Grand Unified Theory (GUT)

Das Standard-Modell hat eine komplizierte Struktur

$$SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$$

der Wechselwirkungen mit den drei unabhängigen Kopplungsstärken

$$g_s \qquad g \equiv g_W \qquad g' \equiv \sqrt{g_Z^2 - g_W^2}$$

Entsprechen dieser Struktur gibt es auch keinen Zusammenhang zwischen den Farbtripletts der $SU_C(3)$ und den Flavour-Dupletts der $SU_L(2)$, auch können elektr. Ladung und Hyperladung Y der $U_Y(1)$ beliebig gewählt werden (NB: $Y = 2 \cdot (Q - T^3)$). Es in diesem Modell keine Beziehung (aufgrund von Symmetrien) zwischen den drittelzahligen elektr. Ladungen der Quarks und den Ladungen der Leptonen. Anders gesagt: Das Standard-Modell kann nicht erklären, warum Proton und Elektron im Wasserstoff den gleichen Absolutwert der elektr. Ladung besitzen.

Grand Unified Theory (GUT)

Um Verbindungen zwischen den separierten Strukturen des Standard-Modells herzustellen, liegt es nahe, nach einer umfassenderen Struktur (d.h. eine größere Gruppe) zu suchen. Beispiele dafür sind:

- $SU_c(4)$ J. Pati, A. Salam (1973)

  Quarks und Leptonen als elementare, strukturlose Teilchen, angeordnet in Generationen zu zwei Dubletts; z.B. $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$, ...

  - Erweiterung der QCD-Gruppe $SU_c(3)$ um Leptonen mit einer "vierten Farbladung"

    $\rightarrow$ $SU_c(4)$, z.B. 

  - Zusammen mit link-recht-symmetrischer Ergänzung $\rightarrow$ Pati-Salam-Gruppe

    $SU_c(4) \otimes SU_L(2) \otimes SU_R(2)$

  - Relation für elektr. Ladung: $Q_{EM} = T_L^3 + T_R^3 + \frac{1}{2}(B-L)$

    L Lepton-zahl, B Baryon-zahl

    da $SU_c(4) \supset \underbrace{SU_c(3)}_{\text{QCD}} \otimes \underbrace{U_{B-L}(1)}_{\text{erhaltene Baryon-Leptonzahl}}$

Grand-Unified-Theory (GUT)

- **SU(5)** H. Georgi, S.L. Glashow (1974)

ist die kleinste Gruppe, die alle Gruppen des Standard-Modells umfasst, d.h. $SU(5) \supset SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.
Dies ist leicht einsichtig, wenn 5×5-Matrizen als Repräsentanden der $SU(5)$ als aus 3×3-Matrix der $SU(3)$ und 2×2 Matrix von $SU(2) \otimes U(1)$ $(\hat{=}\, U(2))$ aufgebaut betrachtet werden:

$$\begin{array}{c} SU_c(3) \\ U := \left(\begin{array}{ccc|cc} \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \hline & & & \bullet & \bullet \\ & & & \bullet & \bullet \end{array}\right) \\ SU_L(2) \otimes U_Y(1) \end{array}$$

Im Unterschied zur $SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ sind in $SU(5)$-Repräsentanden auch die oben freigebliebenen Bereiche der Matrix aufgefüllt:

$$V := \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

sodass $V \in SU(5)$ ist, d.h. $V^\dagger V = \mathbb{1}$ und $\det(V) = 1$

SU(5)-Grand Unified Theory (GUT)

Die Bedingung $\det(U) = 1$, falls $U \in SU(5)$, hat eine phänomenologisch interessante Konsequenz

$$U \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} e^{i\alpha Y_3}\, SU(3) & \\ \hline & e^{i\alpha Y_2}\, SU(2) \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{symbol.}}{\Rightarrow} \det(U) = \det\Big(e^{-i\alpha Y_3}\, \underbrace{\mathbb{1}_3}_{\text{3-dim-}} \times e^{-i\alpha Y_2}\, \underbrace{\mathbb{1}_2}_{\text{2-dim } \mathbb{1}\text{-Matrix}}\Big) \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \quad \left(e^{-i\alpha Y_3}\right)^3 \cdot \left(e^{-i\alpha Y_2}\right)^2 \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{3 Y_3 + 2 Y_2 = 0}$$

Zahl der Farben ↑ ↑ Flavour-Dublett-Struktur

Damit sind die Hyperladung Y_3 der Farbtripletts und die Hyperladung Y_2 der Flavour-Dubletts voneinander abhängig! Konsequenz:

- für Dublett $\binom{\nu_e}{e^-}_L$ ist Hyperladung $Y_2 \equiv Y = -1$

$$\Rightarrow \quad Y_3 = -\frac{2}{3} Y_2 = +\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ Farbtripletts müssen drittelzahlige elektr. Ladung besitzen!

SU(5) – Grand Unified Theory (GUT)

M.a.W. $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$ bilden zusammen mit Teilchen, deren Hyperladung $Y_3 = +\frac{2}{3}$ ist, ein 5-Plett innerhalb der SU(5)-Struktur. Von den bekannten Quarks der 1. Generation hat nur das Anti-d-Quark die passende Hyperladung $\left(Y(\bar{d}_R) = 2 \cdot \left(+\frac{1}{3} - 0\right) = +\frac{2}{3} \right)$.

- Also lautet das SU(5)-5-Plett (NB: $\bar{d}_R \equiv (\bar{d})_L$)

$$[5] = \begin{pmatrix} \bar{d}_b \\ \bar{d}_g \\ \bar{d}_r \\ \nu \\ e^- \end{pmatrix}_L$$

- Für die übrigen Quarks und Leptonen gibt es ein 10-Plett

$$[10] = \left(\begin{array}{ccc:cc} 0 & \bar{u}_r & -\bar{u}_g & d_b & u_b \\ \cdot & 0 & \bar{u}_b & d_g & u_g \\ \cdot & \cdot & 0 & d_r & u_r \\ \hdashline \cdot & \cdot & \cdot & 0 & e^+ \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \end{array}\right)_L$$

[10] ist antisym. 5×5 Matrix, damit sind die $\cdot$-Elemente spezifiziert

- Alle 15 Fermionen einer Generation sind damit in [5] und [10] untergebracht.

NB: Ein linkshändiges Anti-Neutrino fehlt → Erweiterung erforderlich

SU(5) - Grand Unified Theory (GUT)

Auch die bisher schon bekannten Eichbosonen treten in einer 5×5 Matrix-Struktur auf:

3×3 Gellman-Matrizen

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} & 8\ \text{Gluonen} & & X_b & Y_b \\ & & & X_g & Y_g \\ & & & X_r & Y_r \\ \hline \bar{X}_b & \bar{X}_g & \bar{X}_r & W^+ & W^- \\ \bar{Y}_b & \bar{Y}_g & \bar{Y}_r & W^3, & B \end{array}\right)$$

2×2 Pauli-Matrizen

und zusätzlich <u>neue Bosonen X, Y</u>, die aufgrund ihrer Position in der 5×5-Matrix sowohl <u>starke</u> als auch <u>elektroschwache Wechselwirkungen</u> vermitteln, z.B.

,

X, Y besitzen also <u>Farbladung</u>, <u>drittelzahlige elektr. Ladung</u> und zusätzlich <u>Baryon- und Leptonquantenzahlen</u>. Daher werden diese Teilchen auch **Leptoquarks** genannt.

Bevor eine wichtige phänomenologische Konsequenz aufgrund dieser Leptoquarks erörtert wird, soll zunächst noch ein Blick auf die Kopplungsstärke(n) in dieser SU(5) geworfen werden.

SU(5)-Grand Unified Theory (GUT)

Ein wesentliche Eigenschaft aller GUT-Theorien ist die Vereinigung der Kopplungen bei hoher Energie:

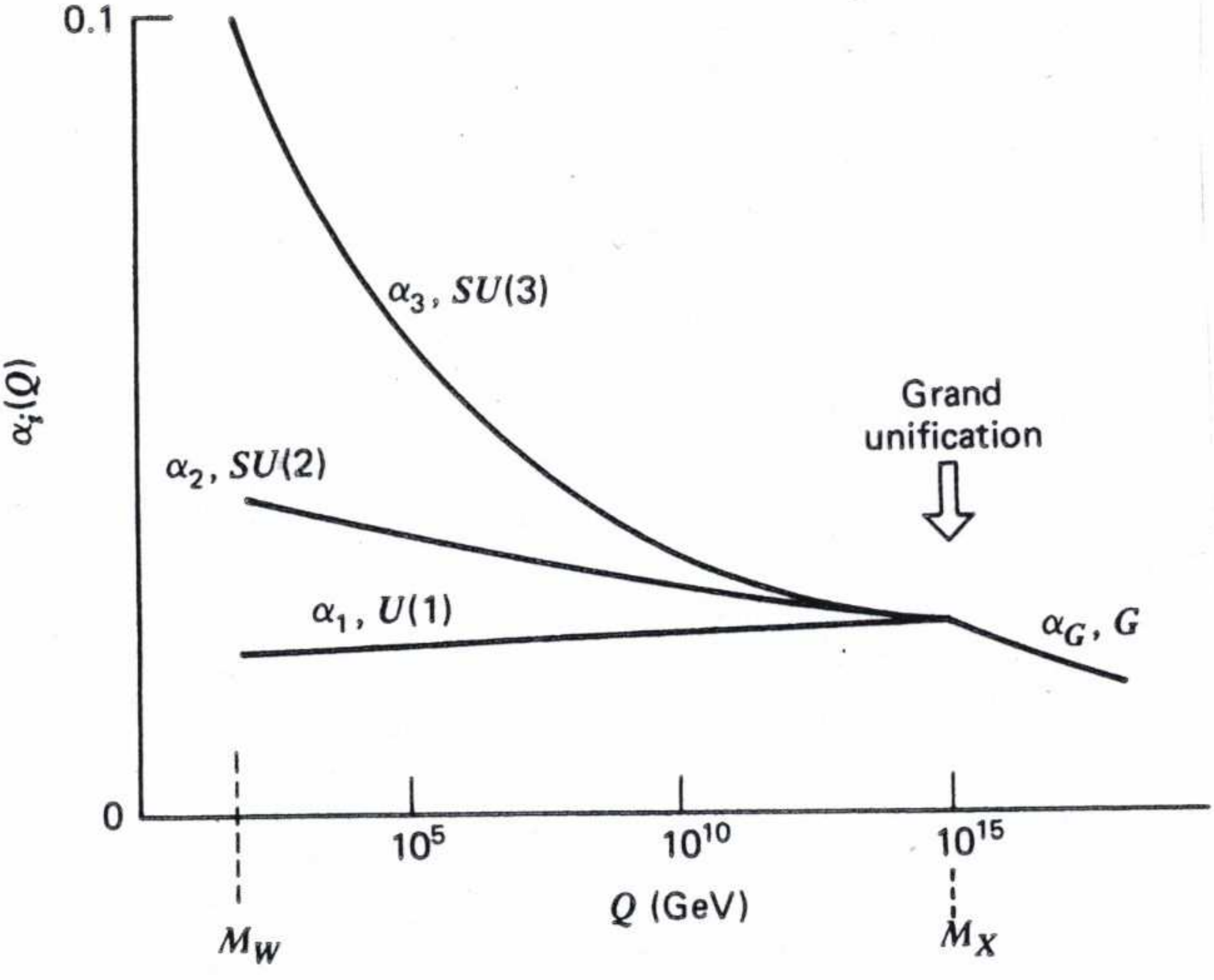


Fig. 15.4 The variation of $\alpha_i \equiv g_i^2/4\pi$ with Q, showing the speculative grand unification of strong $[SU(3)_{\text{color}}]$ and electroweak $[SU(2)_L \times U(1)_Y]$ interactions at very short distances $1/Q \approx 1/M_X$.

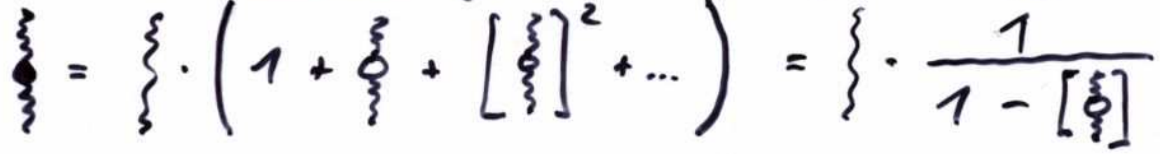
Dabei sind: $\underset{U(1)}{g_1 \equiv \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot g'}$, $\underset{SU(2)}{g_2 \equiv g_W}$, $\underset{SU(3)}{g_3 \equiv g_S}$

die Kopplungen der Gruppen im Standard-Modell

NB: Faktor $\sqrt{\frac{5}{3}}$ folgt aus SU(5)-Gruppenstruktur (Clebsch-Gordan-Koeffizient der diagonalen Gruppengenerator-Matrix λ_{24})

SU(5)-Grand Unified Theory (GUT)

Zur Erinnerung:
Vakuumpolarisation für zu (Anti-)Abschirmung von Ladungen – elektrische, Farbladung, Hyperladung, etc. –, wodurch die Kopplungsstärken energieabhängig werden:



$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha_i(\mu^2)} = \frac{1}{\alpha_i(M_X^2)} + b_i \ln \frac{M_X^2}{\mu^2} \qquad (*)$$

dabei sind die Kopplungen α_i, $i=1,2,3$, bei M_X^2 vereinigt: $\alpha_1(M_X^2) = \alpha_2(M_X^2) = \alpha_3(M_X^2) \equiv \alpha_G$

Die Werte von b_i ergeben sich aus den jeweiligen Renormierungsgruppengleichungen für $U(1)_Y$, $SU(2)_L$, $SU(3)_c$:

- $b_1 = \frac{4}{3} \cdot n_g$ mit Generationenzahl $n_g = 3$
- $b_2 = -\frac{22}{3} + b_1$
- $b_3 = -11 + b_1$

Gleichungen (*) sind in der vorherigen Abbildung (Fig. 15.4) wiedergegeben, wobei als Startwerte die Kopplungsstärken bei $\mu^2 \simeq M_W^2$ gewählt werden.

SU(5) - Grand Unified Theory (GUT)

Die Vereinigung der Kopplungen an der Energieskala M_X hat eine wichtige Konsequenz:

$$\tan\theta_W = \frac{g'}{g_W} = \frac{\sqrt{3/5}\cdot g_1}{g_2} \xrightarrow{M_X} \sqrt{\frac{3}{5}}$$

d.h. der schwache Mischungswinkel kann berechnet werden:

$$\sin^2\theta_W = \frac{3/5\cdot g_1^2(M_X)}{3/5\cdot g_1^2(M_X) + g_2^2(M_X)} = \frac{3}{8},$$

denn $g_1(M_X) = g_2(M_X) = g_3(M_X) \equiv g_G$. Dieser Wert gilt an der GUT-Skala. Um den entsprechenden Wert an einer anderen Skala (z.B. M_Z) zu finden, löst man die Gleichungen ⊛ unter Verwendung von $\alpha_1(M_X) = \alpha_2(M_X) = \alpha_3(M_X) \equiv \alpha_G$ und $g' = e/\cos\theta_W$, $g_W = e/\sin\theta_W$ nach $\sin^2\theta_W$ auf:

$$\Rightarrow \quad \sin^2\theta_W = \frac{3}{8} - \frac{55}{24\pi}\,\underbrace{\alpha_{em}(M_Z)}_{1/128.8}\cdot \ln\left(\frac{\overbrace{M_X}^{\sim 10^{15}\,\mathrm{GeV}}}{\underbrace{M_Z}_{91.2\,\mathrm{GeV}}}\right)$$

$$\rightarrow \quad \sin^2\theta_W(M_Z) \simeq 0.20$$

Vgl. mit Messungen der LEP-Experimente:

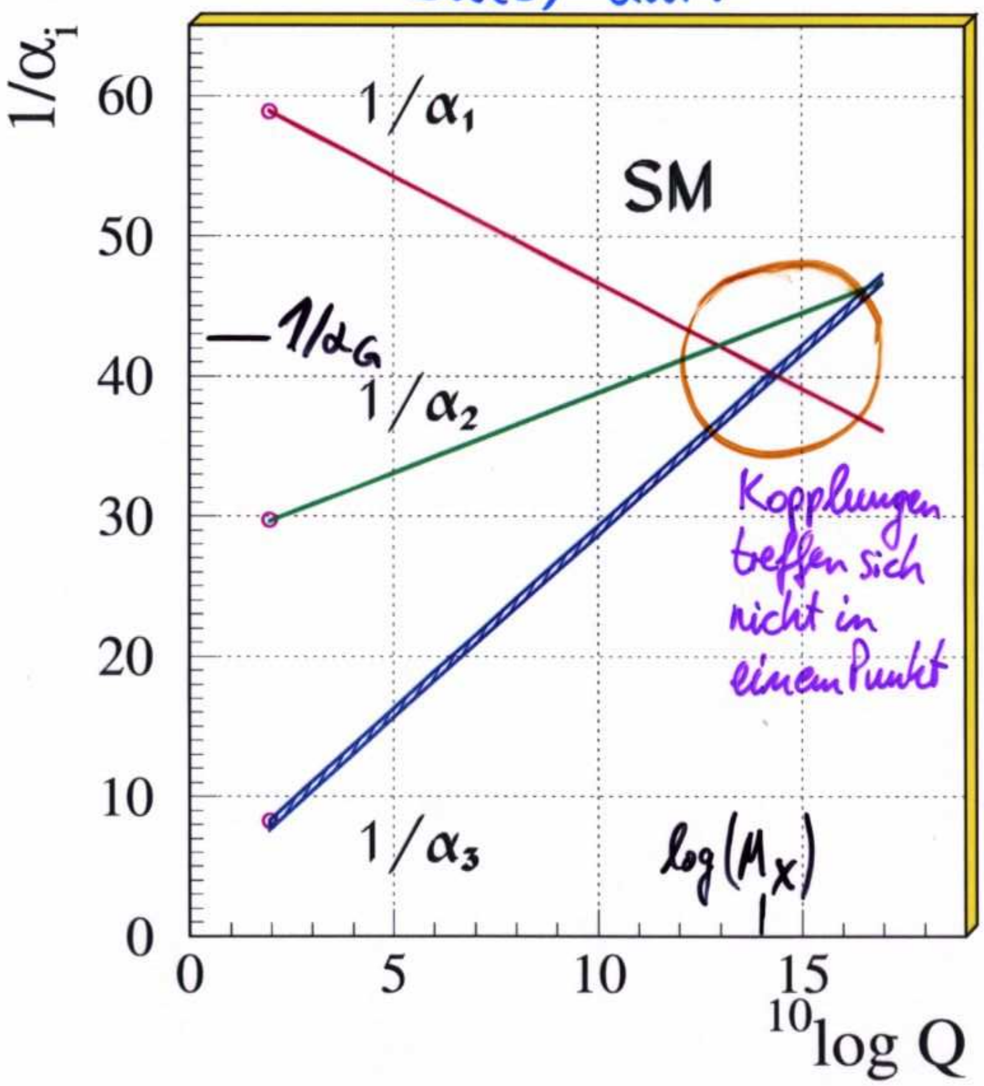
$$\sin^2\theta_W(M_Z) \simeq 0.22$$

Trotzdem hat SU(5)-GUT Probleme: z.B. Kopplungen treffen sich nicht in einem Punkt

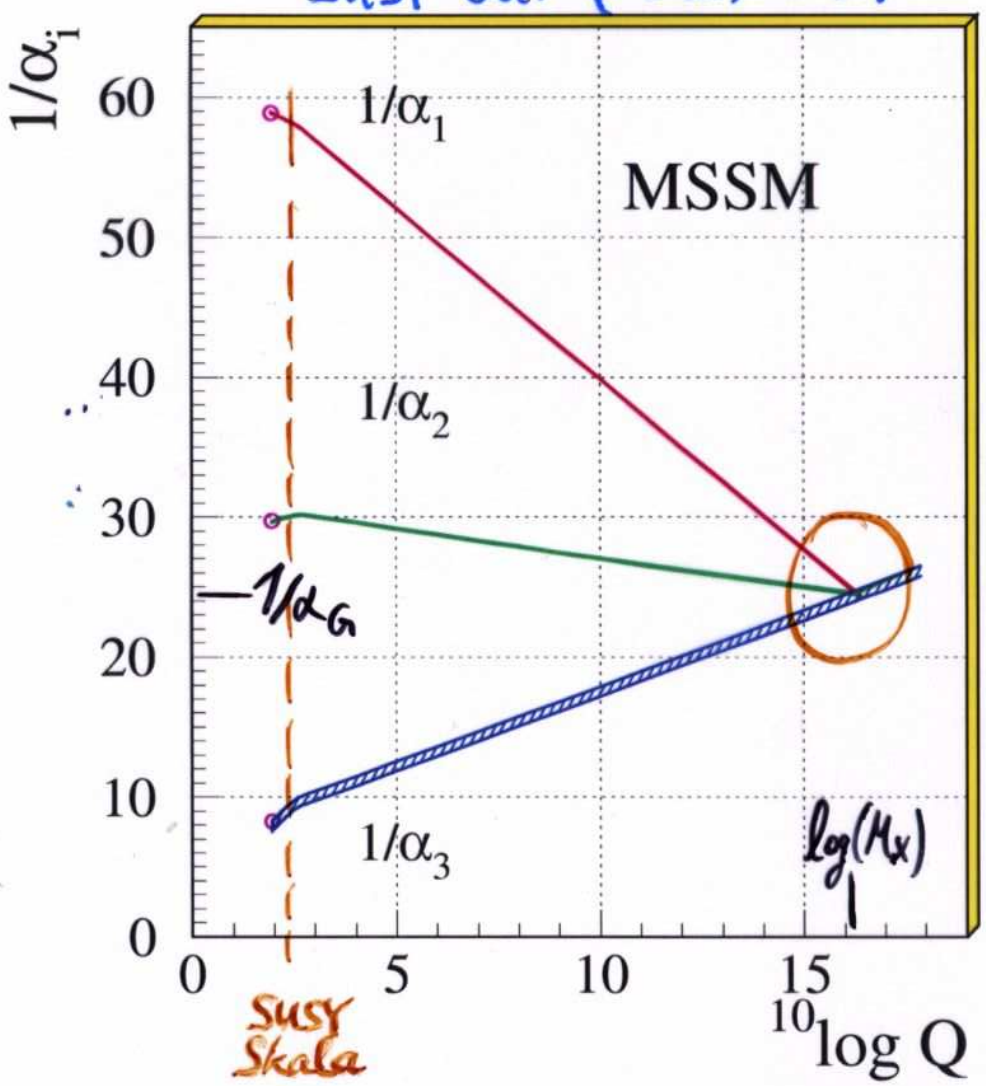
SU(5)-GUT : Probleme

Unification of the Coupling Constants in the SM and the minimal MSSM

SU(5)-GUT:



SUSY-GUT (= SU(5) + SUSY):

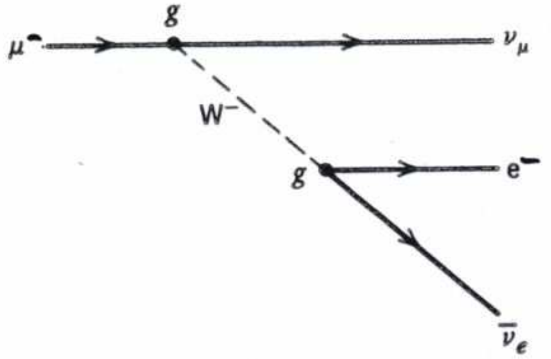


SU(5)-GUT: Probleme

Die X-Bosonen der SU(5)-GUT können den Zerfall der Protonen verursachen, weil d-Quark und e^+ im gleichen Multiplett sitzen. Die Proton-Lebensdauer folgt in Analogie zur Myon-Lebensdauer:

Low-Q^2 Phenomena Associated with the Scales $Q^2 = M_W^2$ and $Q^2 = M_X^2$

Muon Decay $(\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu)$ at $Q^2 \ll M_W^2$

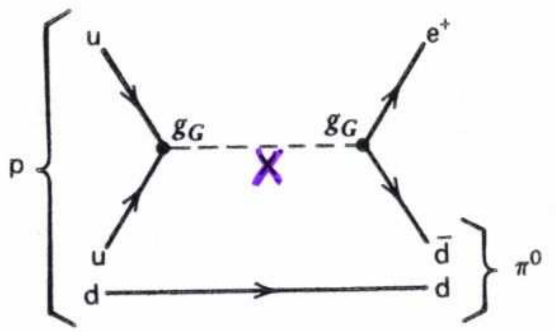


$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_W^2}{8M_W^2} \qquad (12.15)$$

$$\Gamma(\mu \to e\bar{\nu}_e\nu_\mu) = \cdots G_F^2 m_\mu^5 \qquad (12.42)$$

$$= \cdots \frac{m_\mu^5}{M_W^4}$$

Proton Decay $(p \to \pi^0 e^+)$ at $Q^2 \ll M_X^2$



$$\frac{G_G}{\sqrt{2}} = \frac{g_G^2}{8M_X^2}$$

$$\Gamma(p \to \pi e) = \cdots G_G^2 m_p^5$$

$$\hat{=}\ \alpha_G^2 \frac{m_p^5}{M_X^4}$$

Mit $\alpha_G \equiv g_G^2/4\pi$ ($\simeq 1/45$, vgl. vorherige Folie) folgt die Lebensdauerabschätzung:

$$\tau_p \simeq M_X^4/\alpha_G^2 m_p^5 \simeq 10^{32}\ \text{yr}$$

Die experimentell gemessene Untergrenze der Proton-Lebensdauer beträgt jedoch $\tau_p > 1.6 \cdot 10^{33}$ yr im ↯ zur SU(5)-GUT-Erwartung

SUSY-GUT

- Einige Probleme der einfachen SU(5)-GUT können durch die Kombination mit einer supersymmetrischen Erweiterung (SUSY) des Standard-Modells gelöst werden:
  - Vereinigung der Kopplungen bei $M_X \simeq 3 \cdot 10^{16}\,\mathrm{GeV}$ mit $\alpha_G \simeq 1/25$
  - Proton-Lebensdauer: $\tau_p \simeq \frac{M_X^4}{\alpha_G^2 m_p^5} \simeq 10^{37}\,\mathrm{yr}$

- Natürlich existieren auch andere Gruppen, z.B. SO(10), die die Standard-Modell-Gruppen $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ umfassen und daher Modelle für Grand Unified Theories sind. Dies werden hier aber nicht weiter erörtert. Stattdessen soll die supersymmetrische Erweiterung des Standard-Modell etwas detailliert dargestellt werden.

  Zuvor aber einige experimentelle Resultate zur Suche nach den X, Y-Leptoquarks, deren Masse eigentlich M_X sein sollte, durch einen see-saw-Mechanismus aber auch bei nur einigen 100 GeV liegen könnte.

Suche nach Leptoquarks am Tevatron (Proton ↔ Antiproton)

Leptoquarks:

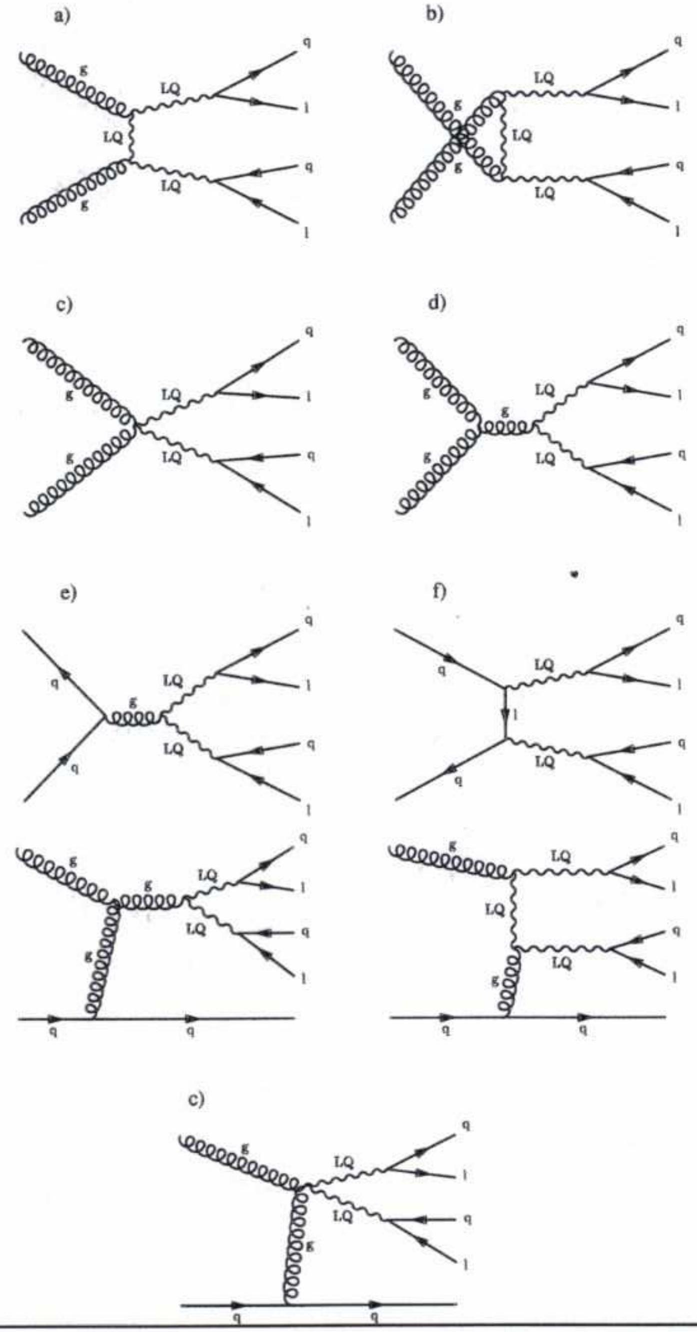
◇ Eigenschaften von Leptoquarks:

- drittelzahlige elektr. Ladung ($\pm 1/3, \pm 2/3, -4/3, -5/3$)
- Skalar- (Spin 0) oder Vektor-Teilchen (Spin 1)
- Kopplung an links- und rechtshändige Teilchen
- Kopplung innerhalb Generation dominant (sonst FCNC), d.h. $\hat{\mathrm{d}}_R \to \mathrm{e}^- + \mathrm{u}$, $\hat{\mathrm{s}}_R \to \mu^- + \mathrm{c}$, u.s.f.
- Masse nach spontaner Brechung der GUT-Eichgruppe in die SM-Eichgruppe entweder $\mathcal{O}(\Lambda_{\mathrm{GUT}}) \approx 10^{15}$ GeV oder $\mathcal{O}(100\ \mathrm{GeV})$ (so gen. "see-saw"-Mechanismus: aus einem Teilchenpaar wird eines leicht, das andere schwer)

◇ Produktion von Leptoquarks an Tevatron, LHC $\ldots \to$

▷ Suche Leptoquarks der 2. Generation (LQ_2):

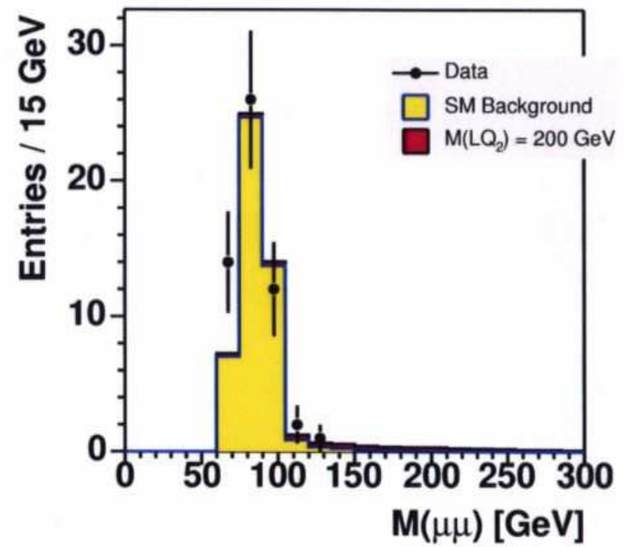
- $LQ_2 LQ_2 \to \mu^+ \mu^- q\bar{q}$ mit $q =$c,s
- Signatur: μ-Paar + 2 Jets, keine fehlende Energie (d.h. keine ν)
- Untergrund: Drell-Yan und Z-Bosonen plus QCD-Strahlung (z.B. $q\bar{q} \to 2\mathrm{Jets} + Z \to (2j) + (\mu^+\mu^-)$)



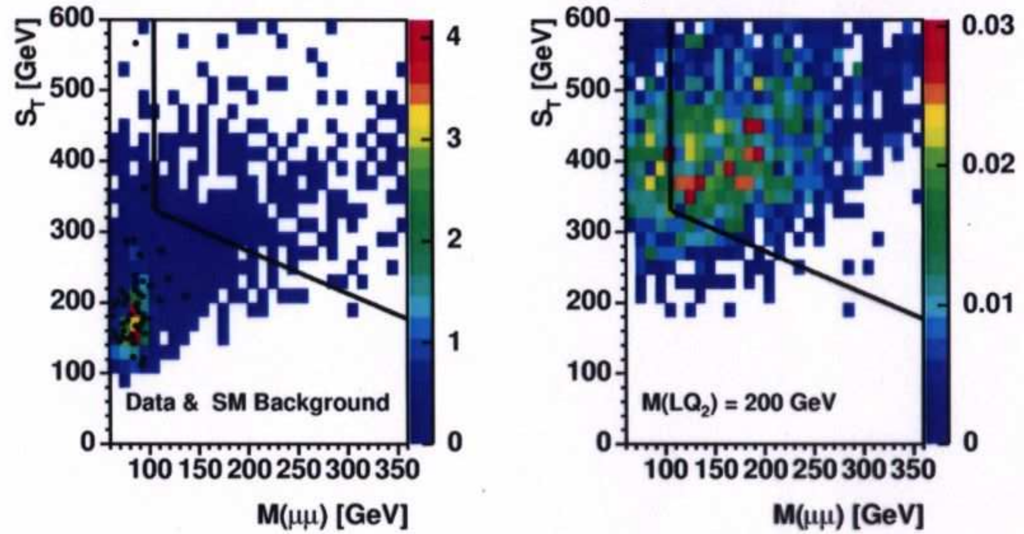
Suche nach Leptoquarks

Leptoquark-Suche an Tevatron: $LQ_2 LQ_2 \rightarrow \mu^+ \mu^- q \bar{q}$

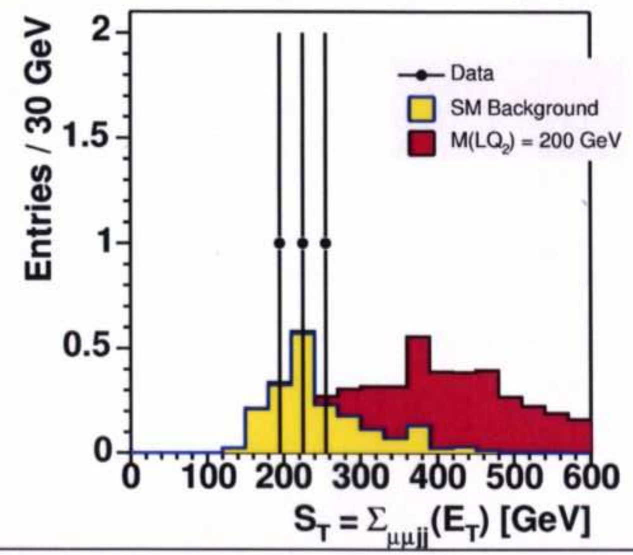
▷ Signal+Untergrund in Myon-Paarmasse $M(\mu\mu)$:



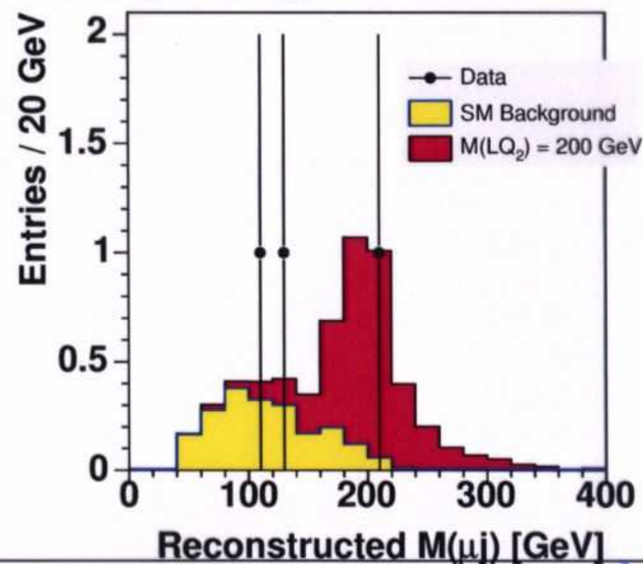
▷ Optimierung der Selektion in $M(\mu\mu)$-S_T-Ebene:



▷ Summe transversaler Energien S_T (nur $M(\mu\mu)>100$ GeV):



▷ Massenverteilung der LQ_2-Kandidaten:



$\Longrightarrow$ keine Anzeichen für Leptoquarks

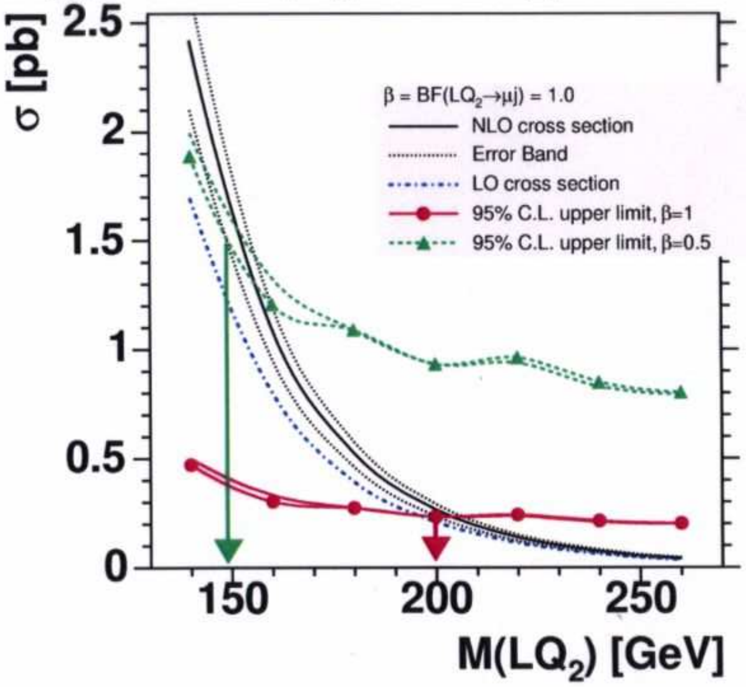
Suche nach Leptoquarks

Leptoquark-Grenzwerte:

▷ Ereigniszahl / integr. Luminosität $\int \mathcal{L} dt$

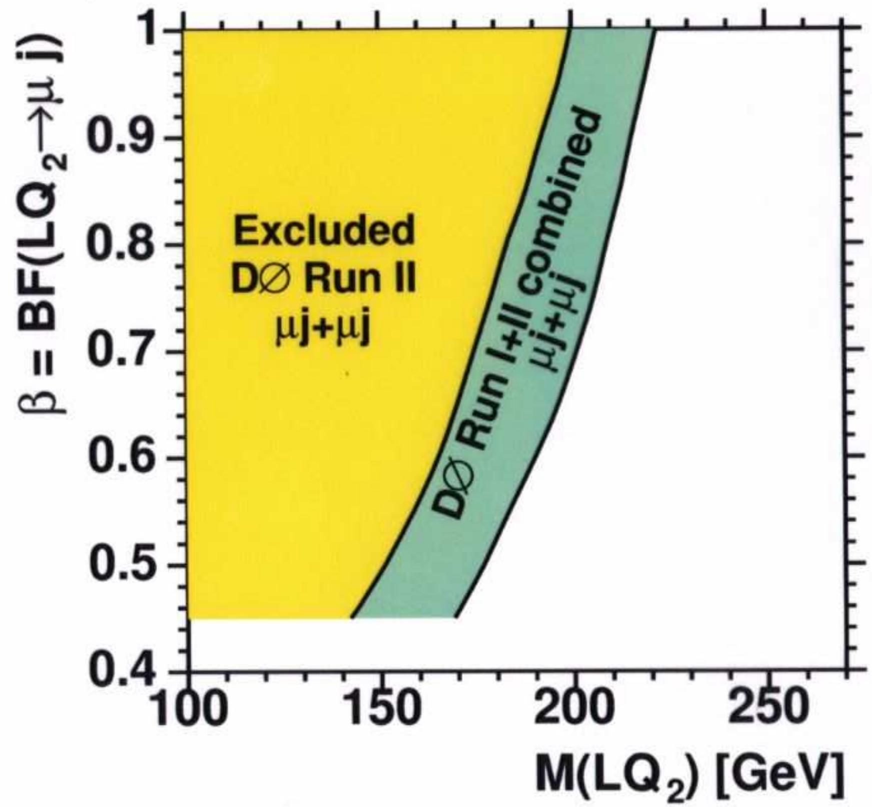
→ Wirkungsquerschnitt-Limits:

(abhängig von Verzweigungsverhältnis β)



▷ untere Massengrenzen für alle β:

(je mehr $\int \mathcal{L} dt$, desto besser das Limit)



▷ komplettiere durch $LQ_2 LQ_2 \to \nu_\mu \bar{\nu}_\mu + 2j$ (für Bereich $\beta<0.5$)

⇒ Keine Leptoquarks mit Massen bis zu ~ 200 GeV beobachtet !