

Notwendige Erweiterung des Standard-Modells

Die bisherige "Konstruktion" des Standard-Modells ging von masselosen Neutrinos aus. Zwar konnte bisher experimentell noch keine von Null verschiedene Neutrinomasse gemessen werden, jedoch legen zwei experimentelle Befunde eine kleine, von Null verschiedene Neutrinomasse nahe:

- Defizit von Myon-Neutrinos aus atmosphärischen Teilchenschauern
- Defizit von Elektron-Neutrinos aus der Sonne

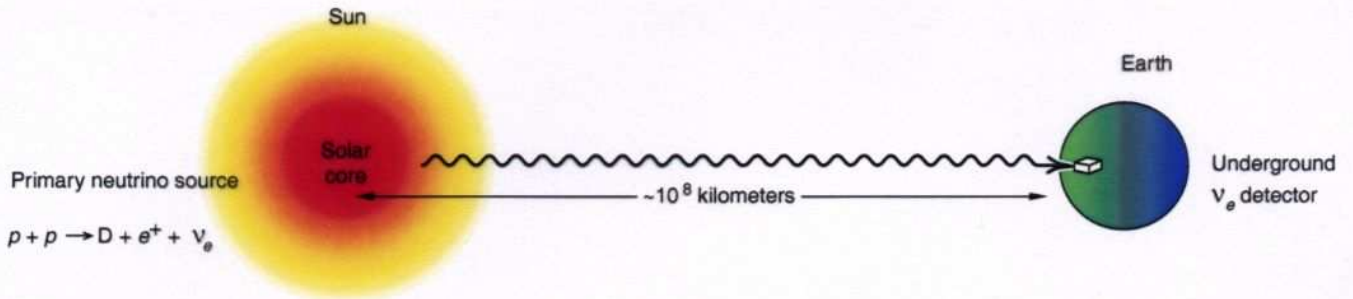
Schon vorab sei die Erklärung dieser Defizite beobachteter Neutrinos genannt:

► Neutrino-Oszillationen

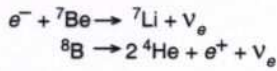
genauer: der periodische Wechsel zwischen verschiedenen Flavour-Eigenzuständen (also zwischen ν_e, ν_μ, ν_τ), weil diese nicht mit den Massen-Eigenzuständen identisch sind (analog wie bei den Quarks: CKM-Matrix zw. Flavour- und Massen-Eigenzuständen)

Neutrino Quellen

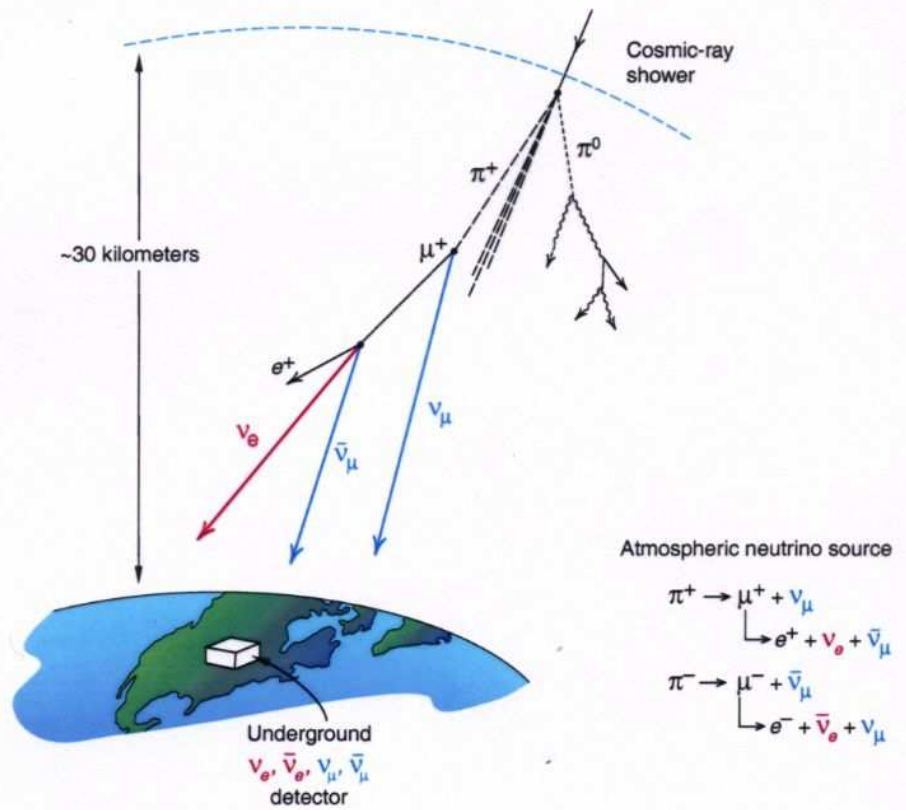
Sonne



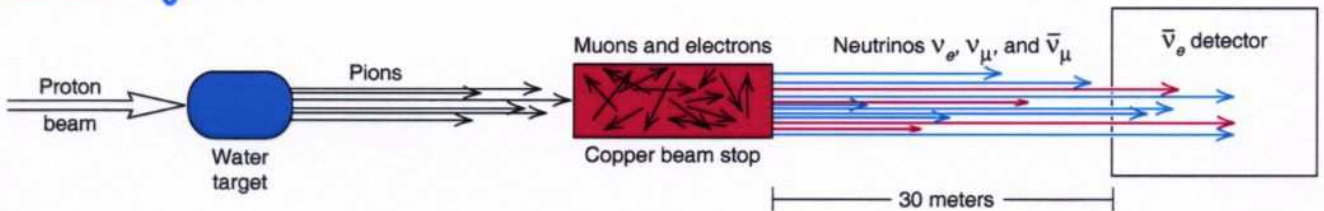
Other sources of neutrinos:



Atmosphäre



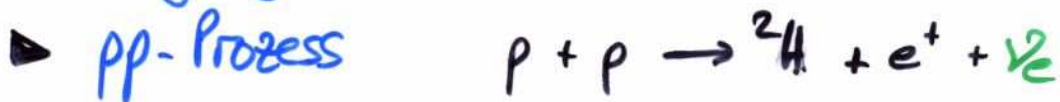
Beschleuniger



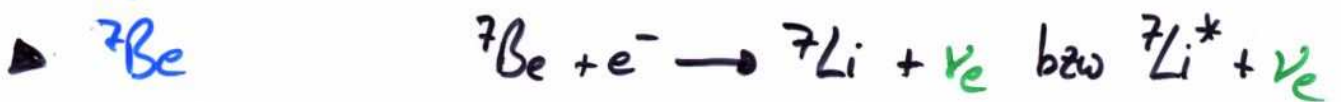
Neutrinos von der Sonne

● Erzeugung durch Fusion, z.B.

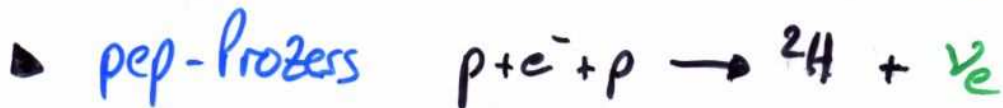
▶ pp-Prozess



▶ ${}^7\text{Be}$



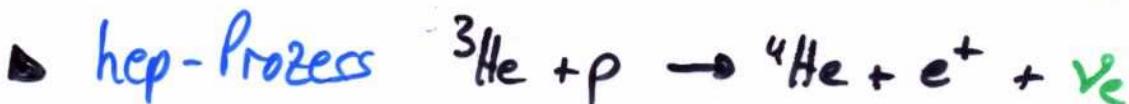
▶ pep-Prozess



▶ ${}^8\text{B}$



▶ hep-Prozess



alle Prozesse liefern Elektron-Neutrinos unterschiedlicher Energie (\approx aufsteigend sortiert)

● Nachweis durch inversen β -Zerfall

▶ Chlor-Experimente



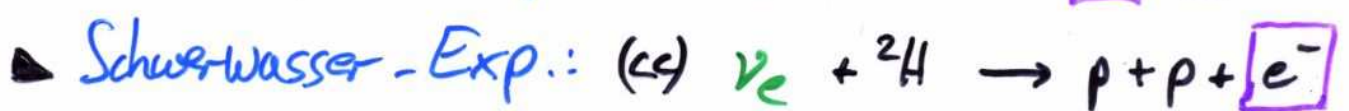
▶ Gallium-Experimente



▶ Čerenkov-Licht-Exp.

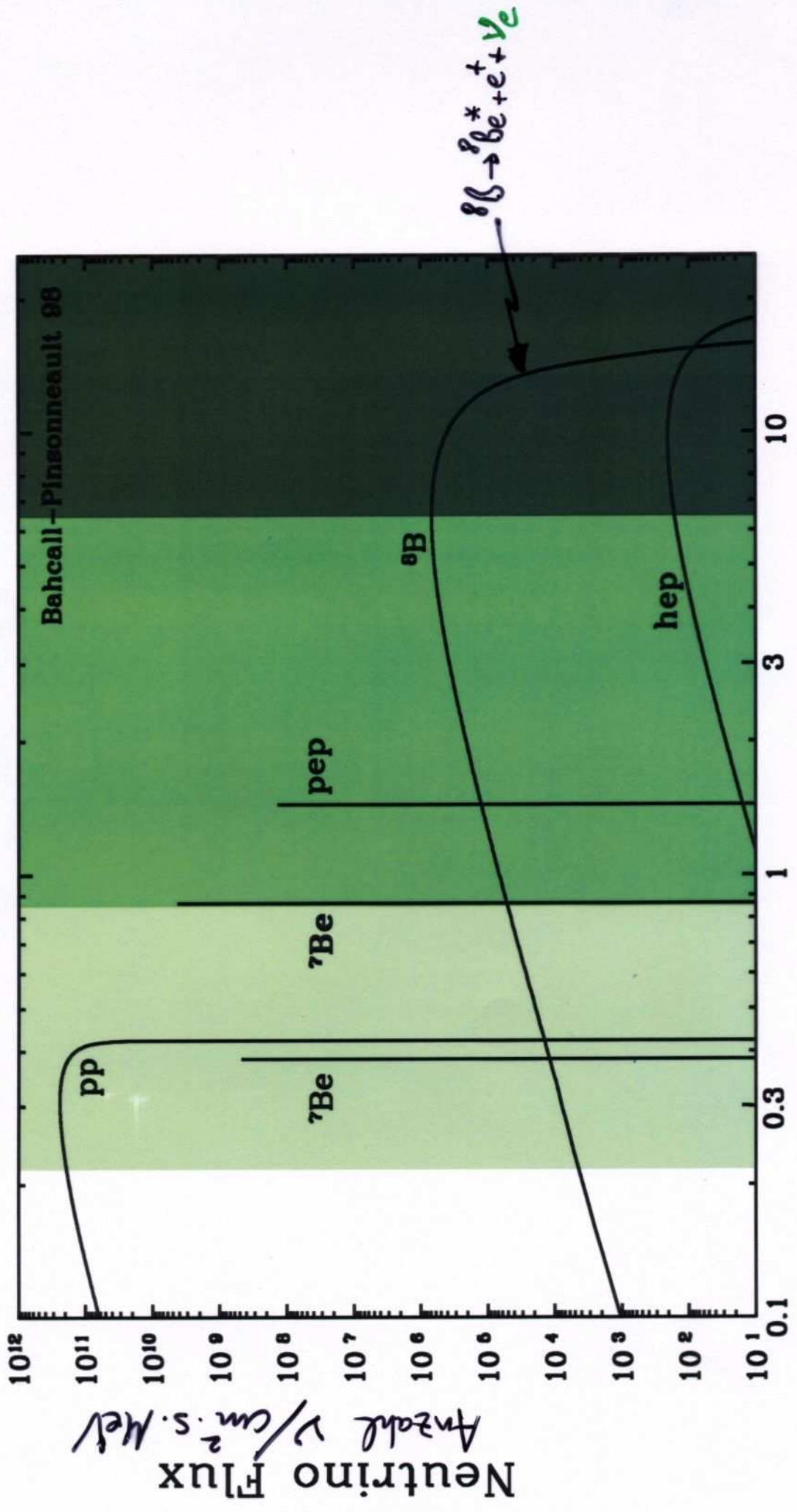


▶ Schwerewasser-Exp.:



wobei die Teilchen in \square im Detektor des Experiment nachgewiesen/gemessen werden

Energiespektrum der Sonnenneutrinos



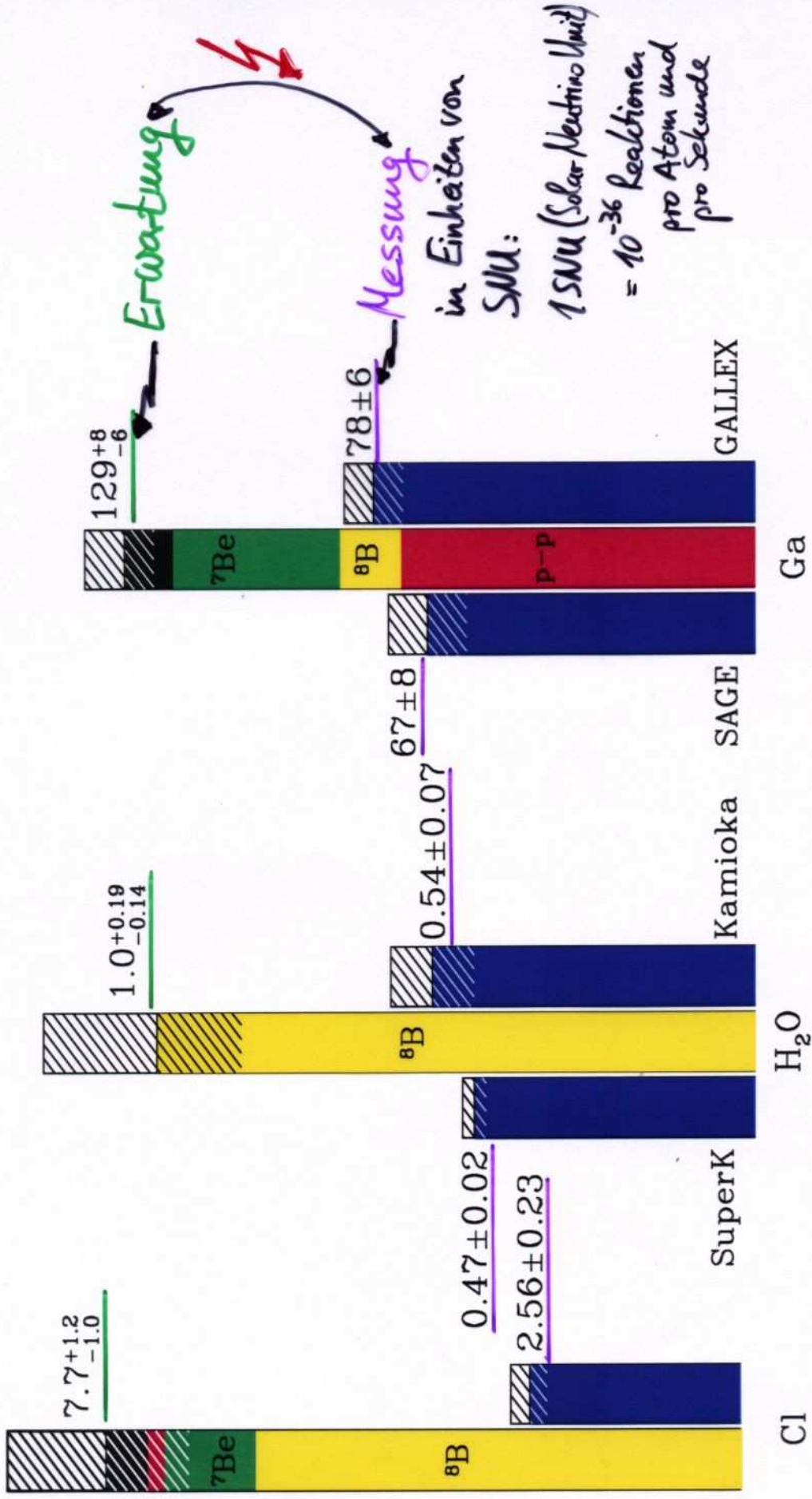
Neutrino Energy (MeV)

Solar neutrino energy spectrum ← Theorie

Sonnenneutrino-Fluss

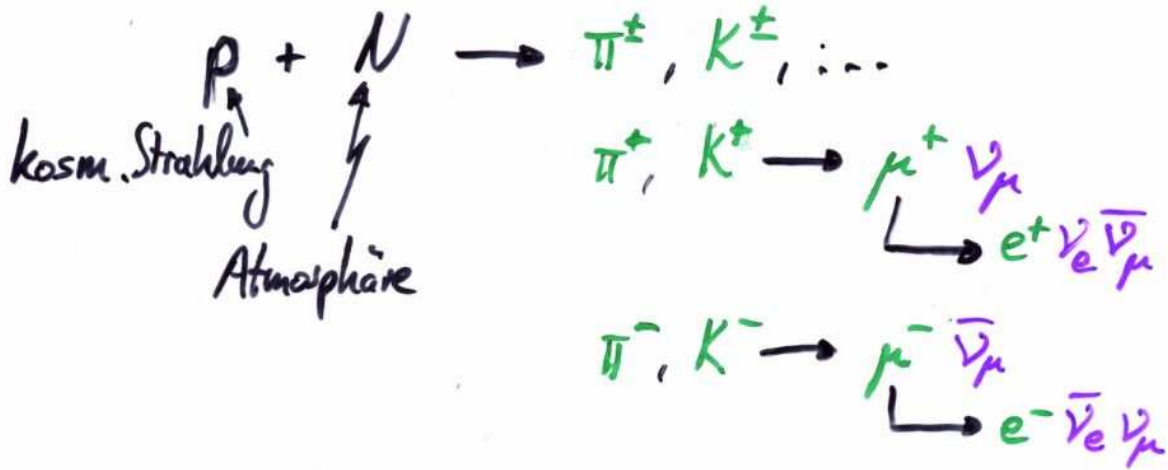
Total Rates: Standard Model vs. Experiment

Bahcall - Pinsonneault 98



Neutrinos aus der Atmosphäre

• Erzeugung durch kosmische Strahlung



$$\Rightarrow \frac{\# \text{ Myon-Neutrinos}}{\# \text{ Elektron-Neutrinos}} \approx \underline{\underline{2}}$$

• Nachweis durch Čerenkov-Licht

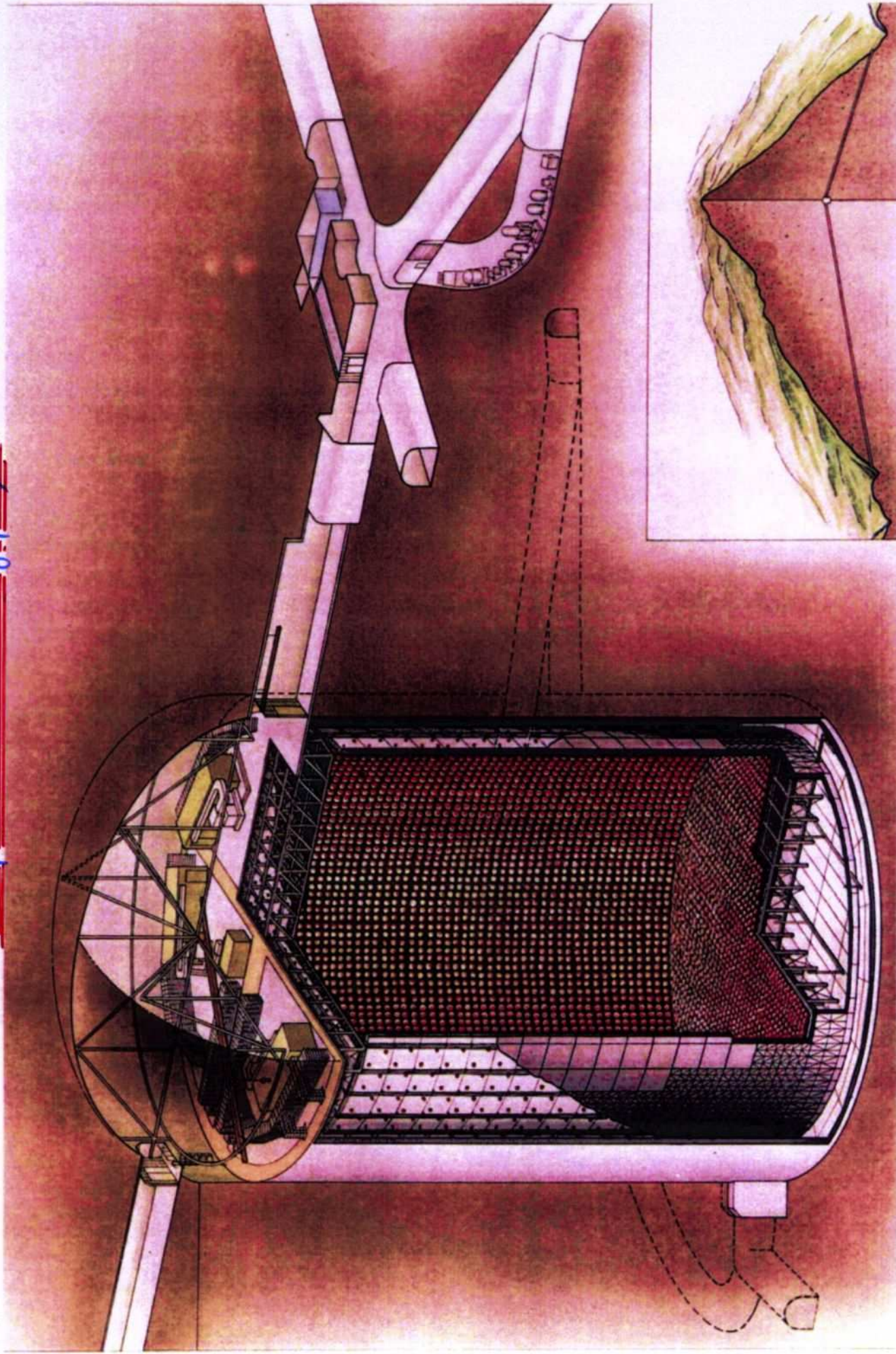


z.B. durch (Super-)Kamikande-Experiment (Japan)

• Experimentelles Resultat

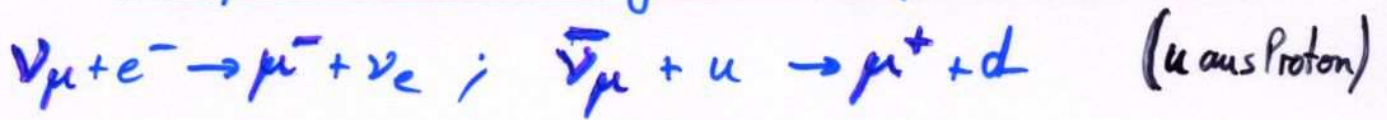
$$\frac{\# \text{ Myon-Neutrinos}}{\# \text{ Elektron-Neutrinos}} \approx 1.36 \ll 2$$

Superkamiokande (Japan)

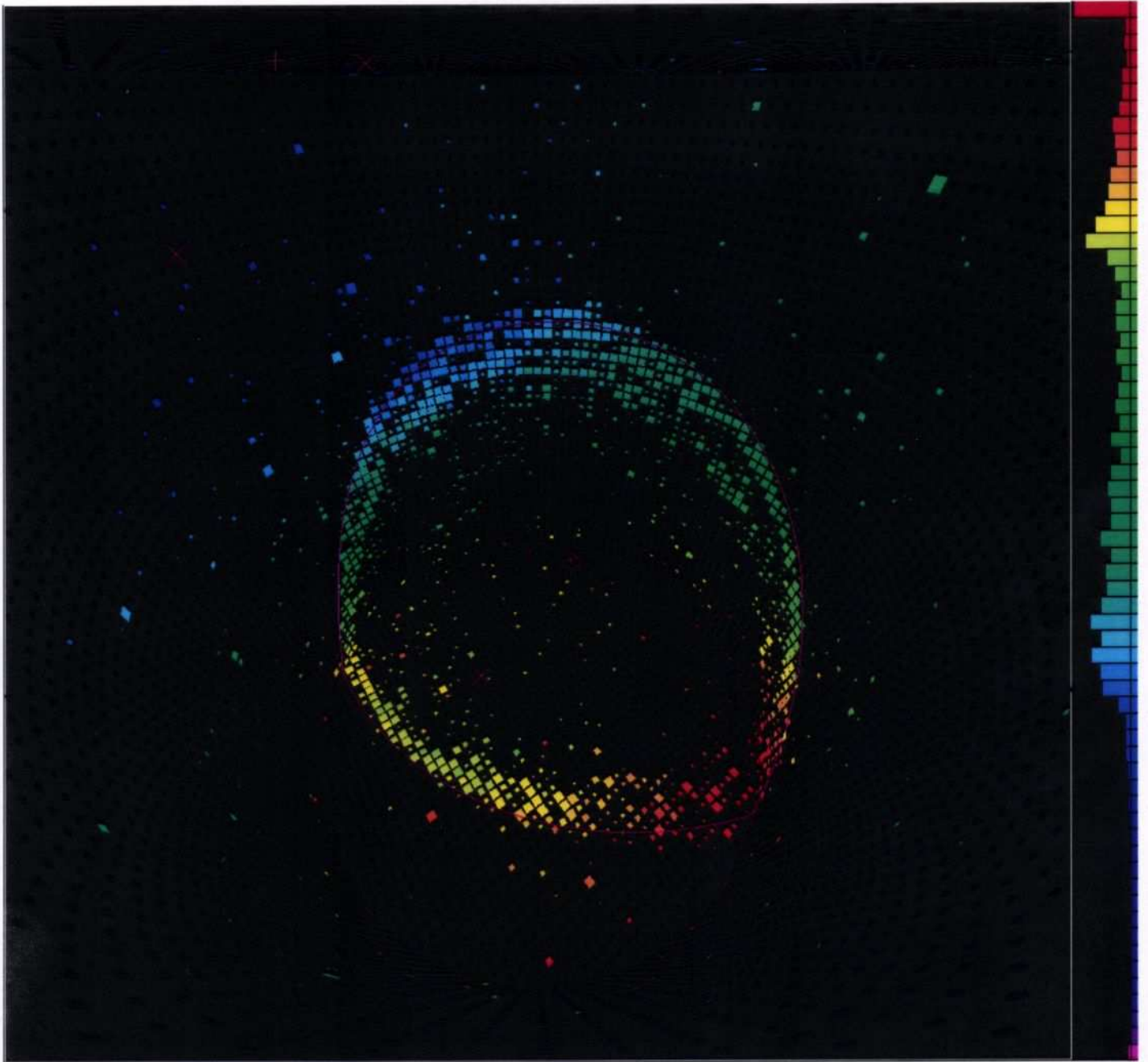


(\varnothing 39,3 m, 50000t reines Wasser, in ehemaliger Mine)
(Höhe 41,4 m, ~ 13000 Photomultiplier)

Myon-Neutrino-Signal in Superkamiokande



Myonen liefern scharfe Čerenkov-Lichtringe



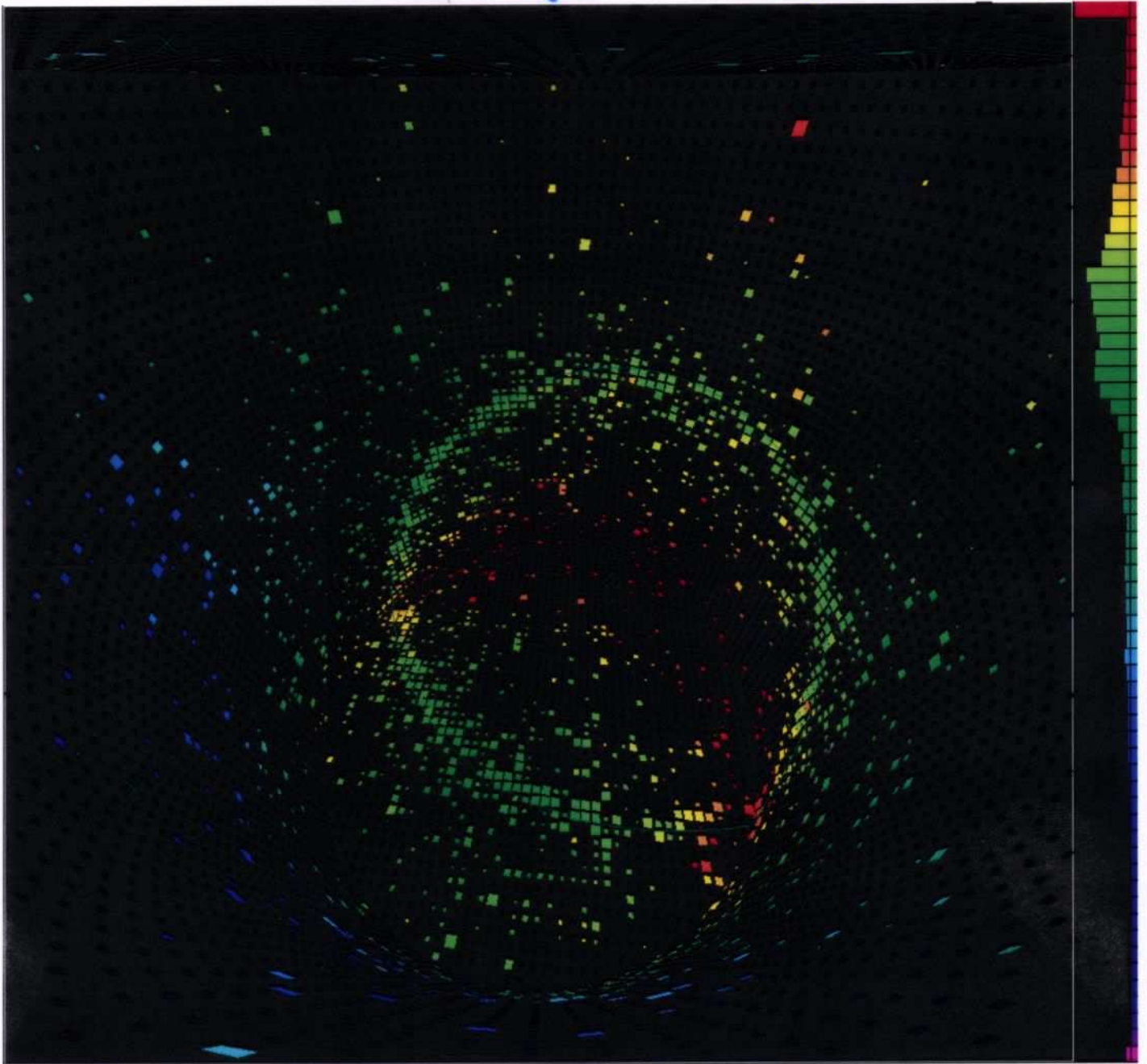
Farbskala ist Ankunftszeit
der Photonen ($\approx 5 \text{ ns}$ je Farbe)

Elektron-Neutrino-Signal in Superkamiokande



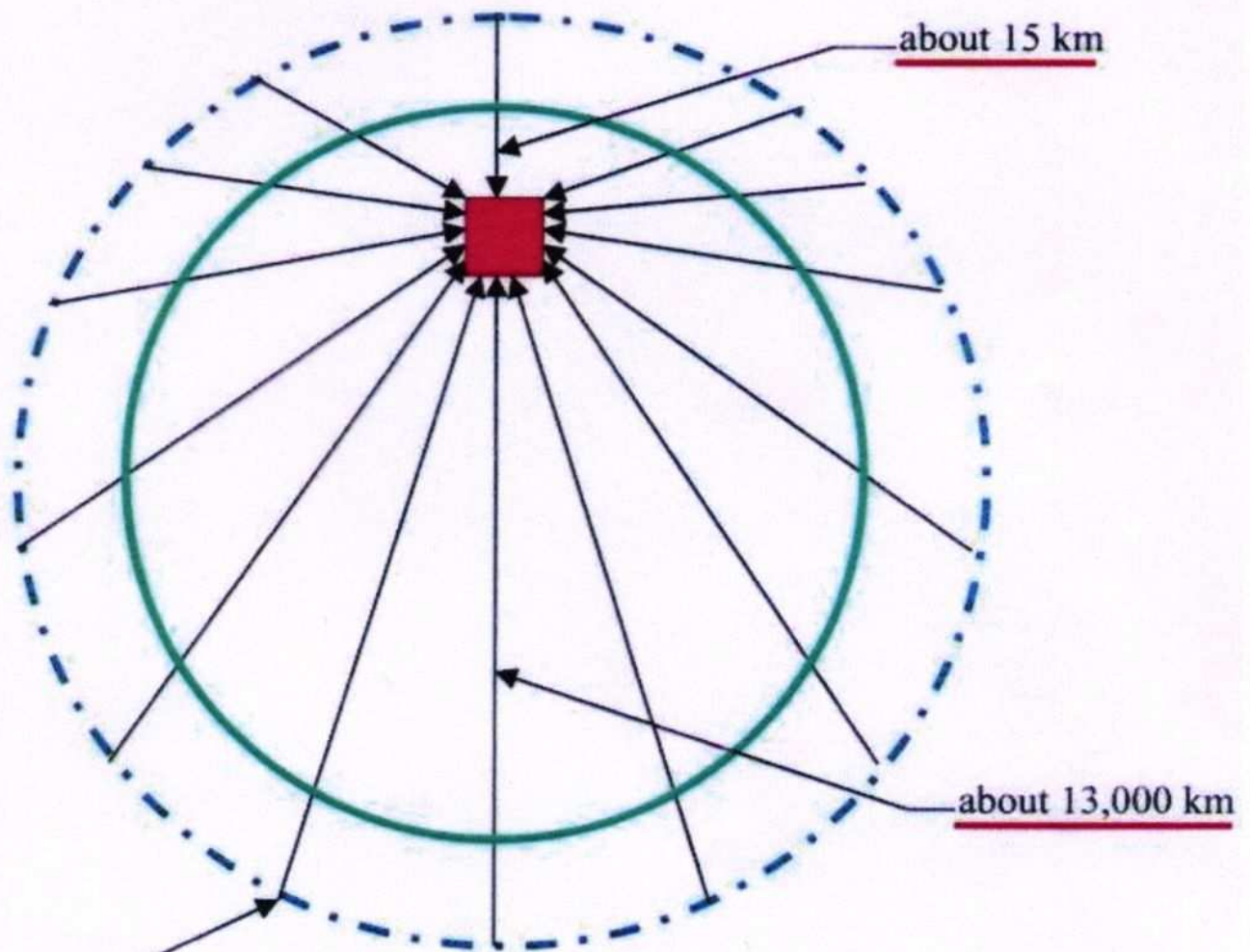
Elektron unterliegt starkem Energieverlust durch Bremsstrahlung

→ Čerenkov-Lichtringe sind ausgefranst



Richtungsabhängigkeit des $\nu_e \div \nu_\mu$ -Flusses

Study Angular Distributions of ν_μ and ν_e with Super-Kamiokande



Neutrinos produced in the atmosphere at
~15 km altitude...

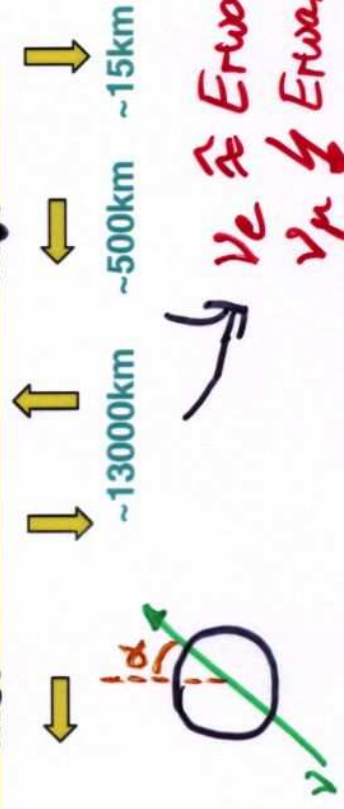
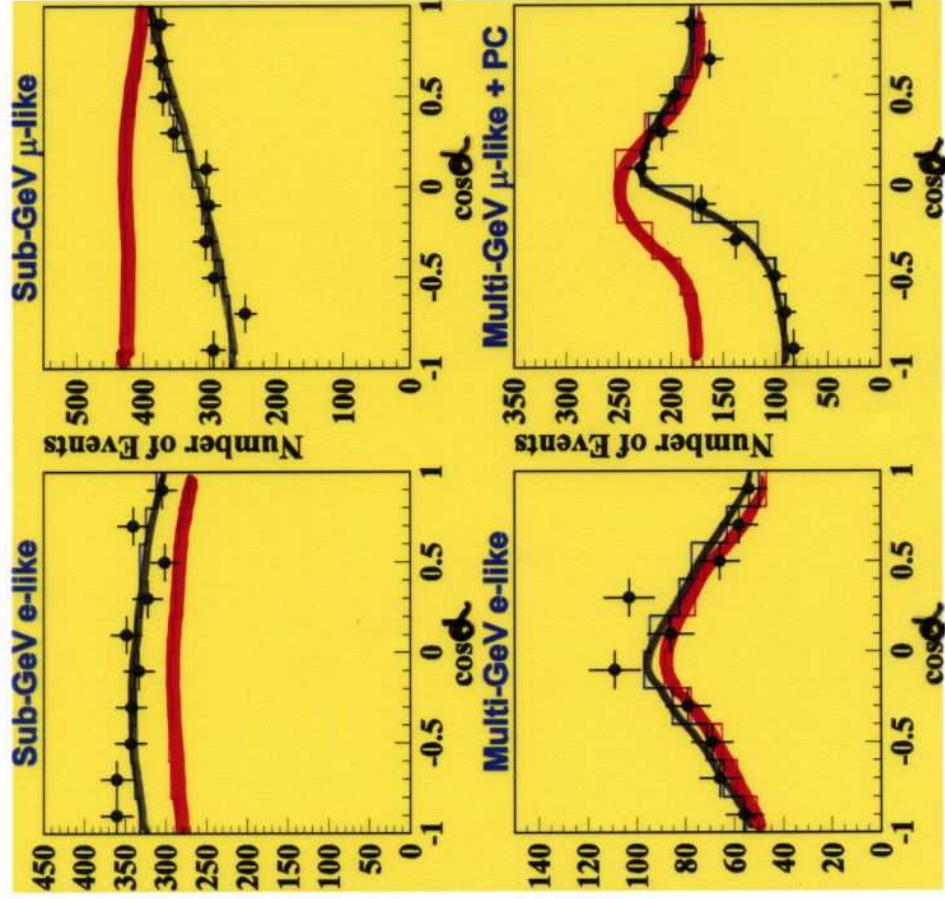
travel through the earth and interact in the
detector.

$\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ -Fluss und Neutrino-Oszillationen

Full analysis of SK-I

---- Zenith angle distributions

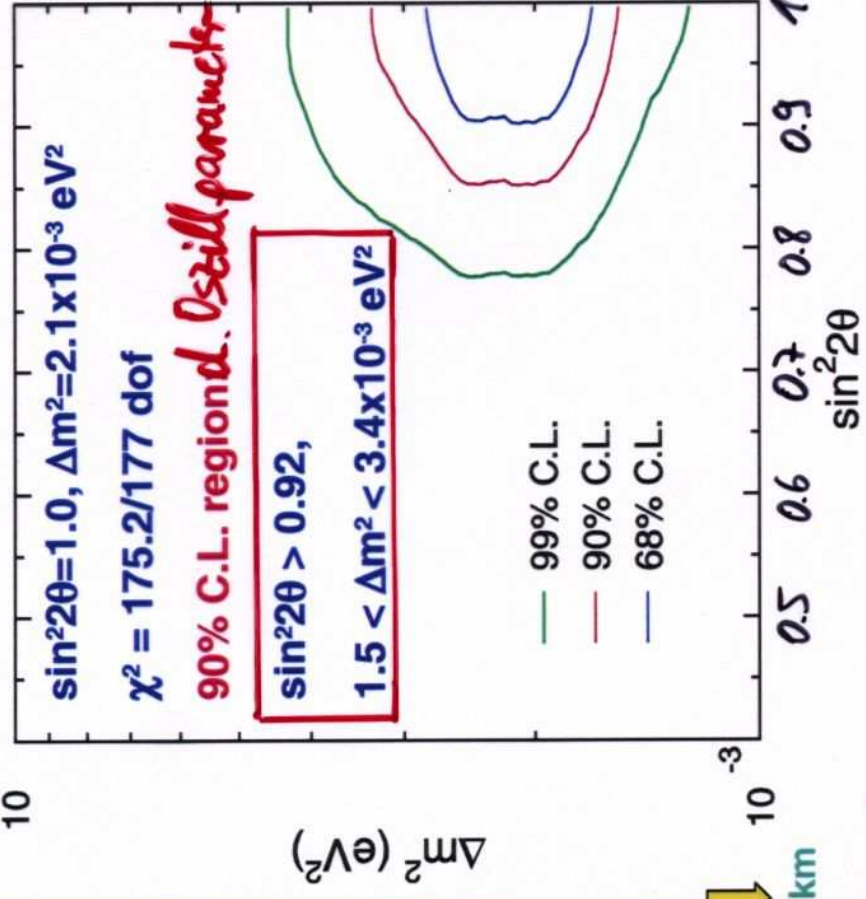
Saji's talk



Neutrinos
 Starten als ν_μ
 oszillieren
 auf Weg zum
 Detektor
 nach ν_e
 die nicht
 nachgewiesen
 werden können
 (τ -Lepton zu
 schwer)

$\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$
 2-flavor oscillations

Null oscillation
 Best fit



(umso mehr, je länger ihre Flugstrecke)

Neutrino-Oszillationen

- Grundlage: $m_\nu \neq 0$
 - ⇒ ▷ Massen-Eigenzustand \neq Leptonzahl-Eigenzustand
 - ▷ Neutrino-Mischung wie bei Quarks (à la CKM: MNS-Matrix)
 - ▷ Neutrino-Oszillationen

● Leptonzahl: (ladungsartige) Quantenzahl L_e, L_μ, L_τ

⇒ Leptonzahl-Eigenzustände: z.B. $\hat{L}_e |\nu_e\rangle = +1 \cdot |\nu_e\rangle$

Massen-Eigenzustände: $\langle \nu_i | \hat{M} | \nu_j \rangle = m_i \delta_{ij}$

⇒ Analog wie bei den Quarks verbindet eine (unitäre) Matrix
Leptonzahl- und Massen-Eigenzustände

z.B. (nur 2 Flavours)

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

⇒ Zeitentwicklung: $|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle$

mit: $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{m_i^2}{2p} \approx E + \frac{m_i^2}{2p}$

ist unterschiedlich für Massen-Eigenzustände mit $m_i \neq m_j$ für $i \neq j$

● reiner $|\nu_\mu\rangle$ - Zustand bei $t=0$

↪ oszilliert zw. ν_μ - ν_e -Mischung und reinem ν_μ

● Massen von ν_e und ν_μ :

$$m_{\nu_e} = m_1 \cos^2\theta + m_2 \sin^2\theta$$

$$m_{\nu_\mu} = m_1 \sin^2\theta + m_2 \cos^2\theta$$

Neutrino-Oszillationen

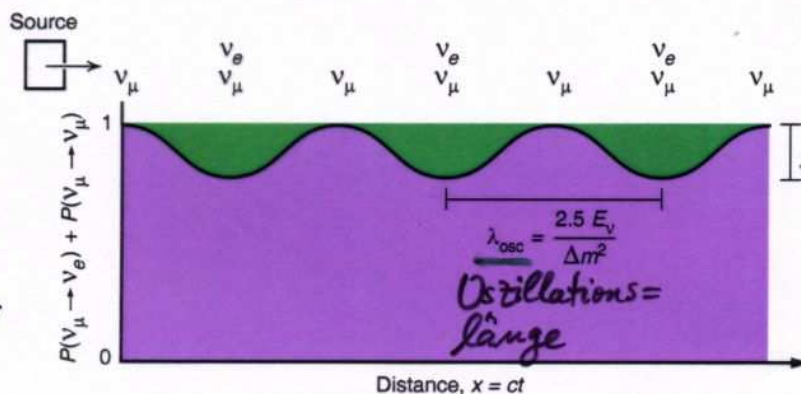
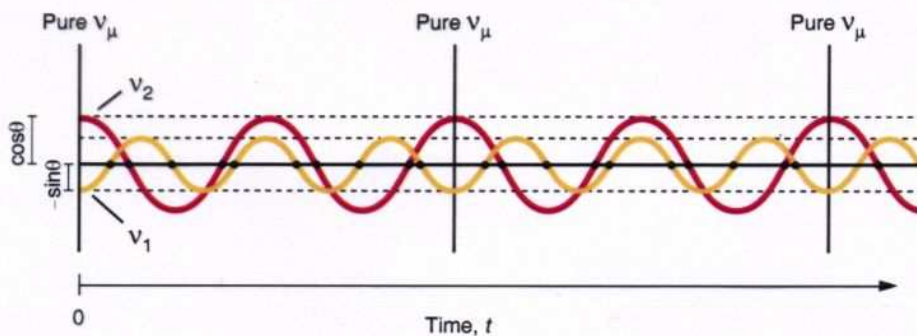
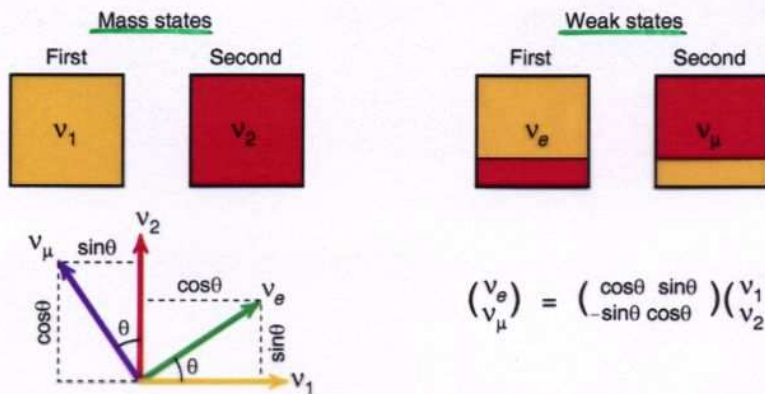
$$\langle \nu_1 | \hat{H} | \nu_1 \rangle = m_1$$

$$\langle \nu_2 | \hat{H} | \nu_2 \rangle = m_2$$

$$\hat{L}_e | \nu_e \rangle = + | \nu_e \rangle$$

$$\hat{L}_\mu | \nu_\mu \rangle = + | \nu_\mu \rangle$$

$$\hat{L}_e | \nu_\mu \rangle = 0 \text{ u.s.w.}$$



"Überlebenswahrscheinlichkeit"
+
"Oszillationswahrscheinlichkeit"

Oszillationsamplitude = $\sin^2 2\theta$

■ Probability that ν_μ has become ν_e ■ Probability that ν_μ is still ν_μ

- Überlebenswahrscheinlichkeit

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - \sin^2 2\theta \cdot \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2}{4} \cdot \frac{L}{E} \right), \quad \Delta m^2 = |m_1^2 - m_2^2|$$

- Oszillationswahrscheinlichkeit

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = 1 - P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \cdot \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2}{4} \cdot \frac{L}{E} \right)$$

Berechnung der Überlebenswahrscheinlichkeit

$$|v_1(t)\rangle = e^{-iE_1 t} \cdot |v_1\rangle \quad ; \quad |v_2(t)\rangle = e^{-iE_2 t} \cdot |v_2\rangle$$

$$\Rightarrow |v_\mu(t)\rangle = -\sin\theta \cdot |v_1(t)\rangle + \cos\theta \cdot |v_2(t)\rangle$$

Projektion auf $|v_\mu\rangle \equiv |v_\mu(t=0)\rangle$:

$$\langle v_\mu | v_\mu(t) \rangle = \sin^2\theta \cdot e^{-iE_1 t} + \cos^2\theta \cdot e^{-iE_2 t}$$

Übergangswahrscheinlichkeit: $P \equiv P(v_\mu \rightarrow v_\mu) = |\langle v_\mu | v_\mu(t) \rangle|^2$

$$\Rightarrow P = \sin^4\theta + \cos^4\theta + 2 \sin^2\theta \cos^2\theta \cdot \operatorname{Re}(e^{-i(E_1 - E_2)t})$$

$$\text{Näherung: } E_1 = \sqrt{p^2 + m_1^2} \approx p + \frac{m_1^2}{2p} \approx E + \frac{m_1^2}{2E}$$

$$\Rightarrow (E_1 - E_2)t \approx (m_1^2 - m_2^2) \cdot \frac{t}{2E} \approx \frac{\Delta m^2}{2} \cdot \frac{t}{E} \approx \frac{\Delta m^2}{2} \cdot \frac{L}{E} \quad (L = c \cdot t)$$

$$\Rightarrow P = \sin^4\theta + \cos^4\theta + 2 \sin^2\theta \cos^2\theta \cdot \cos\left(\frac{\Delta m^2}{2} \cdot \frac{L}{E}\right)$$

$$\cos d = 1 - 2 \sin^2 \frac{d}{2} \quad ; \quad 2 \sin\theta \cos\theta = \sin 2\theta$$

$$\Rightarrow P = \underbrace{\sin^4\theta + \cos^4\theta + 2 \sin^2\theta \cos^2\theta}_{=1} - \frac{4 \sin^2\theta \cos^2\theta}{\sin^2 2\theta} \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4} \cdot \frac{L}{E}\right)$$

$$\Rightarrow P = 1 - \sin^2 2\theta \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4} \cdot \frac{L}{E}\right) = P(v_\mu \rightarrow v_\mu)$$

$$\text{numerisch: } \frac{\Delta m^2}{4} \frac{L}{E} = \frac{\Delta m^2 c^4}{4 \hbar c} \cdot \frac{L}{E} \approx 1.267 \cdot \frac{\Delta m^2}{\text{eV}^2} \cdot \frac{L/\text{m}}{E/\text{MeV}}$$

Lösung des solaren ν -Problems

• bisherige Experimente

▶ nur Messung der Elektron-Neutrino-Komponente (ν_e -Fluss)

▶ Nachweisreaktion: inverser β -Zerfall

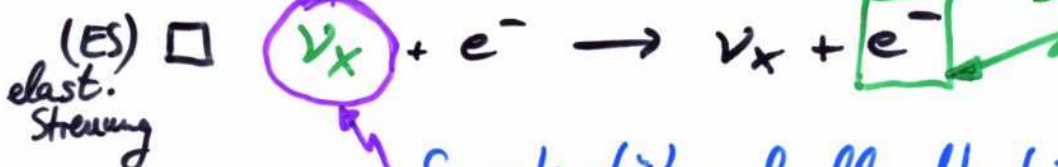


und radiochemischer Nachweis der umgewandelten Elemente

• neues Konzept des SNO-Experiments (Sudbury Neutrino Observatory)

▶ Messung aller Komponenten des ν -Flusses ($\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \dots$) von der Sonne in D_2O -Čerenkov-Experiment

▶ Nachweisreaktion(en):



exp. gemessen

Sensitivität auf alle Neutrinoarten!

Sudbury Neutrino Observatory

2092 m to Surface (6010 m w.e.)

PMT Support Structure, 17.8 m

9456 20 cm PMTs

~55% coverage within 7 m

Acrylic Vessel, 12 m diameter

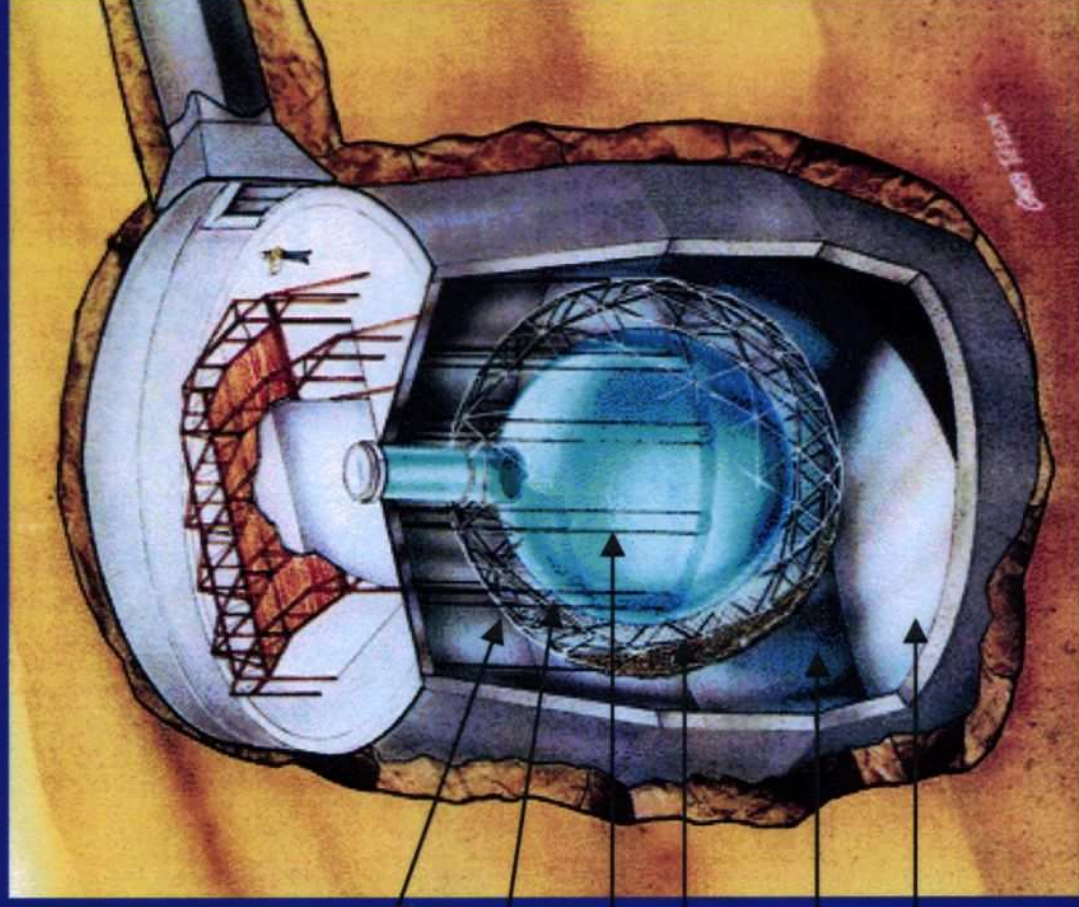
1000 tonnes D₂O

1700 tonnes H₂O, Inner Shield

5300 tonnes H₂O, Outer Shield

Urylon Liner and Radon Seal

Energy Threshold = 5.511 MeV



Neutrinoreaktionen in SNO

Die drei Nachweistreaktionen



können anhand der experimentell messbaren Endzustandsteilchen (= $\boxed{\dots}$) und deren Zenitwinkelverteilung (= Winkel zur Sonne) unterschieden werden, sodass die Neutrinoflüsse separat bestimmbar sind:

$$\Phi_{CC} \sim \Phi_e$$

$$\Phi_{NC} \sim \Phi_e + \Phi_\mu + \Phi_\tau$$

$$\Phi_{ES} \sim \Phi_e + 0.154 \cdot (\Phi_\mu + \Phi_\tau)$$

Da die Neutrinoflüsse Φ_x , $x = e, \mu, \tau, \dots$, unterschiedlich zu Φ_{CC} , Φ_{NC} , Φ_{ES} beitragen, ergibt sich ein einfaches lineares Gleichungssystem, das aufgelöst werden kann nach:

- Φ_e
- $\Phi_{\mu\tau} \equiv \Phi_\mu + \Phi_\tau$
- $\Phi_{ges} \equiv \Phi_{NC}$

SNO: Sonnenneutrino flüsse

Neutrino flux: $\Phi_{\mu\tau} > 0$

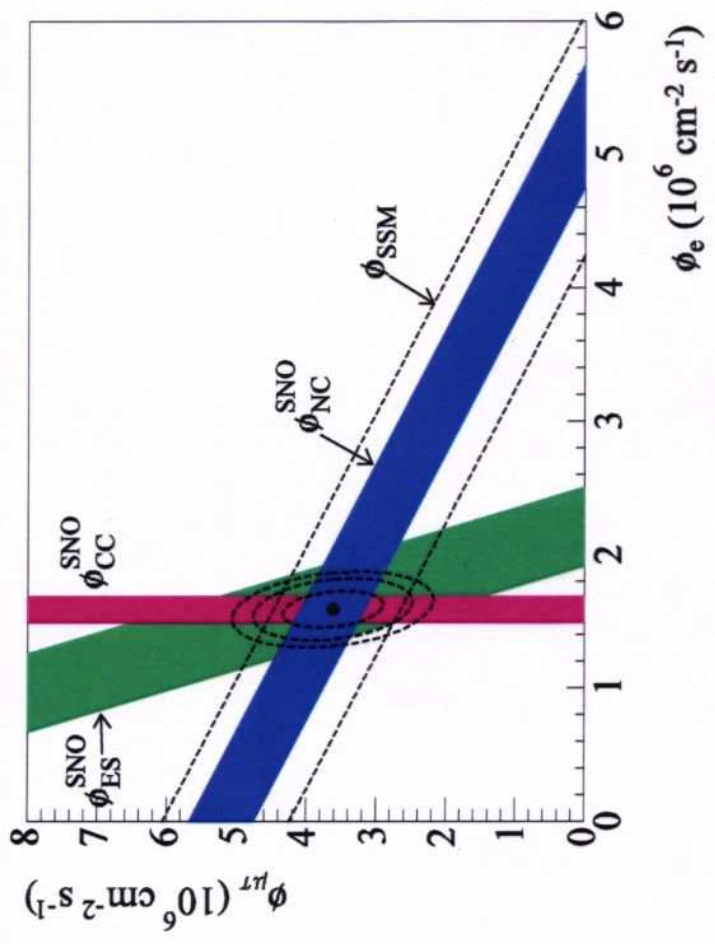
(zur Erhöhung der Neutron-Nachweiseffizienz)

reine D₂O phase (unit 10⁶/cm²/s) salt phase

$\Phi_{CC} = 1.59^{+0.08}_{-0.07} \text{ (stat)}^{+0.06}_{-0.08} \text{ (sys)}$	$\Phi_{CC} = 1.76^{+0.06}_{-0.05} \text{ (stat)}^{+0.09}_{-0.09} \text{ (sys)}$
$\Phi_{ES} = 2.21^{+0.31}_{-0.26} \text{ (stat)}^{+0.10}_{-0.10} \text{ (sys)}$	$\Phi_{ES} = 2.39^{+0.24}_{-0.23} \text{ (stat)}^{+0.12}_{-0.12} \text{ (sys)}$
$\Phi_{NC} = 5.21^{+0.27}_{-0.27} \text{ (stat)}^{+0.38}_{-0.38} \text{ (sys)}$	$\Phi_{NC} = 5.09^{+0.44}_{-0.43} \text{ (stat)}^{+0.46}_{-0.43} \text{ (sys)}$

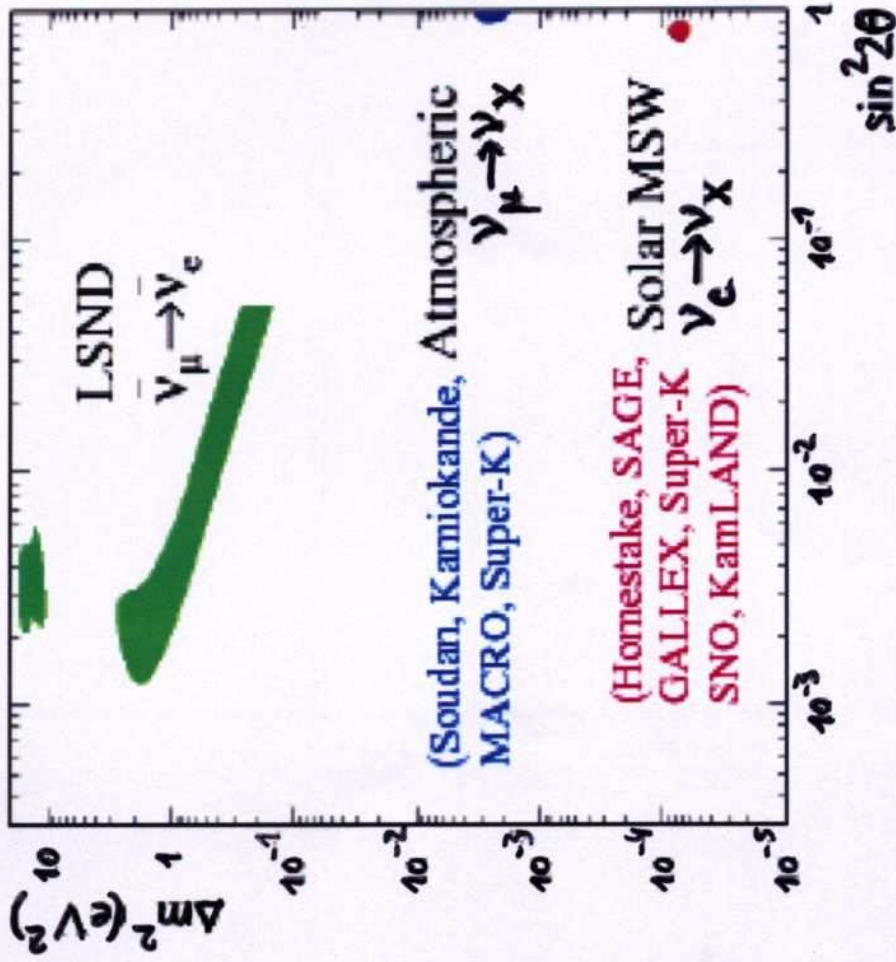
$$\Phi(^8 B)_{\text{meas}} = (0.88 \pm 0.04 \text{ (exp)} \pm 0.23 \text{ (th)}) \Phi(^8 B)_{\text{SSM}} \Rightarrow$$

Übereinstimmung!
Messung \leftrightarrow Erwartung
Standard Sonnen Modell ($\hat{=}$ Erwartung)



- beobachtbare ν_e -Fluss nur ca. 1/3 des Gesamt- ν -Flusses
 - restliche 2/3 als $\nu_\mu + \nu_\tau$ -Fluss gemessh!
- $\Rightarrow \nu_e \rightarrow \nu_\mu, \nu_\tau$ - Oszillation!

Evidence of Neutrino Oscillations



Unconfirmed:

LSND: (Beschleuniger-Experiment)

$\Delta m^2 \sim 0.1-10 \text{ eV}^2$

Confirmed:

Atmospheric:

$\Delta m^2 \sim 2 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$

Solar:

$\Delta m^2 \sim 8 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$

2 flavor oscillation in vacuum:

$$P(\nu_1 \rightarrow \nu_2) = \sin^2 2\theta \sin^2(1.27 \Delta m^2 L/E)$$

Neutrino-Oszillationen

- SNO-Experiment: $\exists \nu_e \rightarrow \nu_{\mu, \tau}$ - Oszillation

\Rightarrow Parameter $(\Delta m^2, \sin^2 2\theta)$ der Oszillation?

▷ Oszillation im Vakuum

Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = 1 - \sin^2 2\theta_{\text{vac}} \cdot \sin^2 \left(1.27 \cdot \frac{\Delta m^2}{\text{eV}^2} \cdot \frac{L/\text{m}}{E/\text{MeV}} \right)$$

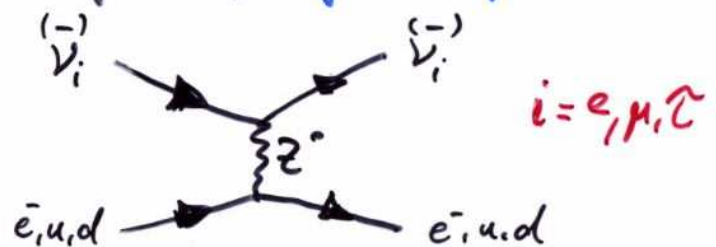
wobei $E \approx 5 \dots 10 \text{ MeV}$, $L = 150 \text{ Mio km}$.

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \approx \frac{1}{3} \quad \begin{array}{l} \text{max.} \\ \Rightarrow \\ \text{Mischung} \\ \theta_{\text{vac}} = 45^\circ \end{array} \quad \Delta m^2 \approx 3.8 \cdot 10^{-11} \text{ eV}^2$$

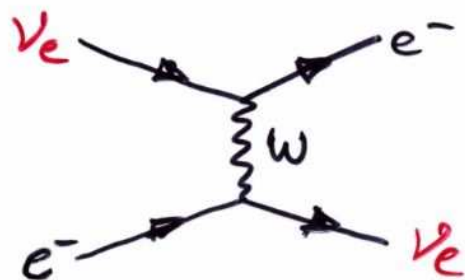
▷ Oszillation in Materie

MSW-(Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein)-Effekt für ν_e :

□ für alle ν -Arten:



□ nur für ν_e :



MSW-Effekt ...

(in Kurzfassung) ... führt zu geändertem

Mischungswinkel und Massendifferenz

von ν_1 und ν_2 in Materie:

$$\Delta m_m^2 = \Delta m^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta\right)^2 + \sin^2 2\theta}$$

$$\sin 2\theta_m = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta\right)^2 + \sin^2 2\theta}}$$

wobei A den Unterschied der "Brechungsindizes n_ν " für ν_e und ν_μ bezeichnet (wg. des zusätzlichen $\nu_e + e^- \rightarrow e^- + \nu_e$):

$$A = -2 \rho^2 \cdot (n_{\nu_e} - n_{\nu_\mu}) \sim N_e$$

Neutrinoimpuls "Brechungsindizes" Elektronendichte im Medium

NB: $\sin 2\theta_m$ hat eine Art Resonanznenner, wird also maximal, wenn bei geeigneter Elektronendichte des Mediums N_e der Wert von $A = \Delta m^2 \cdot \cos 2\theta$ wird. Dann wird $\sin 2\theta_m = 1$ und es tritt maximale Oszillation zwischen den ν_e und ν_μ auf. (Weitere Details auf den Folgefolien)

ν -Oszillationen: Vakuum \rightarrow Materie

$$\nu_i(t) = e^{-iE_i t} \cdot \nu_i \quad \text{mit} \quad E_i \approx E + \frac{m_i^2}{2E} \approx p + \frac{m_i^2}{2p}$$

\Rightarrow Bewegungsgleichung (bis auf Phasenfaktor e^{iEt}) für $\vec{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$

$$i \frac{d\vec{\nu}(t)}{dt} = H^i \vec{\nu}(t) \quad \text{mit} \quad (H^i)_{ij} = \frac{m_i^2}{2p} \delta_{ij}$$

als Massenmatrix

Die Massenmatrix $(H^i)_{ij}$ kann durch unitäre Transf. in die nicht-diagonale Flavourmatrix $(H^\alpha)_{ij}$, $\alpha = e, \mu, \tau$ umgeformt werden. $H^\alpha = U \cdot H^i \cdot U^\dagger$, $\vec{\nu} = U^\dagger \cdot \vec{\nu}'$

Im einfachsten Fall ($n=2$) ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}}_{\vec{\nu}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}}_{U^\dagger} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}}_{\vec{\nu}'}$$

und für

$$H^i = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H^\alpha = U H^i U^\dagger &= \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_{ee}^2 & m_{e\mu}^2 \\ m_{e\mu}^2 & m_{\mu\mu}^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_1^2 \cos^2 \Theta + m_2^2 \sin^2 \Theta & (m_2^2 - m_1^2) \sin \Theta \cos \Theta \\ (m_2^2 - m_1^2) \sin \Theta \cos \Theta & m_1^2 \sin^2 \Theta + m_2^2 \cos^2 \Theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$


ν -Oszillationen: Vakuum \rightarrow Materie

- Flavourmatrix für Vakuum ($n_\nu=2$):

$$H^\alpha = \frac{1}{4\pi} \Sigma \cdot \mathbb{1} + \frac{1}{4\pi} D \cdot \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

mit $\Sigma := m_1^2 + m_2^2$, $D \equiv \Delta m^2 := m_2^2 - m_1^2$

- Flavourmatrix in Materie ($n_\nu=2$):

▷ Unterschied zw. $\nu_e e^-$ - und $\nu_\mu e^-$, $\nu_\tau e^-$ -Streuung durch CC-Wechselwirkung  (nur ν_e !)

▷ "Brechungsindex" n mit $n_e \neq n_\mu$

▷ de Broglie-Wellenlänge: $\lambda = h/p \rightarrow \lambda_m = \lambda/n = h/n \cdot p$
 $e^{-i \frac{m^2}{2p} \cdot t} \rightarrow e^{-i \left[\frac{m^2}{2p} + (n-1)p \right] \cdot t}$

▷ Masse des Flavour-Eigenzustands

$$m_{ee}^2 \rightarrow m_{ee}^2 - 2p^2 \cdot (n_e - n_\mu)$$

▷ Differenz der Brechungsindices (Brechungsindex $\xrightarrow[\text{Theorem}]{\text{opt.}}$ Vorwärtsstreuung = amplitude)

$$2p^2(n_e - n_\mu) = -2\sqrt{2} G_F \cdot N_e \cdot p =: -A$$

↑ Elektronendichte in Materie

$$\Rightarrow H_m^\alpha = H^\alpha + \frac{1}{2p} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ν -Oszillationen: Vakuum \rightarrow Materie

- Massenmatrix in Materie ($n_\nu=2$):

$$H_m^{\alpha} = U \cdot H_m^i \cdot U^{\dagger}$$

$$\Rightarrow H_m^i = \frac{1}{2\rho} \begin{pmatrix} m_1^2 + A \cos^2 \theta & A \cos \theta \sin \theta \\ A \cos \theta \sin \theta & m_2^2 + A \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

▷ nicht diagonal!

▷ daher Übergänge $\nu_1 \leftrightarrow \nu_2$ möglich

▷ effektive Massen $m_{1m} \neq m_1$ und $m_{2m} \neq m_2$

▷ effektive Massen nach Diagonalisierung von H_m^i :

$$m_{1,2m}^2 = \frac{1}{2} \left[(\Sigma + A) \mp \sqrt{(A - D \cos 2\theta)^2 + D^2 \sin^2 2\theta} \right]$$

▷ Massendifferenz (\sim aufspaltung) in Materie ($D \equiv \Delta m^2$)

$$D_m \equiv m_{2m}^2 - m_{1m}^2 = D \cdot \sqrt{\left(\frac{A}{D} - \cos 2\theta\right)^2 + \sin^2 2\theta}$$

▷ Mischungswinkel θ_m in Materie

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ -\sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_{m1} \\ \nu_{m2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta_m = \sin 2\theta / \sqrt{\left(\frac{A}{D} - \cos 2\theta\right)^2 + \sin^2 2\theta}$$

dabei ist $A = -2\rho^2 (n_e - n_\mu) = 2\sqrt{2} \cdot G_F \cdot N_e \cdot \rho$

^TElektronendichte!

ν -Oszillationen in Materie: MSW-Effekt

- Überlebenswahrscheinlichkeit in Materie:

$$P_m(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta_m \cdot \sin^2 \left(1.27 \frac{D_m}{\text{eV}^2} \cdot \frac{L/m}{E_\nu/\text{MeV}} \right)$$

- Oszillationsamplitude

$$\sin^2 2\theta_m = \frac{\sin^2 2\theta}{\left(\frac{A}{D} - \cos 2\theta \right)^2 + \sin^2 2\theta}$$

hat Struktur einer Breit-Wigner-Resonanz (nur für Neutrinos, für Antineutrinos ist $A \mapsto -A$ zu ersetzen)

$$\Delta \frac{A}{D} = 0 \rightarrow \sin^2 2\theta_m = \sin^2 2\theta \quad (\text{Vakuum: } A=0)$$

$$\Delta \frac{A}{D} \gg 1 \rightarrow \sin^2 2\theta_m \approx \frac{\sin^2 2\theta}{(A/D)^2} \approx 0 \quad (\text{hohe Elektronendichte})$$

d.h. Oszillation ist unterdrückt

$$\Delta \frac{A}{D} \approx \cos 2\theta \rightarrow \sin^2 2\theta_m \approx 1 \quad (\text{Resonanz})$$

d.h. maximale Oszillationsamplitude
unabhängig von $\sin^2 2\theta$ im Vakuum!

⇒ resonante Verstärkung der Neutrino-Oszillation
↳ Flavourinversion

} ⇒ MSW-Effekt

Resonanzstruktur von $\sin^2 2\theta_m$

284 6 Eigenschaften der Neutrinos

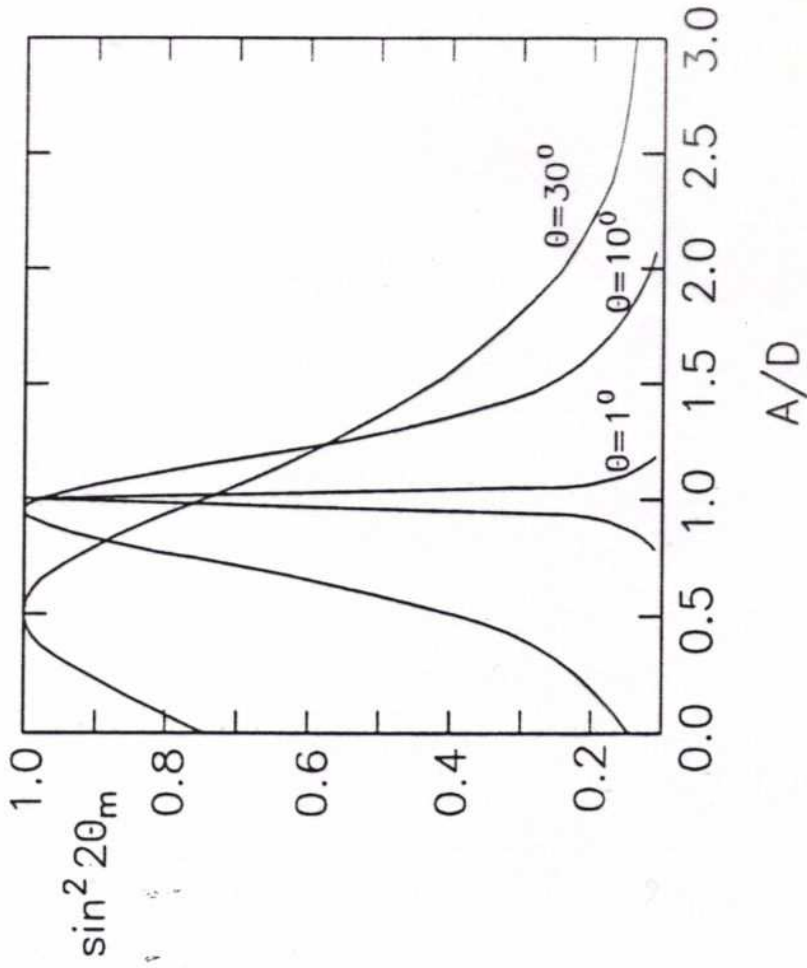


Abb. 6.33
Abhängigkeit
der Oszillationsamplitude in M_a -
terie vom Verhältnis A/D (siehe
Text) für verschiedene Werte
des Vakuummischungswinkel
 θ ($\theta = 1^\circ, 10^\circ, 30^\circ$).

MSW-Effekt: Flavourinversion

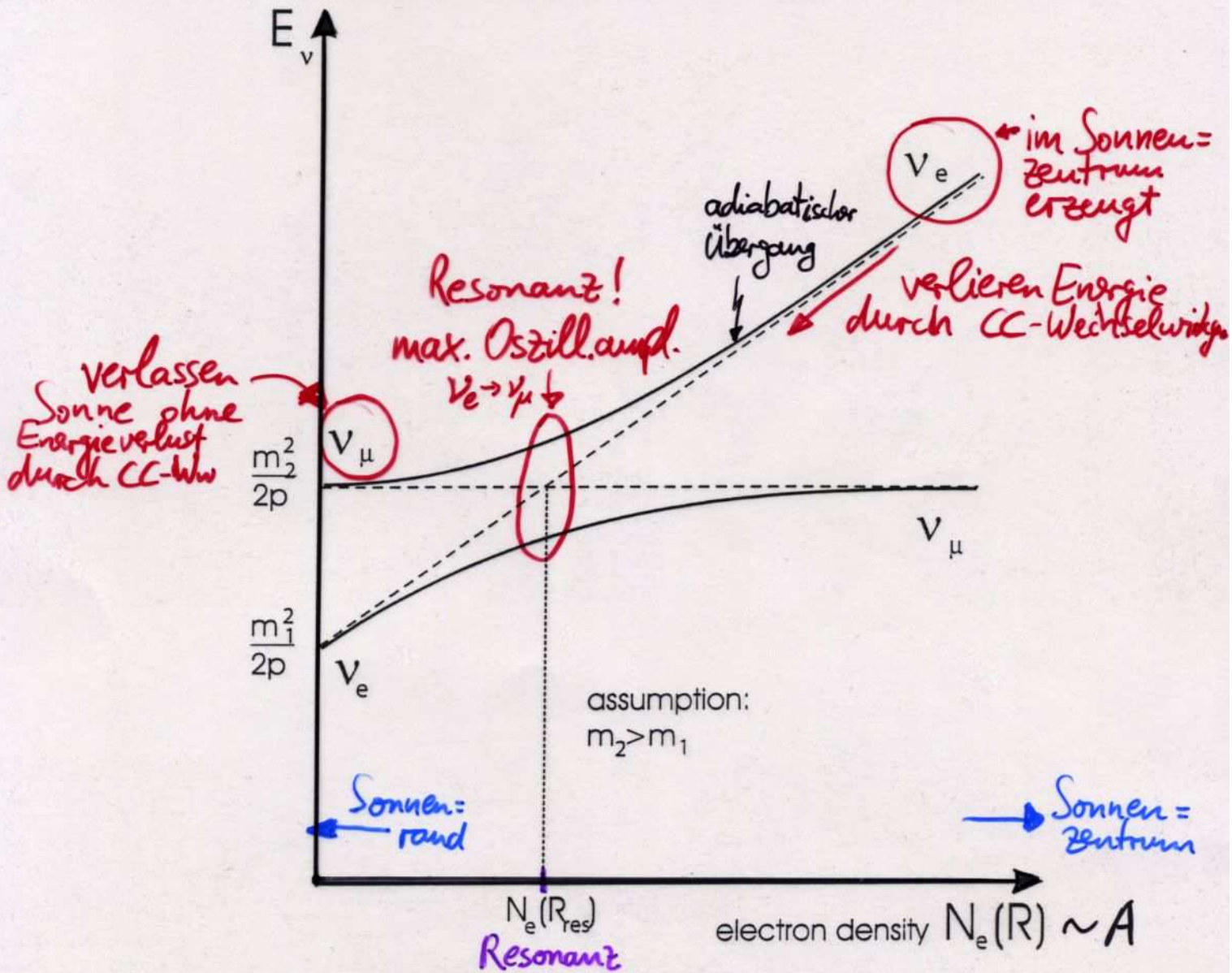
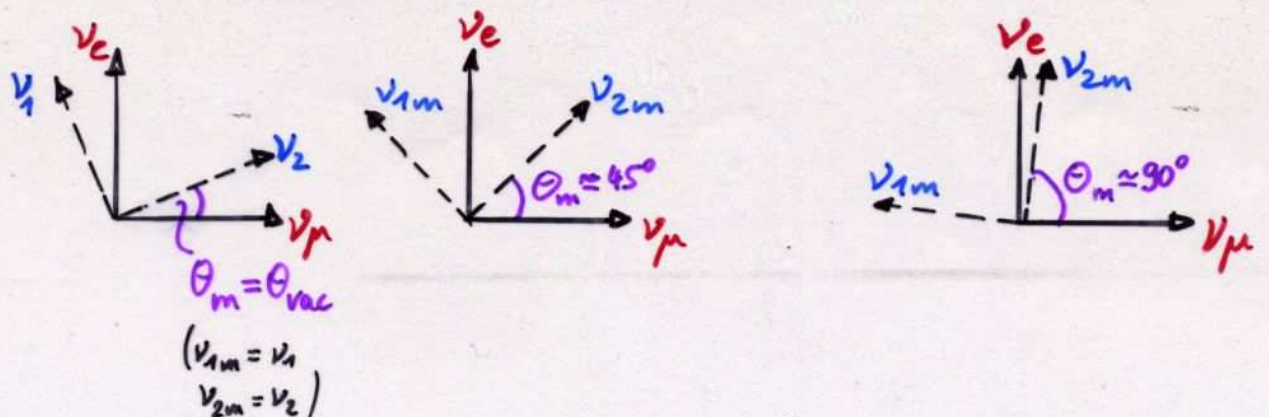


Figure 1. The MSW effect in the two-neutrino approximation, assuming $m_2 > m_1$. The neutral-current (nc) interaction common to all neutrinos has been suppressed. The ν_e are produced in the solar centre. In the non-interaction scheme their interaction is proportional to the solar electron density, which leads to the descent shown in the plot. Any ν_μ present stay constant, because they are not influenced by the electrons in the Sun. In the case of an interaction, the curve is followed, with the ν_e being created in the solar centre and the ν_μ leaving the solar surface. Because the process depends on energy, only a certain fraction of the ν_μ are leaving the Sun. If the upper curve is followed, we speak of adiabatic transitions. Non-adiabatic transitions lead to transitions between the curves (straight line).



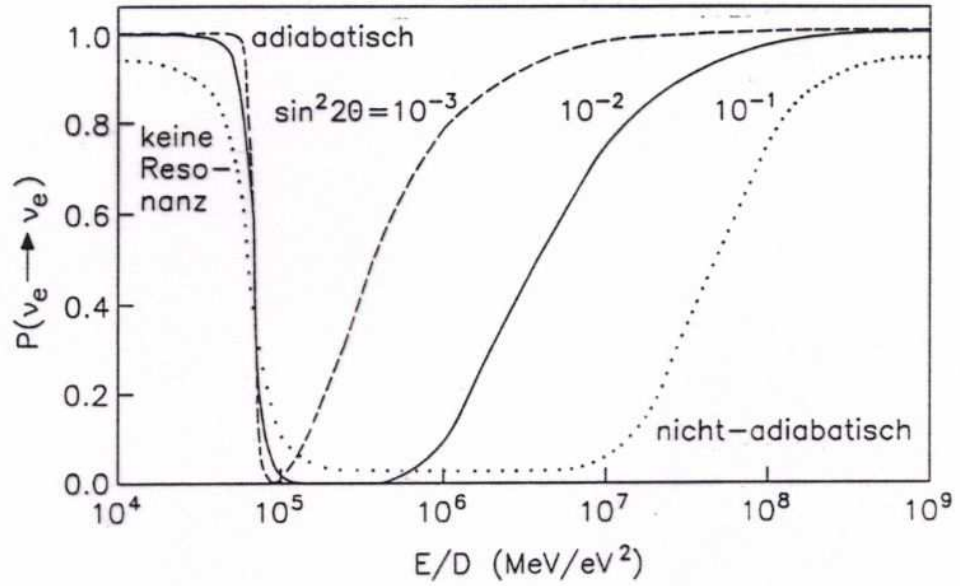


Abb. 6.36 Überlebenswahrscheinlichkeit $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ dafür, daß ein im Sonneninnern erzeugtes ν_e sich auf dem Weg bis zum Sonnenrand *nicht* in eine andere Neutrinoart (ν_μ, ν_τ) umgewandelt hat, in Abhängigkeit vom Verhältnis aus ν -Energie und Massendifferenz im Vakuum, für drei Werte des Vakuummischungswinkels θ . Wenn keine Resonanzdurchquerung stattfindet, ist $P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \approx 1$; im adiabatischen Fall ist $P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \approx 0$; im nicht-adiabatischen Fall ist $0 < P(\nu_e \rightarrow \nu_e) < 1$. Nach [Obe92].

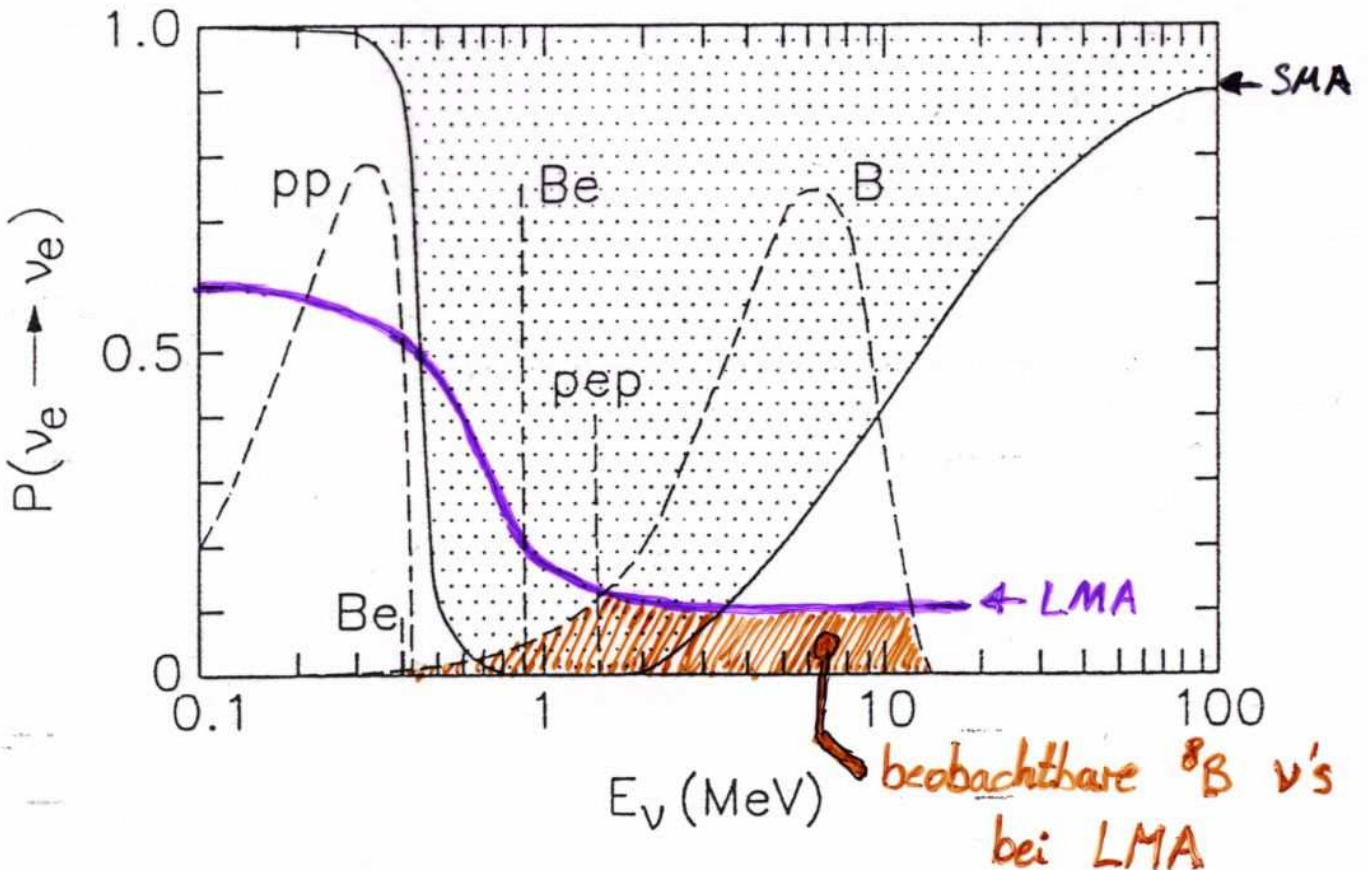


Abbildung 13: Überlebenswahrscheinlichkeit $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ gegen Energie E_ν für $\delta m^2 \approx 6 \cdot 10^{-6}$, $\sin^2 2\theta \approx 0.007$ (small-angle solution)

3-Flavourmischung

• Beobachtungen/ Interpretationen:

▶ Sonnenneutrinos: $\nu_e \rightarrow \nu_{\mu, \tau}$

▶ atm. Neutrinos: $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_{\tau}$, $\nu_{\mu} \not\rightarrow \nu_e$

⇒ Genügt 2-Neutrino-Oszillationen für Sonnen- und atm. Neutrinos!

▣ 3-Flavourmischung

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_{\mu} \\ \nu_{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{e1} & V_{e2} & V_{e3} \\ V_{\mu 1} & V_{\mu 2} & V_{\mu 3} \\ V_{\tau 1} & V_{\tau 2} & V_{\tau 3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

↖ Sonnen-ν
↖ atm. ν

• CHOOZ-Reaktor-ν-Experiment ...



... sucht nach Verschwinden von $\bar{\nu}_e$ (Disappearance)

$$\rightarrow \sin^2 2\theta_{\text{CHOOZ}} = 4 \cdot |V_{e3}|^2 \cdot (1 - |V_{e3}|^2)$$

$$\Rightarrow |V_{e3}|^2 \leq 4 \cdot 10^{-2} \quad (\text{für } \Delta m_{\text{ATM}}^2 \approx 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2)$$

⇒ 2-Neutrino-Oszill. für Sonnen- u. atm. Neutrinos genügt!

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2 2\theta_{\text{SUN}} = \frac{|V_{e2}|^2}{1 - |V_{e3}|^2} \approx |V_{e2}|^2 \\ \sin^2 2\theta_{\text{ATM}} = \frac{|V_{\mu 3}|^2}{1 - |V_{e3}|^2} \approx |V_{\mu 3}|^2 \end{cases}$$

3-Neutrino-mischung: Massenhierarchie

• Flavour-felder $\longrightarrow \nu_d = \sum_{k=1}^3 V_{dk} \nu_k \longleftarrow$ Massenfelder ν_k mit m_k
 $\nu_d, d=e, \mu, \tau$

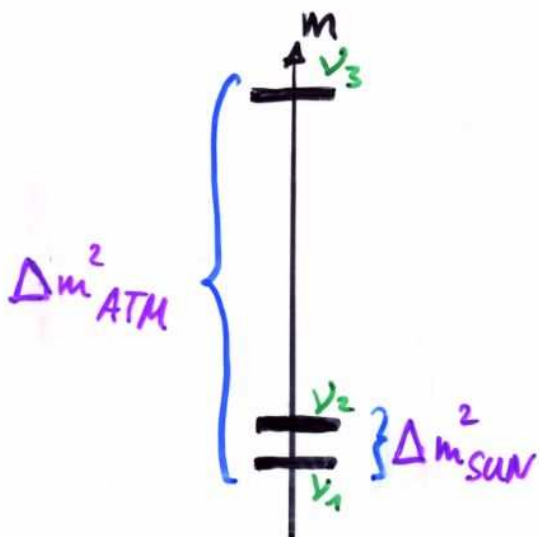
• Massenquadrat - Differenzen:

$$\Delta m_{\text{SUN}}^2 = \Delta m_{12}^2 \sim 5 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2$$

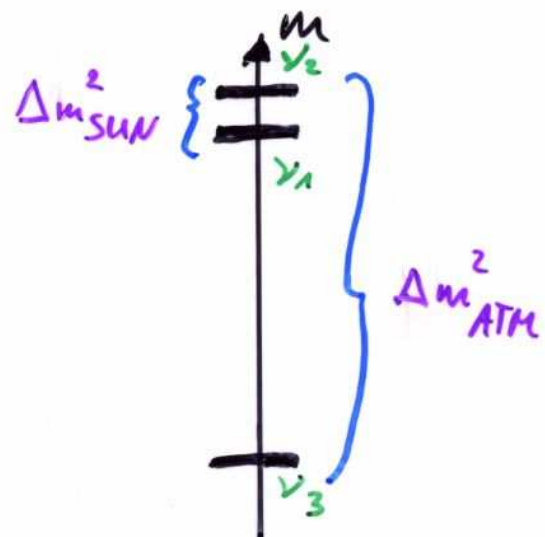
$$\Delta m_{\text{ATM}}^2 \approx |\Delta m_{31}^2| \sim 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$$

• Massenhierarchie:

"normal"



"invertiert"



Status: Bisherige Messungen gestatten noch keine Entscheidung der Hierarchiefrage

Fazit zu Neutrino-Oszillationen

- Oszillationen lösen Sonnen- und atm. Neutrinoprobleme

$$\Delta m_{\text{SUN}}^2 \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2 \ll \Delta m_{\text{ATM}}^2 \approx 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$$

$$\sin^2 2\theta_{\text{SUN}} \approx 1$$

$$\sin^2 2\theta_{\text{ATM}} \approx 1$$

- Oszillation bedeutet:

▶ Neutrinos haben Masse $\neq 0$

▶ Mischungsmatrix für Massen-Eigenzustände

$$V_{\text{MNS}} = \begin{pmatrix} 0.73-0.89 & 0.44-0.66 & <0.24 \\ 0.23-0.66 & 0.24-0.75 & 0.51-0.87 \\ 0.06-0.57 & 0.40-0.82 & 0.48-0.85 \end{pmatrix}$$

Beachte die völlig unterschiedl. Struktur von V_{MNS} der Neutrinos zu V_{CKM} der Quarks

- Ungeklärte Fragen:

▶ $\theta_{e3} = 0$? (d.h. Mischungswinkel $\theta_{13} = 0$?)

▶ CP-Verletzung bei Leptonen? (d.h. Phase $\delta \neq 0, \pi$ in V_{MNS})

▶ normale / invertierte Massenhierarchie? ($m_3 \gtrless m_{1,2}$)

▶ Neutrinos: Dirac- / Majorana-Teilchen?

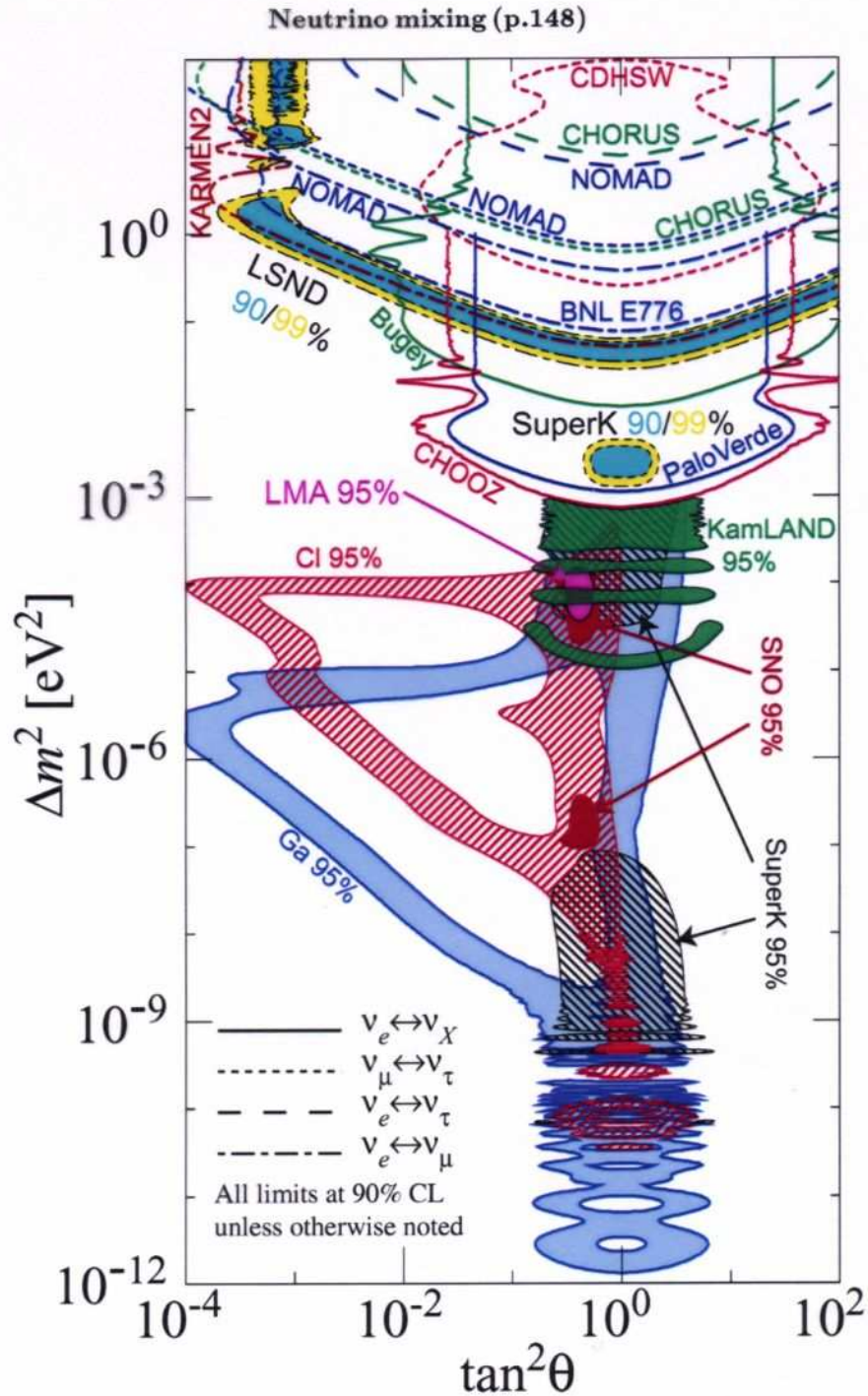


Figure 13.2: The regions of squared-mass splitting and mixing angle favored or excluded by various experiments. This figure was contributed by H. Murayama (University of California, Berkeley). References to the data used in the figure can be found at <http://hitoshi.berkeley.edu/neutrino/ref.html>.

Dirac- vs. Majorana-Neutrinos

- Im Prinzip können Neutrinomassen durch die Kopplung ans Higgs-Feld genauso erzeugt werden, wie es für die u-Typ Quarks gemacht wurde (zur Erinnerung: $\tilde{H} = CH^*$,
 $f'_u (\bar{u}_L, \bar{q}_L) \begin{pmatrix} \bar{H}^0 \\ -H^- \end{pmatrix} u_R = f'_u (\bar{u}_L \bar{H}^0 u_R + \dots) \rightarrow f'_u v \cdot (\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) / \sqrt{2}$)

$$f'_\nu \cdot (\bar{\nu}_L, e_L) \begin{pmatrix} \bar{H}^0 \\ -H^- \end{pmatrix} \nu_R = f'_\nu \cdot (\bar{\nu}_L \bar{H}^0 \nu_R + \dots) \xrightarrow{\tilde{H} \rightarrow \tilde{H}_{vac}} \underbrace{f'_\nu v}_{m_\nu} (\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L) / \sqrt{2}$$

Es ergibt sich dann ein Massenterm in der Lagrange-dichte, der analog zu den Massentermen der Leptonen und Quarks ist: $-\mathcal{L}_0 = m_\nu (\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L) / \sqrt{2}$

Da die geladenen Leptonen als Dirac-Spinoren dargestellt werden, spricht man im Falle der Neutrinos von einem Dirac-Massenterm und von Dirac-Neutrinos.

- Tatsächlich könnte aber auch ein Massenterm formuliert werden, wo nur Neutrinos einer Händigkeit auftreten:

$$-\mathcal{L}_M = m_L \bar{\nu}_L^c \nu_L + m_R \bar{\nu}_R^c \nu_R \quad \text{mit} \quad \nu^c := C \bar{\nu}^T$$

wobei $C = i\gamma^2\gamma^0$ der Ladungskonjugationsoperator ist und ν^T den transponierten Dirac-Spinor bezeichnet. Solche Massenterme heißen Majorana-Massenterm (Majorana, 1937) und die Neutrinos Majorana-Neutrinos

Majorana-Neutrinos

Eine Konsequenz der Majorana-Massenterme ist, dass eine globale U(1)-Symmetrie fehlt:

$$L_D = -m_D \bar{\nu}_L \nu_R \dots \quad \text{vs.} \quad L_M = -m_L \bar{\nu}_L^c \nu_L \dots$$

ist invariant unter

$$\nu \rightarrow e^{i\theta} \nu$$

besitzt erhaltene Quantenzahl

$$\begin{aligned} \hat{L} |\nu\rangle &= +1 \\ \hat{L} |\bar{\nu}\rangle &= -1 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \hat{L} |\nu\rangle &= +1 \\ \hat{L} |\bar{\nu}\rangle &= -1 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Lepton=} \\ \text{zahl } L \end{array}$$

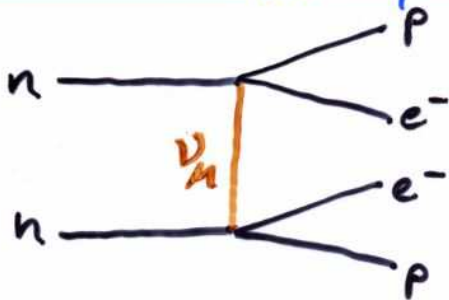
ist nicht invariant unter

$$\nu \rightarrow e^{i\theta} \nu$$

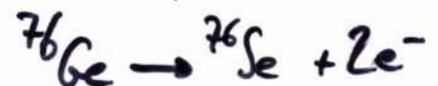
besitzt keine erhaltene Leptonzahl L

Phänomenologisch bedeutet die Nicht-Erhaltung der Leptonzahl, dass Leptonzahlverletzende Prozesse ($\Delta L = 2$) auftreten können, z.B.

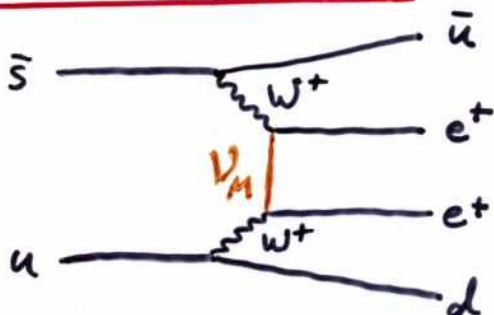
► Neutrinoloser Doppel- β Zerfall



Bisher nicht (zweifelsfrei) beobachtet, z.B. in



► $K^+ \rightarrow \pi^- e^+ e^+$



exp. Verzweigungsverhältnis:

$$BR < 6.4 \cdot 10^{-10}$$

etc

Majorana-Neutrinos

... sind bisher nicht beobachtet worden. Also:

- Warum das Ganze?

- Antwort: Für Majorana-Neutrinos einfache Erklärung der geringen (winzigen!) Neutrinomassen

Dazu: Allgemeinsten Massenterm ($\nu^c := C \cdot \bar{\nu}^T$)

$$\mathcal{L}_{DM} = A \bar{\nu} \nu + B \bar{\nu}^c \nu^c + \frac{1}{2} D (\bar{\nu}^c \nu + \bar{\nu} \nu^c)$$

Dirac \rightarrow

Majorana \rightarrow

$$= (\bar{\nu}, \bar{\nu}^c) \cdot \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2} D \\ \frac{1}{2} D & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ \nu^c \end{pmatrix} =: (\bar{\nu}, \bar{\nu}^c) \mathcal{M} \begin{pmatrix} \nu \\ \nu^c \end{pmatrix}$$

Die Matrix \mathcal{M} kann diagonalisiert werden:

$$V^{-1} \mathcal{M} V = \mathcal{M}_{diag} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

mit $m_{1,2}$ als Lösung der Eigenwertgleichung

$$\det(\mathcal{M} - m \mathbb{1}) = 0$$

$$\Rightarrow m_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(A+B) \pm \sqrt{(A+B)^2 + D^2} \right]$$

Betrachte Spezialfall mit: $A=0, B=M \Rightarrow m \approx \frac{1}{2} D$

$$\rightarrow \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & M \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \approx M & \text{sehr groß, z.B. } 10^{15} \text{ GeV} \\ m_2 \approx -\frac{m^2}{M} & \text{sehr klein, } = 10^{-15} \text{ GeV} \end{cases}$$

$\hat{=}$ See-saw Mechanismus

\Rightarrow kleine Masse für linkshändige ν_L ; ν_R sehr schwer

Fazit zu Neutrinomassen

Das Standard-Modell kann leicht um Neutrinomassen ergänzt werden. Allerdings auf Kosten von mindestens sieben neuen Parametern:

- 3 Neutrinomassen
- 3 Mischungswinkel
- ≥ 1 komplexe Phase der Mischungsmatrix

Das Problem, die Werte der Teilchenmassen allein aus einer Yukawa-Kopplung an das Higgs-Feld zu erzeugen, ist allerdings dramatisch verschärft, denn die Neutrinomassen sind $\ll 1 \text{ eV}/c^2$, während die top-Quarkmasse ca. $175 \text{ GeV}/c^2$ beträgt. Es ist völlig unklar, warum die Yukawa-Kopplungskonstanten einen Wertebereich von mehr als 11 Größenordnungen überstreichen.

Abhilfe schafft der Übergang zu Majorana-Neutrinos, wo in geeigneten Erweiterungen des Standard-Modells extrem leichte (linkshändige) Neutrinomassen durch den See-Saw-Mechanismus erklärt werden können.