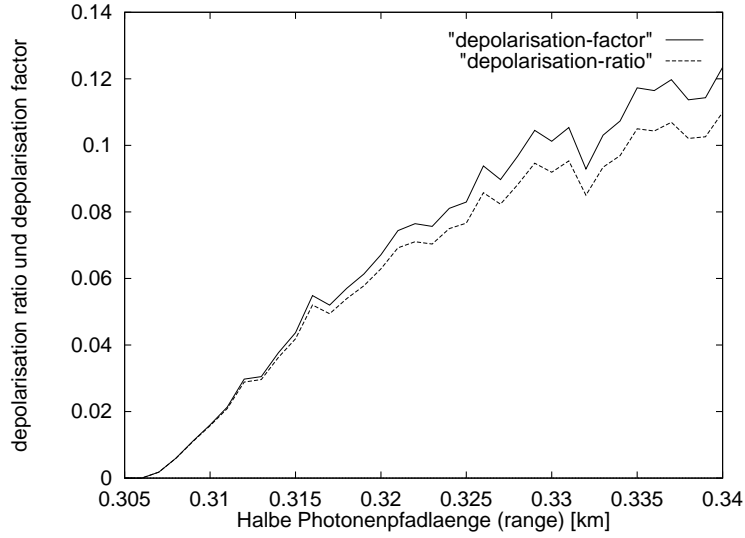


Bild 6.5 : Die Komponenten U and V des Stokes-Vektors des Gesamtsignals (alle Streuordnungen, relative Einheiten).



in I_{\perp} bei Mie-Streuung nur nach Mehrfachstreuung registriert werden kann. Der Anteil an Mehrfachstreuung wächst mit dem Eindringen in die Wolke, und somit verschiebt sich der Ort des Maximums von I_{\perp} zu größeren Photonenpfadlängen. Das Verhältnis der Maxima beträgt $I_{\perp}^{max} / I_{\parallel}^{max} = 0.04$.

Bild 6.6 : Die Depolarisation δ_r und δ_f des simulierten Signals.



Auf einer Sparc 10/51 benötigten diese Rechnungen rund 5 Stunden. Die Varianz des Signals $I_{\parallel} + I_{\perp}$ für alle Streuordnungen beträgt am Maximum bei der Photonenpfadlänge von 309 m nur 0.2%. Am Ende des simulierten Signals bei der Photonenpfadlänge von 400 m beträgt die Varianz bereits 10%. Durch eine längere Rechenzeit wäre es problemlos möglich gewesen, die Varianz des simulierten Signals, auch bei größeren Photonenpfadlängen, unter 1% zu drücken. Es sollte hier jedoch auch gezeigt werden, daß aussagekräftige Signale auch schon mit kürzerem Rechenaufwand simuliert werden können. Im übrigen sind Meßfehler bei solch großen Photonenpfadlängen oft deutlich größer als 10%.

Von besonderem Interesse ist die sogenannte (lineare) Depolarisation. Hierfür gibt es zwei unterschiedliche Definitionen:

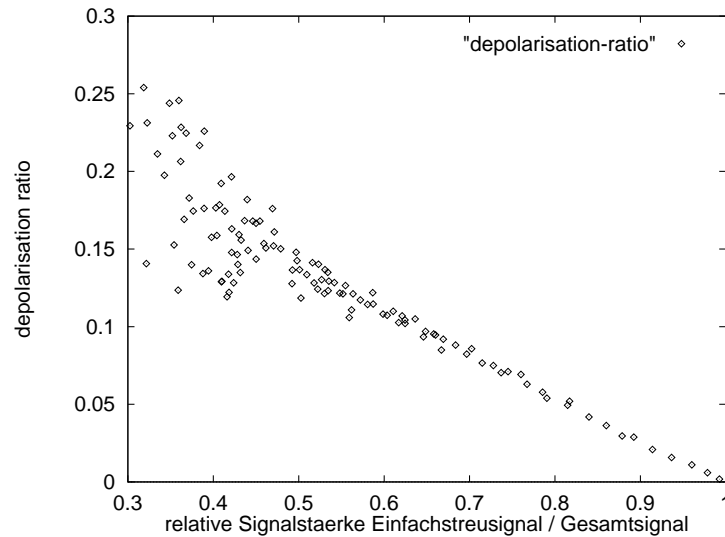
$$\delta_f := \frac{I - Q}{I + Q} = \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} = \frac{i_{\perp}}{i_{\parallel}},$$

was wir „depolarisation factor“ nennen wollen, und

$$\delta_r := \frac{I - Q}{I} = \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}} = \frac{i_{\perp}}{i_{\parallel} + i_{\perp}} = \frac{\delta_f}{\delta_f + 1}$$

die sogenannte „depolarisation ratio“. (Die Bezeichnung mit δ ist üblich und sollte nicht mit dem Dirac Maß verwechselt werden.) Beide Größen sind in Bild 6.6 für das simulierte Signal aufgetragen. Wir erkennen das typische Verhalten einer Wasserwolke, wie es von S. R. Pal und A. I. Carswell [22] gemessen und beschrieben

Bild 6.7 : Die Depolarisation δ_r aufgetragen gegen das Verhältnis Einfachstreu-
signal zu Gesamtsignal.



wurde. (Vergleiche vor allem Fig. 2 aus [22] unter Beachtung der anderen Definition der Depolarisation.) Die Streuung der Werte für großen Abstand ist durch den Monte-Carlo-Algorithmus bedingt. Anschaulich gesprochen verhält sich der Monte-Carlo-Algorithmus analog zu einem LIDAR: Bei großen Eindringtiefen geht das Signal im Rauschen unter.

Eine interessante Betrachtungsweise für die lineare Depolarisation ergibt sich, wenn man δ_r nicht gegen die Photonenpfadlänge aufträgt, sondern gegen das Verhältnis des Einfachstreu-signals zum Gesamtsignal (alle Streuordnungen). Dieses Verhältnis ist ein Maß für den Anteil der Mehrfachstreuung am Gesamtsignal. Dieser Anteil wird natürlich mit der Eindringtiefe größer. Für Mie-Streuung kann Depolarisation nur durch Mehrfachstreuung zustande kommen (siehe Bohren-Huffman [2], Seite 113ff). Wir erkennen in Bild 6.7 einen nahezu linearen Zusammenhang. Wir sehen hier wieder die erhöhte Varianz bei größeren Eindringtiefen in die Wolke, also bei einem kleineren Verhältnis von Einfachstreu-signal zu Gesamtsignal.

6.3. Bemerkung : (Plausibilitätsüberlegungen)

Abgesehen davon, daß die Rechnung die qualitativen und für die Depolarisation auch die quantitativen Erwartungen, die man an die Ergebnisse stellt, erfüllt, können wir das Programm und somit indirekt auch das Modell gegen die Simulationsergebnisse des Programms für unpolarisierte Mehrfachstreuung (vgl. Normohammadian [19])

Bild 6.8 : Vergleich des Gesamtsignals (alle Streuordnungen, relative Einheiten) für polarisierte und unpolarisierte Rechnung

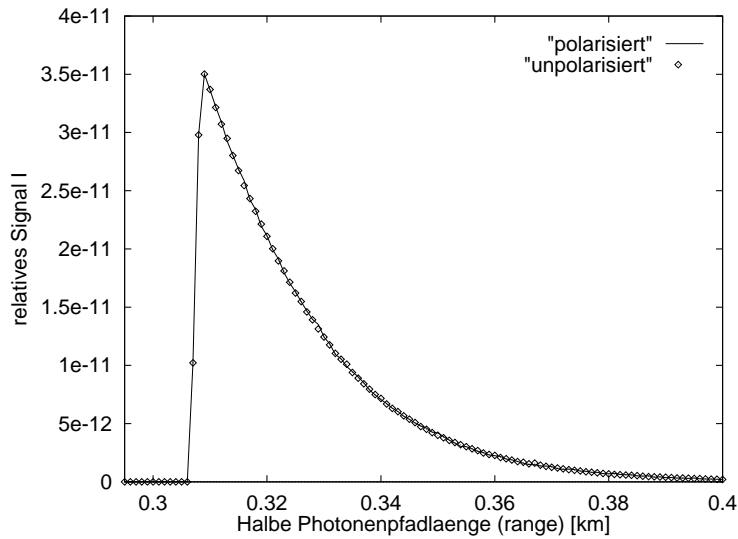
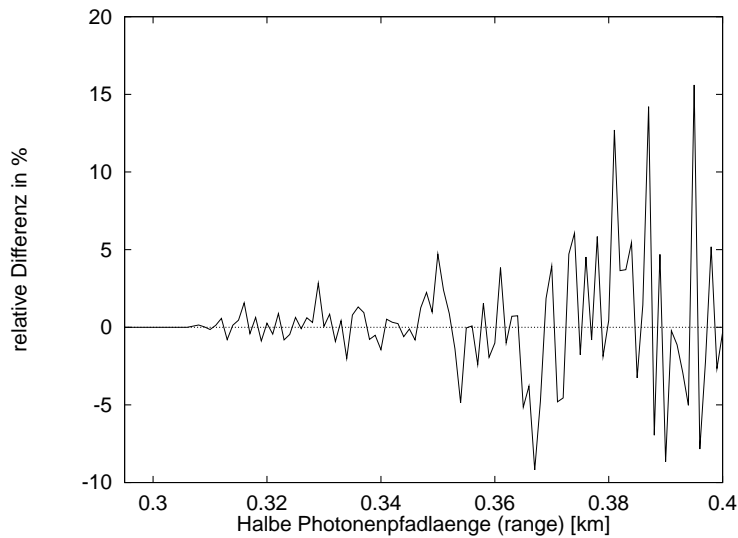
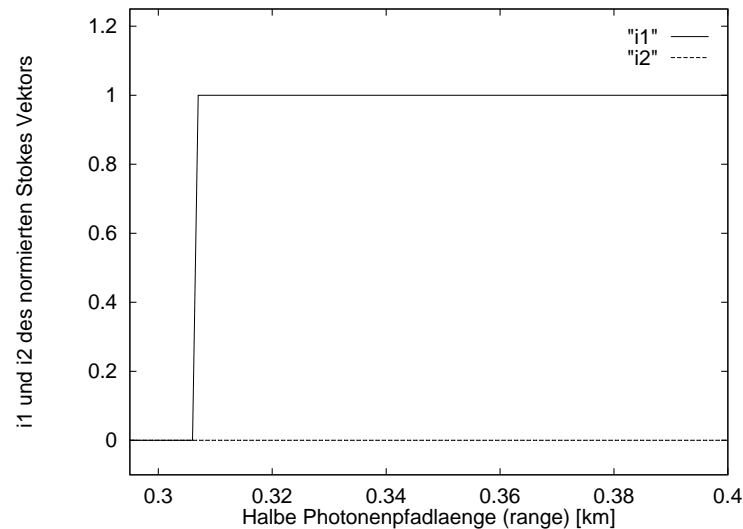


Bild 6.9 : Relative Differenz des polarisierten und unpolarisierten Signals in %



testen. Es ergibt sich eine Übereinstimmung im Gesamtsignal $I = I_{\parallel} + I_{\perp}$ innerhalb der Varianzen, siehe Bild 6.8 und Bild 6.9. Beachte daß sowohl die polarisierte als auch die unpolarisierte Simulation varianzbehaftet sind. Dieser Vergleich zeigt, daß die Polarisation im Gesamtsignal I bei Mie-Streuung, keine erkennbaren Änderun-

Bild 6.10 : Die Komponenten $i_1 = i_{\parallel}$ und $i_2 = i_{\perp}$ des normierten Stokes-Vektors für den Einfachstreuanteil.



gen liefert. Dies war für die axialsymmetrische Geometrie nach Bild 6.1 auch zu erwarten.

Das unpolarisierte Modell und das dazu entwickelte Programm haben sich bereits bei den MUSCLE Vergleichsrechnungen (siehe [20]) und im Vergleich mit dem Modell von Herrn Ruppertsberg (siehe Noormohammadian [19]) als zuverlässig erwiesen. Daher kann es als Referenz verwendet werden.

Mit diesem Vergleich wird jedoch nicht der „Polarisationsteil“ meines Programms getestet. Wir können nicht nur den gesamten Stokes-Vektor für alle Streuordnungen ausgeben, sondern auch einzelne Streuordnungen, insbesondere die Erste. Für die Einfachstreuung im Mie-Fall darf keine (lineare) Depolarisation auftreten, da wir hier effektiv nur Rückstreuung betrachten und $m_1(x, \pi) = m_2(x, \pi)$ gilt (siehe Bohren-Huffman [2] Seite 113). Es muß dann für das einfach gestreute Rücksignal für den normierten Stokes-Vektor $i_{\parallel} = 1$ und $i_{\perp} = 0$ gelten, was nach Bild 6.10 hervorragend erfüllt ist.

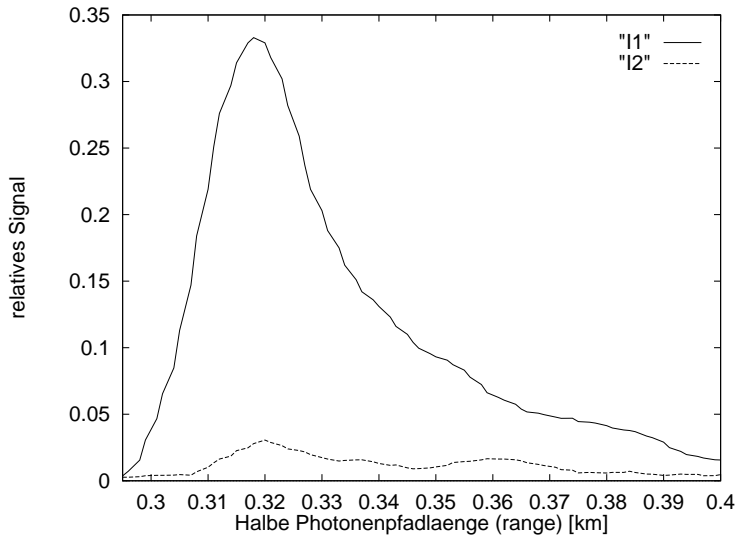
6.4. Bemerkung : (Vergleich mit Meßdaten)

Die Meßdaten wurden von Wilhelm Krichbaumer freundlicherweise zur Verfügung gestellt. Sie sind aus einer Flugmeßkampagne der DLR vom 31. 7. 1991 bis 2. 8. 1991. Diese Messung wurde in einer Höhe von 18000ft durchgeführt. Der Name des Datenfiles ist „10b/K6“.

Da keine „in situ“ Messungen während dieser Meßkampagne durchgeführt wurden, konnte die Größenverteilung auch nicht empirisch bestimmt werden. Wir haben daher in unseren Simulationsrechnungen die oft verwendete Deirmendjian C1-Größenverteilung als Modell für eine Wasserwolke benutzt. Die Sichtweite wurde mit 100 m angenommen. Diese beiden Annahmen sind nicht rein willkürlich, sondern „nach Augenmaß“ den Meßwerten entnommen.

Der langsamere Anstieg der Signale I_{\parallel} und I_{\perp} der Messungen im Vergleich zu den Simulationen läßt sich auf den Dichtegradienten und somit Extinktionsgradienten der realen Wolke zurückführen. In der Simulation wurde die Wolkengrenze scharf angenommen. Die Position der Maxima von I_{\parallel} bei 318 m und von I_{\perp} bei 320 m

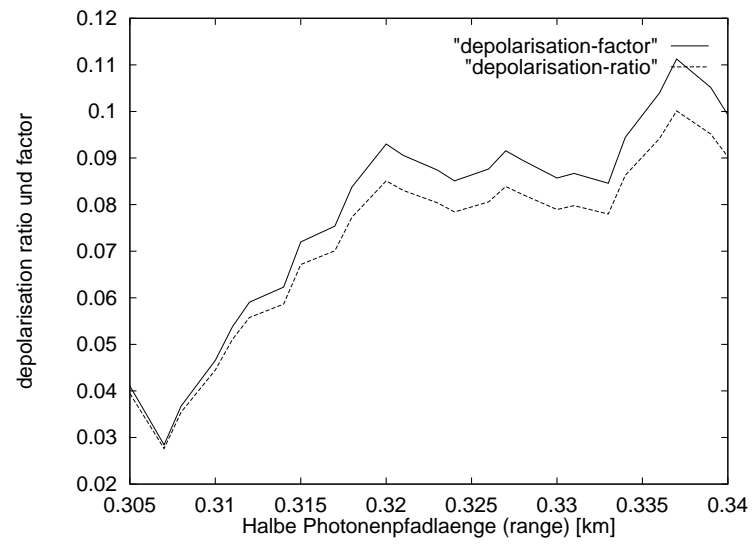
Bild 6.11 : Die Komponenten $I_1 = I_{\parallel}$ und $I_2 = I_{\perp}$ des Stokes-Vektors des gemessenen Signals (relative Einheiten).



fallen fast zusammen. Dies deutet auf einen Anteil von nicht-sphärischen Teilchen (Eiskristallen) in der Wolke hin. Diese können zu einem Beitrag zu I_{\perp} bereits bei Einfachstreuung führen. Das Verhältnis der Maxima ist $I_{\perp}^{max} / I_{\parallel}^{max} = 0.09$ und somit gut doppelt so groß wie bei den Simulationsergebnissen. Dies läßt sich ebenfalls auf einen Anteil von nicht-sphärischen Teilchen in der Wolke zurückführen.

In Bild 6.12 erkennen wir, daß nach rund 10 m Eindringtiefe in die Wolke, δ_r auf 0.08 gestiegen ist. Da das Signal I_{\perp} fast im Rauschen untergeht, kann nur der Bereich von 305 m bis 330 m Photonenpfadlänge als aussagekräftig betrachtet werden. Wir finden diesen Anstieg in ähnlicher Weise in unseren simulierten Signalen, in Bild 6.6. Hier findet der Anstieg von δ_r auf 0.08 innerhalb von knapp 20 m statt. Der Unterschied könnte auf eine Überschätzung der Sichtweite (Unterschätzung

Bild 6.12 : Die Depolarisation δ_f und δ_r des gemessenen Signals.



des Extinktionskoeffizienten) hindeuten, oder, wie oben bereits erwähnt, der Effekt nichtsphärischer Teilchen sein.

7. Zusammenfassung und Ausblick.

Wir können mehrfachgestreute polarisierte LIDAR Signale simulieren und Polarisationseffekte wie die lineare Depolarisation nicht nur qualitativ, sondern jetzt auch quantitativ verstehen. Es ist zu erwarten, daß auch andere Effekte wie die Polarisations-Anisotropie oder die zirkulare Depolarisation mit dieser Methode quantitativ untersucht werden können.

Ein sehr interessantes Gebiet wäre die Untersuchung von Cirren (Eiswolken) und deren Polarisationseigenschaften. Der Weg über die Intensität nach der Streuung, wie er in Kapitel 1 eingeschlagen wurde, um zu einer polarisierten Phasenfunktion für Mie-Teilchen zu gelangen, kann in kanonischer Weise auch für nichtsphärische Teilchen durchgeführt werden, wenn deren Mueller-Matrizen bekannt sind. Bei den Varianzreduktionsverfahren müßten dann gegebenenfalls noch Anpassungen vorgenommen werden.

Das stochastische Modell, wie es bei Oppel et al. [21] beschrieben wird, hat sich als sehr allgemein und erweiterungsfähig erwiesen (vergleiche auch Noormohammadian [19]). Neben der oben angesprochenen Erweiterung für nicht sphärische Teilchen wäre es meiner Meinung nach möglich, mit einem der Stokes-Beschreibung ähnlichen Formalismus „Kanalwechsel“ bei Mehrfachstreuung zu beschreiben. Dies würde die quantitative Beschreibung von mehrfachgestreuten DIAL oder Raman-Backscatter-Signalen zulassen.

8. Anhang

8.1. Lemma :

Seien X, Y und Z topologische Räume, $f : X \times Y \rightarrow Z$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{X} \subset X, \mathcal{Z} \subset Z$ offene Mengen, dann gilt :

$$\bigcup_{x \in \mathcal{X}} (\{x\} \times f(x, \cdot)^{-1}(\mathcal{Z})) \quad \text{ist eine offene Menge in } X \times Y.$$

Beweis :

Für $D = \emptyset$ ist die Behauptung trivial, daher sei o.B.d.A. $D \neq \emptyset$.

Sei $(x, y) \in D := \bigcup_{a \in \mathcal{X}} (\{a\} \times f(a, \cdot)^{-1}(\mathcal{Z}))$ gegeben.

Dann ist $x \in \mathcal{X}$ und $y \in f(x, \cdot)^{-1}(\mathcal{Z})$, d.h. $f(x, y) \in \mathcal{Z}$. Wegen $f(x, y) \in \mathcal{Z}$, der Offenheit von \mathcal{Z} und der Stetigkeit von f ist $f^{-1}(\mathcal{Z})$ eine offene Umgebung von (x, y) in $X \times Y$. Nach der Definition der Produkttopologie (endliches Produkt !) existieren insbesondere offene Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ mit $(x, y) \in U \times V \subset f^{-1}(\mathcal{Z})$, also :

$$f(x, y) \in f(U \times V) \subset \mathcal{Z}.$$

Somit ist $(U \cap \mathcal{X}) \times V$ eine offene Umgebung von (x, y) mit $f((U \cap \mathcal{X}) \times V) \subset \mathcal{Z}$, d.h. $V \subset f(a, \cdot)^{-1}(\mathcal{Z})$ für alle $a \in U \cap \mathcal{X}$. Also gilt :

$$\begin{aligned} (x, y) &\in (U \cap \mathcal{X}) \times V \\ &= \bigcup_{a \in U \cap \mathcal{X}} (\{a\} \times V) \\ &\subset \bigcup_{a \in U \cap \mathcal{X}} (\{a\} \times f(a, \cdot)^{-1}(\mathcal{Z})) \\ &\subset D. \end{aligned}$$

Damit gibt es also zu beliebig vorgegebenem $(x, y) \in D$ eine offene Umgebung $(U \cap \mathcal{X}) \times V \subset D$ von (x, y) , d.h. D ist eine offene Menge in $X \times Y$. ■

8.2. Lemma :

Sei $(\xi_t : t \in T)$ mit $T \subset \mathbb{R}^+$ ein stochastischer Prozeß mit beliebigem Zustandsraum (E, \mathfrak{B}) über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{K}, \mathbb{P})$ und sei $\mathcal{O} \in \mathfrak{K}$ mit $\mathbb{P}(\mathcal{O}) = 1$. Ferner seien $\mathfrak{K}_{\mathcal{O}} := \{K \cap \mathcal{O} : K \in \mathfrak{K}\}$, $\mathbb{P}_{\mathcal{O}} : \mathfrak{K}_{\mathcal{O}} \rightarrow [0, 1]$, mit $\mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot)$ und $\xi_{\mathcal{O},t} : \mathcal{O} \rightarrow E$ mit $\xi_{\mathcal{O},t}(\cdot) := \xi_t(\cdot)$ für alle $t \in T$, dann gilt :

Erfüllt der stochastische Prozeß $(\xi_{\mathcal{O},t} : t \in T)$ über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{O}, \mathfrak{K}_{\mathcal{O}}, \mathbb{P}_{\mathcal{O}})$ die einfache Markov-Eigenschaft, so auch $(\xi_t : t \in T)$.

Beweis :

Nach der Definition der einfachen Markov-Eigenschaft haben wir für alle $X \in \mathfrak{B}$ und $s, t \in T$ mit $0 \leq s < t$ zu zeigen, daß :

$$\mathbb{P}(\xi_t \in X \mid \xi_u, u \leq s, u \in T) \stackrel{[\mathbb{P}]}{=} \mathbb{P}(\xi_t \in X \mid \xi_s),$$

aber da $\mathbb{P}(\xi_t \in X \mid \xi_s)$ nach Definition $\sigma(\{\xi_s\})$ -meßbar ist, genügt es, für $s, t \in T$ mit $0 \leq s < t$, $X \in \mathfrak{B}$ und $A \in \sigma(\{\xi_u, u \leq s, u \in T\})$ zu zeigen:

$$\int_A 1_{\{\xi_t \in X\}} d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{P}(\xi_t \in X \mid \xi_s) d\mathbb{P}.$$

Seien dazu s, t, X und A wie zuvor fest vorgegeben, dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_A 1_{\{\xi_t \in X\}} d\mathbb{P} &\stackrel{\mathbb{P}(\mathcal{O})=1}{=} \int_{A \cap \mathcal{O}} 1_X \circ \xi_{\mathcal{O},t} d\mathbb{P}_{\mathcal{O}} \\ &\stackrel{A \cap \mathcal{O} \in \sigma(\{\xi_{\mathcal{O},u}, u \leq s\})}{=} \int_{A \cap \mathcal{O}} \mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\xi_{\mathcal{O},t} \in X \mid \xi_{\mathcal{O},u}, u \leq s, u \in T) d\mathbb{P}_{\mathcal{O}} \\ &\stackrel{(\xi_{\mathcal{O},t}) \text{ markovsch}}{=} \int_{A \cap \mathcal{O}} \mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\xi_{\mathcal{O},t} \in X \mid \xi_{\mathcal{O},s}) d\mathbb{P}_{\mathcal{O}} \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{A \cap \mathcal{O}} \mathbb{P}(\xi_t \in X \mid \xi_s) |_{\mathcal{O}} d\mathbb{P}_{\mathcal{O}} \\ &\stackrel{\mathbb{P}(\mathcal{O})=1}{=} \int_A \mathbb{P}(\xi_t \in X \mid \xi_s) d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, sobald wir $(*)$ gezeigt haben, d.h. es genügt, wenn wir

$$\mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\xi_{\mathcal{O},t} \in X \mid \xi_{\mathcal{O},s}) \stackrel{[\mathbb{P}_{\mathcal{O}}]}{=} \mathbb{P}(\xi_t \in X \mid \xi_s) |_{\mathcal{O}}$$

zeigen. Da jedoch beide Seiten $\sigma(\{\xi_{\mathcal{O},s}\})$ -meßbar sind, folgt dies, da für $Y \in \sigma(\{\xi_{\mathcal{O},s}\})$ gilt (o.E.d.A. ist $Y = \xi_{\mathcal{O},s}^{-1}(C) \subset \mathcal{O}$ für ein geeignetes $C \in \mathfrak{B}$) :

$$\begin{aligned}
\int_Y \mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\xi_{\mathcal{O},t} \in X \mid \xi_{\mathcal{O},s}) \, d\mathbb{P}_{\mathcal{O}} &= \int_{\xi_{\mathcal{O},s}^{-1}(C)} 1_X \circ \xi_{\mathcal{O},t} \, d\mathbb{P}_{\mathcal{O}} \\
&\stackrel{\mathbb{P}(\mathcal{O})=1}{=} \int_{\xi_s^{-1}(C)} 1_X \circ \xi_t \, d\mathbb{P} \\
&= \int_{\xi_s^{-1}(C)} \mathbb{P}(\xi_t \in X \mid \xi_s) \, d\mathbb{P} \\
&\stackrel{\mathbb{P}(\mathcal{O})=1}{=} \int_Y \mathbb{P}(\xi_t \in X \mid \xi_s) \, d\mathbb{P}_{\mathcal{O}}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

8.3. Lemma :

Für $\varphi \in S^2$ ist die (konstante) Abbildung

$$[-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto 1/2$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte von $\lambda \circ \langle \varphi, \cdot \rangle^{-1} : \mathfrak{B}([-1, +1]) \rightarrow [0, 1]$ bzgl. der Gleichverteilung auf $[-1, +1]$.

Beweis :

Sei $\varphi \in S^2$ gegeben. Mittels der Methode der algebraischen Induktion (vgl. Gänßler–Stute [7], S. 21) genügt es, wenn wir

$$\int_{[-1,+1]} 1_B(x) \left(\lambda \circ \langle \varphi, \cdot \rangle^{-1} \right)(dx) = \int_{[-1,+1]} 1_B(x) \frac{1}{2} \, dx$$

für alle $B \in \mathfrak{B}([-1, +1])$ zeigen. Wegen des Eindeutigkeitsatzes (vgl. Gänßler–Stute [7], Seite 28) reicht es, dies bereits für das \cap -stabile Erzeugendensystem $\{]a, b[\cap [-1, +1] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \}$ nachzuweisen.

Dazu geben wir uns o.E.d.A. ein Intervall $B :=]a, b[$ mit $-1 \leq a \leq b \leq +1$ vor. Dann gilt :

$$\int_{[-1,+1]} 1_B(x) \frac{1}{2} \, dx = \frac{b-a}{2}$$

und mit dem Transformationssatz (vgl. Halmos [8], Seite 39, Theorem C)

$$\int_{[-1,+1]} 1_B(x) \left(\lambda \circ \langle \varphi, \cdot \rangle^{-1} \right) (dx) = \int_{S^2} 1_B(\langle \varphi, \psi \rangle) \lambda(d\psi).$$

Bezeichne im folgenden (e_1, e_2, e_3) die kanonische Basis des \mathbb{R}^3 , dann gibt es genau eine orthogonale Matrix $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, so daß $\varphi = \mathcal{A}e_3$. (Die reelle 3×3 -Matrix \mathcal{A} entspricht dabei einer Drehung um den durch φ und e_3 eindeutig bestimmten Winkel; vgl. Kowalsky [12], Seite 24.)

Also gilt für $\psi \in S^2$ wegen der Orthogonalität von \mathcal{A} und der Definition des Skalarproduktes in \mathbb{R}^3 (vgl. Kowalsky [12], § 24 und Kolmogorov–Fomin [11], Seite 229):

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \mathcal{A}e_3, \psi \rangle = \langle e_3, \mathcal{A}^\top \psi \rangle = \langle e_3, \mathcal{A}^{-1} \psi \rangle$$

und weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(S^2) &= \mathcal{A}^{-1}(S^2) = S^2 \quad \text{bzw.} \\ (\lambda \circ \mathcal{A})(A) &= \lambda(A) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{B}(S^2). \end{aligned}$$

Mit dem Transformationssatz folgt somit:

$$\begin{aligned} \int_{S^2} 1_B(\langle \varphi, \psi \rangle) \lambda(d\psi) &= \int_{S^2} 1_B(\langle e_3, \mathcal{A}^{-1} \psi \rangle) \lambda(d\psi) \\ &= \int_{\mathcal{A}^{-1}(S^2)} 1_B(\langle e_3, \psi \rangle) (\lambda \circ \mathcal{A})(d\psi) \\ &= \int_{S^2} 1_B(\langle e_3, \psi \rangle) \lambda(d\psi) \\ &= \int_{S^2} 1_B(pr_3(\psi)) \lambda(d\psi), \end{aligned}$$

wobei $pr_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die kanonische Projektion auf die dritte Komponente bezeichne.

Um im folgenden zu räumlichen Polarkoordinaten übergehen zu können, definieren wir die Abbildung

$$\Phi :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\theta, \phi) \mapsto \left(\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta) \right),$$

wobei mit den Bezeichnungen aus Forster [6], Seite 141, Beispiel (14.5.) gilt, daß Φ eine Karte von S^2 ist und

$$\int_{S^2} 1_B(pr_3(\psi)) \lambda(d\psi) = \int_{S^2} 1_B(pr_3(\psi)) \frac{1}{4\pi} dS(d\psi)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 1_B(\text{pr}_3(\Phi(\theta, \phi))) \frac{\sin(\theta)}{4\pi} d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi 1_B(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta \\
&= \frac{b-a}{2}.
\end{aligned}$$

Fassen wir (8.1) – (8.1) zusammen, so folgt (8.1) und damit die Behauptung. ■

8.4. Lemma : (Räumliche Polarkoordinaten)

Bezeichne λ_1 das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R} , dann gilt für alle $f \in L^1(\mathbb{R}_0^+ \times S^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+ \times S^2), \lambda_1|_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)} \times \lambda)$ und $x \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} \int_0^\infty f(r, \varphi) dr \lambda(d\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{x\}} f\left(\|x' - x\|, \frac{x' - x}{\|x' - x\|}\right) \frac{1}{4\pi\|x' - x\|^2} dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{x\}} f\left(\|x - x'\|, \frac{x - x'}{\|x - x'\|}\right) \frac{1}{4\pi\|x - x'\|^2} dx'.
\end{aligned}$$

Beweis :

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}_0^+ \times S^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+ \times S^2), \lambda_1|_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)} \times \lambda)$, dann gilt mit dem Transformationssatz für Lebesgue-Dichten (vgl. Forster, [6], S. 141, Beispiel (14.5)), wobei wir als Karte von $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Abbildung $\Phi :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\Phi(\theta, \phi) := (\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))$ wählen:

$$\int_{S^2} \int_0^\infty f(r, \varphi) dr \lambda(d\varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty f(r, \Phi(\theta, \phi)) \frac{\sin(\theta)}{4\pi} dr d\theta d\phi$$

und indem wir die Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\Psi(r, \theta, \phi) := (r \cos(\phi) \sin(\theta), r \sin(\phi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) = r \cdot \Phi(\theta, \phi)$ einführen:

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty f\left(\|\Psi(r, \theta, \phi)\|, \frac{\Psi(r, \theta, \phi)}{\|\Psi(r, \theta, \phi)\|}\right) \frac{\sin(\theta)}{4\pi} dr d\theta d\phi.$$

Wenden wir schließlich den Transformationssatz für Lebesgue-integrierbare Funktionen an (vgl. Forster, [6], Corollar 2, Seite 124), so erhalten wir:

$$\int_{S^2} \int_0^\infty f(r, \varphi) \, dr \, \lambda(d\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} f\left(\|x'\|, \frac{x'}{\|x'\|}\right) \frac{1}{4\pi\|x'\|^2} \, dx',$$

woraus mit einer einfachen Koordinatentransformation sofort die Behauptung folgt. ■

8.5. Bemerkung : (Mie-Theorie)

Die Mie-Theorie liefert die exakte Lösung der Maxwellschen Gleichungen für die Streuung einer ebenen Welle an einem kugelförmigen Dielektrikum. Diese Lösung geht auf G. Mie [17] aus dem Jahre 1908 zurück. Eine zeitgemäßere und mathematisch schlüssige Darstellung findet man bei Liou [13]. Die Lösung läßt sich in Form einer Reihenentwicklung in Kugelflächenfunktionen angeben, wobei sich die Koeffizienten durch sphärische Besselfunktionen ausdrücken lassen.

Die Mueller Matrix \mathcal{M} läßt sich direkt aus der Lösung für das Fernfeld berechnen. Für unsere Darstellung des Stokes-Vektors siehe Deirmendjian [5], Seite 69. Bei Deirmendjian [5], Seite 72ff, findet man auch die Erweiterungen, die für die Behandlung polydisperser Systeme notwendig sind.

Wir versuchen nun, die Eigenschaften der Mueller-Matrix für das Fernfeld näher zu beschreiben. In einigen Fällen wird eine physikalische Begründung angegeben, da eine mathematisch exakte Analyse nicht durchgeführt wurde.

- Es lassen sich die Struktur

$$\mathcal{M}(x, \theta) := \begin{pmatrix} m_1(x, \theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2(x, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3(x, \theta) & -m_4(x, \theta) \\ 0 & 0 & m_4(x, \theta) & m_3(x, \theta) \end{pmatrix},$$

- und die Eigenschaften

$$\begin{aligned} m_j &\in \mathbb{R}_0^+ && \text{für } j \in \{1, 2\}, \\ m_j &\in \mathbb{R} && \text{für } j \in \{3, 4\}, \end{aligned}$$

sowie

$$m_1(x, \theta) - m_2(x, \theta) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \theta \in \{0, \pi\}$$

ableiten. Vergleiche hierzu Deirmendjian [5], Seite 68ff.

-
- Die $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^3 \times [0, \pi])$ - $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$ - bzw. die $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^3 \times [0, \pi])$ - $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -Meßbarkeit der m_j , würde z.B. aus der Stetigkeit der m_j folgen. Für die Sphäre muß dies aus physikalischen Gründen erfüllt sein. Eine exakte Analyse der Reihenentwicklung, um dieses physikalische Argument zu überprüfen, wurde nicht durchgeführt.
 - Die Beschränktheit der Abbildungen m_j folgt aus der Energieerhaltung.

Die oben genannten Eigenschaften sollten, wenn auch bei anderer Gestalt der Mueller Matrix \mathcal{M} , für nichtsphärische Teilchen oder Eisteilchen gelten.

Die numerisch stabile Auswertung der Mie-Reihenentwicklung ist nicht trivial (siehe Deirmendjian [5], Seite 14ff). Hierzu wurde auf ein bereits bestehendes **Fortran** Unterprogramm von W. J. Wiscombe [26] zurückgegriffen. Der Source Code ist über das Internet mittels **ftp** auf dem Rechner `climate.gsfc.nasa.gov` im Verzeichnis `pub/wiscombe/Mie_Code` erhältlich.

Der **Fortran**-Code wurde ursprünglich für Großrechner (also für 8 Byte **REAL**) geschrieben. Das Unterprogramm wurde auf doppelte Genauigkeit (**DOUBLE PRECISION**) umgeschrieben, so daß es auch auf (32 Bit) Workstations numerisch korrekte Ergebnisse liefert. Mit Hilfe von Willhelm Krichbaumer wurde die Erweiterungen für polydisperse Systeme, analog zu Deirmendjian [5], eingebaut. Dieses Programm wurde dann zur Berechnung der Phasenfunktionen und Mueller-Matrizen, die als Eingabedaten für die Simulationen benötigt wurden, benutzt.

Symbolverzeichnis

Es bezeichne :

- \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen (ausschließlich 0),
- \mathbb{N}_0 die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0,
- $\mathbb{N}_{0,\infty} := \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$,
- \mathbb{R} den Körper der reellen Zahlen,
- \mathbb{R}^+ die Menge der reellen Zahlen > 0 ,
- \mathbb{R}_0^+ die Menge der reellen Zahlen ≥ 0 ,
- $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,
- $\mathbb{R}_\infty^n := (\mathbb{R}_\infty)^n$, für $n \in \mathbb{N}$,
- $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ und
- $S_\infty^2 := S^2 \cup \{\overset{d}{\infty}\}$.

Wir verwenden \mathbb{R} und \mathbb{R}_∞ wie bei Hewitt–Stromberg [9], Seite 54–56, mit der gewöhnlichen Topologie und \mathbb{R}^+ bzw. \mathbb{R}_0^+ mit der entsprechenden Spurtopologie. \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, versehen mit der dazugehörigen Produkttopologie, betrachten wir stets als Vektorraum mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$. Mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnen wir das euklidische Skalarprodukt in \mathbb{R}^n .

\mathbb{R}_∞^n versehen wir mit der dazugehörigen Produkttopologie, S^2 mit der Spurtopologie und S_∞^2 mit der Spurtopologie von \mathbb{R}_∞^3 , wobei wir $\overset{d}{\infty}$ mit $\vec{\infty} := (\infty, \infty, \infty)$ identifizieren. (Beachte : $\overset{d}{\infty} \neq \vec{\infty}$!) Es gelten die üblichen Konventionen für die Rechenregeln für ∞ , $\vec{\infty}$ und $\overset{d}{\infty}$.

Ferner bezeichne :

- $\mathfrak{B}(X)$ die Menge der borelschen Teilmengen des topologischen Raumes (X, \mathcal{X}) ,

- $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ die Produkt- σ -Algebra der σ -Algebren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ,
- $\sigma(\mathcal{A})$ die von \mathcal{A} erzeugte σ -Algebra, falls $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}(X)$ und X eine beliebige Menge ist,
- $\sigma(\{f_i : i \in I\})$ die initiale σ -Algebra der meßbaren Abbildungen $f_i : (X, \mathfrak{X}) \rightarrow (X_i, \mathfrak{X}_i)$, wobei $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge ist,
- $\mathfrak{M}(X, Y)$ die Menge der Markov-Kerne (Übergangswahrscheinlichkeiten) von (X, \mathfrak{X}) nach (Y, \mathfrak{Y}) ,
 - λ : $\mathfrak{B}(S^2) \rightarrow [0, 1]$ das normiertes Oberflächenmaß auf S^2 ,
 - λ_n : $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$ das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^n ,
 - $\mu \times \nu$ das Produktmaß der beiden σ -finiten Maße μ und ν ,
 - $\varphi \times \rho$ das Kreuzprodukt der Vektoren $\varphi, \rho \in \mathbb{R}^3$,
 - δ_x : $\mathfrak{X} \rightarrow [0, 1]$ das Dirac-Maß in x , wobei (X, \mathfrak{X}) ein meßbarer Raum und $x \in X$ ist,
- $(i_{\parallel}, i_{\perp}, u, v)^T$ den transponierten Zeilenvektor, also den Spaltenvektor,
 - 1_A : $X \rightarrow \{0, 1\}$ die Indikatorvariable von A , wobei $A \subset X$ und X eine nichtleere Menge ist,
- $SO(3)$ die spezielle orthogonale Gruppe; wir unterscheiden aus Einfachheitsgründen hier nicht zwischen der $SO(3)$ und ihrer 3-dimensionalen Matrixdarstellung auf \mathbb{R}^3 .

Literaturverzeichnis

- [1] Robert B. Ash: Measure, Integration and Functional Analysis. Academic Press: New York 1972.
- [2] C. Bohren, D. Huffman: Absorption and Scattering of Light by Small Particles. Wiley and Sons: 1983.
- [3] Max Born, Emil Wolf: Principles of Optics. Pergamon Press Oxford, 1980, Reprinted Sixth (corrected) Edition, 1987.
- [4] S. Chandrasekhar: Radiative Transfer. Dover, New York, 1960.
- [5] D. Deirmendjian: Electromagnetic Scattering on Spherical Polydispersions. Elsevier: New York 1969.
- [6] O. Forster: Analysis 3. Integralrechnung im \mathbb{R}^n mit Anwendungen. Vieweg: 3. Auflage, Braunschweig 1984.
- [7] P. Gänßler, W. Stute: Wahrscheinlichkeitstheorie. Springer: Berlin 1977.
- [8] P.R. Halmos: Measure Theory. Springer: New York 1974.
- [9] E. Hewitt, K. Stromberg: Real and Abstract Analysis – A modern treatment of the theory of functions of a real variable. Springer: Berlin 1965.
- [10] H.C van de Hulst: Light Scattering by Small Particles. Wiley, New York, reprinted by Dover: New York 1981.
- [11] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin: Reelle Funktionen und Funktionalanalysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin 1975.
- [12] H.J. Kowalsky: Lineare Algebra. De Gruyter: 9. Auflage, Berlin 1979.
- [13] Kuo–Nan Liou: A Complementary Theory of Light Scattering by Homogeneous Spheres. Applied Mathematics and Computation 3, 1977.

- [14] Wilhelm Krichbaumer: Polarization and the Stochastic Model. Proceedings of the 3rd International Workshop on Multiple Scattering Lidar Experiments: Oberpfaffenhofen, Fed. Rep. of Germany, October 24-26, 1989.
- [15] Wilhelm Krichbaumer et al.: A diode-pumped Nd:YAG lidar for airborne cloud measurements. Optics and Laser Technology Vol 25 No 5, 1993.
- [16] G.I. Marchuk, G.A. Mikhailov, M.A. Nazaraliev, R.A. Darbinjan, B.A. Kargin, and B.S. Elepov: The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics. Springer: Berlin 1980.
- [17] G. Mie: Ann. Phys. 25, 1908.
- [18] J. Neveu: Mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Oldenburg: München 1969.
- [19] Masoud Noormohammadian: Varianzreduzierende Monte-Carlo Methoden zur Berechnung mehrfach gestreuter LIDAR Rücksignale. Dissertation LMU-München, 1994.
- [20] Luc R. Bissonette, P. Brusca, A. Ismaelli, G. Zaccanti, A. Cohen, Y. Benayahu, M. Kleinman, S. Eggert, C. Flesia, P. Schwendimann, U. G. Oppel, A. V. Starkov, M. Noormohammadian, D. M. Winker, E. P. Zege, I. L. Katsev and I. N. Polonsky: Lidar Multiple Scattering from Clouds. accepted for publication in: Applied Physics B.
- [21] U.G. Oppel, A. Findling, W. Krichbaumer, S. Krieglmeier, and M. Noormohammadian: A Stochastic Model for the Calculation of Multiply Scattered LIDAR Returns. DLR-FB 89-36, Köln 1989.
- [22] S. R. Pal, A. I. Carswell: Multiple scattering in atmospheric clouds: lidar observations. Applied Optics, Vol. 15, No. 8, August 1976.
- [23] Hans Richter: Wahrscheinlichkeitstheorie. Springer: 2. Auflage, Berlin/Heidelberg 1956 und 1966.
- [24] Florian Scheck: Mechanik. Springer-Verlag Berlin, 1988.
- [25] Norbert Schmitz, Fritz Lehmann: Monte-Carlo-Methoden. Anton Hain: Meisenheim am Glan, 1976.
- [26] W. J. Wiscombe: Improved Mie scattering algorithms. Applied Optics, Vol. 19, No. 9, May 1980.

Danksagung

Ich möchte Herrn Prof. Ulrich G. Oppel für die Stellung des Themas und die Unterstützung und die Anregungen, die er mir im Laufe der Diplomarbeit gewährt hat, danken.

Ebenfalls möchte ich mich bei Herrn Prof. Wolfgang Zinth für die Anregungen bedanken.

Sehr herzlich möchte ich mich bei Herrn Masoud Noormohammadian für die Zusammenarbeit bedanken. Das gemeinsame Arbeiten an dem Programm hat sehr viel Spaß gemacht. Viele mathematische Sachverhalte, sowohl das Simulationsprogramm als auch das Modell betreffend wurden in Diskussionen mit Herrn Noormohammadian vertieft. Die Kapitel 2 und 3 sind Erweiterungen für polarisiertes Licht der entsprechenden Kapitel aus seiner Dissertation [19]. Die Beweise zu 8.1., 8.2., 8.3. und 8.4. im Anhang sind ebenfalls dieser Arbeit entnommen.

Ein großes Dankeschön gilt auch Herrn Willi Krichbaumer. Er konnte mir viele Fragen bezüglich der Polarisierung, der Theorie und der Meteorologie beantworten, die für mein physikalisches Verständnis der Streuung von polarisiertem Licht von großer Wichtigkeit waren. Die Meßwerte, die ich mit den Simulationsrechnungen in Kapitel 6 verglichen habe, stammen von Messungen, die Herr Krichbaumer bei der DLR durchführte.

Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung:

Hiermit erkläre ich, daß ich die Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.