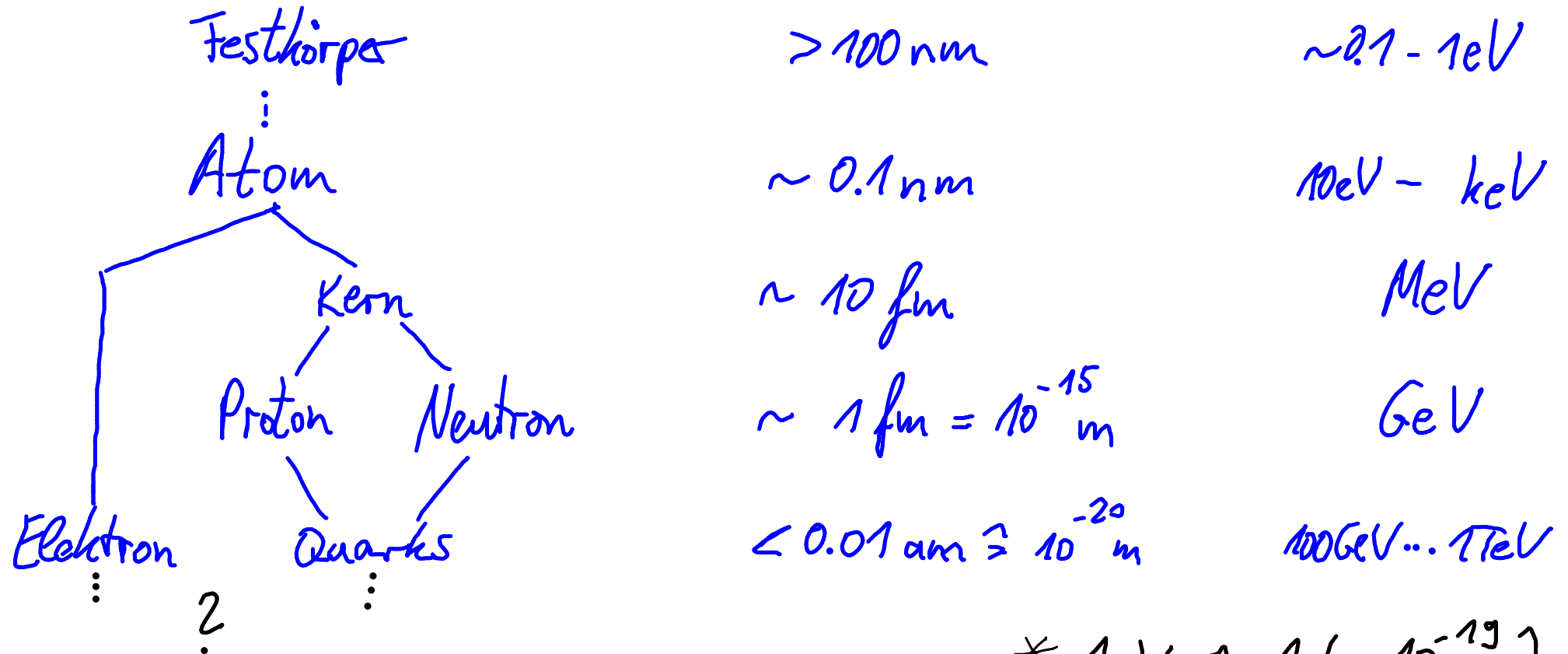


1. Einführung / Grundlagen

Struktur der Materie:

(typ.) Energieskala*



* $1 \text{ eV} \hat{=} 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$:
Energiegewinn einer Elementarladung $1e$ nach
Durchlaufen einer Potentialdifferenz von 1 Volt

• Auflösung \leftrightarrow Wellenlänge \leftrightarrow Energie

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi} \equiv \tilde{\lambda} = \frac{\hbar c}{E} = \frac{\hbar}{|\vec{p}|} \right)$$

• Energie als universelle Einheit

► Umrechnung mittels:

$$\left. \begin{aligned} \hbar &= \frac{h}{2\pi} = 1.05457... \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\ c &= 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 1\text{eV} &\cong 1.60219 \cdot 10^{-19} \text{ J} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \hbar &\cong 0.658 \text{ eV} \cdot \text{fs} \\ \hbar c &\cong 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \end{aligned}$$

► dabei ist Fläche: $(\hbar c)^2 = (0.197 \text{ GeV} \cdot \text{fm})^2 = 0.389 \text{ GeV}^2 \cdot 0.1 \text{ fm}^2$

Flächeneinheit: barn: $1\text{b} = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2$

$$\Rightarrow (\hbar c)^2 = 0.389 \text{ GeV}^2 \cdot \text{mb}$$

- Länge / Zeit / Ladung / Energie hängen von willkürlichen Maßeinheiten (m/s/C/J) ab

→ Natürliche Einheiten:

$$\hbar = 1, c = 1, \epsilon_0 = 1$$

für Länge, Zeit, Ladung: Länge $\sim \frac{1}{\text{Energie}}$, Zeit $\sim \frac{1}{\text{Energie}}$, Ladung ~ 1 : $\alpha_{\text{em}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$

NB: In Ermangelung einer "natürlichen" Maßeinheit für Energie wird in Kern- & Teilchenphysik i.a. für

Energie: eV als Maßeinheit

gewählt

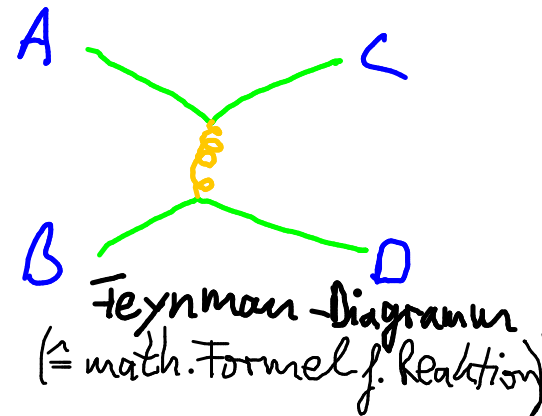
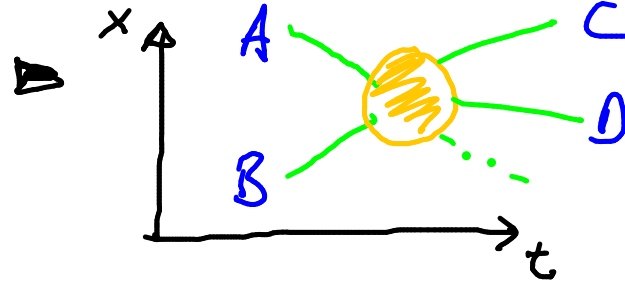
1.1 Grundbegriffe von Streuexperimenten

(1) Spektroskopie

(2) Streuexperimente

Streu Teilchen A an Teilchen/Kern B und beobachte Reaktionsprodukte C, D, ..

- Darstellung:



- Kinematik:

▷ Es gilt: Energie-, Impuls-, Drehimpulserhaltung

kinet. Energien: $T_A + T_B \stackrel{!}{=} T_C + T_D + \dots + Q_{\text{innere Energie}}$
 relativist. --- : $E_A + E_B \stackrel{!}{=} E_C + E_D + \dots$ ← innere Energie im Massen $m_A \dots m_D$ enthalten

Impuls: $\vec{p}_A + \vec{p}_B \stackrel{!}{=} \vec{p}_C + \vec{p}_D + \dots$

► Darstellung mit Vierimpulsen $\left(p := \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}, p \cdot p = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 \right)$

⇒

$$p_A + p_B \stackrel{!}{=} p_C + p_D + \dots \quad \text{Vierimpulserhaltung}$$

► NB: Lorentz-Invariante des Vierimpulses p $\left(E = \gamma m c^2, |\vec{p}| = \gamma m \beta c \right.$
 $\left. \beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$

$$p^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = (\gamma m c)^2 - (\gamma m \beta c)^2 = \gamma^2 m^2 c^2 (1 - \beta^2)$$

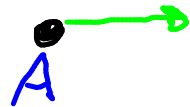
⇒

$$p^2 = m^2 c^2$$

(Masse m ist Lorentz-invariant)

► Nomenklatur: $A + B \rightarrow C + D + \dots$

▣ Fixed target:



$$\frac{1}{c^2} \left[p_A + \begin{pmatrix} m_B c \\ \vec{0} \end{pmatrix} \right]^2 =: s \stackrel{\triangle}{=} \left(\begin{matrix} \text{Schwerpunkt-} \\ \text{masse} \end{matrix} \right)^2$$

▣ Collider:



$$\frac{1}{c^2} \left[p_A + p_B \right]^2 =: s$$

NB: Mandelstam-Variablen: $s = (p_A + p_B)^2/c^2$, $t = (p_A - p_C)^2/c^2$, $u = (p_A - p_D)^2/c^2$

1.2 (differenzieller) Wirkungsquerschnitt

- Wirkungsquerschnitt σ ($\hat{=}$ Trefferfläche)
hängt ab von
- ▶ Art der Wechselwirkung
(el. magn. vs starke vs. schwache Ww.)
 - ▶ Energie der Teilchen
 - ▶ ...



Strahl:

# Teilchen im Strahl/Zeiteinheit:	\dot{N}_s
Strahl-Querschnittsfläche:	F
Anzahldichte im Strahl:	n_s
→ Flussdichte im Strahl:	$\Phi_s = \frac{\dot{N}_s}{F} = n_s \cdot v_s$

$$(\Phi_s = \frac{1}{F} \frac{dN_s}{dt} = \frac{1}{F} \frac{dN_s}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dN_s}{d(Fx)} \cdot v_s = \frac{dN_s}{dV} \cdot v_s = n_s \cdot v_s)$$

Target:

Dichte der Targetkerne: n_T
 \rightarrow # Targetkerne innerhalb Strahl- \emptyset : $N_T = n_T \cdot F \cdot l$

Detektor:

gestreuter Teilchen: $\Delta N \sim \frac{N_S}{F}$
 $\Delta N \sim N_T$ } $\Rightarrow \Delta N = \frac{N_S}{F} \cdot N_T \cdot \sigma$

\Rightarrow Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \frac{\Delta N}{(N_S/F) \cdot N_T}$$

\leadsto Streu-/Reaktionsrate:

$$\dot{N} = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N_S}{F \Delta t} \cdot N_T \cdot \sigma = \underbrace{\frac{v_z}{l} \cdot \frac{N_S}{F} \cdot N_T}_{L} \cdot \sigma$$

Luminosität L

$$\Rightarrow \dot{N} = L \cdot \sigma$$

$$\leadsto \Delta N = \sigma \cdot \int L dt$$

NB: \blacktriangleright elastischer Wirkungsquerschnitt

\blacktriangleright inelastischer $\text{---} \text{---} \text{---}$ " $\text{---} \text{---} \text{---}$

\Rightarrow totaler $\text{---} \text{---} \text{---}$ " $\text{---} \text{---} \text{---}$

$\sigma_{\text{elast.}}$

$\sigma_{\text{inelast.}}$

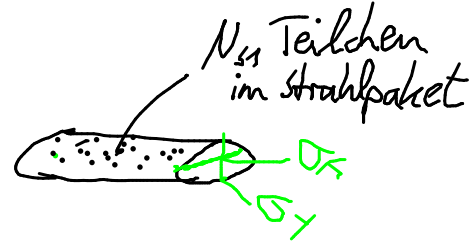
$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{elast}} + \sigma_{\text{inelast}}$$

► Luminosität bei kollidierenden Strahlen

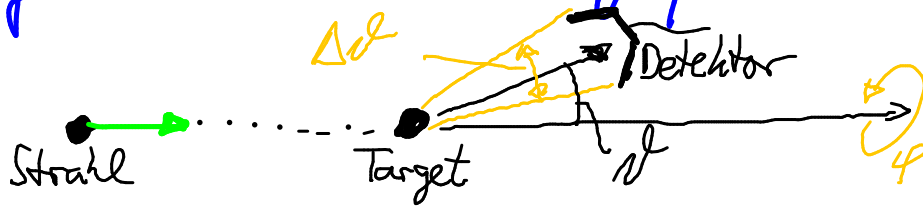
$$L = f \cdot \frac{N_{s1} \cdot N_{s2}}{4\pi \sigma_x \sigma_y} \cdot B$$

Umlauffrequenz im (Kreis-)Beschleuniger

* Strahlpakete im (Kreis-)Beschleuniger



► differentieller Wirkungsquerschnitt ($N_T=1$)



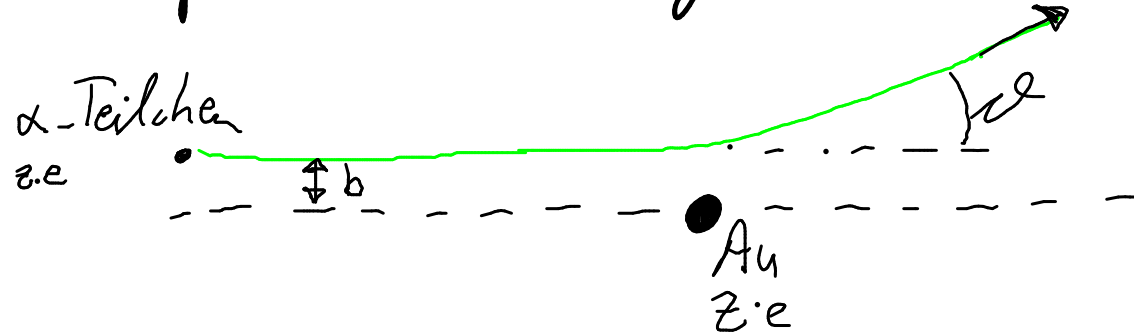
$$\frac{\Delta N}{\Delta \varphi \cdot \sin \theta \Delta \theta} = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \varphi \cdot \sin \theta \Delta \theta} \cdot \frac{N_s}{F} \leadsto \frac{dN}{d\varphi \cdot \sin \theta d\theta} = \frac{N_s}{F} \cdot \frac{d\sigma}{d\varphi \cdot \sin \theta d\theta}$$

Raumwinkelenelement: $d\Omega := d\varphi \cdot \sin \theta d\theta$

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{N_s/F} \cdot \frac{dN}{d\Omega}$$

1.3 Rutherford-Streuung

1911 : E. Rutherford : Streuung von α -Teilchen an Goldfolie

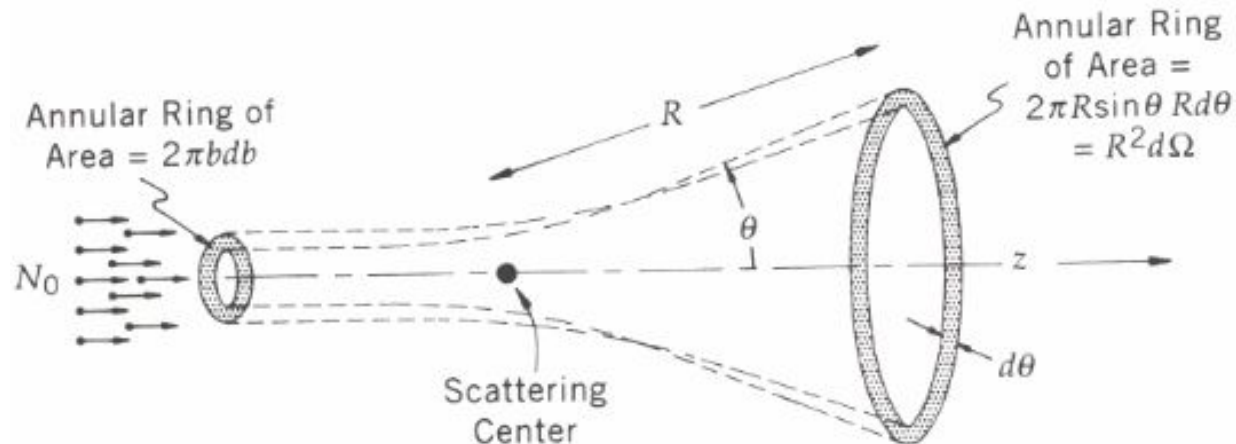


b : Stoß-/Impaktparameter

längere (klass.) Herleitung ergibt

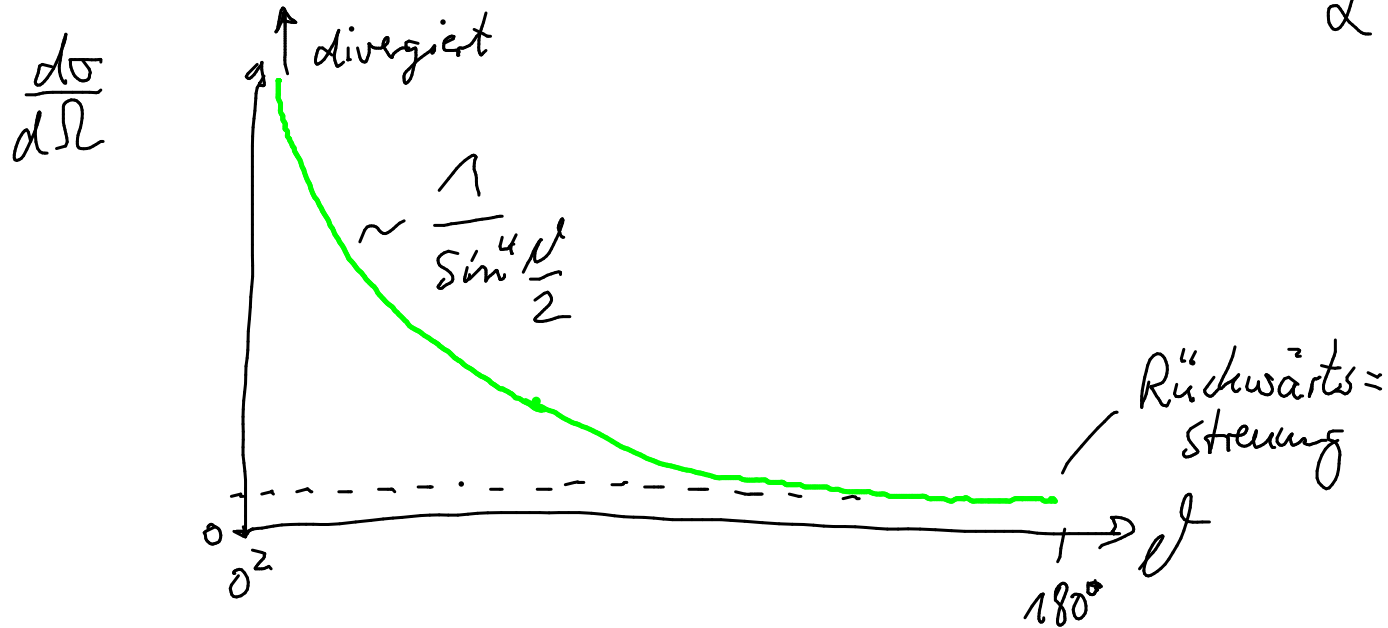
$$b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ \cdot e^2}{E_{kin}} \cdot \frac{1}{2 \tan \frac{\varphi}{2}}$$

\Rightarrow diff. Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b db \cdot d\varphi}{\sin\vartheta d\vartheta d\varphi} = \frac{b}{\sin\vartheta} \frac{db}{d\vartheta}$



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \left(\frac{z \cdot Z e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4E_{\text{kin}}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} = \frac{z^2 Z^2 \cdot d^2 (hc)^2}{16 E_{\text{kin}}^2} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

$$d = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 hc}$$



2. Globale Kerneigenschaften

- Kernbausteine: Nukleonen

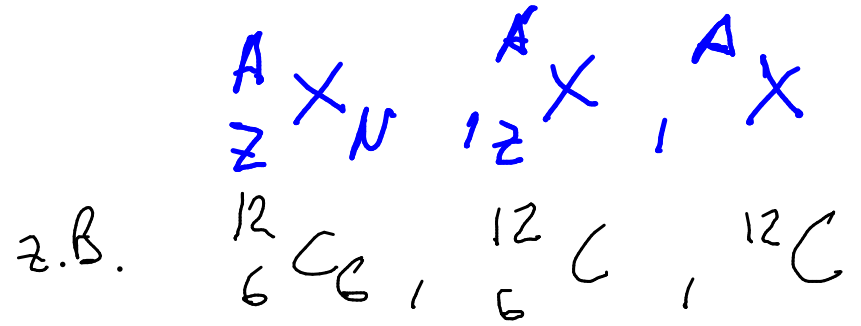
	Proton	Neutron	Elektron
Entdeckung	1919 Rutherford $\alpha + {}^{14}\text{N} \rightarrow {}^{17}\text{O} + \text{p}$	1932 Chadwick $\alpha + {}^9\text{Be} \rightarrow {}^{12}\text{C} + \text{n}$	1897 Thomson Kathodenstrahlen
Masse	$1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $\approx 938,272 \text{ MeV}/c^2$	$1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $939,565 \text{ MeV}/c^2$	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ $0,511 \text{ MeV}/c^2$
Ladung	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	0	$-1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Lebensdauer τ	$> 10^{31} \text{ a}$	$(885,7 \pm 0,8) \text{ s}$	$> 4,6 \cdot 10^{26} \text{ a}$
Spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
magnet. M-moment $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}, \mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p}$	$+ 2,73 \mu_K$	$-1,93 \mu_K$	$+ 2,0023 \mu_B$

• Kern-Notationen:

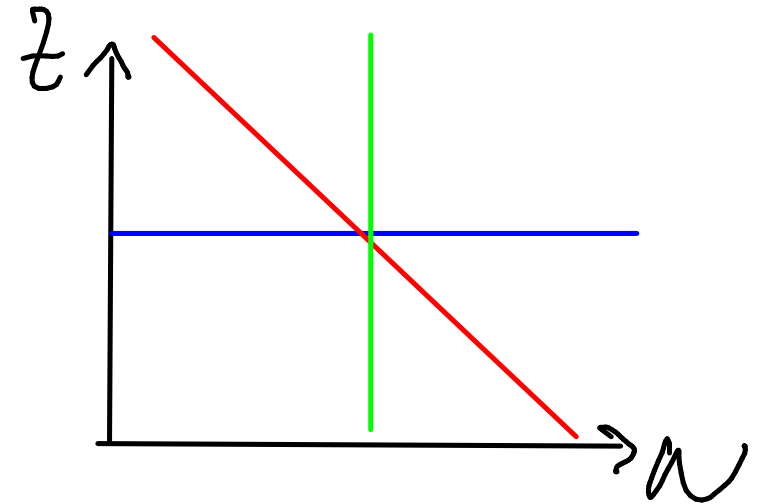
Z : Ordnungszahl ($\hat{=}$ Protonenzahl)

N : Neutronenzahl

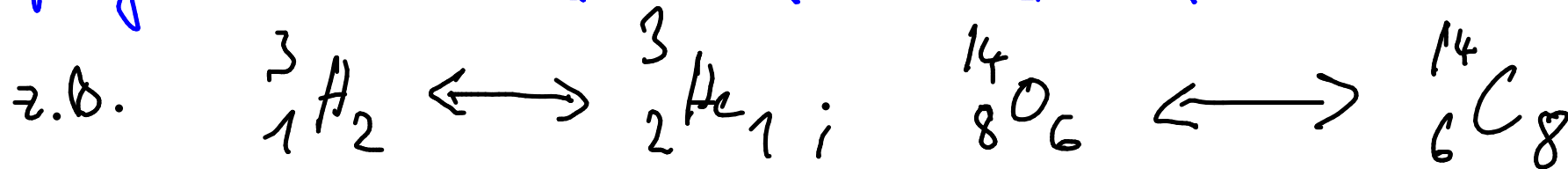
$A = N + Z$: Massenzahl



Kombination von Z und N : Nuklide
 Nuklide mit gleichem Z : Isotope
 " " " " A : Isobare
 " " " " N : Isotone



Spiegelkerne: $Z_2 = N_1$; $N_2 = Z_1$



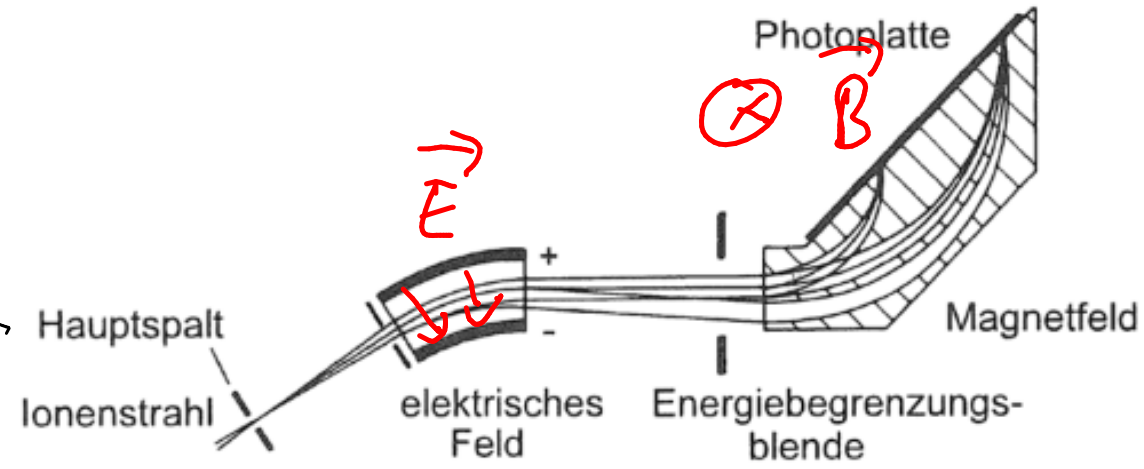
2,1 Kernmasse, Massenzahl A, Kernladung Z

• Kernmasse: $M_K = Z m_p + N m_n - B/c^2$ (x)

d.h. Bindungsenergie $\hat{=}$ Massendefekt $\cdot c^2$

• Exp. Massenbestimmung: Massenspektrometer

E-Feld:
 $\frac{mv^2}{r_E} = Q \cdot |\vec{E}|$
 $\frac{r_E}{2E_{kin}} \rightarrow$ Energiefilter
 r_e



B-Feld
 $\frac{mv^2}{r_B} = Q \cdot |\vec{B}| \cdot v$
 $\frac{r_B}{p \cdot v} \rightarrow$ Impulsfilter
 $\frac{M}{Q} = \frac{|\vec{B}| \cdot r_B}{v}$

$\rightarrow \frac{M}{Q} = \frac{|\vec{E}| \cdot r_E}{v^2} \rightarrow \frac{M}{Q} = \frac{|\vec{B}|^2 \cdot r_B^2}{|\vec{E}| \cdot r_E}$

(A)

• Exp. Best. der Kernladung: charakt. Röntgenstrahlung (Z)
 K_{α} -Linie: Energie $\sim (Z-1)^2$ (Moseley-Gesetz)

• Neutronenzahl: $A \approx \frac{M_K + B}{\frac{1}{2}(m_p + m_n)}$ mit $B \approx \frac{B}{A} \cdot A$
 aus (*) mit $m_p \approx m_n$ $\underbrace{\frac{B}{A}}_{\approx 8 \text{ MeV}}$
 $\Rightarrow N = A - Z$

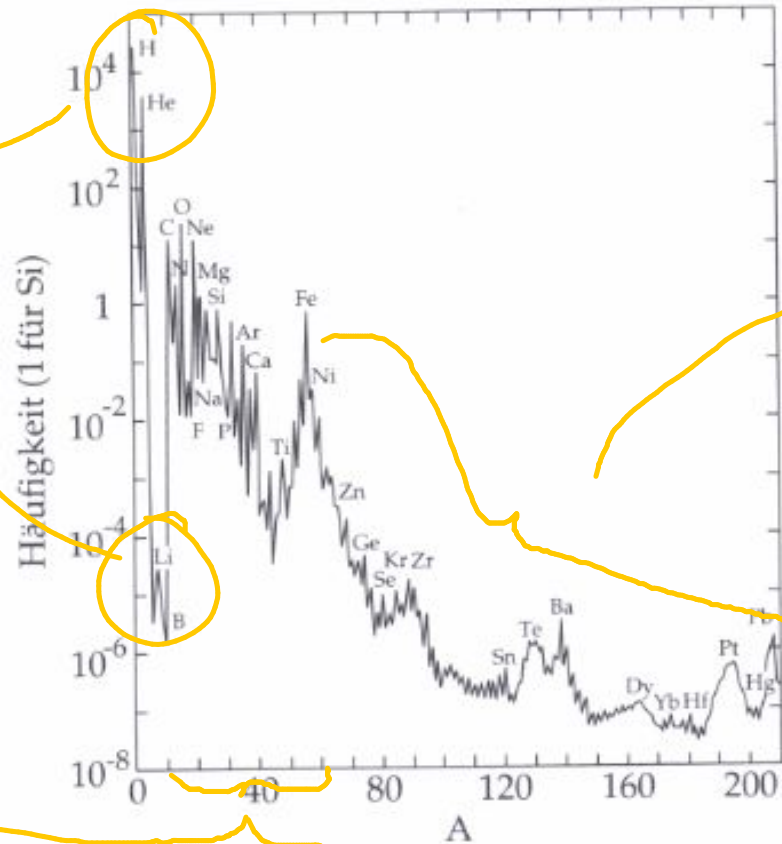
• atomare Masseneinheit: $1u := \frac{1}{12} M_{^{12}\text{C}} \approx \frac{1\text{g}}{N_A} = 1,660 \cdot 10^{-27} \text{kg}$
 $\approx 931,494 \frac{\text{MeV}}{c^2}$

N.B.: $\left. \begin{array}{l} m_p \approx 1u + 7 \frac{\text{MeV}}{c^2} \\ m_n \approx 1u + 8 \frac{\text{MeV}}{c^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{typ. Bindungsenergie}$
 $B/A \approx 7-8 \text{ MeV}$

Häufigkeit der Elemente

→ Isotopenr. universell (Erde, Mond, Meteoriten, kosm. Strahlung)

H, He, Li, Be, B
aus primordiale
Nukleosynthese
(bis ~ 3 min nach
Urknall)



oberhalb Fe aus
Sternexplosionen
(Supernovae)

C, ..., Fe aus Fusionsreaktionen
in Sternen

2.2. Magnetisches Moment

- Systeme mit Drehimpuls \vec{J} im Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$
- Gesamt Drehimpuls: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$
- geladenes Teilchen mit $\vec{J} \rightarrow$ magn. Moment $\vec{\mu}$

\Rightarrow Aufspaltung der Energiezustände $E_{\text{mag}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

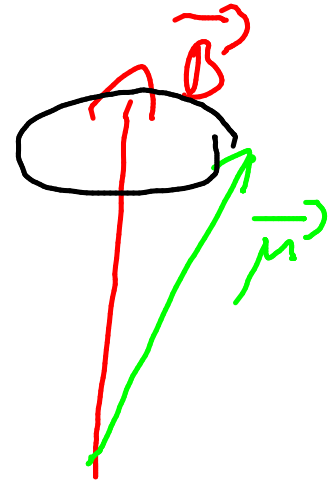
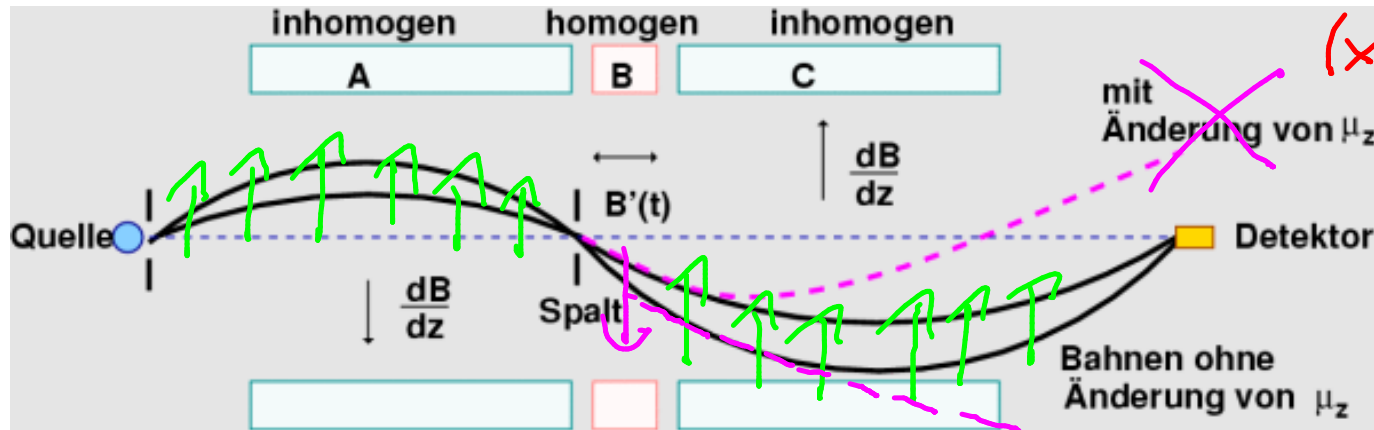
magnet. Moment: $\vec{\mu} = g_K \mu_K \vec{J} / \hbar$

Kernmagneton: $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ J/T} = 3,15 \cdot 10^{-8} \frac{\text{eV}}{\text{T}}$

Vgl. Bohrsche Magneton: $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = \frac{m_p}{m_e} \mu_K \approx 1836$

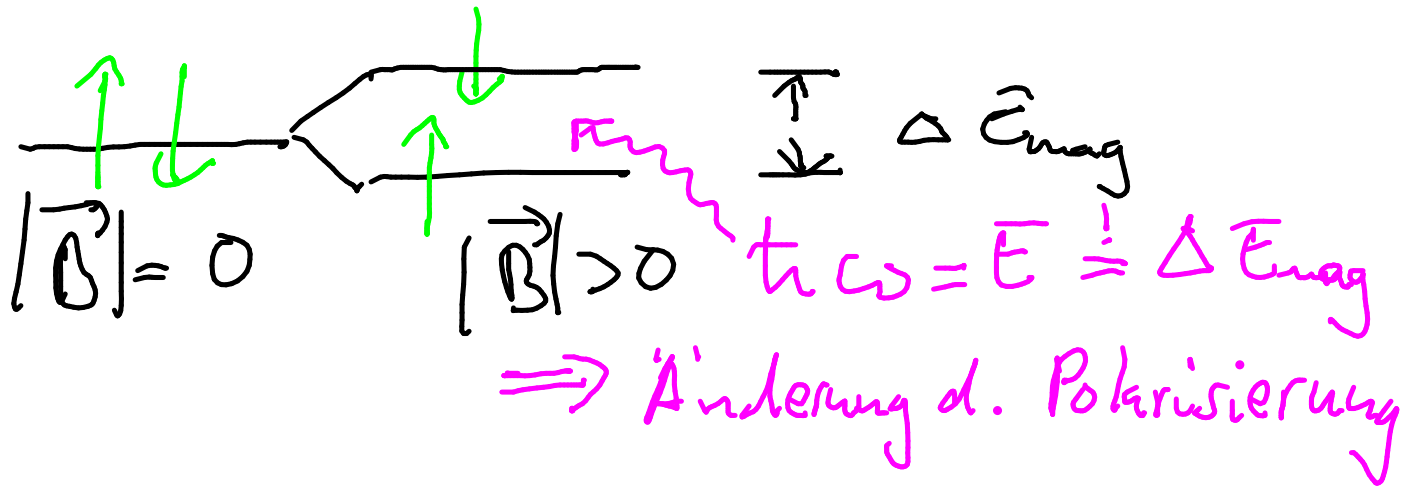
Landé-Faktor: $g_K \approx 2$ für ein part. $S = \frac{1}{2}$ Teilchen

- Messung des magnetischen Moments
 - klassisch: Experiment nach I.I. Rabi (1939)



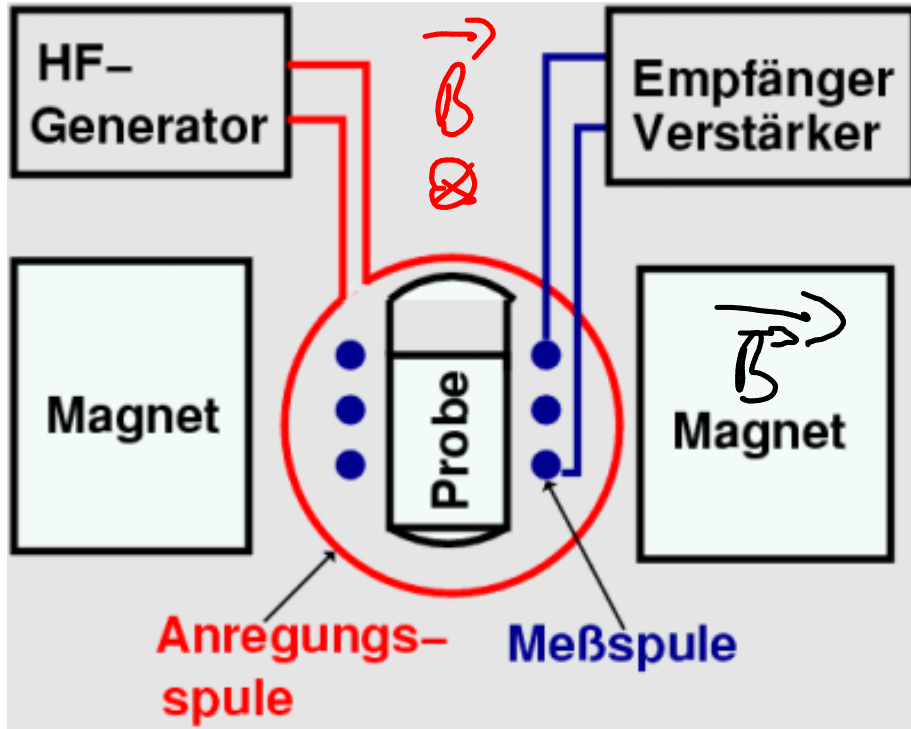
$$F_z = \mu_z \frac{dB}{dz}$$

im Magnetfeld B :



(xx) Bahn für $J_z \rightarrow J'_z = J_z + 1$

Kernspinsonanz (E. Purcell, F. Bloch, 1946)



- Aufspaltung der Energiezust.

$$\Delta \tilde{E}_{\text{mag}} = \underbrace{\Delta J_z}_{\Delta m_j} g_k \mu_k B$$

- Dipolübergang $\Delta m_j = \pm 1$

$$h \omega \pm \Delta \tilde{E}_{\text{mag}} = g_k \mu_k B$$

⇒ Larmorfrequenz

$$\omega_L = \frac{1}{h} g_k \mu_k B$$

⇒ Messung von ω_L ⇒ Bestimmung von g_k

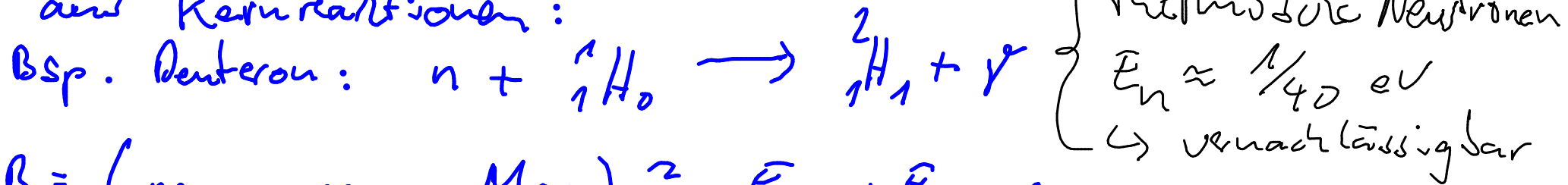
2.3 Bindungsenergie

$$B = [Z \cdot m_p + N \cdot m_n - M_K] c^2$$

Exp. Bestimmung

- über Kernmasse (\leftarrow Massenspektrom.)

- aus Kernreaktionen:

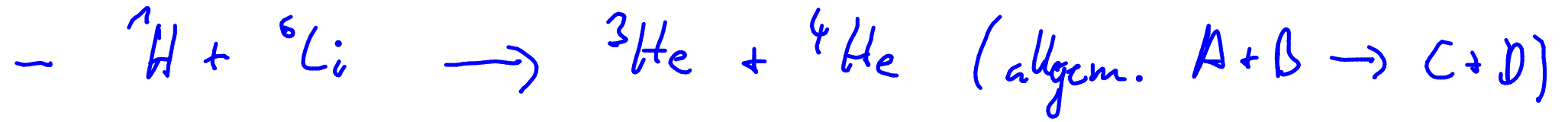


thermische Neutronen
 $E_n \approx 1/40 \text{ eV}$
 \hookrightarrow vernachlässigbar

$$B = (m_n + m_p - M_{2\text{H}}) c^2 = \bar{E}_\gamma + \bar{E}_{\text{kin}, 2\text{H}}$$

im Schwerpunktsystem: $\vec{p}_{2\text{H}} = -\vec{p}_\gamma$

$$B = \bar{E}_\gamma + \underbrace{\frac{\bar{E}_\gamma^2}{2M_{2\text{H}} c^2}}_{\text{vernachlässigbar}} = 2,225 \text{ MeV} \quad (\leftarrow \text{Messung von } \bar{E}_\gamma)$$

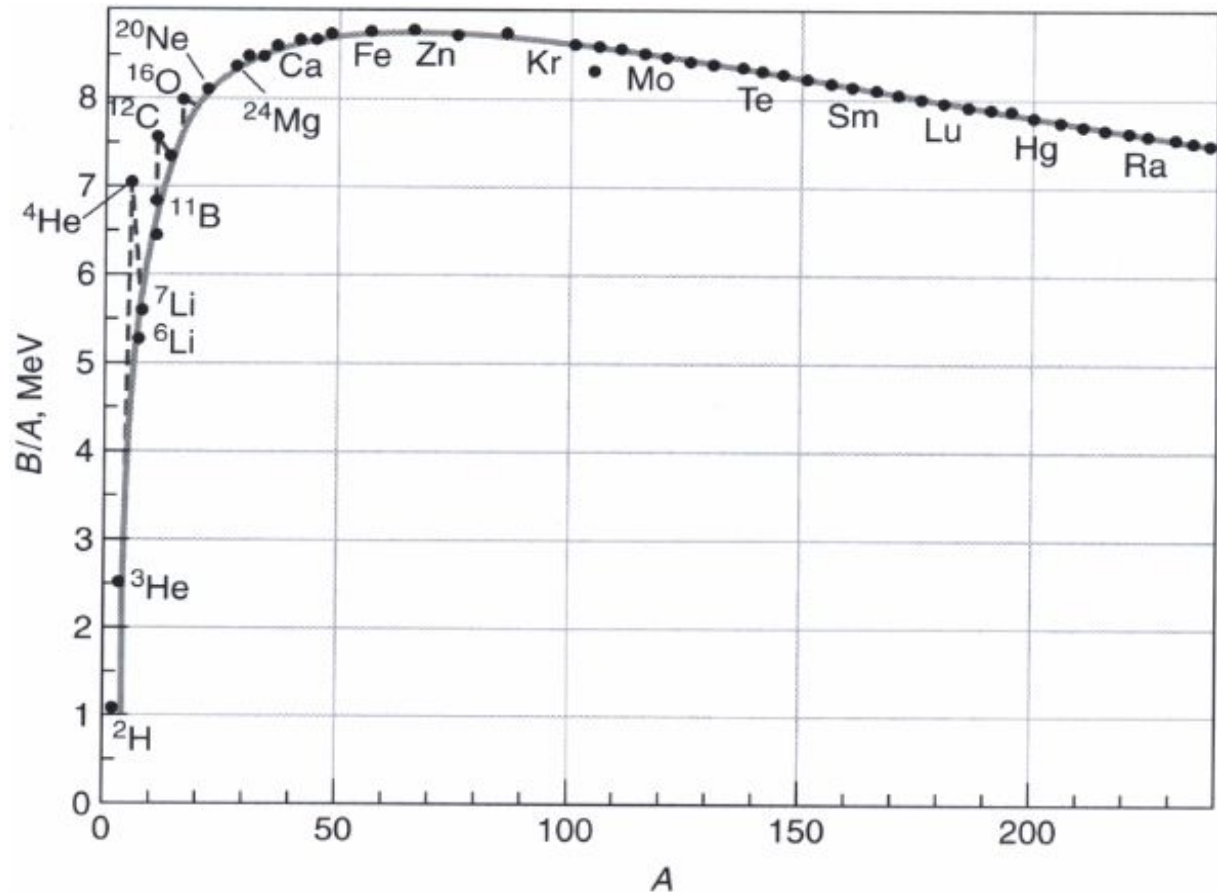


- A: alle E_{kin} gemessen, 3 Nuklidmassen bereits bekannt

\Rightarrow Best. der Masse des 4. Nuklids

• Messung für viele Kerne

Kurve
Weizsäcker-Formel



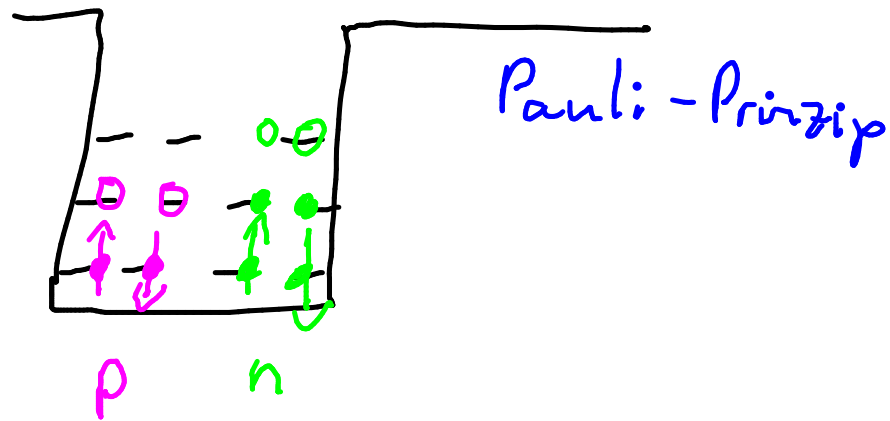
2.3.1 Tröpfchenmodell u. Bindungsenergie

C.F. v. Weizsäcker 1935

- Kern \equiv Tröpfchen aus kondensierten p u. n
(inkompressibel \rightarrow Nucleondichte im Kern = const.)
- Kernradius vs. Nucleonenzahl A : $r \sim \sqrt[3]{V} \sim \sqrt[3]{A}$
exp. $r \approx r_0 \cdot A^{1/3}$ mit $r_0 \approx 1,2 \text{ fm}$
- Kernkraft: kurze Reichweite ($\sim \text{fm}$) \rightarrow WW mit nächsten Nachbarn \rightarrow Sättigung
- Beiträge zur Bindungsenergie:

- (i) Kondensations- / Volumenenergie: $B_V \sim A \sim V \sim r^3 \rightarrow B_V = +a_v A$
- (ii) Oberflächenenergie: $B_S \sim \text{Oberfl.} \sim r^2 \rightarrow B_S = -a_s A^{2/3}$
- (iii) Coulombenergie: $B_C \sim \frac{z(z-1)}{r} \approx \frac{z^2}{r}$
 $\rightarrow B_C = -a_c \frac{z^2}{A^{1/3}}$

(iv) Asymmetrieenergie:



$$B_A = -a_A \frac{(N-Z)^2}{A} = -a_A \frac{(A-2Z)^2}{A}$$

↳ kann aus Fermigas-Modell abgeleitet werden

(v) Paarungsenergie:

$$B_p = -a_p \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \delta$$

$$\delta = \begin{cases} -1 & \text{gg} \\ 0 & \text{ug, ug} \\ +1 & \text{uu} \end{cases} \begin{array}{l} \text{Nu. Z gerade} \\ \\ \text{Nu. Z ungerade} \end{array}$$

Ursache: kurzreichw. Teil des Kernpotentials, größerer Überlapp der Wellenfunktion für Spinkonfiguration $\uparrow\downarrow$

Weizsäcker - Formel

$$B = a_v \cdot A - a_o A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(N-Z)^2}{A} - a_p \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

dabei exp. bestimmt:

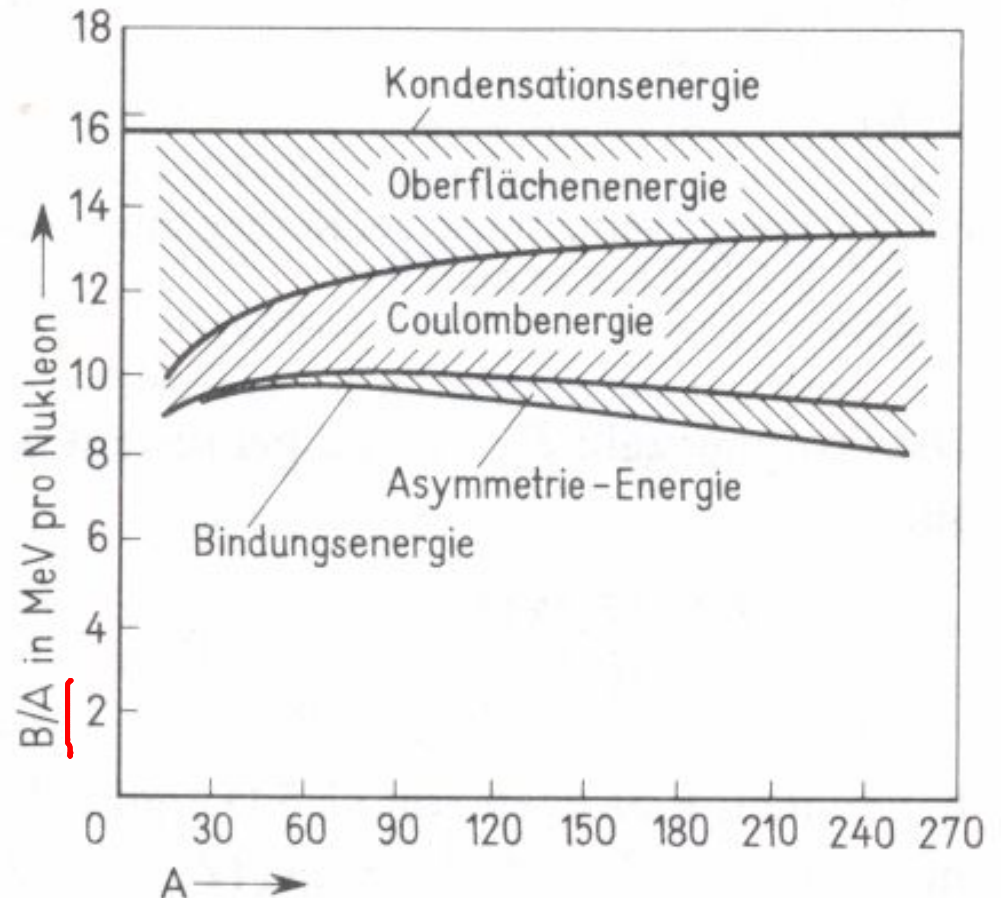
$$a_v = 15,67 \text{ MeV}$$

$$a_o = 17,23 \text{ MeV}$$

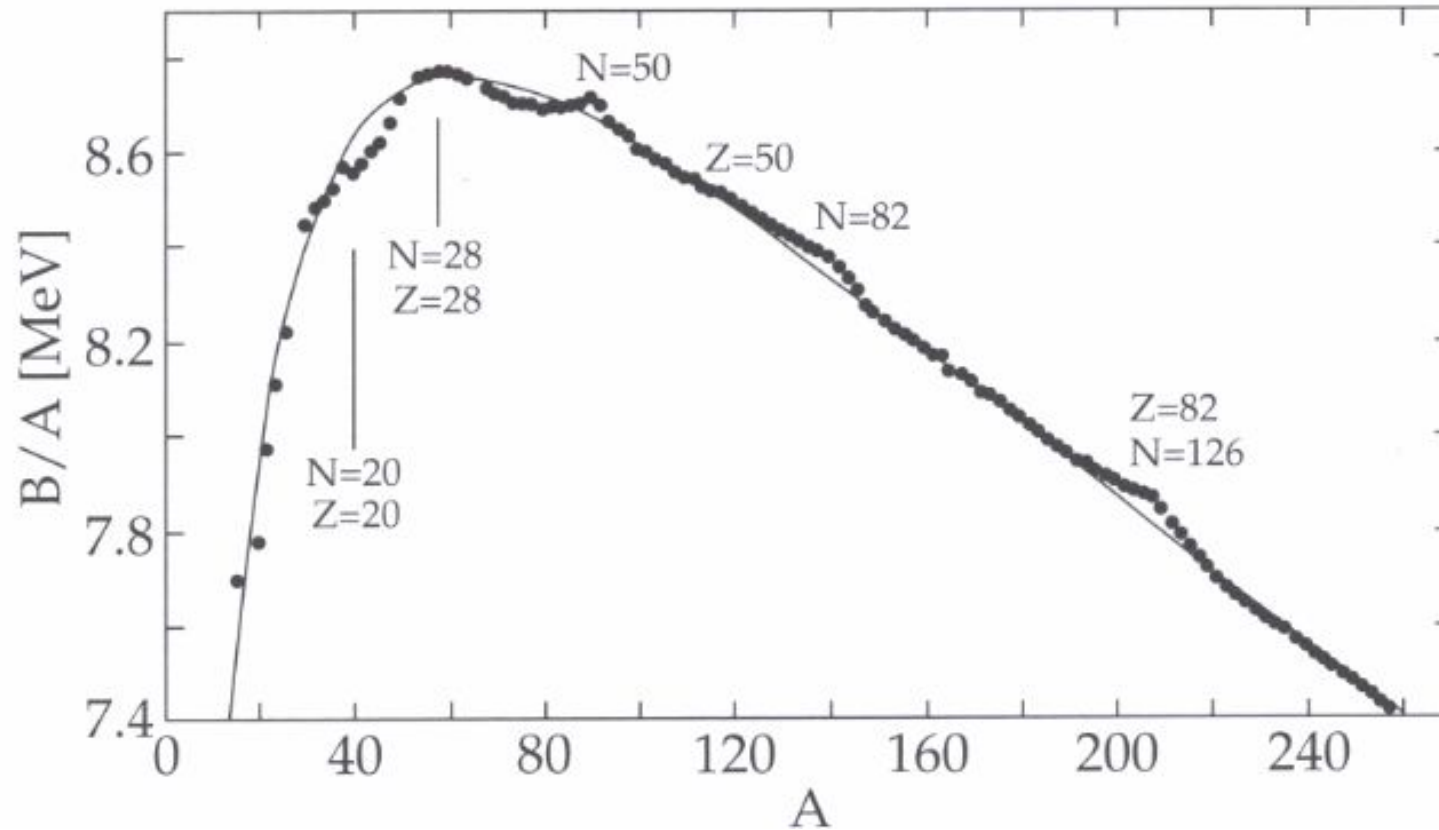
$$a_c = 0,71 \text{ MeV}$$

$$a_A = 23,29 \text{ MeV}$$

$$a_p = 11,2 \text{ MeV}$$



Weizsäcker - Formel gilt approximativ für fast alle Kerne:



↳ genauere Beschreibung erfordert detailliertes Modell (z. B. Abw. von Kugelform, Schalenabschlüsse im Kern)

2.4 Fermigas-Modell

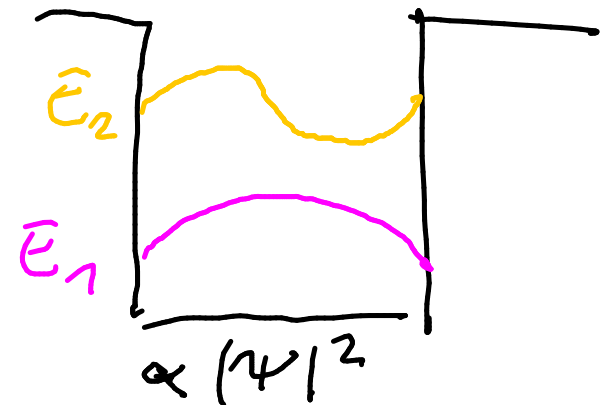
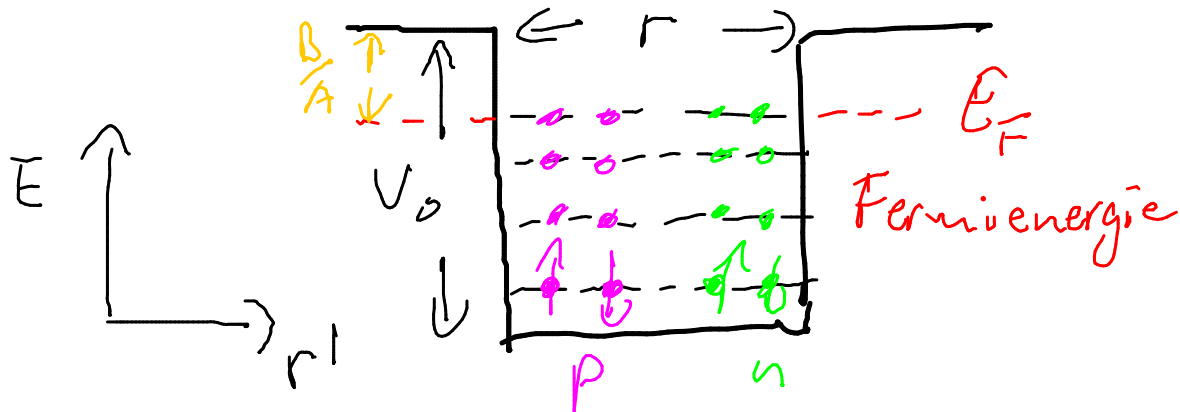
exp. Beobachtungen / Annahmen:

- Kernkräfte sind kurzreichweitig
- p u. n: gleiches Verhalten hinsichtlich Kernkraft
- Potentialtiefe \gg Bindungsenergie („schwache“ Bindung)
 - \rightarrow Nukleonen bewegen sich quasi-frei

\Rightarrow Kernpotential approximiert durch 3-dim. Kastenpotential

- Nukleonen geb. im mittleren Potential der anderen Nukleonen

\Rightarrow Einteilchenmodell



- Anzahl E-Zustände in Volumen V und Impulsintervall dp

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} V$$

\leftarrow Volumen der Kugelschale im p -Raum
 \leftarrow Volumen eines Zustandes (Heisenb. Unsch.)

jeweils 2 p und 2 n pro E-Zustand
 \rightarrow Integration bis Impuls $p_F (= \sqrt{2m E_F})$

$$2n = N = \underbrace{Z}_{A/2} = \frac{V p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad \text{mit } V = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad r = r_0 \cdot A^{1/3}$$

$$\Rightarrow p_F = \frac{\hbar}{r_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \approx 250 \text{ MeV}/c$$

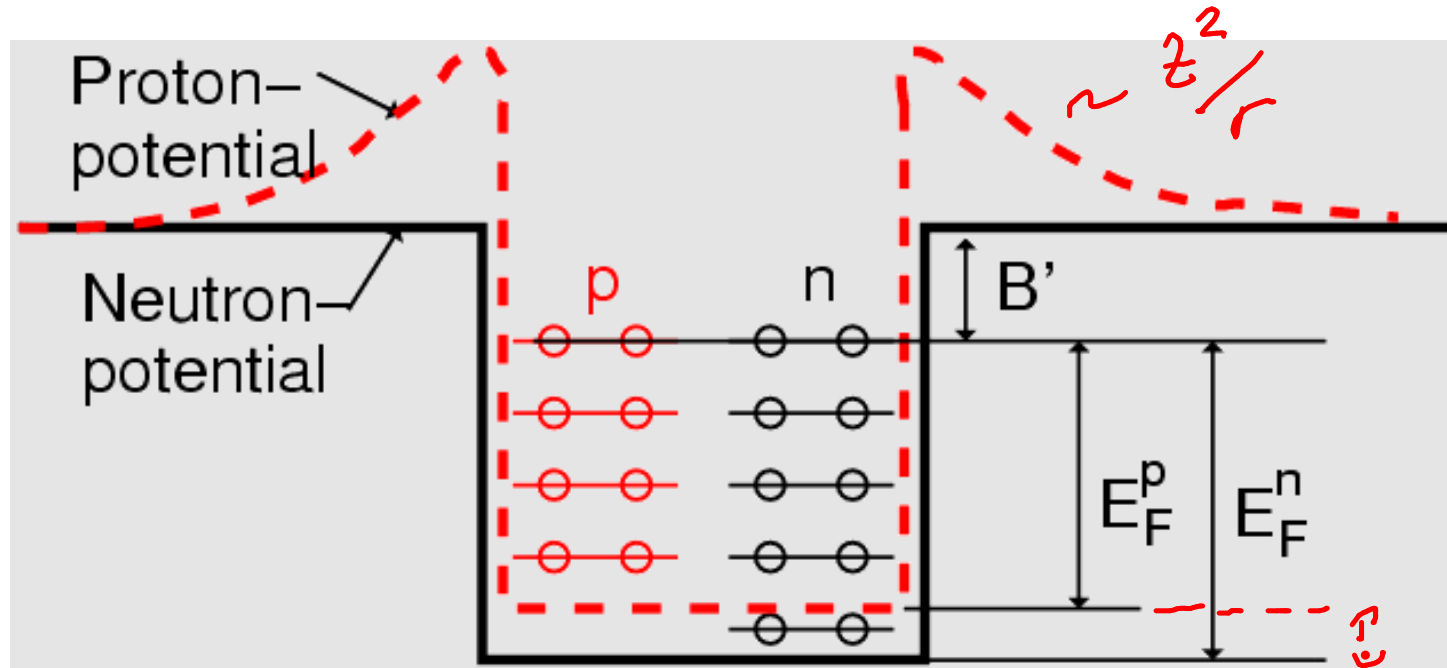
unabh. von $r, A, \dots!$

$$\Rightarrow E_F = \frac{p_F^2}{2m} = 33 \text{ MeV}, \quad m \approx m_p \approx m_n$$

$$\Rightarrow \text{Potentialtiefe: } V_0 = E_F + \frac{B}{A} \approx 40 \text{ MeV}$$

- analoges Modell: freies Elektronengas in Metallen

- Coulomb - Abstößung der Protonen
→ Verschiebung der Protonen - Energieniveaus



$E_F^n - E_F^p$
durch Coulomb-Abst.

⇒ Asymmetrie zwischen p u. n - Teilchen (Z u. N)
v. a. in schweren Kernen

2.5 Schalenmodell, magische Zahlen

- exp. Beobachtung:
besonders stabile Nuklide bei
best. Werten für N, Z
- größeres $\langle \frac{B}{A} \rangle$ als Weizs.-
Formel vorhersagt
- Anregungsenergie für 1. anger.
Kernzustand besonders hoch

⇒ magische Zahlen

→ Hinweis auf Schalen-
struktur
(Analogie: Atomphysik)

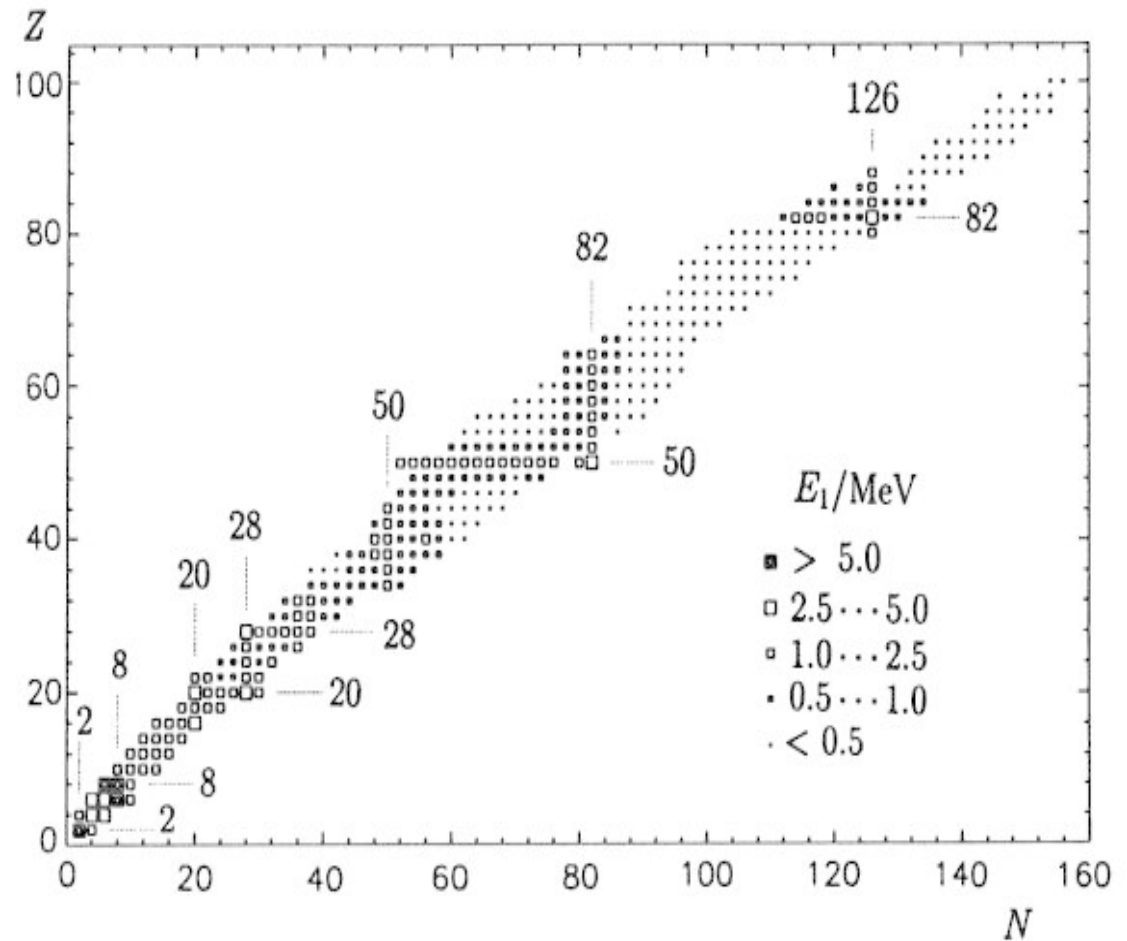
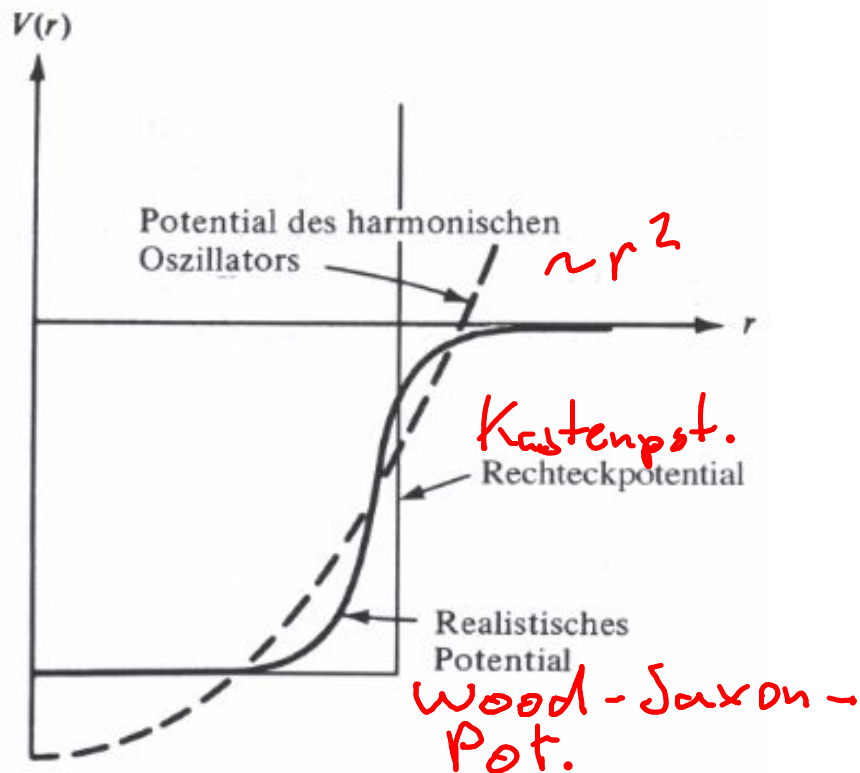


Abb. 17.5. Energie E_1 des ersten angeregten Zustands in gg-Kernen.

S. Poth et al.

Kernpotential:

- Kastenmodell ist nur grobe Näherung
- Streuexperimente \rightarrow Kernpotential $V(r)$
 - sehr leichte Kerne: $V_{\text{os}}(r) = -V_0 + \text{const. } r^2$
 - \rightarrow harmonischer Oszillator: $E_n = (N + 3/2) \hbar \omega$
 - schwerere Kerne: $V_{\text{WS}}(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp[(r-R)/a]}$



Wood-Saxon-Potential

R : Radius bei $-V_0/2$

a : Skin- / Hautdicke

exp.: $a \approx 0.7 \text{ fm}$

- zusätzlich zum Zentralpot.: Spin-Bahn-Kopplung (LS)
 \vec{l}, \vec{s} : Drehimpuls, Spin eines Nukleons

$$V(r) = V_{WS}(r) + V_{ls}(r) \frac{\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \Delta E_{ls} = \frac{2l+1}{2} \underbrace{\langle V_{ls}(r) \rangle}_{\text{exp: } < 0}$$

- große Energieaufspaltung im Vgl. zur Feinstruktur (H-Atom),
da starke WW

• größere Energielücken bei magischen Zahlen:
 2, 8, 20, 28, 50, 82, (114), 126, ...

⇒ Schalenabschluss

- Kerne mit mag. Z: bes. viele stabile Isotope
 - " " N: " Isotope
 - " " Z u. N: doppelt magisch, bes. stabil
- z.B.: ${}^4_2\text{He}_2$, ${}^{16}_8\text{O}_8$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$

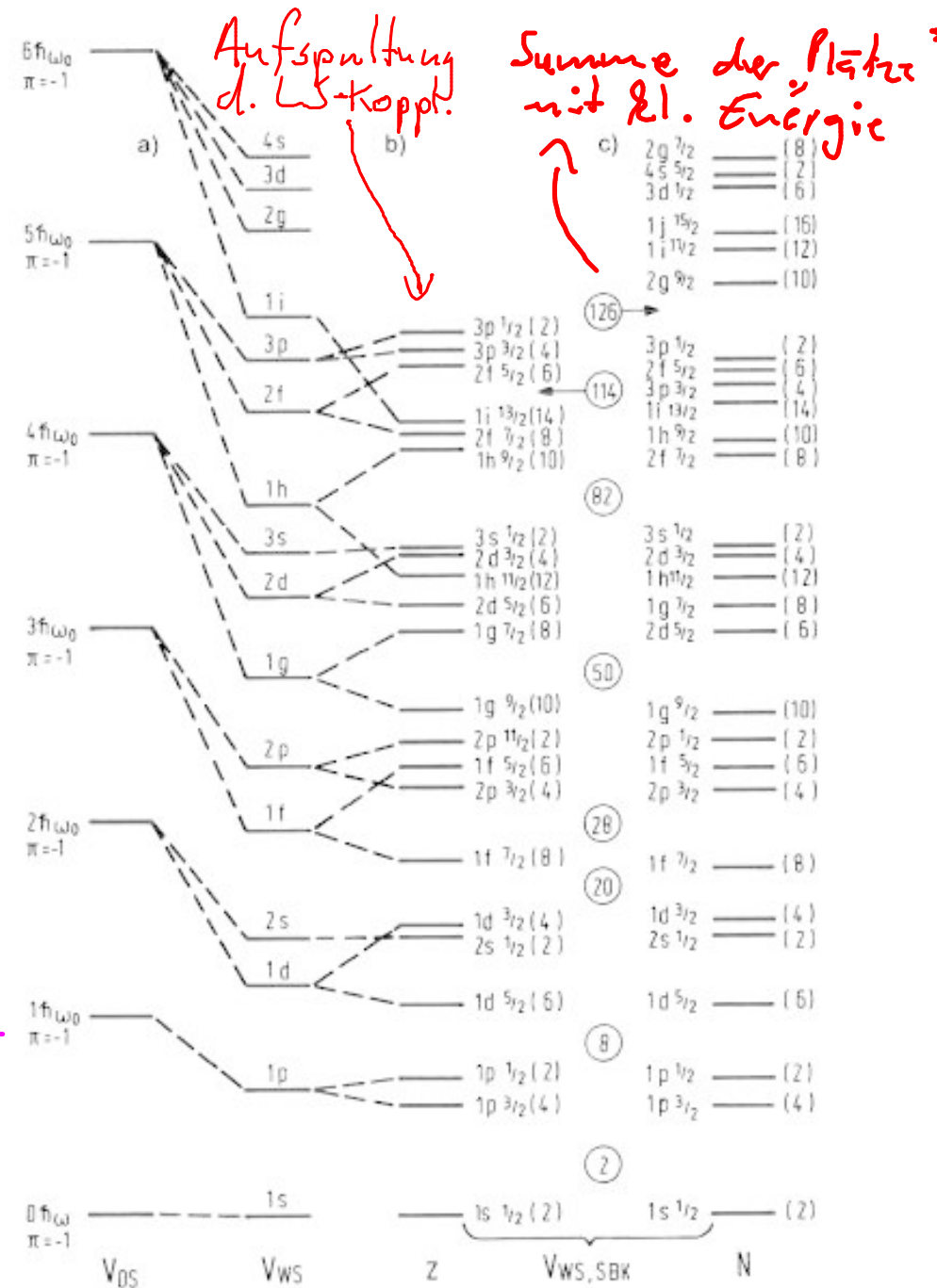


Bild 4.10. Schalenmodellzustände unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung s. Bethge

V_{OS} : Oszillator-Pot., V_{WS} : Wood-Saxon-Pot.
 $V_{WS,SBK}$: V_{WS} + LS-Kopplung
 Notation: z.B. $1p_{1/2}(2)$
 → # Knoten + 1, l, j (Entartung)

2.6 Tal der Stabilität

- stabilste Kerne \leftrightarrow maximale Bindungsenergie
 $\underbrace{\left(\leftarrow \rightleftharpoons \rightarrow \right)}_{A = \text{const}}$ minimale Kernmasse

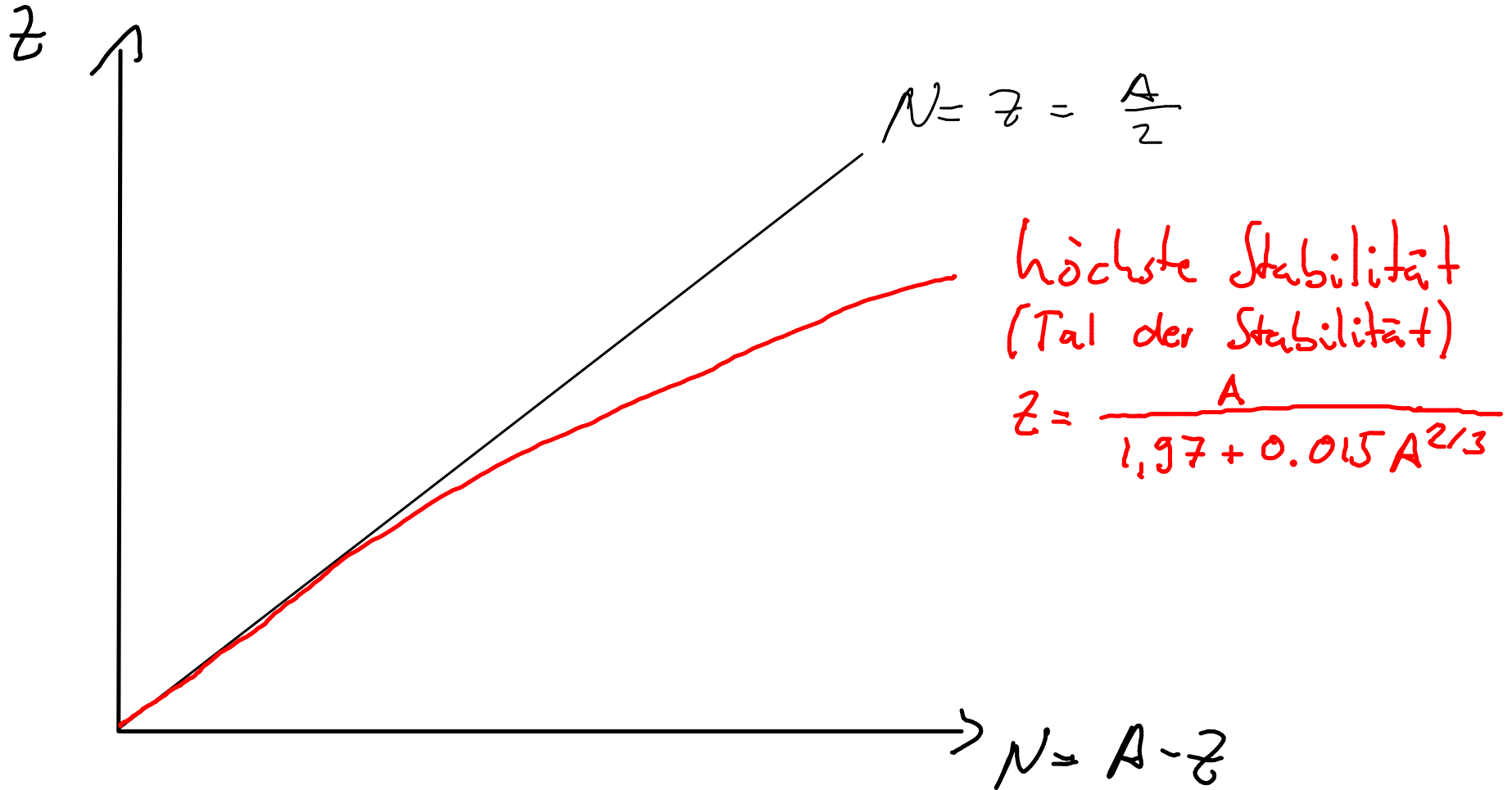
betrachte: $\frac{\partial M(A, Z)}{\partial Z} \Big|_{A = \text{const.}} \stackrel{!}{=} 0$

mit: $M(A, Z) = Z \cdot m_p + (A - Z) m_n - \frac{B}{c^2}$

Weizsäcker-Formel: $B = a_v A - a_d A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A - 2Z)^2}{A} \left(-a_p \frac{\delta}{A^{1/2}} \right)$

$$\Rightarrow Z = \frac{A}{2} \cdot \frac{\left[\frac{(m_n - m_p) c^2 + 4 a_A}{4 a_A + a_c \cdot A^{2/3}} \right]}{1,97 + 0,015 \cdot A^{2/3}}$$

$(m_n - m_p) c^2 = 1,293 \text{ MeV}, a_A = 23,25 \text{ MeV}, a_c = 0,71 \text{ MeV}$

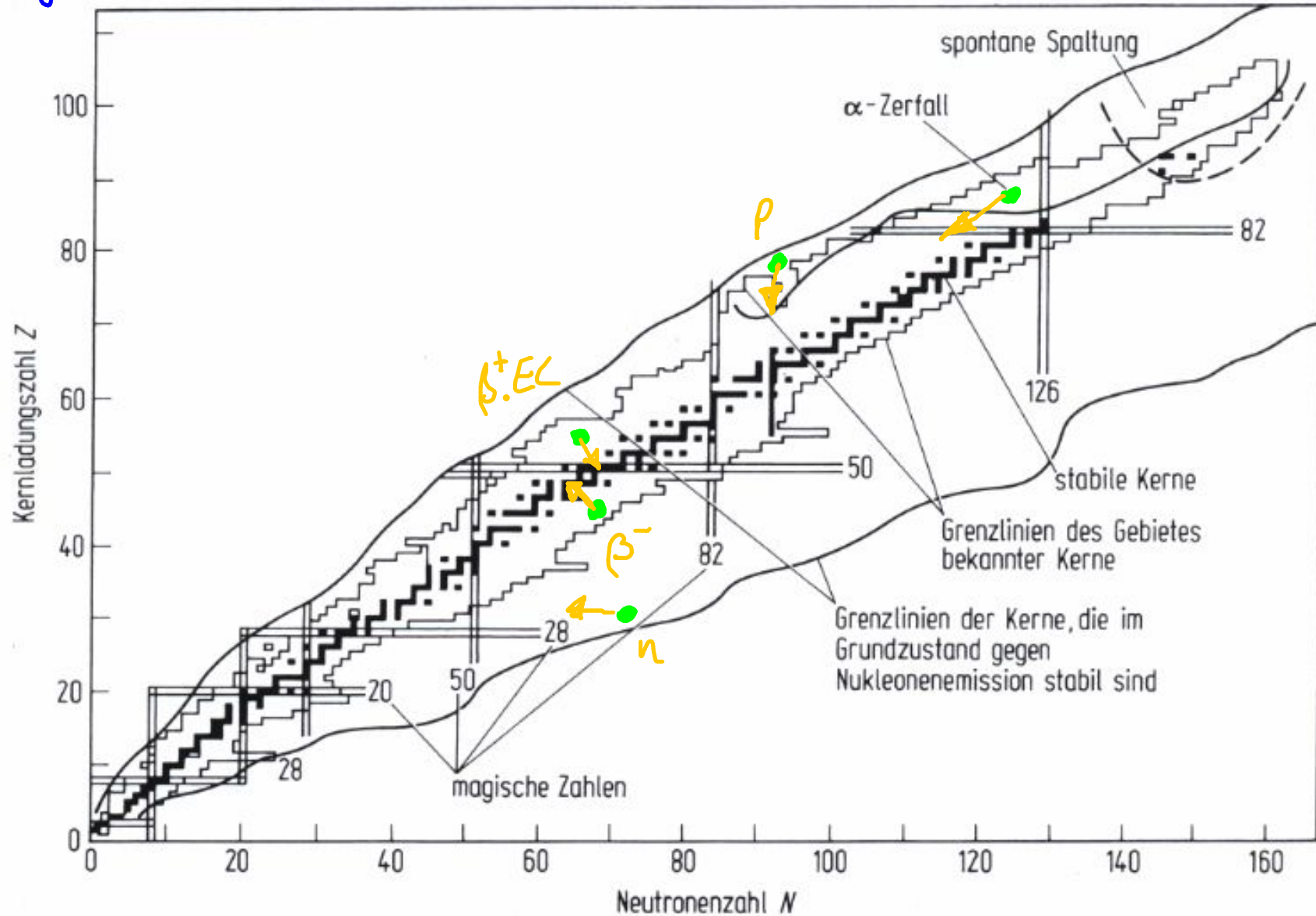


3 Stabilität von Kernen

- spontane Kernumwandlungen \rightarrow Radioaktivität
- stabil \leftrightarrow instabil? stabil: Lebensdauer \geq Alter d. Universums
- Arten von Radioaktivität

	ΔZ	ΔN	ΔA
α -Zerfall	-2	-2	-4
β^- Zerfall ($e^-: n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$)	+1	-1	0
β^+ Zerfall ($e^+: p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$)	-1	+1	0
Elektroneneinfang EC	-1	+1	0
γ -Zerfall	0	0	0
Protonen emission	-1	0	-1
Neutronenemission	0	-1	-1
Cluster-radioaktivität	$-Z_{cl}$	$-N_{cl}$	$-(Z_{cl} + N_{cl})$
Spontane Spaltung	$\approx \frac{1}{2} Z$	$\approx \frac{1}{2} N$...

• Lage der instabilen Kerne im $N-Z$ -Diagramm



3.1 Zerfallsgesetz, Aktivität, Lebensdauer

- Zahl der zerfallenden Kerne

$$\Delta N = -\lambda \cdot N \cdot \Delta t$$

$$\rightarrow \frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N(t) \rightarrow$$

, λ : Zerfallskonst.

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad \underline{\text{Zerfallsgesetz}}$$

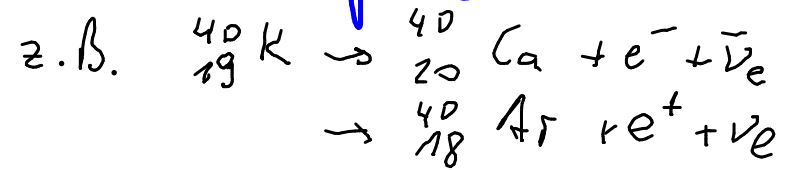
- mittlere Lebensdauer τ .

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \cdot \left(-\frac{dN}{dt} \right) dt = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \cdot \lambda \cdot N(t) dt = \int_0^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt$$

= partielle Integration = $\frac{1}{\lambda} \Rightarrow$ $\tau = \frac{1}{\lambda}$

- Halbwertszeit $t_{1/2}$: $N(t_{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot N_0 \rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \cdot \ln 2$

• Partielle Zerfallskonstante λ_k :



$$\lambda = \sum_{k=1}^N \lambda_k$$

Verzweigungsverhältnis (engl.: branching ratio)

$$\text{BR}_k = \frac{\lambda_k}{\lambda}$$

• Aktivität A

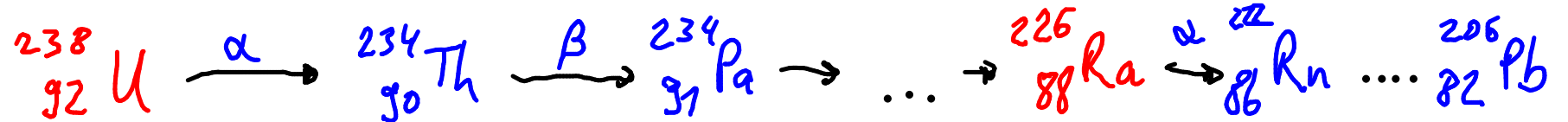
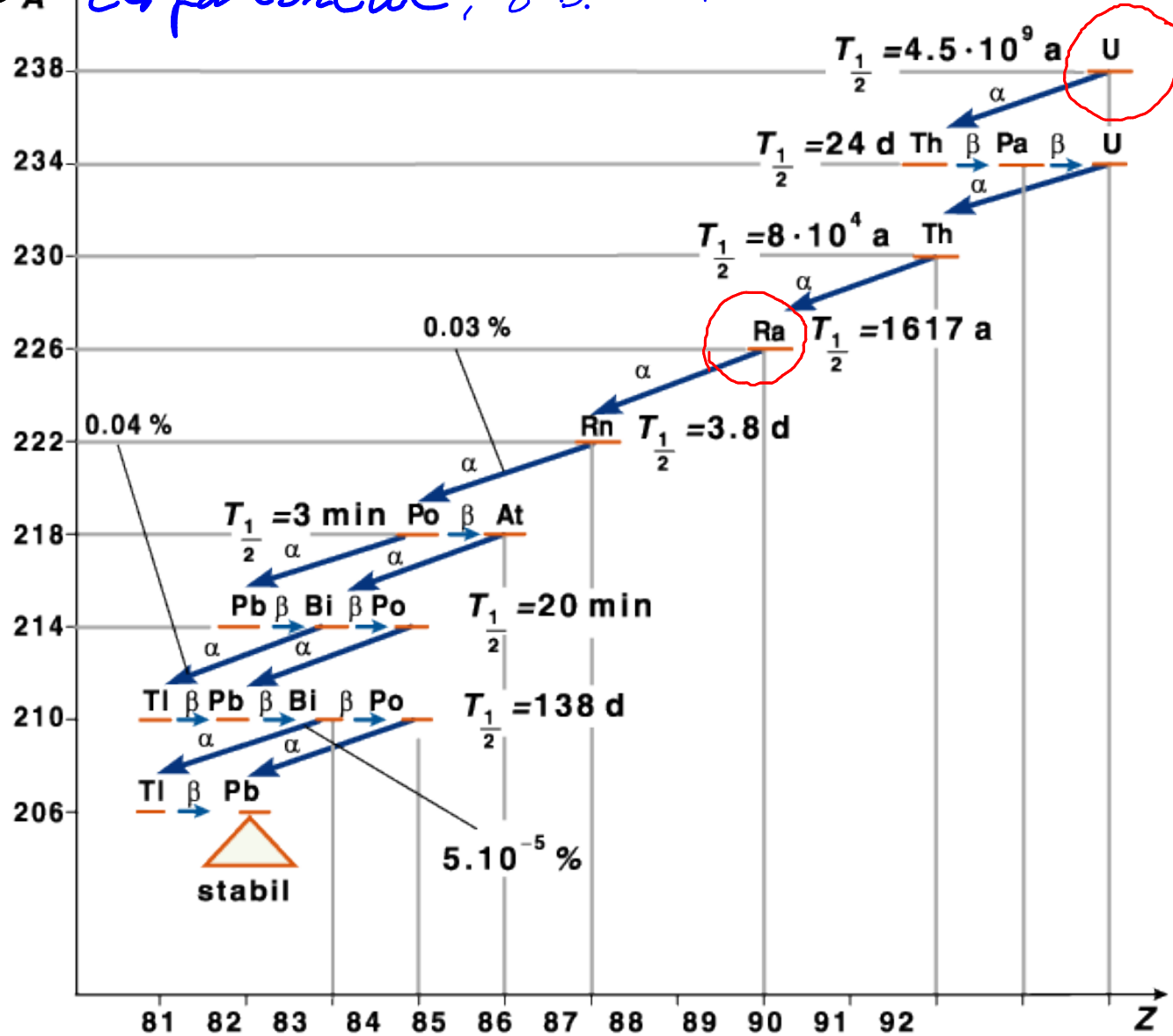
$$A := -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda \cdot \frac{m \cdot N_A}{M}$$

m : Masse d. Substanz
 N_A : Avogadrozahl
 M : Molmasse

Einheit der Aktivität: Becquerel, $1 \text{ Bq} \hat{=} 1 \frac{\text{Zerfall}}{\text{s}}$

(alt: Curie, $1 \text{ Ci} \hat{=} 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$)

● A Zerfallskette, z.B. $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow \dots \rightarrow ^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow \dots$





gekoppelte DGL

$$\begin{cases} (i) & \frac{dN_M}{dt} = -\lambda_M N_M(t) & \rightarrow N_M(t) = N_M(0) \cdot e^{-\lambda_M t} \\ (ii) & \frac{dN_T}{dt} = +\lambda_M \cdot N_M(t) - \lambda_T \cdot N_T(t) \end{cases}$$

Lösungsansatz: $N_T(t) = -a e^{-\lambda_M t} + b e^{-\lambda_T t}$

in (ii) $\rightarrow \frac{dN_T}{dt} = +\lambda_M \cdot a e^{-\lambda_M t} - \lambda_T b \cdot e^{-\lambda_T t}$

für $t=0$: $\left(\frac{dN_T}{dt}\right)_{t=0} = +\lambda_M \cdot a - \lambda_T \cdot b = \lambda_M N_M(0) - \lambda_T \underbrace{N_T(0)}_{=0}$
 $= \lambda_M N_M(0)$

2 Lösungen: (I) $a = N_M(0)$, $b = 0$ (trivial, entspricht stabilem Tochterkern)
 (II) $a = b \leadsto a \cdot (\lambda_M - \lambda_T) = \lambda_M \cdot N_M(0)$
 $\leadsto a = b = \lambda_M \cdot N_M(0) / (\lambda_M - \lambda_T)$

$$\Rightarrow N_T(t) = \frac{\lambda_M \cdot N_M(0)}{\lambda_M - \lambda_T} \cdot (e^{-\lambda_T \cdot t} - e^{-\lambda_M \cdot t})$$

▶ Max. $N_T(t)$ nach

$$t = \frac{\ln(\lambda_T / \lambda_M)}{\lambda_T - \lambda_M}$$

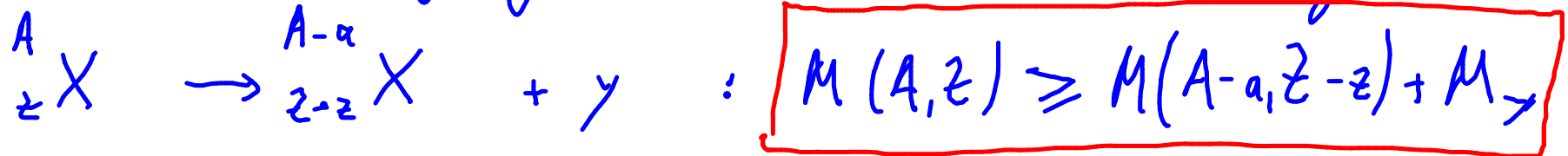
▶ Zerfallsgleichgewicht: $\frac{dN_T}{dt} = 0 \rightarrow \lambda_M N_M(t) \stackrel{!}{=} \lambda_T N_T(t)$

$$\Rightarrow \frac{N_T}{N_M} = \frac{\lambda_M}{\lambda_T} = \frac{\tau_T}{\tau_M} = \frac{t_{1/2,T}}{t_{1/2,M}}$$

z. B. $\frac{{}^{226}\text{Ra}}{{}^{238}\text{U}} = 0.36 \cdot 10^{-6}$

3.2 Stabilitätskriterien

- Notwendige Bedingung für spontane Kernumwandlung



Beispiel: \blacktriangleright α -Zerfall

$$Q = (M(A, Z) - M(A-4, Z-2) - m_\alpha) c^2 \geq 0$$

Kinematik: $\vec{p}_A = \vec{p}_{A-4} + \vec{p}_\alpha \rightarrow \begin{pmatrix} M(A, Z) c \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{A-4}/c \\ \vec{p}_{A-4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_\alpha/c \\ \vec{p}_\alpha \end{pmatrix}$

$$(i) \quad E_{A-4} = \sqrt{M(A-4, Z-2)^2 c^4 + (|\vec{p}_{A-4}| \cdot c)^2} \approx \underbrace{M(A-4, Z-2) c^2}_{M c} + \underbrace{\frac{|\vec{p}_{A-4}|^2 c^2}{2 M(A-4, Z-2) \cdot c^2}}_{E_{kin, A-4}}$$

$$(ii) \quad E_\alpha = \sqrt{m_\alpha^2 c^4 + (|\vec{p}_\alpha| \cdot c)^2} \approx \underbrace{m_\alpha c^2}_{m_\alpha c} + E_{kin, \alpha}$$

mit $|\vec{p}_{A-4}|^2 = |\vec{p}_d|^2 \Rightarrow$ $E_{kin,d} = \frac{M(A-4, z-2)}{m_d} \cdot E_{kin,A-4}$ ^{**}

$$Q \approx \left[\underbrace{M(A-4, z-2)^2 c^2 + E_{kin,A-4} + m_d c^2 + E_{kin,d}}_{= M(A, z)} - M(A-4, z-2)^2 c^2 - m_d c^2 \right]$$

\Rightarrow $Q = E_{kin,A-4} + E_{kin,d}$ ⁺

\otimes u. $\otimes\otimes \Rightarrow$

$$E_{kin,d} = Q \cdot \frac{M(A-4, z-2)}{m_d + M(A-4, z-2)}$$

$$E_{kin,A-4} = Q \cdot \frac{m_d}{m_d + M(A-4, z-2)}$$

3.2.1 Stabilitätskriterien: β -Zerfall

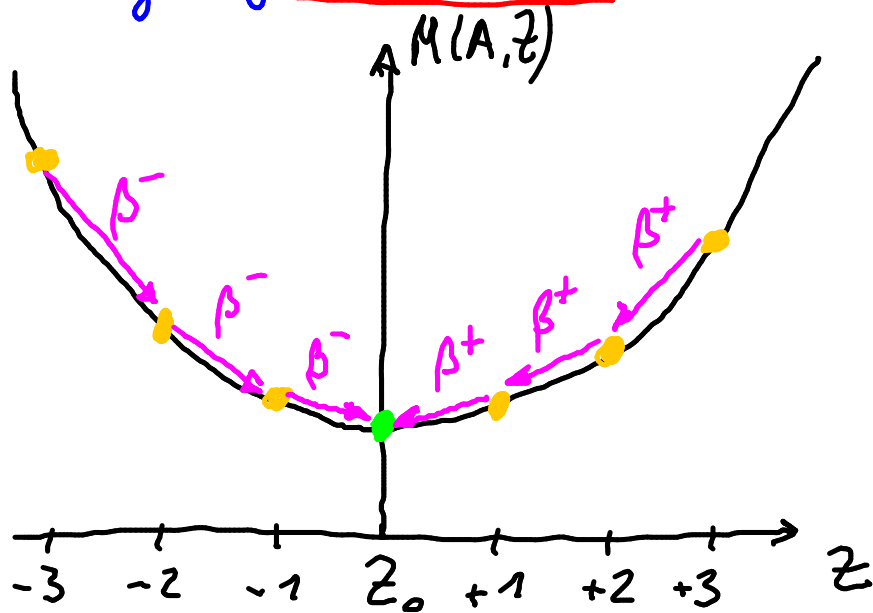
Weizsäcker-Formel:
$$B = a_v A - a_o A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A-2Z)^2}{A} - a_p \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{vertikale Verschiebung}}$

$A = \text{const}$
(d. sind Isobare)

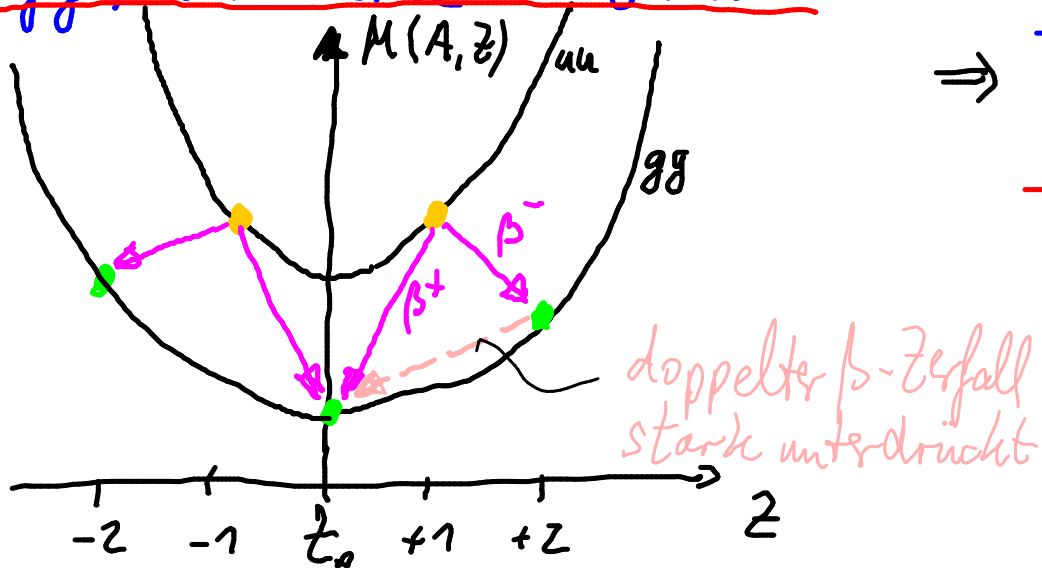
→ Parabel in Z

• ug, gn-Kerne: $\delta = 0$



⇒ In der Regel: Für ungerade A ,
d.h. ug bzw. gn-Kerne
nur 1 stabiles Isobar
(NB: stabil meint hier stabil gegen β -Zerfall)

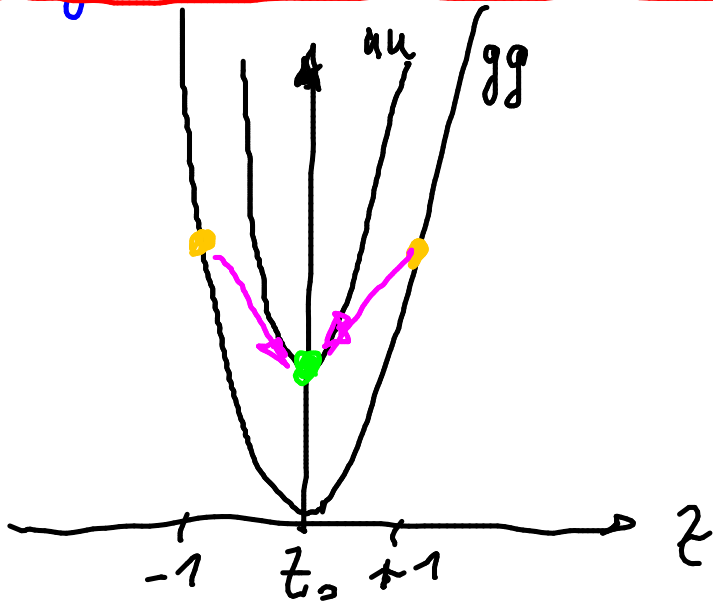
- gg, uu - Kerne : $\delta = \pm 1$



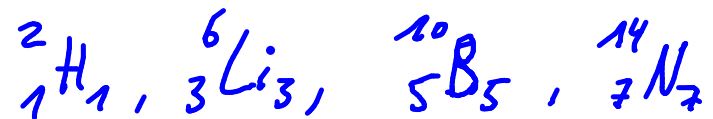
⇒ Für gerade A sind für $z > 7$ mehrere stabile Isobare möglich, die gg - Kerne sind
(NB: stabil meint hier stabil gegen β -Zerfall)

Stabile uu-Kerne mit $z > 7$ existieren nicht

- A gerade und const., $z \leq 7$



⇒ Bei $z \leq 7$ gibt es vier stabile uu-Kerne :



Be
9,01218
 σ 0,0092

chemisches Symbol
Masse in AME gemittelt über alle radioaktiven Isotope
Einfangquerschnitt σ für Neutronen in barn = 10^{-28} m²

\uparrow
Z

H 2
0,015
 σ 0,00053

rot: stabile Isotope
Massenzahl A
Isotopenhäufigkeit in %
Einfangquerschnitt σ_n in barn

H 3
12,346 a
 β 0,02

weiß: instabile Isotope
Massenzahl A
mittlere Lebensdauer
Energie der emittierten β , γ in MeV,
n = Neutronenemitter
p = Protonenemitter

				O 13 8,9 ms $\beta^+ 1,9$ (p 1,44; 6,44; 0,93 ...) γ 2313	O 14 70,59 s $\beta^+ 1,8$; 4,1 γ 2313	O 15 2,03 m $\beta^+ 1,7$ n $\sigma \gamma$	O 16 99,756 σ 0,000178		
				N 12 11,0 ms $\beta^+ 16,4$ γ 4439 ($\sigma \sim 1,6$; 2,8)	N 13 9,96 m $\beta^+ 1,2$ n $\sigma \gamma$	N 14 99,64 σ 0,075 $\sigma_{n,p}$ 1,81	N 15 0,36 σ 0,000024		
			C 12,011	C 9 126,5 ms β 3,5 (p 8,24; 10,92)	C 10 19,3 s $\beta^+ 1,9$ γ 718, 1022	C 11 20,3 m β 1,0 n $\sigma \gamma$	C 12 98,89 σ 0,0034	C 13 1,11 σ 0,0009	C 14 5736 a β 0,2 n $\sigma \gamma$
			B 10,81 σ_{abs} 759	B 8 762 ms β 14,1 ($2\sigma \sim 1,6..8,3$)	B 9 p	B 10 20 σ 0,5 $\sigma_{n,p}$ 3836	B 11 80 σ 0,0005	B 12 20,3 ms β 13,4 γ 4439 (σ 0,2 ...)	B 13 17,33 ms β 13,4 γ 3684 (σ 3,6; 2,4)

4	Be 9,01218 σ 0,0092			Be 7 53,4 d γ 478 $\sigma_{n,p}$ 48000	Be 8 2 σ 0,05	Be 9 100 σ 0,0092	Be 10 $1,6 \cdot 10^6$ a β 0,6 n $\sigma \gamma$	Be 11 13,8 s β 11,5 γ 2125 6791 (σ)	Be 12 11,4 ms β 11,7 (σ)
3	Li 6,941 σ 70,7		Li 5 p	Li 6 7,5 σ 0,028 $\sigma_{n,p}$ 940	Li 7 92,5 σ 0,037	Li 8 844 ms β 12,5 ($2n - 1,6$)	Li 9 176 ms β 11,0; 13,5 (n 0,7 ...)		Li 11 9,7 ms $\beta \sim 18$ (n)
2	He 4,00260 $\sigma_{abs} < 0,05$	He 3 0,00013 σ 0,00006 $\sigma_{n,p}$ 5327	He 4 99,99987 σ 0	He 5 n	He 6 802 ms β 3,5	He 7 n	He 8 122 ms $\beta \gamma \sim 10$ γ 981 (n)		
1	H 1,0079 σ 0,332	H 1 99,985 σ 0,332	H 2 0,015 σ 0,00053	H 3 12,346 a β 0,02					

3.2.2
Nuklid=
karte

$z \uparrow$

N \rightarrow 1 2 3 4 5 6 7 8

3.2.2 Nuklidkarte (s. Bild oben)

Online-Version von
National Nuclear Data Center: <http://www.nndc.bnl.gov/nudat2>

3.3 β -Zerfall

- notwendige Bedingung:

▶ β^- -Zerfall ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$) $Q(\beta^-) = (M(A, Z) - (M(A, Z+1) + m_e))c^2 \geq 0$

▶ β^+ -Zerfall ($p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$) $Q(\beta^+) = (M(A, Z) - (M(A, Z-1) + m_e))c^2 \geq 0$

▶ Elektroneneinfang ($e^- + p \rightarrow n + \nu_e$) $Q(EC) = (M(A, Z) + m_e - M(A, Z-1))c^2 \geq 0$

- Freies Neutron, freies Proton

$$n \rightarrow p \dots : Q_n(\beta^-) = (m_n - (m_p + m_e))c^2 \approx +0.87 \text{ MeV}$$

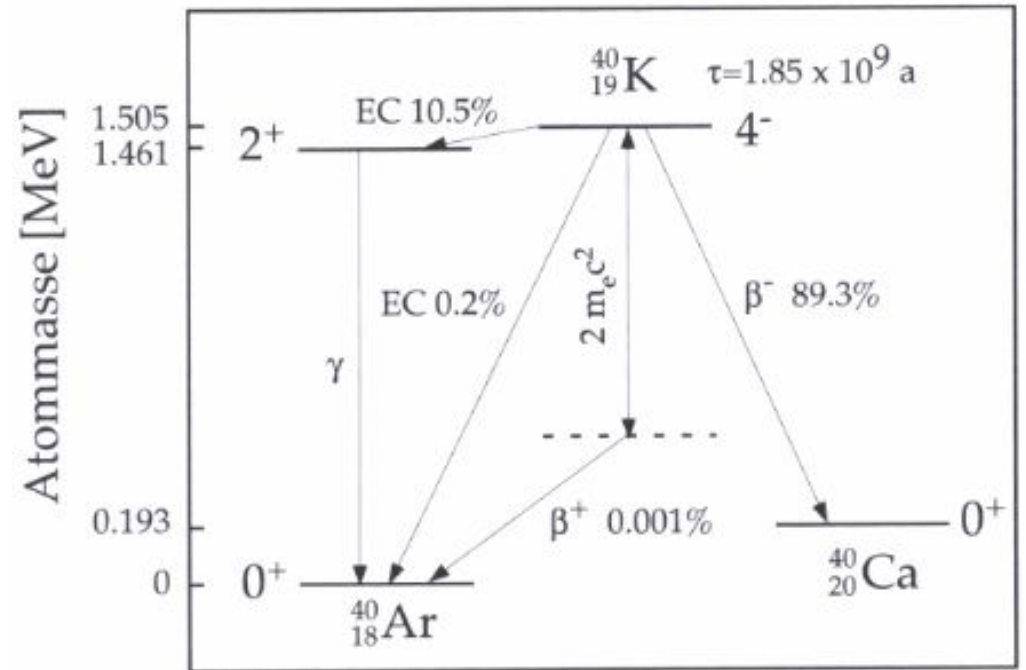
$$p \rightarrow n \dots : Q_p(\beta^+) = (m_p - (m_n + m_e))c^2 \approx -1.80 \text{ MeV}$$

⇒ freies Neutron zerfällt;
freies Proton zerfällt nicht, d.h. bei β^+ -Zerfall wird Energie aus Kern benötigt

- Darstellung im Termschema
Berücksichtigung der Hüllenelektronen

$$M(A, Z) = M(A, Z) + Z \cdot m_e$$

$$\begin{aligned} \rightarrow Q(\beta^+) \cdot \frac{1}{c^2} &= M(A, Z) - (M(A, Z-1) + m_e) \\ &\quad + Z \cdot m_e - ((Z-1) \cdot m_e + m_e) \\ &= M(A, Z) - (M(A, Z-1) + 2m_e) \end{aligned}$$



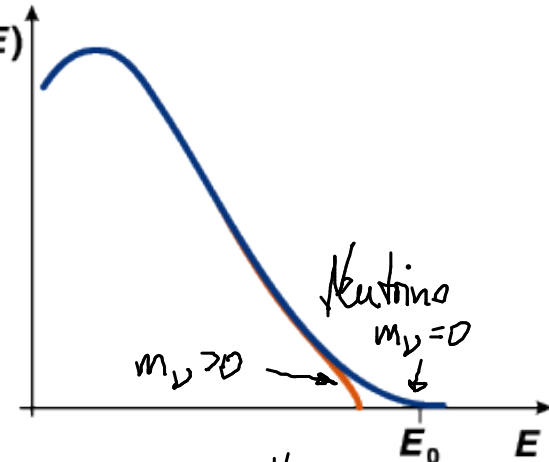
($0^+, 2^+, 4^-$ bezeichnen Kernspin und Vorzeichen der Parität, folgt später)

- Energien der β^- bzw. β^+ :

▶ exp. Beobachtung (Chadwick: 1914):

kontinuierliches Spektrum

Zahl $N(E)$
beobachteter
Elektronen

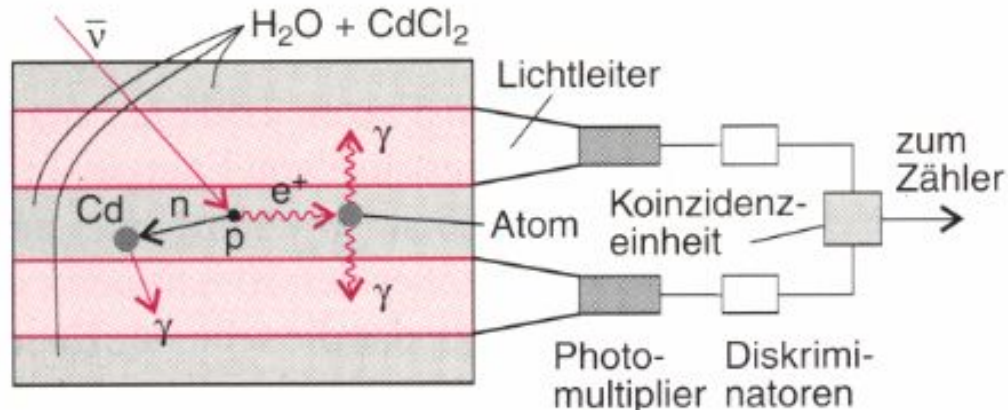


▶ max. β -Energie: (betrachte 2-Körperfall: $X \rightarrow Y + e^-$)

$$T_{e, \max} \equiv E_{\text{kin}, e, \max} \approx Q \cdot \frac{M_Y}{M_Y + m_e} \approx Q \cdot \left(1 - \frac{m_e}{M_Y}\right)$$

Neutrinomasse aus Energie-
spektrum bestimmbar

- ▶ Neutrino-Hypothese (W. Pauli 1930)
 - ▶ Neutrino-Nachweis (F. Reines, C.L. Cowan 1959)
- hoher Neutrinofluss benötigt → Kernspaltungsreaktor als $\bar{\nu}_e$ -Quelle

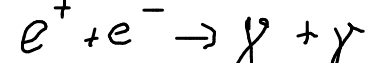


Reaktion: Inverser β -Zerfall

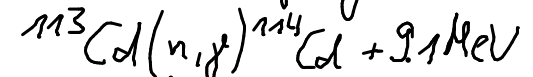


Nachweis:

☐ e^+ durch Annihilation



☐ n durch Einfang am ^{113}Cd



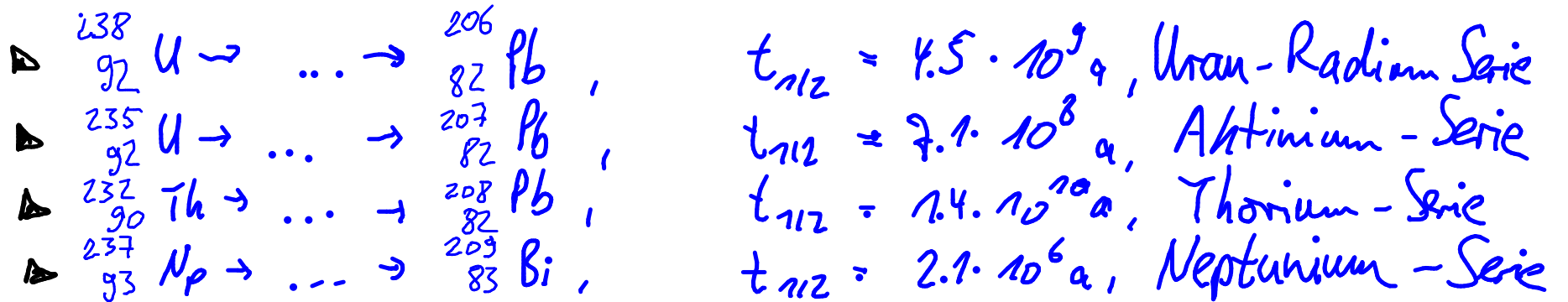
n-Einfang → γ -Emission

- ▶ theoretische Behandlung des β -Zerfalls

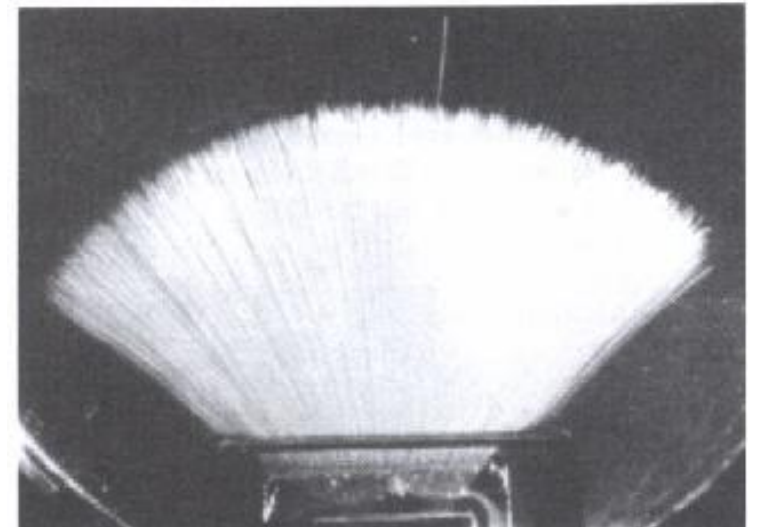
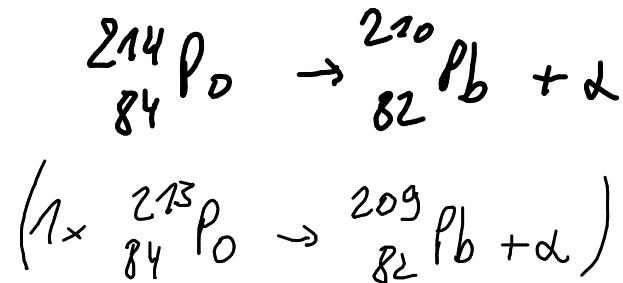
Fermi-Theorie (folgt später)

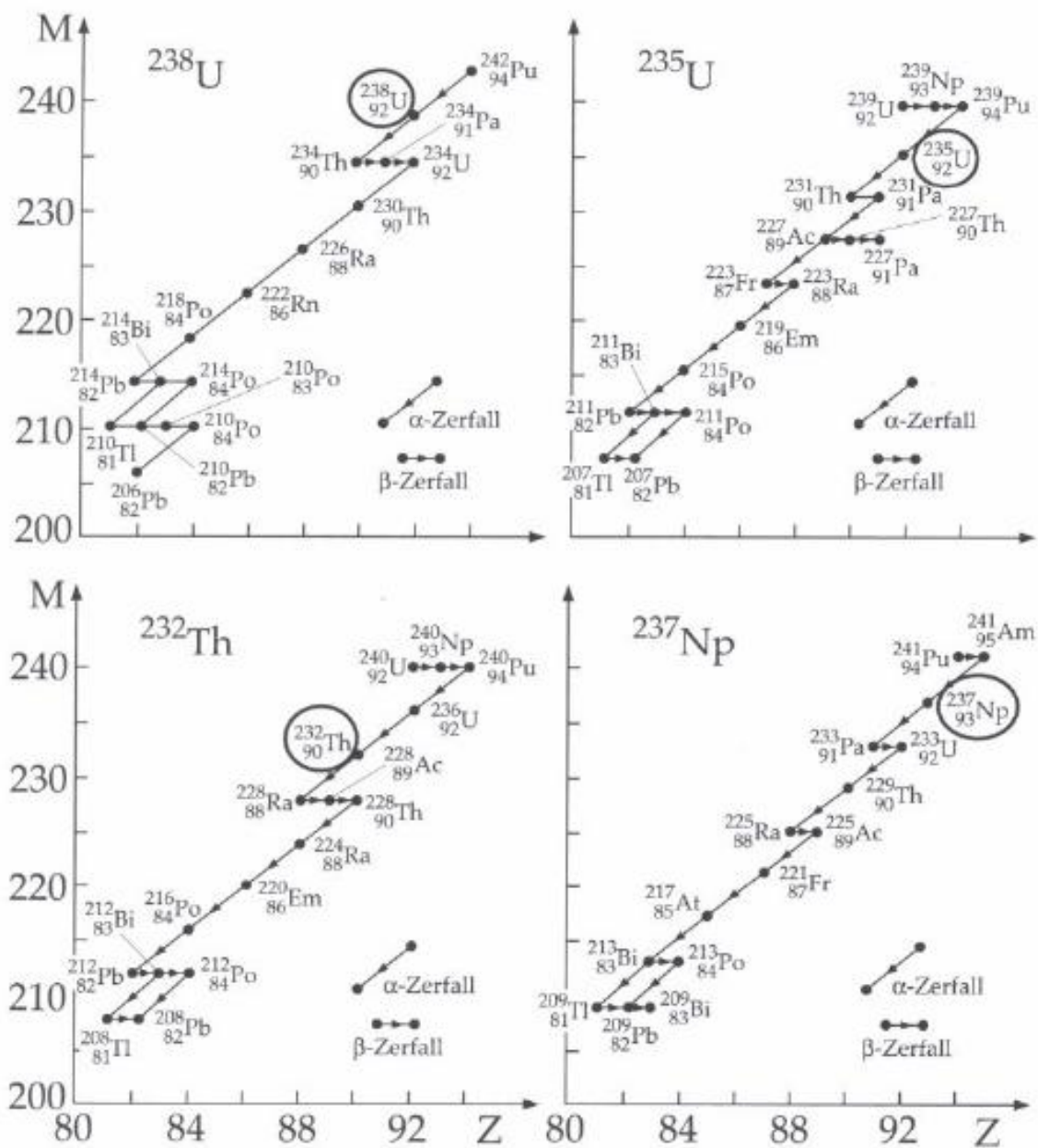
3.4 α -Zerfall

- Wegen $A_{\alpha} = 4$: Vier Zerfallsketten (s. Bild auf nächster Seite)



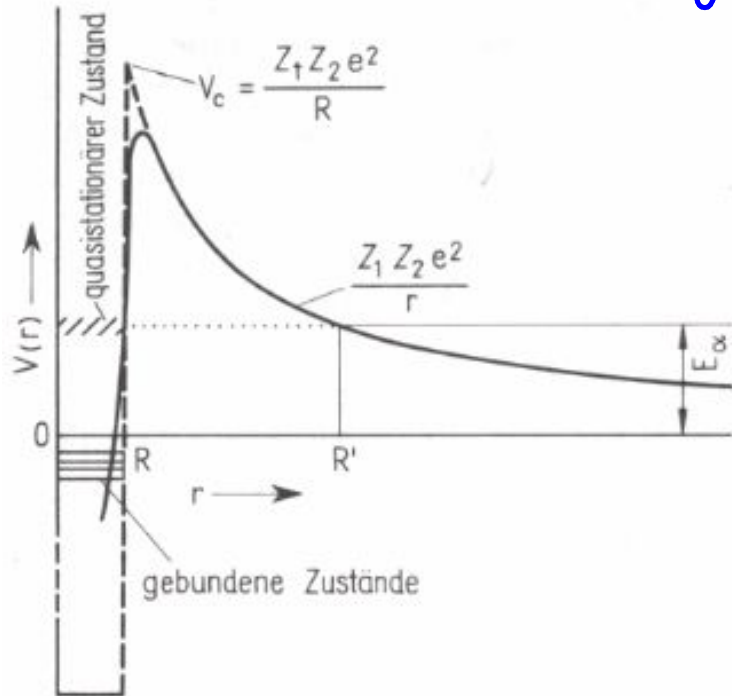
- α -Teilchen aus Zerfall sind monoenergetisch \rightarrow Z-Körperzerfall





3.4.1 α -Zerfall: Gamow-Modell

- Betrachte Annäherung eines α -Teilchens mit E_α an Tochterkernlid:



- ▶ elektrost. Abstößung für $r \geq R = R_T + R_\alpha$

$$V_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_T Z_\alpha e^2}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0} \frac{Z_T Z_\alpha e^2}{(A_T^{1/3} + A_\alpha^{1/3})}$$
- ▶ kurzreichweitige Kernkraft: für $r < R$
- ▶ Für $E_\alpha > V_c$: sofortiger α -Zerfall
- ▶ Für $E_\alpha < V_c$: quantenmechanischer Tunnel Effekt

- Gamow-Modell des α -Zerfalls:

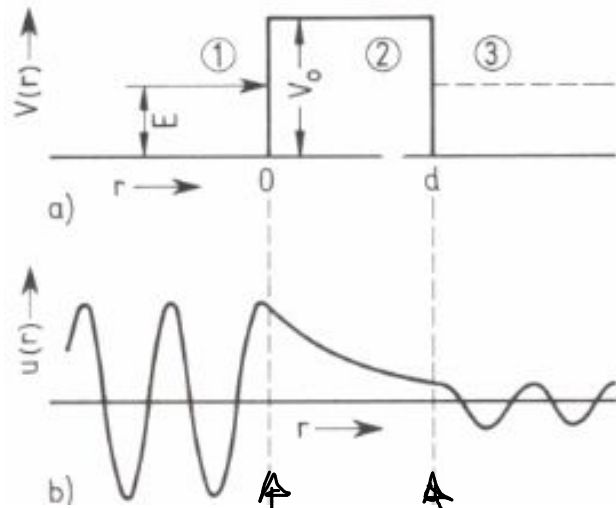
Zerfallskonstante: $\lambda_\alpha = \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot T_\alpha$

λ_0 : Bildung von α -Teilchen mit E_α , λ_1 : Stoßrate des α -Teilchens gegen Potentialwand
 T_α : Transmissions-/Tunnelwahrscheinlichkeit (dominiert λ_α)

► Erinnerung zum QM-Tunneleffekt an Potentialschwelle

$\alpha_1 \rightarrow$ $\alpha_2 \rightarrow$ $\alpha_3 \rightarrow$
 $\beta_1 \leftarrow$ $\beta_2 \leftarrow$ $\beta_3 \leftarrow$

α_i : Amplituden hinlaufender Wellen
 β_i : — " — reflektierte Wellen



$$\psi_{\text{I}}^{(1)} = \alpha_1 e^{ik_1 r} + \beta_1 e^{-ik_1 r} \quad ; \quad k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

$$\psi_{\text{I}}^{(2)} = \alpha_2 e^{-k_2 r} + \beta_2 e^{+k_2 r} \quad ; \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}$$

$$\psi_{\text{I}}^{(3)} = \alpha_3 e^{ik_3 r} \quad ; \quad k_3 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

stetig & differenzierbar: $\psi_{\text{I}}^{(1)}(0) = \psi_{\text{I}}^{(2)}(0)$, $\psi_{\text{I}}^{\prime(1)}(0) = \psi_{\text{I}}^{\prime(2)}(0)$, $\psi_{\text{I}}^{(2)}(d) = \psi_{\text{I}}^{(3)}(d)$,
 $\psi_{\text{I}}^{\prime(2)}(d) = \psi_{\text{I}}^{\prime(3)}(d)$

⇒ Transmissionswahrscheinlichkeit

$$T = \left| \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right|^2 = \left[1 + \frac{V_0^2}{V_0^2 - (2E - V_0)^2} \cdot \sinh^2\left(\frac{k_2 d}{\hbar}\right) \right]^{-1}$$

$$k_2 d \gg 1: \quad T \approx 4 \underbrace{\frac{V_0^2 - (2E - V_0)^2}{V_0^2}}_{\sigma(-1)} \cdot e^{-2k_2 d / \hbar} \approx e^{-2\sqrt{2m(V_0 - E)} \cdot d / \hbar}$$

\Rightarrow Für $V(r) \sim \frac{z_T z_A e^2}{r}$
 mit Gamow-Faktor \rightarrow

$$T_\alpha \approx e^{-G} = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_R^{R'} \sqrt{2m(V(r)-E)} dr\right)$$

$$G = \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \cdot \int_R^{R'} \sqrt{\frac{z_T z_A e^2}{r} - E} dr$$

G kann analytisch ausintegriert werden $\leadsto G = G\left(\frac{R}{R'}\right)$

\Rightarrow für $R' \gg R$:

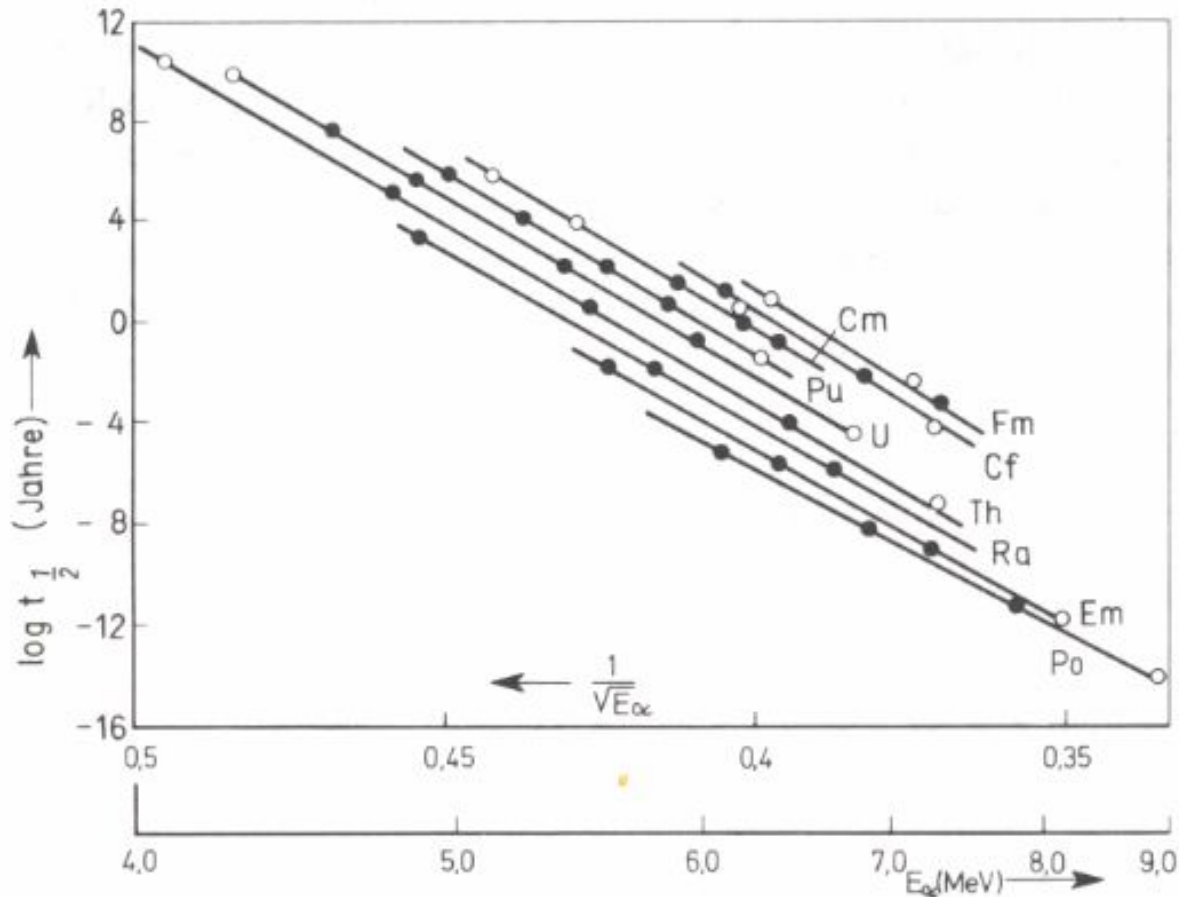
$$G \approx \pi \frac{z_T z_A e^2}{4\pi \hbar c} \sqrt{\frac{2mc^2}{E_\alpha}} = \pi z_T z_A \alpha \sqrt{\frac{2mc^2}{E_\alpha}} \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}$$

• Geiger-Nuttall-Regel (empirisch gefunden)

Aus $t_{1/2} \sim \frac{1}{\lambda}$, $\lambda \sim T$, $T \sim e^{-G}$, $G \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}} \Rightarrow$

$t_{1/2} \sim e^{\frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}}$

Erklärung
aus Gamow-
Modell



➤ Mitglieder einer
Zerfallskette auf
gleicher Geraden

→ Kernradius R ändert sich
systematisch innerhalb
Zerfallsreihe

3.5 Kernspaltung

• Spontane Spaltung: $A \rightarrow 2 \cdot \left(\frac{A}{2}\right), Z \rightarrow 2 \cdot \left(\frac{Z}{2}\right)$

$$\rightarrow Q = \left[M(A, Z) - 2 \cdot M\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) \right] c^2 \geq 0$$

Weizsäcker-Formel: $M(A, Z) = Z \cdot m_p + (A-Z) \cdot m_n - a_v A + a_o A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_A \frac{(A-2Z)^2}{A} \left(+ a_p \frac{\delta}{A^{1/2}} \right)$

ditto: $M\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) = \dots$

$$\Rightarrow Q = \dots = a_o A^{2/3} \cdot (1 - 2^{1/3}) + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2/3}}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_o = 17.23 \text{ MeV} \\ a_c = 0.71 \text{ MeV} \end{array} \right\} \Rightarrow Q = \left(-4.48 \cdot A^{2/3} + 0.263 \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3} \right) \text{ MeV} > 0$$

$$Z = \frac{A}{1.37 + 0.015 A^{2/3}} \Rightarrow Q \geq 0 \quad \text{für } A \geq 87.5$$

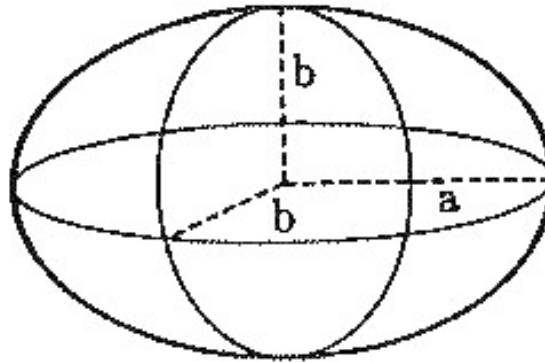
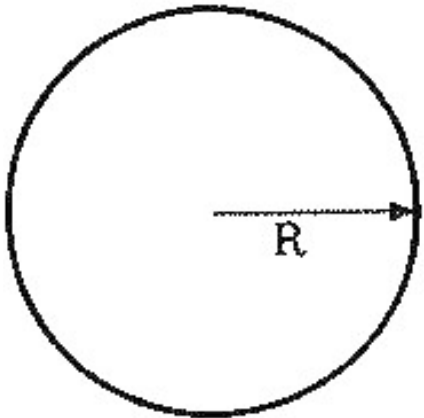
d.h. spontane Spaltung möglich, aber nicht notwendig

schematische Darstellung der Potentialverhältnisse bei Spaltung eines Kerns:

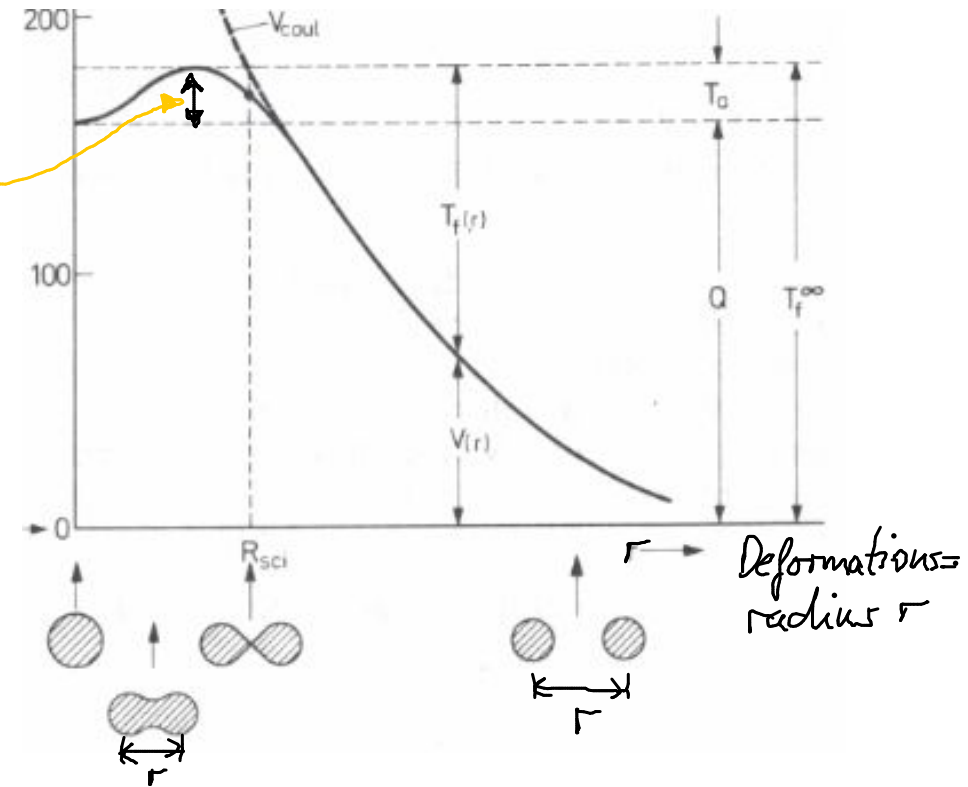
- induzierte Spaltung
- ▶ Spaltbarriere / Aktivierungsenergie ΔE_F

- ▶ Betrachte ellipsoidal deformierten Kern, d. h.

$$a = R \cdot (1 + \varepsilon) \quad , \quad b = \frac{R}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \approx R \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$



(entspricht elongiertem Kern)



(i) Oberfläche: $4\pi R^2 \rightarrow 4\pi R^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\epsilon^2 - \frac{52}{105}\epsilon^3 \dots\right)$
 \rightarrow Oberflächenenergie $E_0 = a_0 \cdot A^{2/3} \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\epsilon^2 + \dots\right)$

(ii) Coulombenergie: $E_c = a_c \cdot \frac{Z^2}{A^{1/2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\epsilon^2 + \dots\right)$
 $\Rightarrow \Delta E = (E_0 + E_c)|_{\epsilon} - (E_0 + E_c)|_0 = \frac{\epsilon^2}{5} \cdot \underbrace{\left(2a_0 A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}\right)}_{\leq 0} \leq 0$

Für $\Delta E \leq 0$ gewinnt man Energie durch Verformung

$$\Rightarrow 2a_0 A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \leq 0 \Rightarrow \left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{krit}} \geq \frac{2a_0}{a_c} \approx 46..51$$

Größere Werte aufgrund der "Abrundung" des Coulombpotentials am Kernrand

Gilt für Kerne mit $Z > 114$ und $A > 270$

Spaltparameter $x_5 := \frac{Z^2}{A} / \left(\frac{Z^2}{A} \right)_{\text{krit.}}$

☐ Kerne mit $x_5 > 1$ spalten spontan

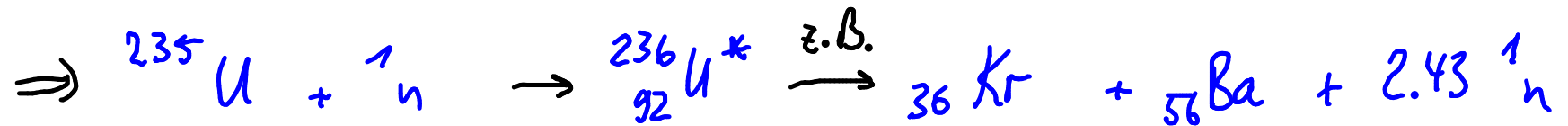
☐ Kerne mit $x_5 < 1$ haben Spaltbarriere ΔE_F

z.B. ${}_{92}^{235}\text{U}$: $x_5 = 0.7$, $\Delta E_F = 5.8 \text{ MeV}$

${}_{92}^{238}\text{U}$: $x_5 = 0.693$, $\Delta E_F = 6.3 \text{ MeV}$

$$Q_{238} = [M({}^{238}\text{U}) + m_n - M({}^{239}\text{U})]c^2 = 5.2 \text{ MeV} < \Delta E_F = 6.3 \text{ MeV}$$

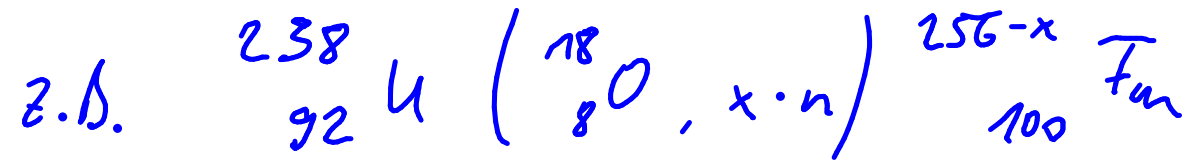
$$Q_{235} = [M({}^{235}\text{U}) + m_n - M({}^{236}\text{U})]c^2 = 6.1 \text{ MeV} > \Delta E_F = 5.8 \text{ MeV}$$



induzierte Spaltung von ${}^{235}\text{U}$ mit thermischen Neutronen: + Paarungsenergie
+ Asymmetrienergie
+ geringe Spaltbarriere

3.6 Kernfusion

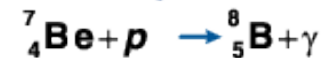
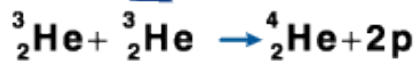
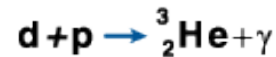
- Exotherm, d.h. $Q \geq 0$ für Kerne unterhalb von Eisen ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ weil B/A maximal wird bei Fe
- Transurane, d.h. Element mit $Z > 92$, aus Kern-Kern-Stöße



→ Suche nach "Stabilitätsinsel" bei $Z \geq 117$

- Beispiel Sonne:

Proton-Proton-Prozeß



Reaktionskette I

Reaktionskette II

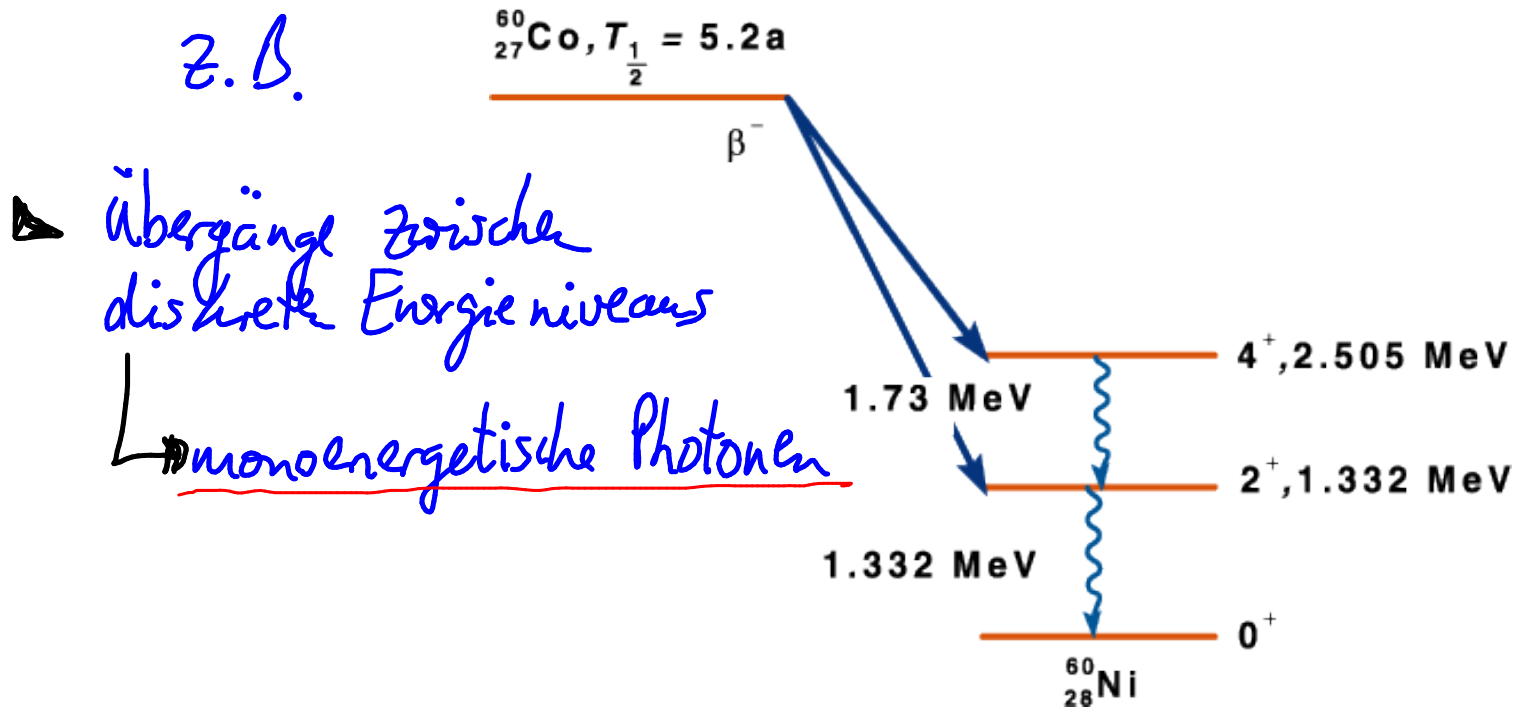
Reaktionskette III

in Fusionsreaktoren:
 $t + d \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0n$

3.7 γ -Strahlung

- Bei vielen spontanen / induzierte Kernumwandlungen entsteht ein Tochterkern in angeregtem Zustand
 \hookrightarrow Übergang in Grundzustand durch γ -Abstrahlung

z.B.



▶ Nicht alle energetische möglichen Übergänge sind durch Quantenzahl erlaubt (Drehimpuls, Parität)
 → Auswahlregeln!

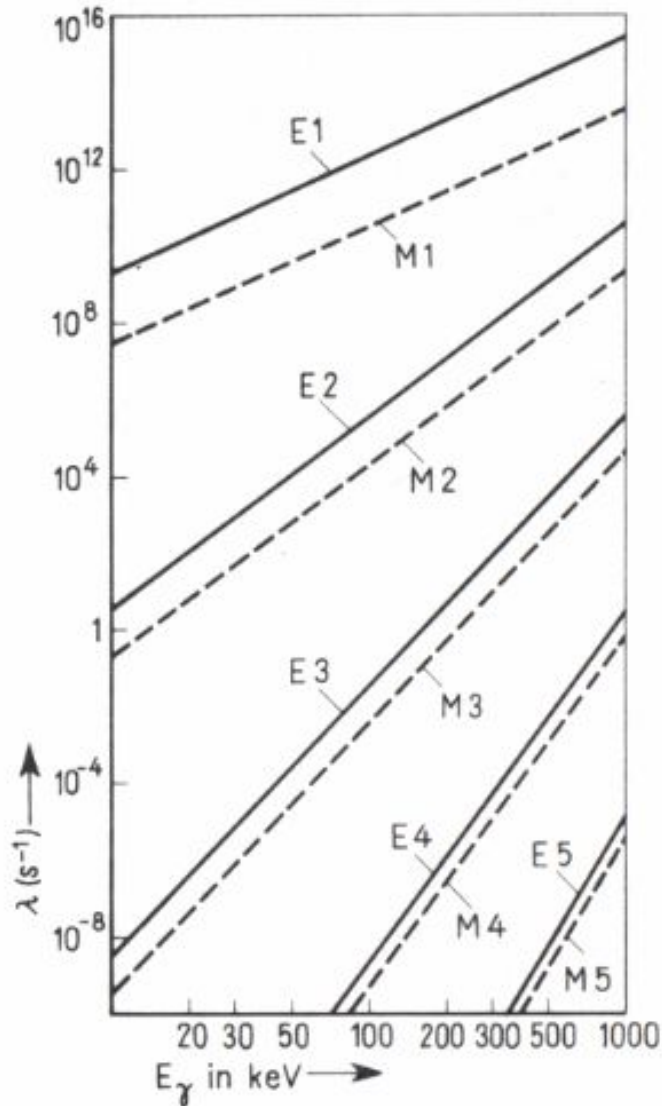
▣ Parität $P = \pm 1$: $P \psi(\vec{r}, t) := \psi(-\vec{r}, t) = \pm 1 \cdot \psi(\vec{r}, t)$
 z.B.: $P A^M(\vec{r}, t) = A^M(-\vec{r}, t) = -1 \cdot A^M(\vec{r}, t)$
 → Photon hat intrinsische Parität -1

▣ Drehimpuls \vec{J} : $|\vec{J}_a - \vec{J}_e| \leq J \leq |\vec{J}_a + \vec{J}_e|$
 J klassifiziert Moden des elektromagnet Strahlungsfelds

Multipolmoden

→ γ -Quant hat bezügl. Kern Drehimpuls
 \vec{J} mit $|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}$

$J = 1, 2, 3, \dots \cong$ Dipol-, Quadrupol-, Sextupol... Strahlung



- Multipolmoden - Bezeichnung
 E_1, E_2, E_3, \dots für $J=1, 2, 3, \dots$ und Paritätsänderung
 M_1, M_2, M_3, \dots für $J=1, 2, 3, \dots$ und keine -u-

- Modenstärke:

M_J schwächer als $E_J \rightarrow$

$$\frac{\tau_{M_J}}{\tau_{E_J}} \approx 4.5 \cdot A^{2/3}$$

und für festes J :

$$\tau_{M_J}, \tau_{E_J} \sim \frac{1}{E_\gamma^{2J+1}}$$

- Falls Zerfall nur als
hoher E- bzw. M-Mode möglich ist
 \rightarrow lange Lebensdauer
 so gen. Kernisomere, Kernisomerie

4. Teilchen-Materie-Wechselwirkung

Dosimetrie:

▶ Aktivität: $1 \text{ Becquerel} = 1 \text{ Bq} = 1 \frac{\text{Zerfall}}{\text{s}}$

▶ Energiedosis D: $D = \frac{dW_D}{\rho dV}$

W_D : im Material absorbierte Energie
 ρ : Dichte

$$1 \text{ Gray} = 1 \text{ Gy} = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 6.24 \cdot 10^{12} \frac{\text{MeV}}{\text{kg}}$$

($1 \text{ rad} = 1 \text{ rd} \cong 0.01 \text{ Gy}$) radiation absorbed dose

▶ Äquivalent-Dosis D_w : $D_w = w_R \cdot D$

$$1 \text{ Sievert} = 1 \text{ Sv} = w_R \cdot 1 \text{ Gy}$$

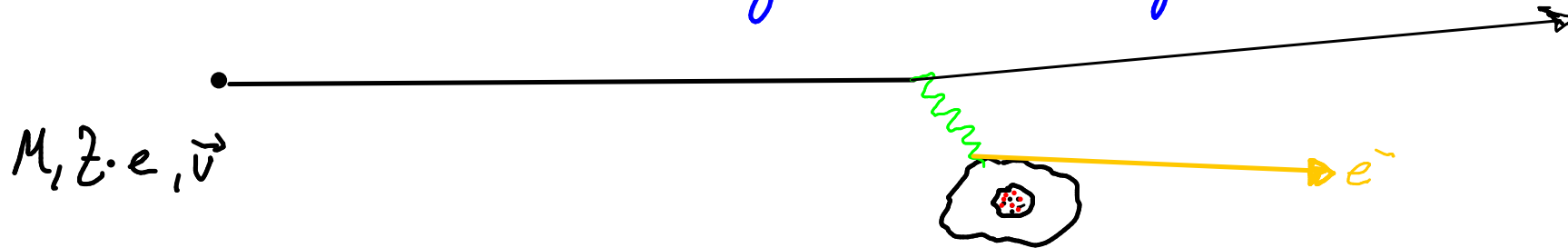
($1 \text{ rem} \cong 0.01 \text{ Sv}$)

roentgen equivalent man

Strahlungsart	Röntgen, Gamma, Elektronen, Myonen	Neutronen				d_1 Spalt- fragmente	
	< 10	10-100 keV	0.1-2 MeV	2-20 MeV	> 20 MeV		
<u>empirische Gewichtungsfaktor w_R</u>	1	5	10	20	10	5	20

4.1 Wechselwirkung: (schwere) geladene Teilchen – Materie

- Arten der Wechselwirkung: elektromagnet. \rightarrow Photonen austausch



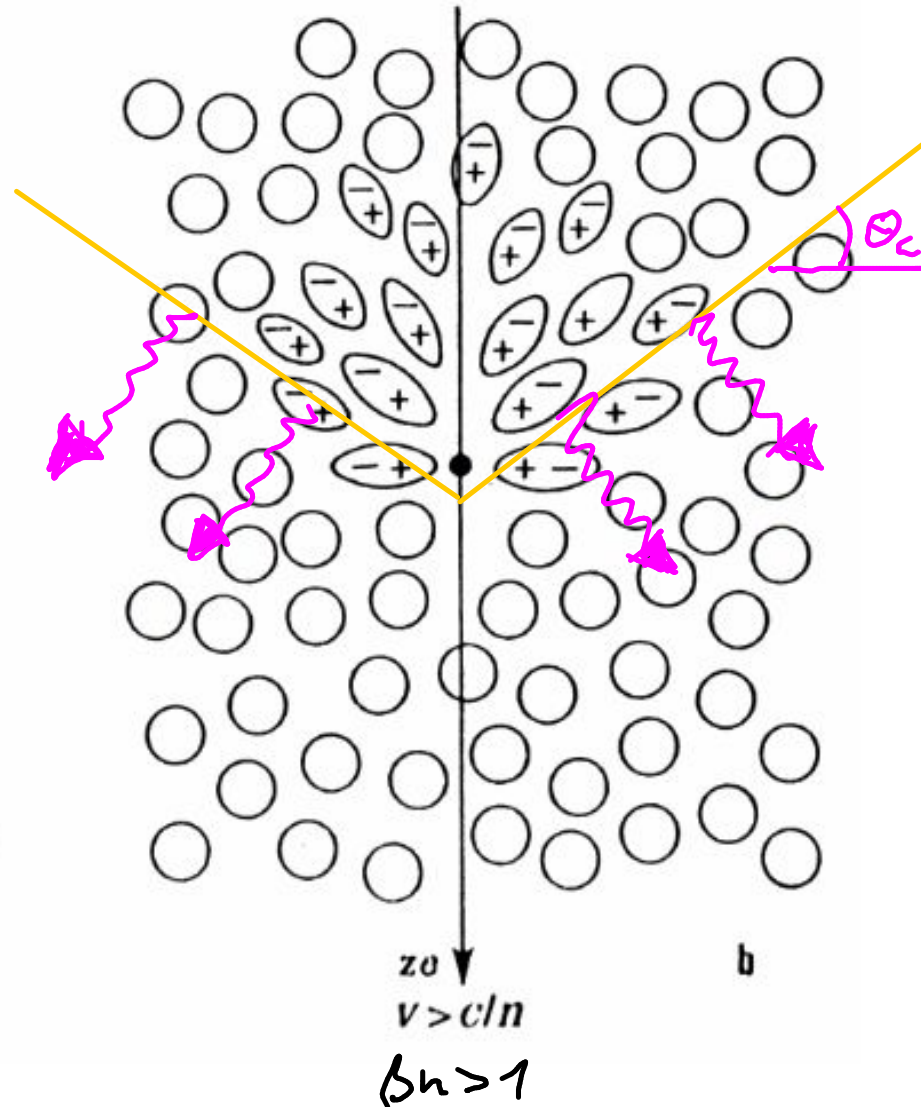
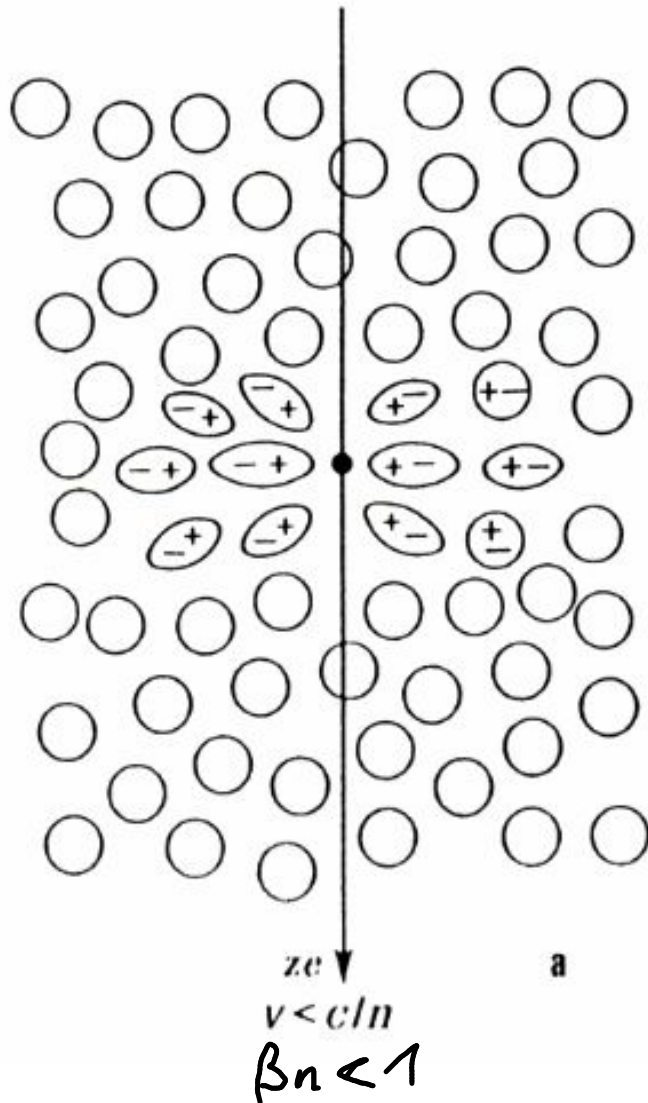
- ▶ elastischer Stoß mit Atom
- ▶ Anregung des Atoms
- ▶ Ionisation des Atoms

$$\sigma \approx 10^{-16} \text{ cm}^2$$

$$\sigma \approx 10^{-17} \text{ cm}^2$$

- ▶ Polarisation des Mediums
- ▶ Ablenkung im Coulombfeld des Kerns \rightarrow Bremsstrahlung
- ▶ weitere (Übergangsstrahlung, elast. & inelast. Kernstöße)

➤ Polarisation des Mediums → Čerenkov - Strahlung, falls $|\vec{v}| > \frac{c}{n}$



$$\cos \theta_c = \frac{n \cdot c}{v} = \frac{1}{\beta_n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos \theta_c = \frac{1}{\beta_n}}$$

falls $\beta_n \geq 1$

Energieverlust des Teilchens beim Durchqueren von Materie

- ▶ max. kinetische Energie T_{\max} von Hüllenelektron nach Stoß mit Teilchen der Masse M , Geschwindigkeit β

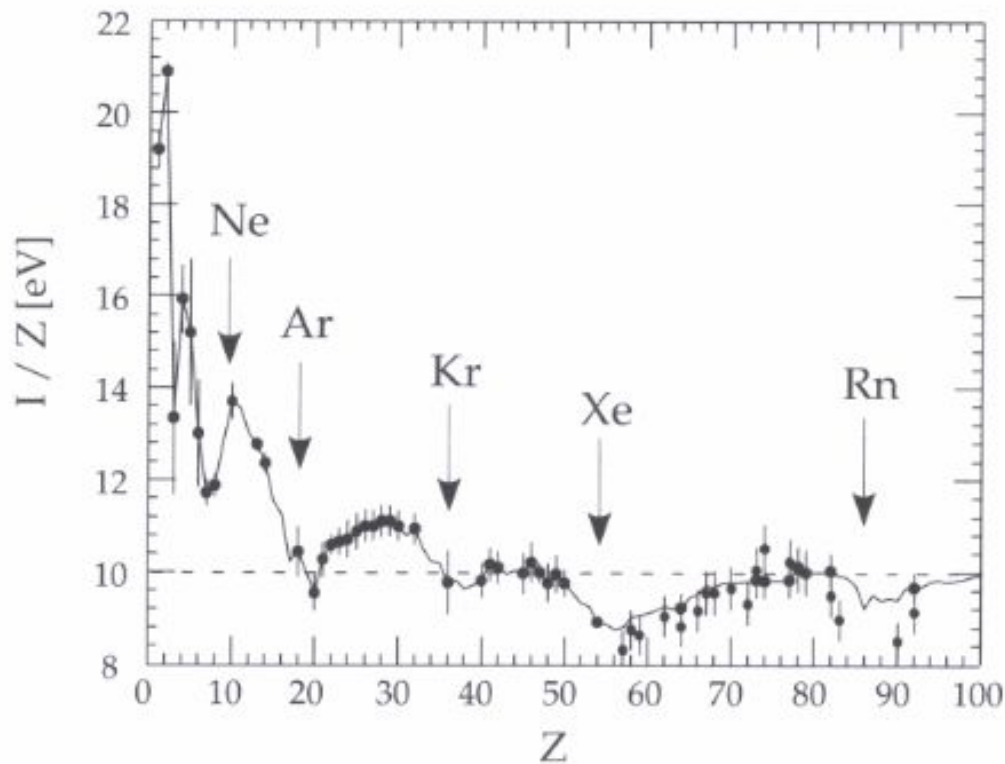
$$T_{\max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma \frac{m_e}{M} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2}$$

$$M \gg \gamma m_e \approx$$

$$2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$$

- ▶ Mindestenergie für Ionisation: mittleres effektives

Ionisationspotential I
pro Hüllenelektron



Für $Z > 15$ ist

$$I \approx Z \cdot 10 \text{ eV}$$

$$\left(\frac{I}{Z} \approx \left(12 + \frac{Z}{Z} \right) \text{ eV für } Z < 13 \right)$$

➤ mittlerer Energieverlust folgt aus differentiellem Stabquerschnitt $\frac{d\sigma}{dE}$

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \sim - \int_I^{T_{\max}} E \frac{d\sigma}{dE} dE$$

⇒ Bethe-Bloch-Formel

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = K \cdot z^2 \cdot \rho \frac{Z}{A} \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right]$$

$$K = \frac{4\pi N_A \cdot d^2 (hc)^2}{m_e c^2}$$

$$\left(\frac{K}{A} \approx 0.307 \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}} \text{ für } A = 1 \frac{\text{mol}}{\text{g}} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Teilchenladung} \\ \text{Dichte} \end{array} \right\}$$

$\beta = \frac{v}{c}$ Teilchengeschwindigkeit
 Z : Kernladung
 A : Atomgewicht

$\delta \sim \log_{10}(\beta\gamma)$
 Dichtekorrektur

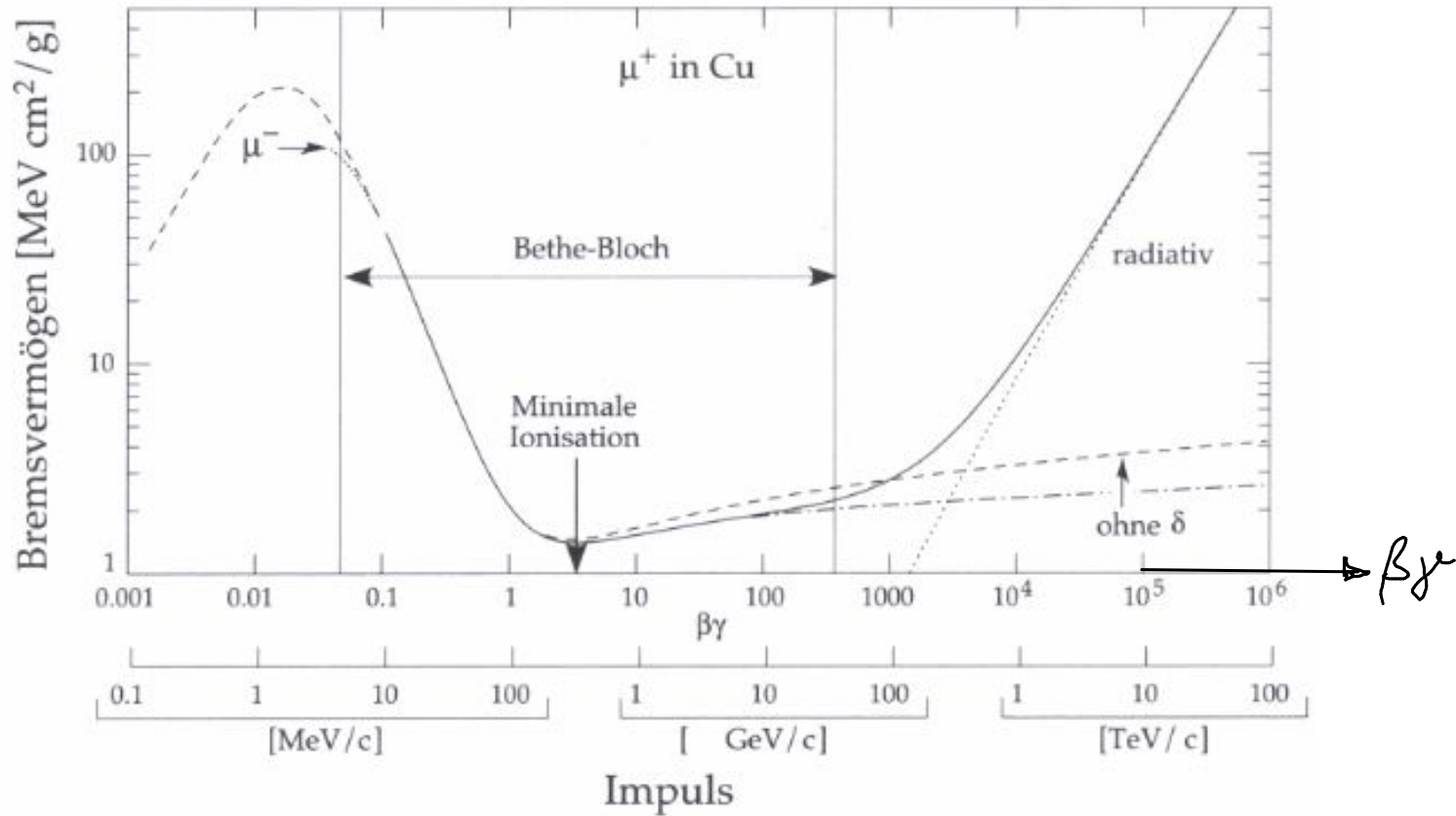
$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \sim \frac{1}{\beta^2} : \beta = 0.1 \dots 0.9, \beta\gamma = 0.1 \dots 2 \quad ; \quad \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \approx \text{const} : \beta\gamma = 500 \dots 1000$$

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \sim \ln \beta^2 \gamma^2 : \beta\gamma = 5 \dots 100 \quad ; \quad \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \rightarrow \text{Plateau} \sim \ln \frac{1}{\beta} \quad \leftarrow \text{Dichte}$$

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \rightarrow \text{minimal} : \beta\gamma \approx 4$$

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle := \left\langle \frac{dE}{\rho dx} \right\rangle$$

übliche Einheit
 $\frac{\text{MeV} \cdot \text{cm}^2}{\text{g}}$



$$\text{NB: } \beta\gamma = \frac{p}{mc} \sim \frac{1}{M}$$

⇒ Bethe-Bloch-Kurve verschiebt sich horizontal für Teilchen unterschiedlicher Masse

4. Teilchen-Materie-Wechselwirkung

Dosimetrie:

▶ Aktivität: $1 \text{ Becquerel} = 1 \text{ Bq} = 1 \frac{\text{Zerfall}}{\text{s}}$

▶ Energiedosis D: $D = \frac{dW_D}{\rho dV}$

W_D : im Material absorbierte Energie

ρ : Dichte

$$1 \text{ Gray} = 1 \text{ Gy} = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 6.24 \cdot 10^{12} \frac{\text{MeV}}{\text{kg}}$$

($1 \text{ rad} = 1 \text{ rd} \cong 0.01 \text{ Gy}$) radiation absorbed dose

▶ Äquivalent-Dosis D_w : $D_w = w_R \cdot D$

$$1 \text{ Sievert} = 1 \text{ Sv} = w_R \cdot 1 \text{ Gy}$$

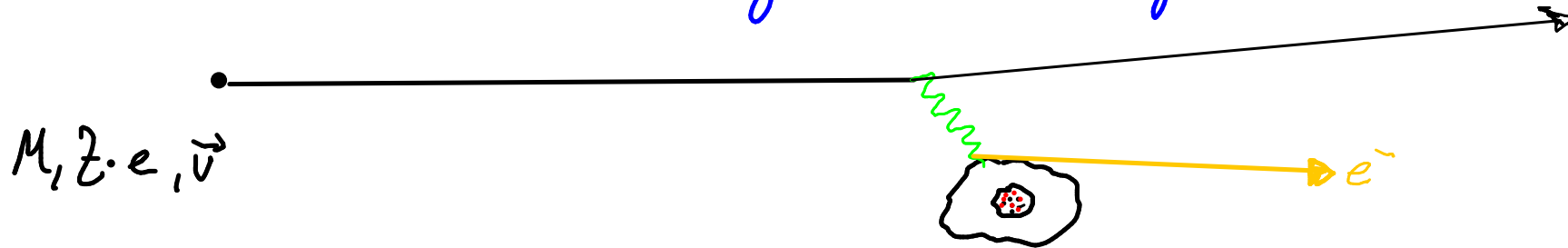
($1 \text{ rem} \cong 0.01 \text{ Sv}$)

roentgen equivalent man

Strahlungsart	Röntgen, Gamma, Elektronen, Myonen	Neutronen				d_1 Spalt- fragmente	
	< 10	10-100 keV	0.1-2 MeV	2-20 MeV	> 20 MeV		
<u>empirische Gewichtungsfaktor w_R</u>	1	5	10	20	10	5	20

4.1 Wechselwirkung: (schwere) geladene Teilchen - Materie

- Arten der Wechselwirkung: elektromagnet. \rightarrow Photonen austausch



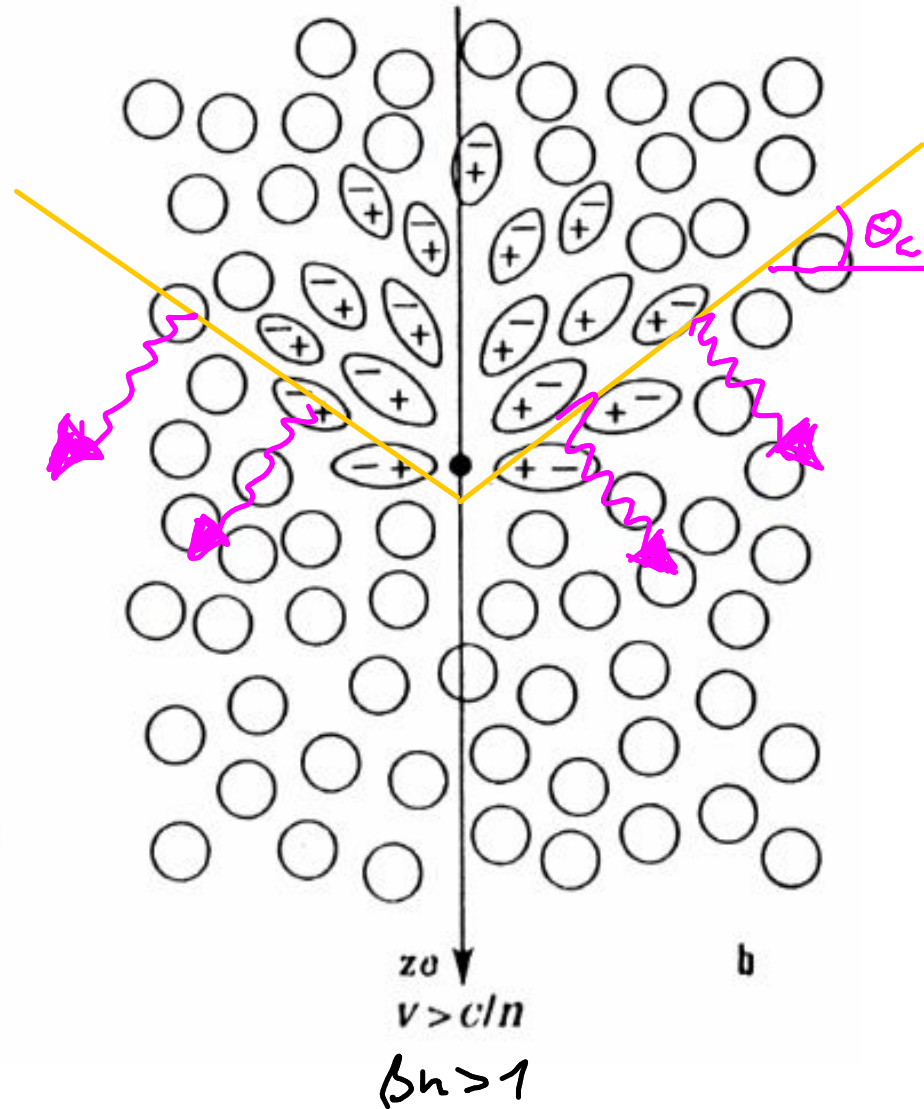
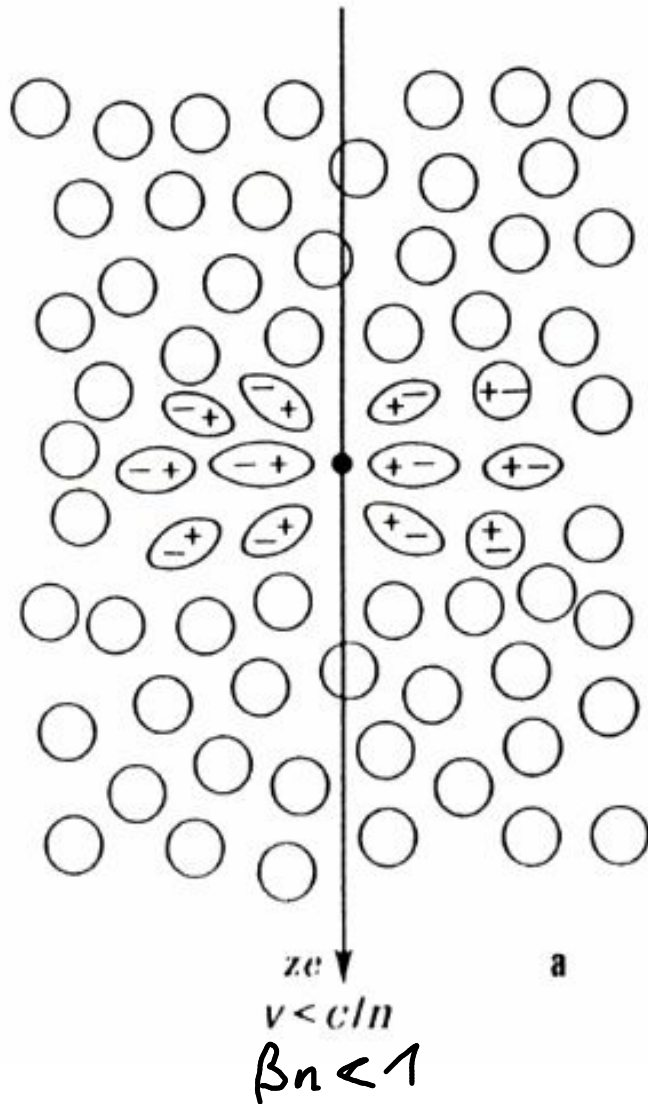
- ▶ elastischer Stoß mit Atom
- ▶ Anregung des Atoms
- ▶ Ionisation des Atoms

$$\sigma \approx 10^{-16} \text{ cm}^2$$

$$\sigma \approx 10^{-17} \text{ cm}^2$$

- ▶ Polarisation des Mediums
- ▶ Ablenkung im Coulombfeld des Kerns \rightarrow Bremsstrahlung
- ▶ weitere (Übergangsstrahlung, elast. & inelast. Kernstöße)

➤ Polarisation des Mediums → Čerenkov - Strahlung, falls $|\vec{v}| > \frac{c}{n}$



$$\cos \theta_c = \frac{n \cdot c}{v \cdot n} = \frac{1}{\beta_n}$$

↳ $\cos \theta_c = \frac{1}{\beta_n}$

falls $\beta_n \geq 1$

Energieverlust des Teilchens beim Durchqueren von Materie

- ▶ max. kinetische Energie T_{\max} von Hüllenelektron nach Stoß mit Teilchen der Masse M , Geschwindigkeit β

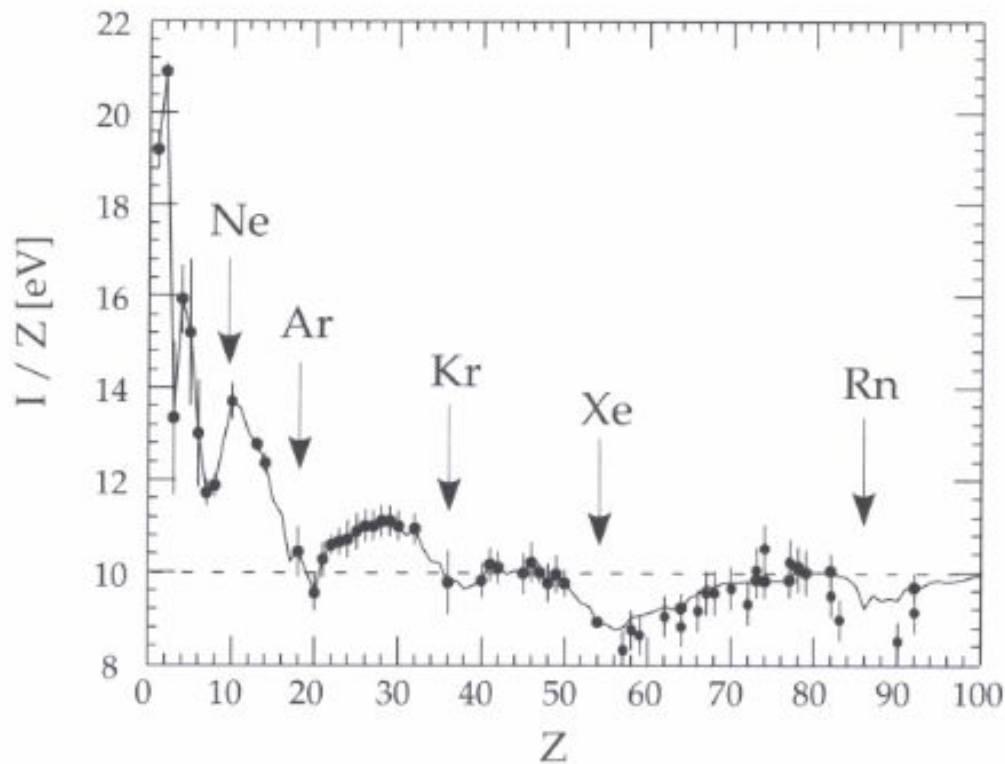
$$T_{\max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma \frac{m_e}{M} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2}$$

$$M \gg \gamma m_e \approx$$

$$2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$$

- ▶ Mindestenergie für Ionisation: mittleres effektives

Ionisationspotential I
pro Hüllenelektron



Für $Z > 15$ ist

$$I \approx Z \cdot 10 \text{ eV}$$

$$\left(\frac{I}{Z} \approx \left(12 + \frac{Z}{Z} \right) \text{ eV für } Z < 13 \right)$$

➤ mittlerer Energieverlust folgt aus differentiellem Stabquerschnitt $\frac{d\sigma}{dE}$

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \sim - \int_I^{T_{\max}} E \frac{d\sigma}{dE} dE$$

⇒ Bethe-Block-Formel

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = K \cdot z^2 \cdot \rho \frac{Z}{A} \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right]$$

$$K = \frac{4\pi N_A \cdot d^2 (hc)^2}{m_e c^2}$$

$$\left(\frac{K}{A} \approx 0.307 \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}} \text{ für } A = 1 \frac{\text{mol}}{\text{g}} \right) \quad \text{Dichte}$$

Teilchenladung

z : Kernladung
 A : Atomgewicht

$\beta = \frac{v}{c}$ Teilchengeschwindigkeit

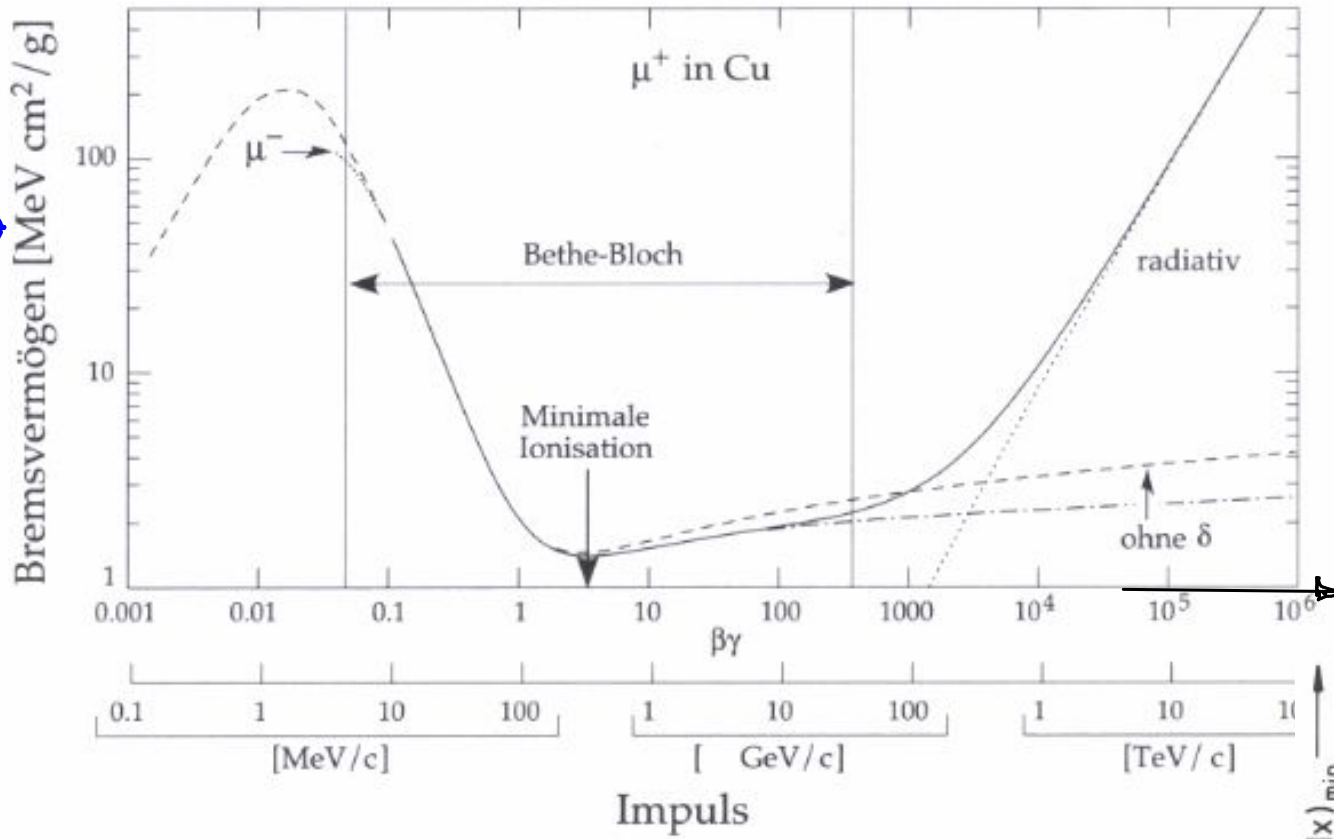
$\delta \sim \log_{10}(\beta\gamma)$
Dichtekorrektur

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \sim \frac{1}{\beta^2} : \beta = 0.1 \dots 0.9, \beta\gamma = 2.1 \dots 2 \quad ; \quad \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \approx \text{const} : \beta\gamma = 500 \dots 1000$$

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \sim \ln \beta^2 \gamma^2 : \beta\gamma = 5 \dots 100 \quad ; \quad \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \rightarrow \text{Plateau} \sim \ln \frac{1}{\beta} \quad \text{Dichte}$$

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \rightarrow \text{minimal} : \beta\gamma \approx 4$$

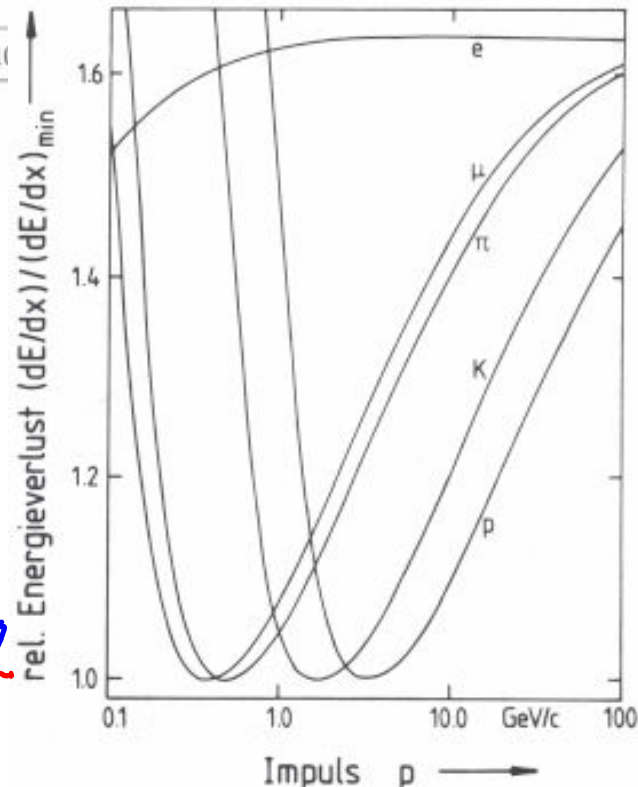
$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle := \left\langle \frac{dE}{\rho dx} \right\rangle$
 übliche Einheit
 $\frac{\text{MeV} \cdot \text{cm}^2}{\text{g}}$



NB: $\beta\gamma = \frac{p}{Mc} \sim \frac{1}{M}$

⇒ Bethe-Bloch-Kurve verschiebt sich horizontal für Teilchen unterschiedlicher Masse

⇒ Unterscheidung von Teilchensorten durch $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle$ -Messung möglich

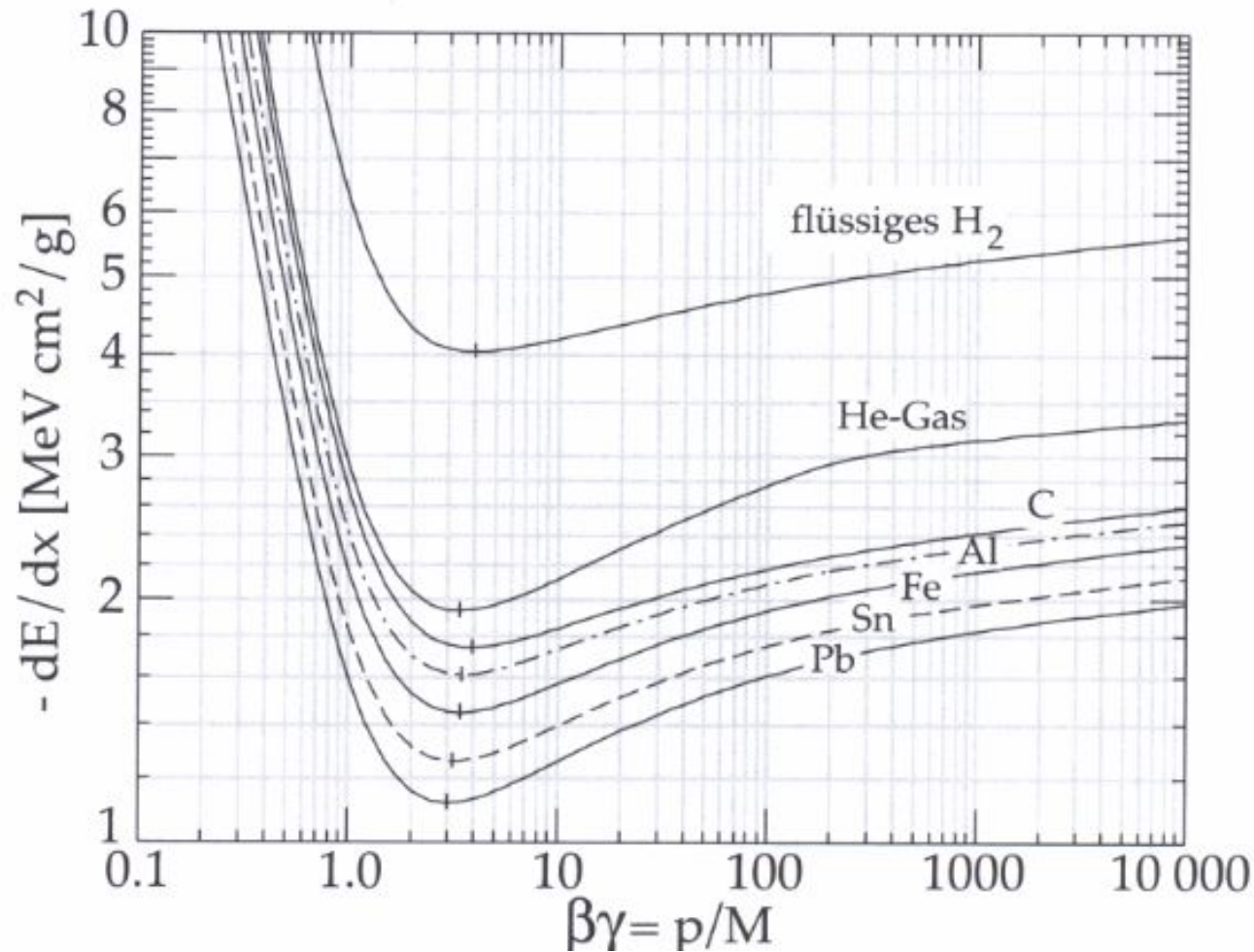


▶ Bremsvermögen (engl.: stopping power)

$$\left\langle \frac{dE}{dX} \right\rangle := \left\langle \frac{dE}{S dx} \right\rangle$$

ist für fast alle Medien und β ungefähr konstant

$$\left\langle \frac{dE}{dX} \right\rangle \approx 2 \frac{\text{MeV} \cdot \text{cm}^2}{g}$$



} typ. $1-3 \frac{\text{MeV} \cdot \text{cm}^2}{g}$

im relativistischen Bereich

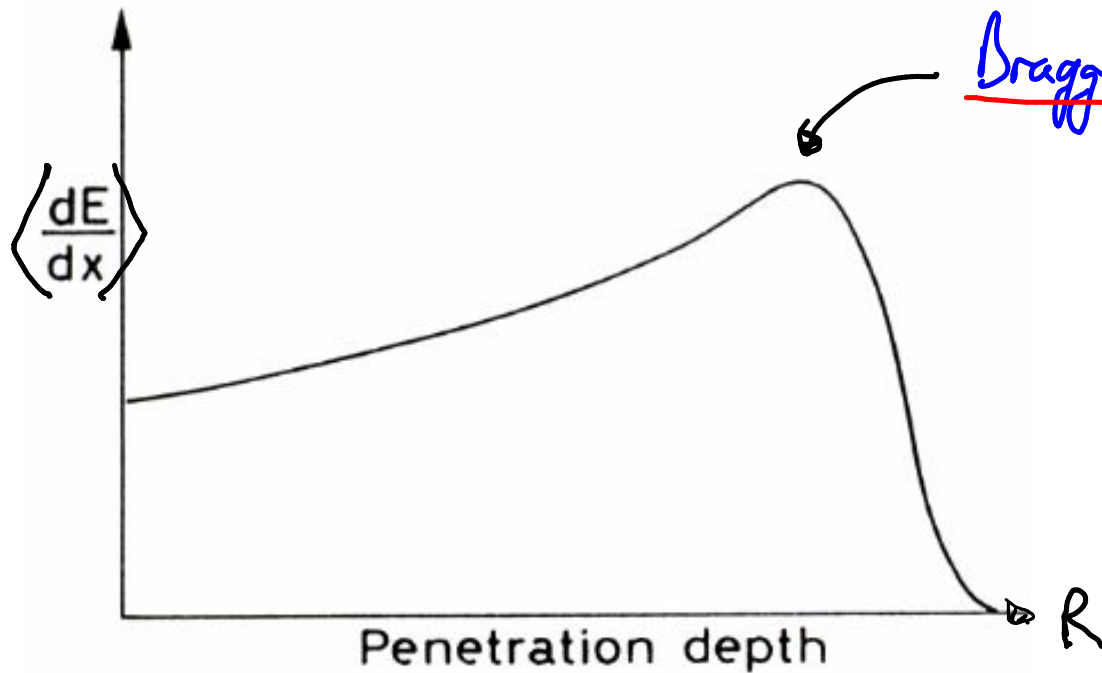
• Reichweite & Bragg-peak

Reichweite $R(T_0) = \int_0^R dx = \int_0^{T_0} \frac{1}{\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle} dE$

mit $T_0 = \frac{p^2}{m(\gamma+1)}$ relativistischer kinetischer Energie

mit $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \sim \frac{1}{\beta^2} \sim \frac{1}{T} \rightarrow R \sim \int_0^{T_0} T dT \sim T_0^2$, *genauer aus Daten*

$$R \sim T^{1.75}$$

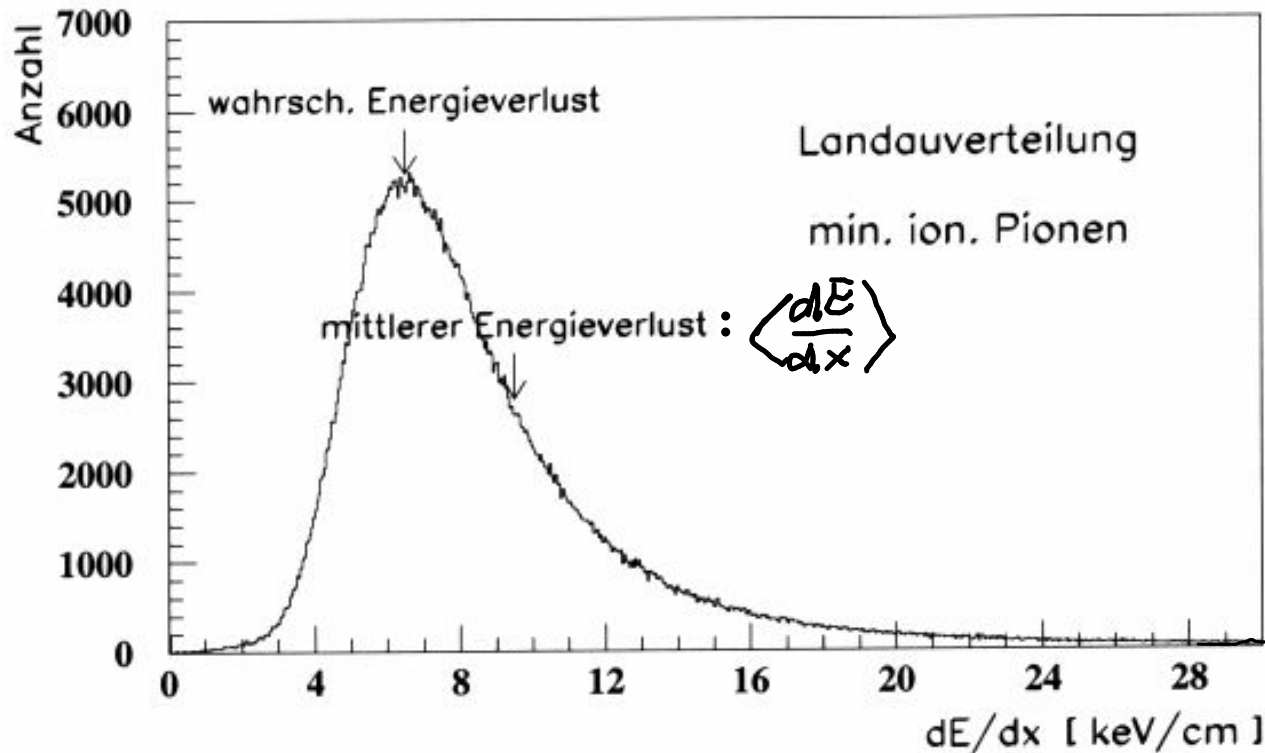


da $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \sim \frac{1}{\beta^2}$ steigt für abnehmendes β^2

• Landau-Verteilung

Bethe-Bloch-Formel beschreibt nur mittleren Energieverlust $\langle \frac{dE}{dx} \rangle$

momentaner Energieverlust fluktuiert um Mittelwert: Landau-Verteilung



Ausläufer bis T_{max}
 $\hookrightarrow \delta$ -Elektronen
 (können selbst wieder
 ionisieren)

4.2 Energieverlust von Elektronen/Positronen

Ionisation im Prinzip wie Bethe-Bloch-Formel mit Korrekturen durch

- ▶ Masse der Stoßpartner gleich groß
- ▶ Ununterscheidbarkeit zwischen Stoßpartner bei Elektronen
- ▶ Annihilationsprozess bei Positronen: $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$

zusätzlich:

▶ Bremsstrahlungsprozesse

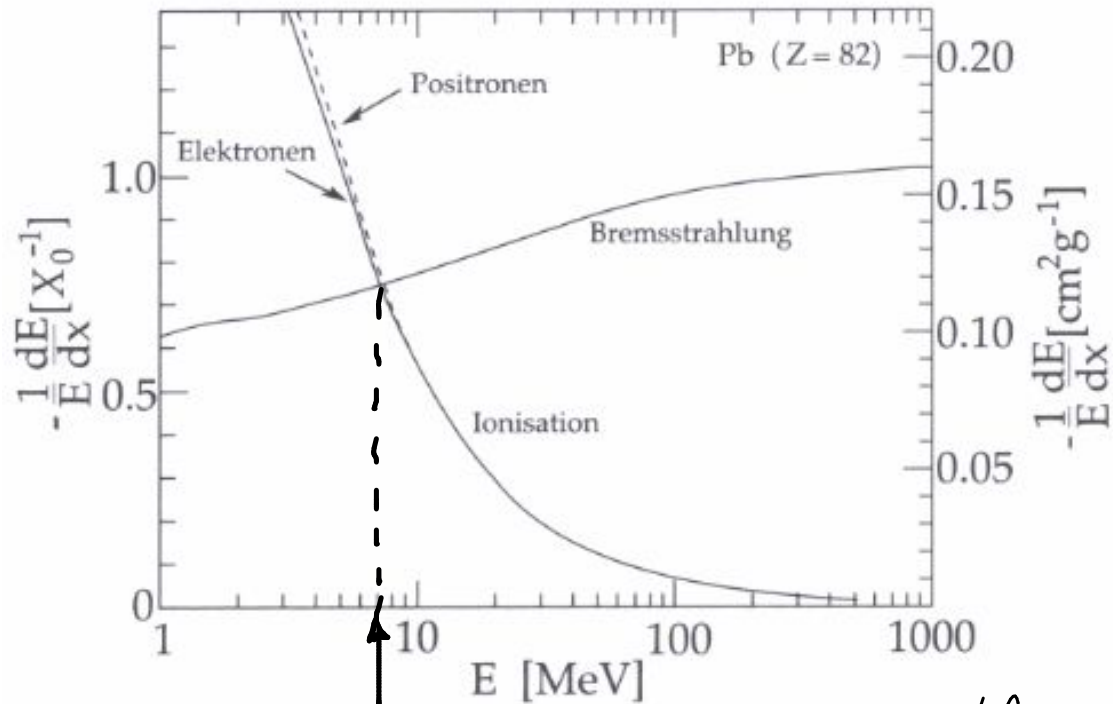


$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_B = \frac{\bar{E}}{X_0}$$

▶ mit Strahlungslänge

$$X_0 = \left(\frac{4\alpha^2 (\hbar c)^2}{m_e^2 c^4} \cdot \int \frac{N_A}{A} \cdot Z^2 \cdot \ln \frac{183}{Z^{1/3}} \right)^{-1}$$

➤ Bremsstrahlung vs. Ionisation



E_c : kritische Energie (Bremsstrahlung = Ionisation), $E_c \approx \frac{600-700 \text{ MeV}}{Z+1}$

➤ Bedeutung der Strahlungslänge: $-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{X_0}$

$$\Rightarrow E(x) = E_0 \cdot e^{-x/X_0}$$

Teilchenenergie nimmt
exponentiell ab
(bis $E = E_c$)

Beispiele für Strahlungslänge

Luft $X_0 = 30050 \text{ cm}$

H_2O 36.1 cm

Alu ($Z=13$) 8.9 cm

Eisen ($Z=26$) 1.79 cm

Blei ($Z=82$) 0.56 cm

NB: $X_0 \sim 1/Z^2$

4.3 Photon - Materie - Wechselwirkung

Bei Photonen (im Unterschied zu geladenen Teilchen: $E(x) = E_0 \cdot e^{-x/\lambda_0}$)

Intensität

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu x}$$

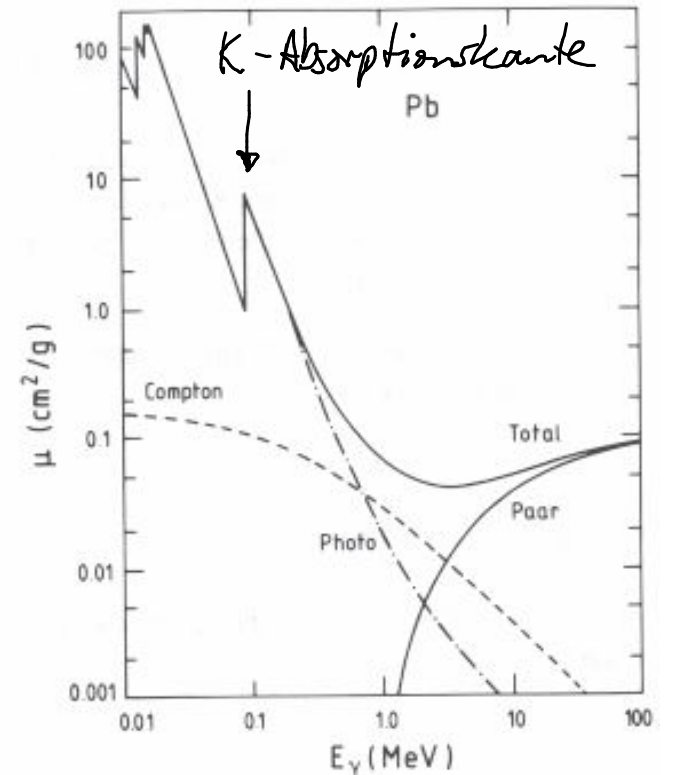
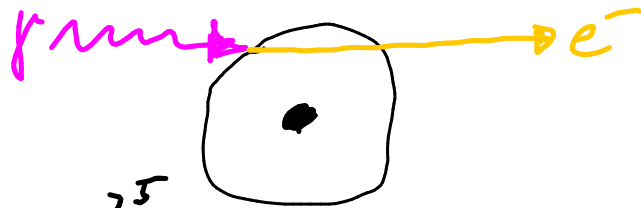
Massenabsorptionskoeffizient $\mu = \sigma \cdot \rho \frac{NA}{A}$ (bzw. $\mu = \sigma \cdot \frac{NA}{A}$)

Photon - Absorptionswirkungsquerschnitt σ

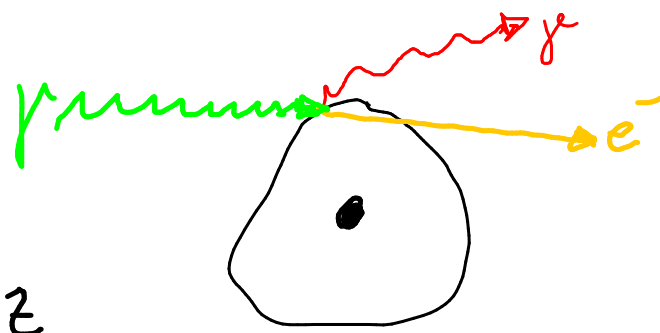
▷ Photoeffekt

$$\sigma_{ph} \sim \frac{z^5}{E_\gamma^{7/2}} \rightarrow \frac{z^5}{E_\gamma}$$

$E_K < m_e c^2$ $E_K > m_e c^2$



Comptoneffekt



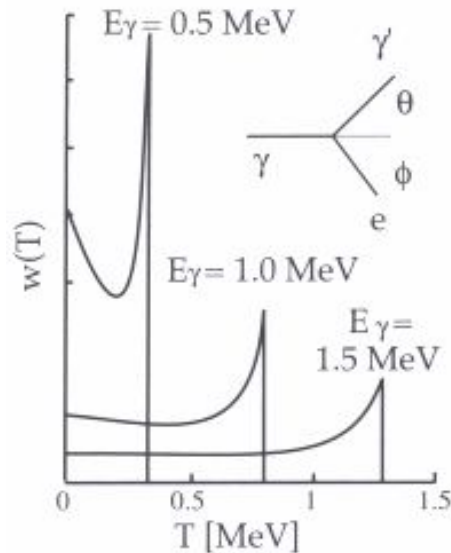
$$\sigma_c \sim Z \cdot E_\gamma \rightarrow \frac{Z}{E_\gamma}$$

$$E_\gamma < m_e c^2 \quad E_\gamma > m_e c^2$$

Comptonkante:

Rückwärtsstreuung des Photons \rightarrow max. e^- -Energie

Wahrscheinlichkeit $w(T)$ für e^- mit kinet. Energie T



$\Rightarrow E_\gamma$ -Bestimmung aus Messung der Position der Comptonkante

Paarbildung

$$\sigma_p \sim Z^2 \approx \text{const}(\bar{E}_\gamma)$$

$$\rightarrow \mu_p = \sigma_p \cdot \rho \frac{NA}{A} \approx \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{X_0} \quad (\text{vgl. Bremsstrahlung: gleicher phys. Prozess!})$$

$$\rightarrow \text{Paarbildungswahrscheinlichkeit} \quad \left(P_p(x) = \frac{I_0 - I(x)}{I_0} \right)$$

$$P_p(x = X_0) = 1 - \exp\left[-\frac{7}{9}\right] \approx 54\%$$



5 Detektoren

- Elementare Beobachtungsgrößen für Teilchen (→ Aufgaben für Detektoren)
 - ▶ Anzahl der Teilchen (→ Fluss, Aktivität, ...)
 - ▶ Zeitpunkt des Teilchendurchgangs (→ Lebensdauer, Geschwindigkeit, ...)
 - ▶ Ort des ————— " ————— (→ Bahnkurve [Trajektorie])
- Physikalische bedeutsame Größen von Teilchen
 - ▶ Impuls \vec{p}
 - z. B. aus Krümmungsradius R im Magnetfeld \vec{B}

$|\vec{p}| = q \cdot B \cdot R$

 in praktischen Einheiten
 $p [\text{GeV}/c] = 0.3 \cdot B [\text{T}] \cdot R [\text{m}]$
 - ▶ Energie E
 - z. B. durch Totalabsorption in Materie: Kalorimeter
 - ▶ Identität
 - z. B. aus $\langle \frac{dE}{dx} \rangle$ und \vec{p} ; ...; aus E, \vec{p} : $m^2 = E^2 - \vec{p}^2$

• Registrierbare Signale von Teilchen

▶ Ionisation → Messung der Ionisationsladung

▶ Anregung → Szintillationslicht: Fluoreszenz & Phosphoreszenz
 (schnell, da niedriger Multipol) (langsam, da höherer Multipol)

▶ Čerenkov-Licht → Licht, v.a. im blauen/UV-Spektralbereich

▶ ...

5.1 Gasgefüllte Detektoren

- Vorüberlegung: Größe der Ionisationsladung.

$$\left\langle \frac{dE}{\rho dx} \right\rangle \approx 2 \frac{\text{MeV} \cdot \text{cm}^2}{\text{g}} \xrightarrow[\rho_L = 1.2 \text{ g/l}]{\text{Luft}} \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{Luft}} = 2 \text{ keV/cm}$$

mittlere Energie für e^- -Ion-Erzeugung in Gasen: $E_{\text{Ion}} \approx 30 \text{ eV}$

$$\Rightarrow \text{Ionisationsladung/cm: } \frac{dQ_{\text{Ion}}}{dx} \approx \frac{\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{Luft}}}{E_{\text{Ion}}} \approx \frac{2 \text{ keV/cm}}{30 \text{ eV}} \approx 70 \frac{e^- \text{-Ion}}{\text{cm}}$$

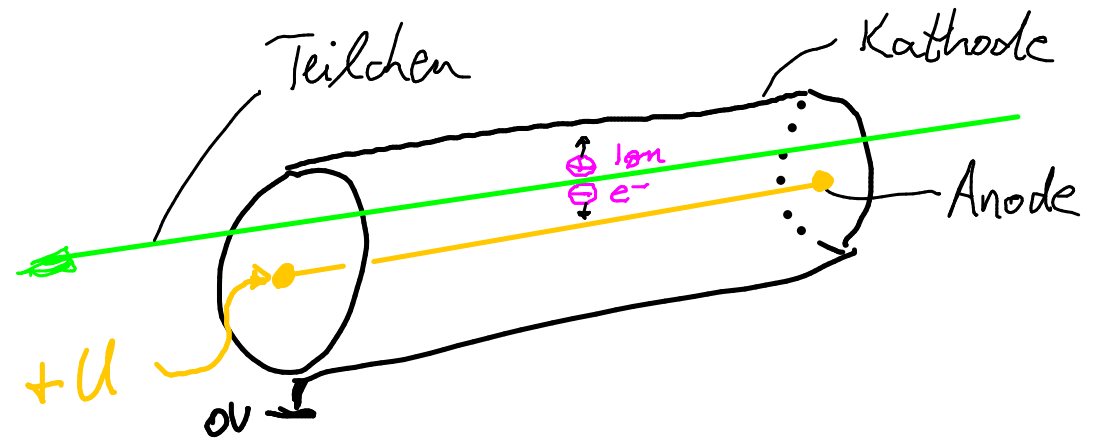
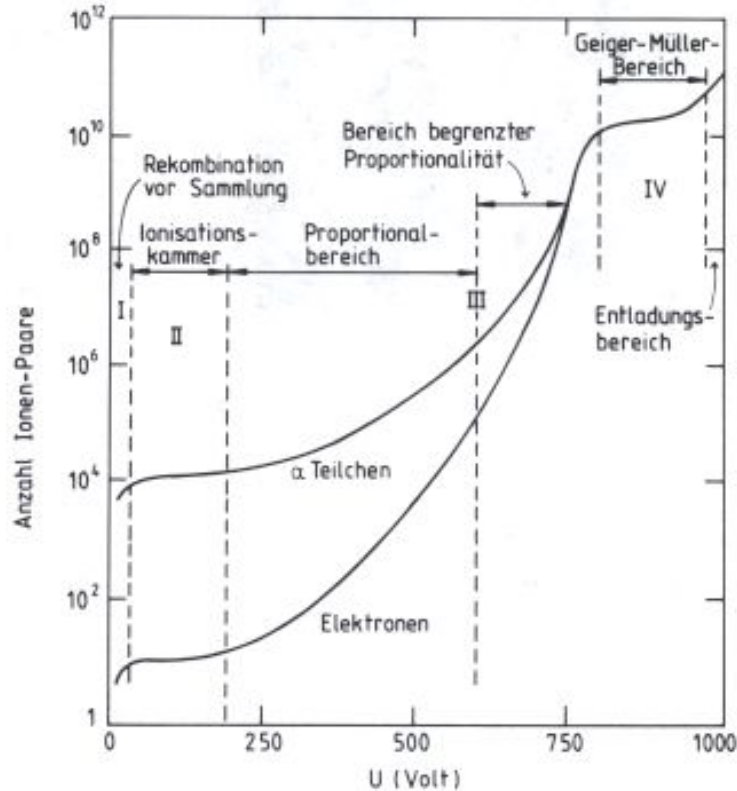
entspricht:

$$\frac{dQ_{\text{Ion}}}{dx} \approx 0.011 \frac{\mu\text{C}}{\text{cm}}$$

für Gase unter
Normaldruck
und Temperatur

\Rightarrow i.a. erhebliche Signalverstärkung notwendig!
(falls Teilchenfluss gering)

Detektorprinzip (Geiger-Müller-Prinzip)



▷ Ionisationskammer (ohne Signalverstärkung)

▷ Proportionalzähler

→ Messsignal proportional zu ursprünglicher Ionisation ($\sim dE/dx$ -Messung)

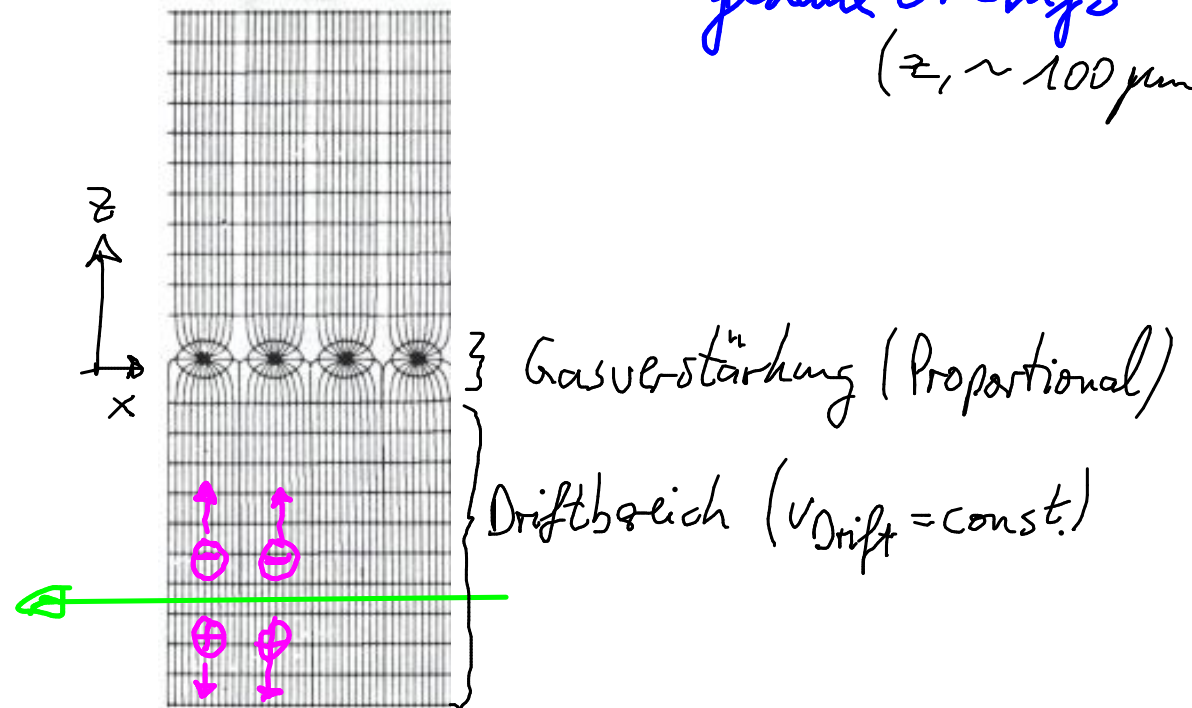
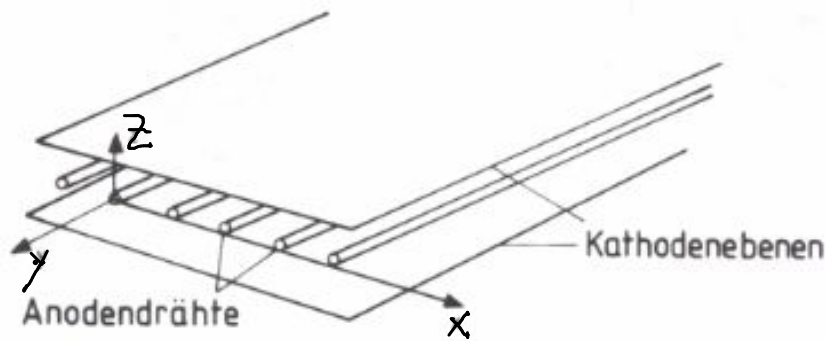
Signalverstärkung durch hohe \vec{E} -Feldstärke nah am dünnen Anodendraht

→ Gasverstärkung: e^- gewinnen im \vec{E} -Feld genügend Energie für weitere Ionisation

▷ Auslösbereich (Geiger-Müller)
Messsignal unabhängig von Ionisation

5.1.1 Orts- & Impulsmessung mit Gasdetektoren

- Konzept:
 - ▶ Viele benachbarte Anodendrähte \rightarrow grobe Ortsinfo ($x, \sim \text{cm}$)
 - ▶ Messung der Zeitdauer Δt der Ladungsbewegung (Drift) vom Teilchendurchgangsort bis Anodendraht \rightarrow Weg $\Delta z = v_{\text{Drift}} \cdot \Delta t$ genaue Ortsinfo ($z, \sim 100 \mu\text{m}$)



- Realisierung: Vielfältige Formen
Planare Kammer, Rohrkammern
Drift- / Jetkammern \rightarrow Driftwege $\sim \text{cm}$ bis m !

⇒ Spurdetektor:

Mehrfache Ortsmessung entlang einer Teilchenbahn → Rekonstruktion der Teilchenspur

⇒ Impulsmessung:

Krümmung R der Spur im Magnetfeld B
 → $p = q \cdot B \cdot R$

Impulsauflösung:

$$\frac{\sigma(p)}{p_t} = \frac{\sigma(\text{Ort})}{0.3 \cdot B \cdot L^2} \sqrt{\frac{720}{N+4}} \cdot p_t \sim \begin{cases} \sigma(\text{Ort}) \\ p_t \\ 1/B \\ 1/L^2 \end{cases}$$

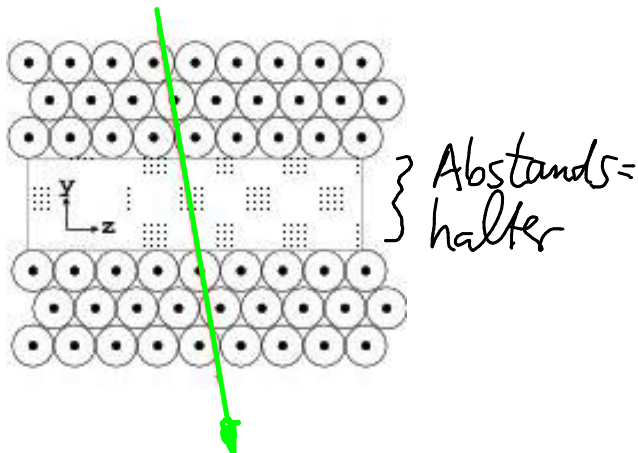
Beispiel: ATLAS-Myondetektor: zwei 3fach Rohrlage à 72 Rohre mit $\varnothing 3\text{cm}$

und ca. 4m Länge mit Abstandshalter zwischen den 3fach Lagen, 50 μm Draht- \varnothing

Gas: Ar : CO₂ = 93:7 @ 3 bar

$U = +3080\text{V}$

$\sigma(\text{Ort}) \leq 100\ \mu\text{m}$



5.2 Halbleiter - Detektoren

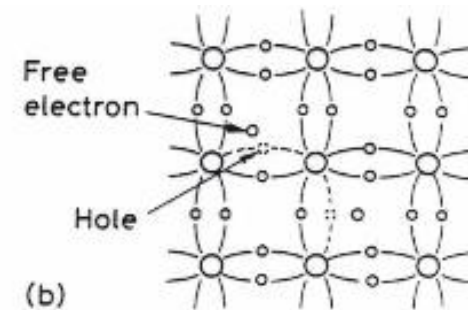
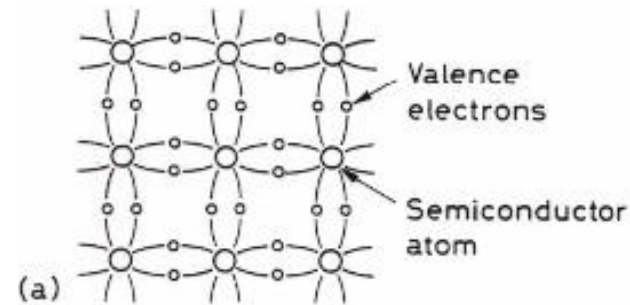
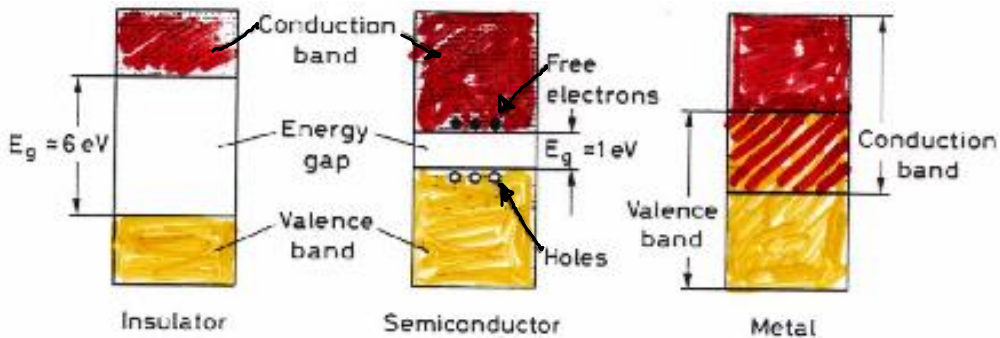
Größe der Ionisationsladung: $\rho_{Si} = 2.3 \text{ g/cm}^3$

mittlere Energie für e^- -Loch-Paar in Si: $E_{eh} \approx 3.6 \text{ eV}$

$$\Rightarrow \frac{dQ_{eh}}{dx} = 170 \text{ fC/cm}$$

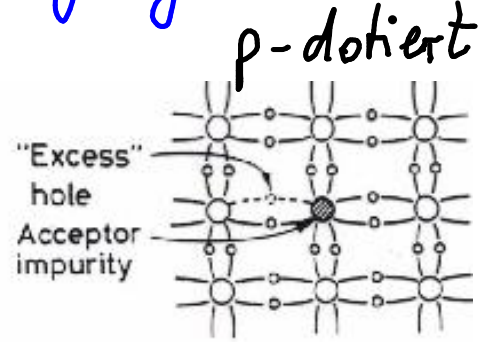
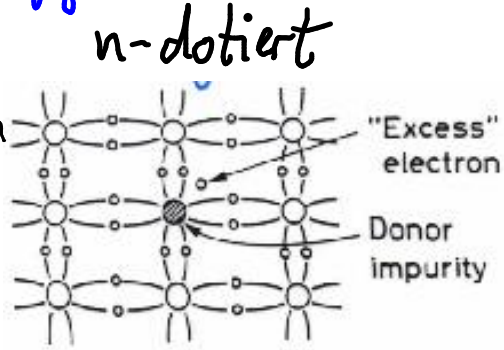
direkt messbares Signal
für Schichtdicken von 200 - 300 μm

Halbleiter vs. Isolator vs. Metall



Effekt einer Verunreinigung (Dotierung)

mit 5-wertigem Element



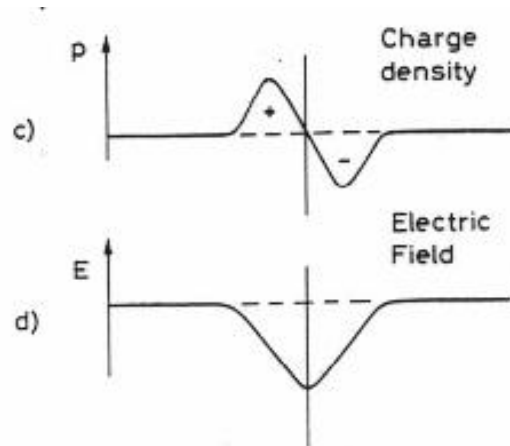
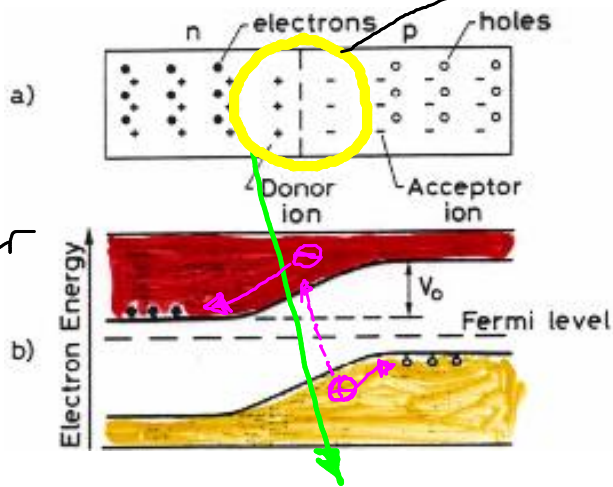
mit 3-wertigem Element



pn-Übergang (Diode)

Ladungsträger verarmte Zone (depletiert)

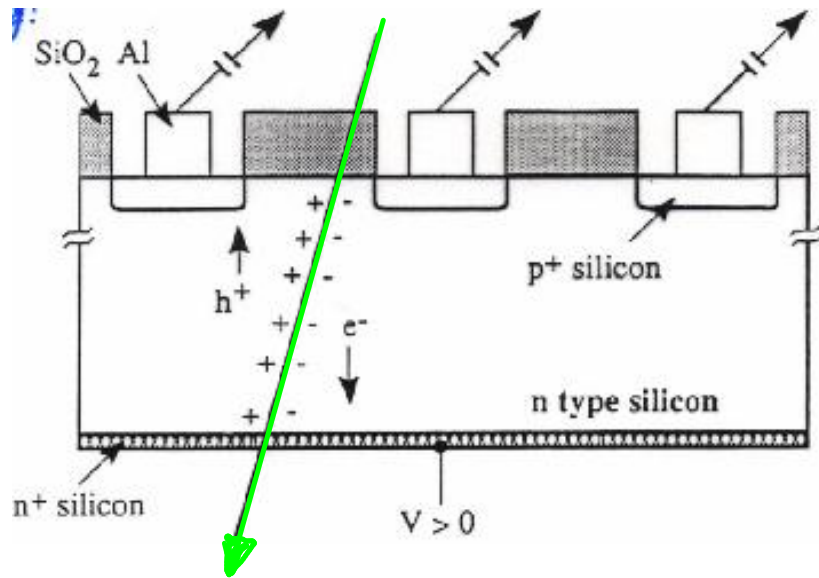
statische Raumladung trennt e-Lochpaar → messbare Ladung



unbewegliche Ionenrümpfe erzeugen statische Raumladung

statisches elektrische Feld durch Raumladung

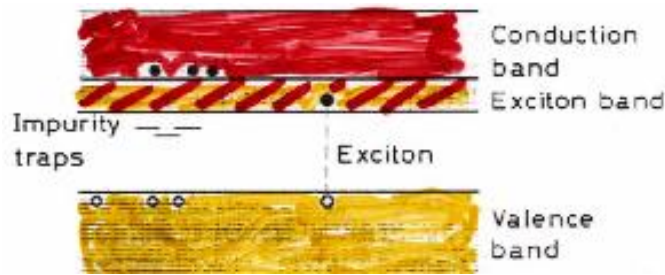
• Detektorprinzip (Streifen-, Pixeldetektor)



Mikrostrukturierung der Halbleiteroberfläche mit Aluminiumkontakten
 → Ortsinfo aus Position des Al-streifen, der eh -Ladung aufammelt

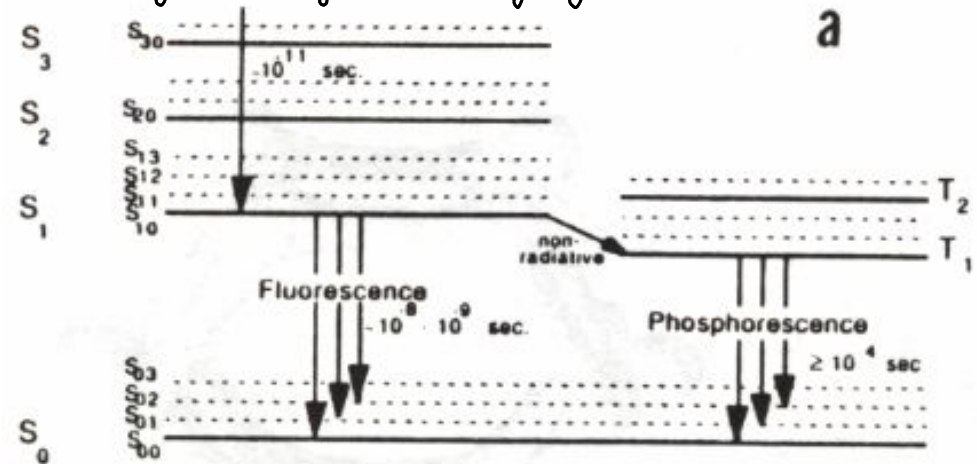
5.3 Szintillatoren → Zeitmessung

- Nach Anregung von Materialien durch Teilchenstöße tritt bei Abregung Lichtemission auf: Szintillation
- Szintillation tritt auf in anorganischen Kristallen



Beispiele: NaI(Tl) , CeF_3 , $\text{Bi}_4\text{Ge}_3\text{O}_{12}$: BGO
 PbWO_4 , ZnS (Fernsehermattscheibe)

organischen Stoffen
 v.a. mit Benzolringen \odot : π -Bindungselektronen
 quantisieren in Singulett S_{ij} und Triplettzustände T_{ij}
 i : Energie-, j : Schwingungsniveaus



Bsp: para-Terphenyl, PTP

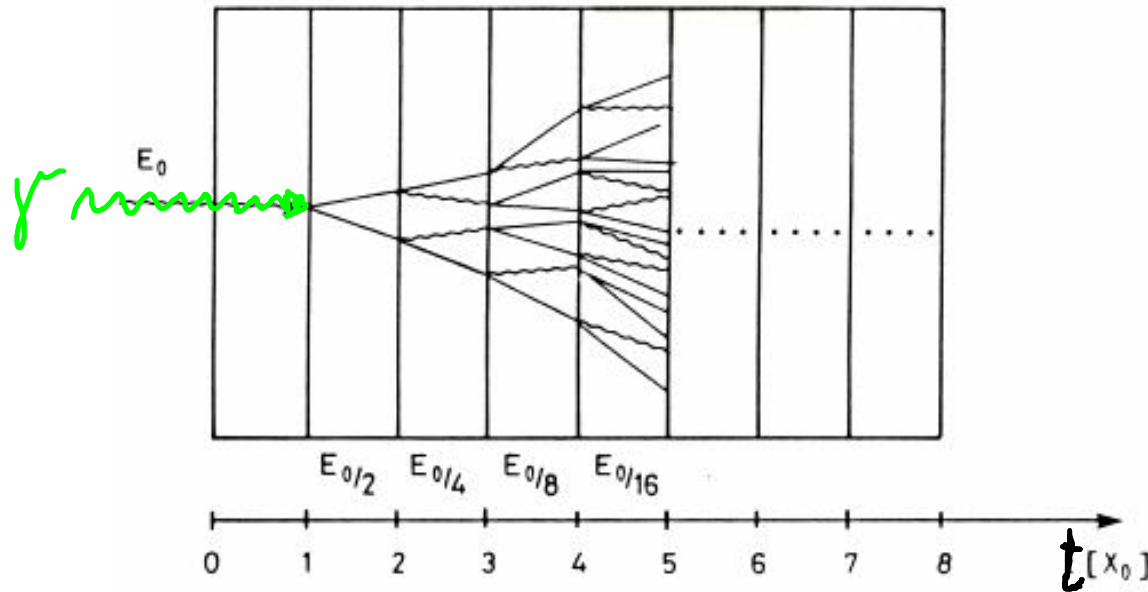


- Eigenschaften:
 - ▶ kurze Antwortzeit: einige 100 ps bis 1 μs → Zeitmessung
 - ▶ Lichtsignal proportional zur Energiedeposition des Teilchens

5.4 Energiemessung: Kalorimeter

- Energiemessung: Totalabsorption eines Teilchens: \rightarrow Kalorimeter-Prinzip (Wärmelehre: Temperaturerhöhung)
hier: Teilchenanzahl

Beispiel: Kalorimeter für e^-, e^+, γ



- pro X_0 :
- ▶ 54% Paarbildung =
wahrscheinlichkeit
 - ▶ 63% Bremsstrahlung =
wahrscheinlichkeit

\rightarrow Aufschauierung von e^+, e^-, γ bis $E \approx E_c$ (kritische Energie, vgl. Abschnitt 4.2)

- pro X_0 :
 - ▶ \approx Verdopplung der e^+, e^-, γ -Anzahl: $N(t) \approx 2^t$
 - ▶ typische e^+, e^-, γ -Energie: $\bar{E}(t) \approx \frac{E_0}{N(t)} = E_0 \cdot 2^{-t}$

- Schauermaximum: $\bar{E}(t_{\max}) \approx E_0 \cdot 2^{-t_{\max}} \stackrel{!}{=} E_c$

\rightsquigarrow (genauer)

$$t_{\max} = \ln \frac{E_0}{E_c} + \begin{cases} +0.5 & \gamma \\ -0.5 & e^-, e^+ \end{cases}$$

- Gesamtzahl von Teilchen im Schauer

$$S = \sum_{t=0}^{t_{\max}} N(t) = \sum_{t=0}^{t_{\max}} 2^t = 2^{t_{\max}+1} - 1 \approx 2^{t_{\max}+1}$$

mit $E_0 \cdot 2^{-t_{\max}} = E_c$



$$S = 2 \cdot \frac{E_0}{E_c} \sim E_0$$

Maß
für E_0

- Energiemessgenauigkeit

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{\sqrt{S}}{S} \sim \frac{1}{\sqrt{E_0}}$$

- Bauformen:
 - ▶ homogene Kalorimeter (Absorber = Detektor, z.B. Bleiglas, BaF_2 , PbWO_4 , ...)
 - ▶ Sampling Kalorimeter (abwechselnd passive Absorber- und aktive Detektorschichten)

NB Kalorimeter für andere Teilchensorten (p , n , π^+ , π^- , K^+ , K^- , ...) nutzen Teilchen-Kern-Wechselwirkung mit Schauerbildung
 dabei: Strahlungslänge $X_0 \rightarrow$ Wechselwirkungslänge $\lambda_{\pm} \gg X_0$

6 Beschleuniger

- Auflösungsvermögen $\Delta x \leftrightarrow$ de Broglie-Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{pc} = \frac{2\pi\hbar c}{\beta E}$

$$\Delta x \sim \frac{\lambda}{2}$$

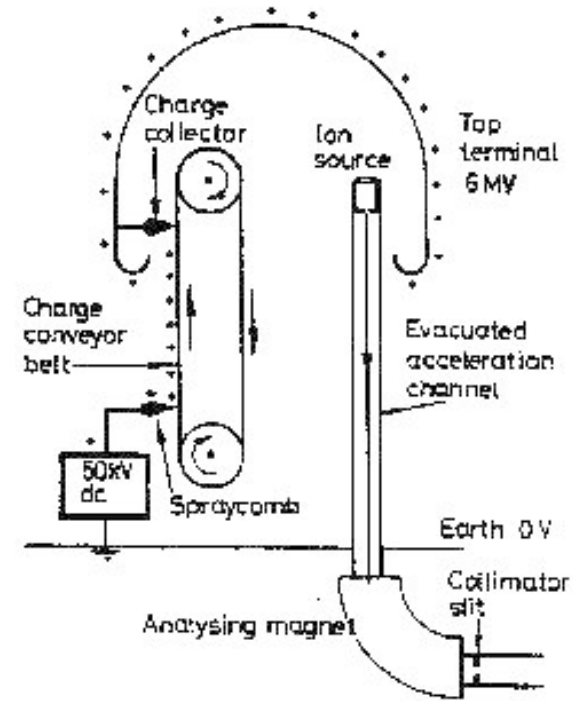
($pc = \beta E$, $\hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$)
- höchste Energie aus Kernprozessen: $\sim 10 \text{ MeV}$
- Beschleunigung von Teilchen
- Prinzip: Energiegewinn ΔE aus Potentialdifferenz ΔU

$$\Delta E = q \cdot \Delta U$$
- ⇒ größere $\Delta U \rightarrow$ höhere Energie E
 z.B. Farbfernseher: $U \approx 20 \dots 30 \text{ kV} \rightarrow E_{\text{kin}} \approx 20 \dots 30 \text{ keV}$

6.1 Elektrostatische Beschleuniger

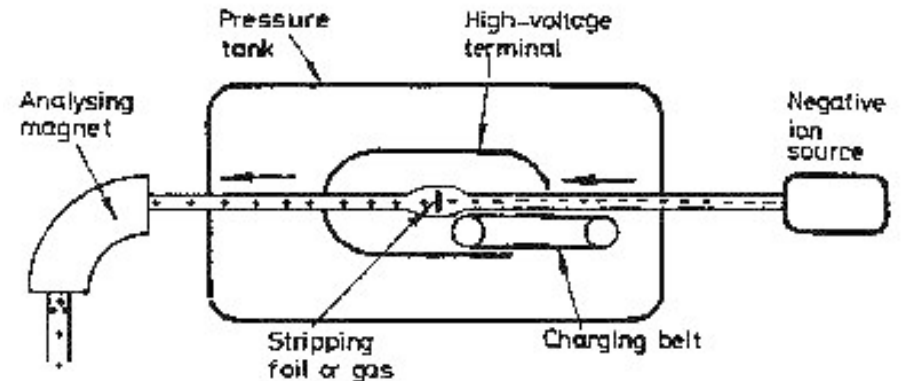
• Hochspannung mit van de Graaff-Generator

praktische Grenze $\sim 5 \text{ MV}$



• Tandem - van de Graaff Beschleuniger

- ▶ negativ geladene Ionen aus Quelle
- ▶ durch positive Hochspannung beschleunigt
- ▶ beim Durchtritt durch dünne Folie positiv umgeladen (Abstreifen der Elektronen)
- ▶ nochmals von positivem Hochspannungsterminal zu Nullpotential hin beschleunigt



Tandem-Beschleuniger in Garching



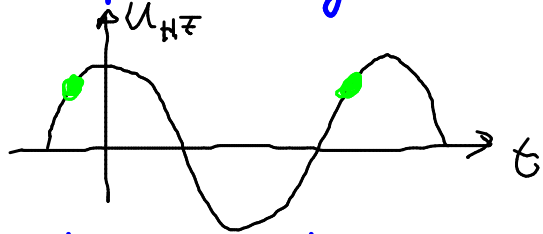
- ▶ 15 MV Hochspannung am Terminal
- ▶ 30 MeV Energie für einfach geladene Teilchen
z.B. $H^- \rightarrow p$
- ▶ Tank (orange) mit SF_6 Gas bei ~ 9 bar Druck zur elektrischen Isolation gefüllt
- ▶ liefert sehr stabilen Gleichstromstrahl
- ▶ Impuls- & Ladungsselektion im (blauen) Analysiermagnet:
 $p = ze \cdot B \cdot R$

6.2 HF-Linearbeschleuniger

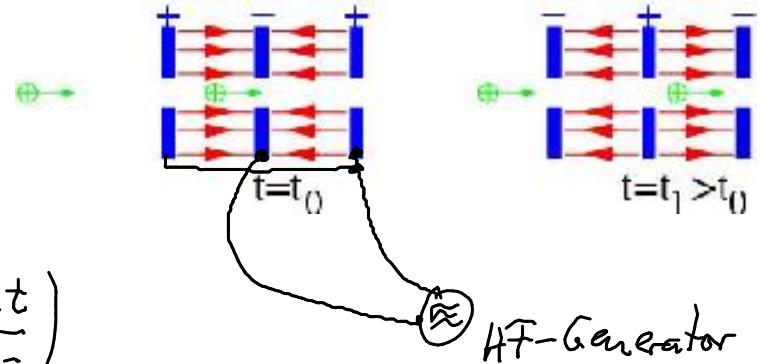
- statische \vec{E} -Felder sind konservativ d.h. $\oint \vec{E} d\vec{s} = 0$
 \rightarrow keine Beschleunigung bei wiederholtem Durchlaufen
- \Rightarrow • zeitabhängige \vec{E} -Felder für Beschleuniger (Idee: Ising 1924
 Prinzip: Widerö 1928)

▶ Strahlpakete (engl. "bunch")

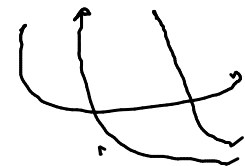
▶ Strahlpaketlänge $l \ll \beta \cdot \frac{\lambda_{HF}}{2}$



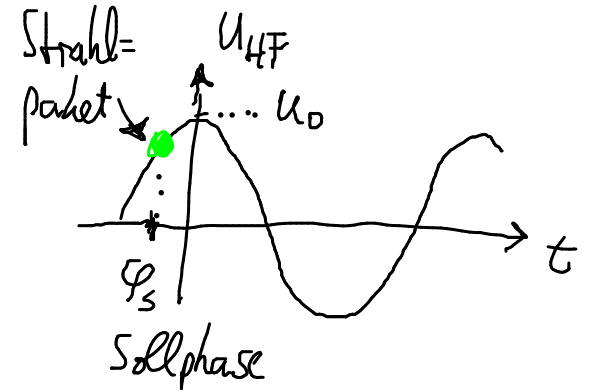
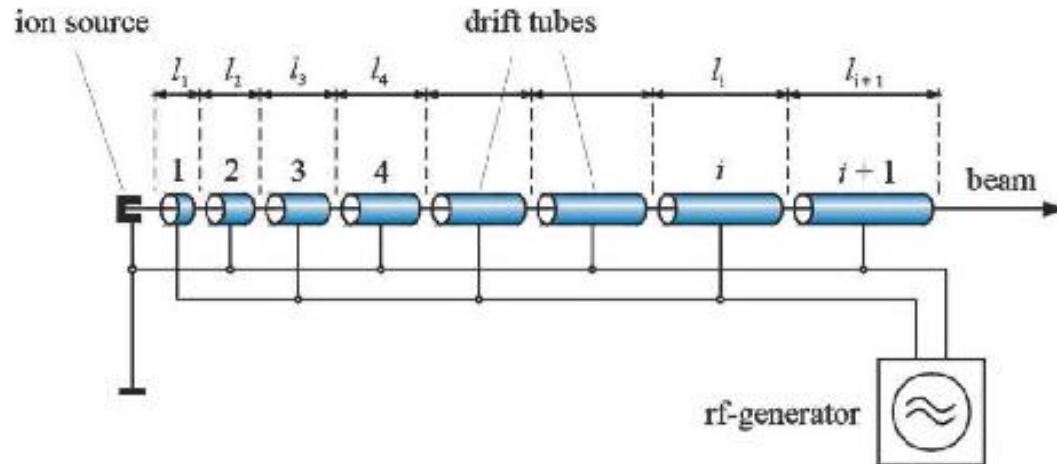
$$U_{HF} = U_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi c t}{\lambda_{HF}}\right)$$



▶ Strahlpaketabstand $L_B = n \cdot \beta \cdot \lambda_{HF}$, $n = 1, 2, 3, \dots$
 (Synchronität: Strahlpaket \leftrightarrow beschleunigendes \vec{E} -Feld)



Prinzip: Linearbeschleuniger (engl. Linac)



$$E_{kin}(i) = \frac{1}{2} m v_i^2 = i \cdot e U_0 \cos \varphi_s$$

$$\text{Flugzeit } (i \rightarrow i+1): \quad \tau_i = \frac{l_i}{v_i} = \frac{1}{2} T_{HF} = \frac{\lambda_{HF}}{2c}$$

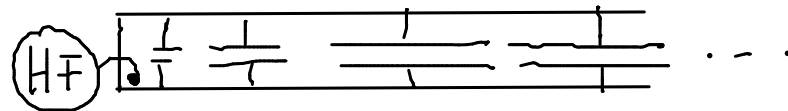
$$T_{HF} = \frac{1}{f_{HF}} = \frac{\lambda_{HF}}{c}$$

$$\Rightarrow l_i = \frac{\lambda_{HF}}{c} \sqrt{i \cdot \frac{e U_0 \cos \varphi_s}{2m}}$$

$$l_i \xrightarrow{v \rightarrow c} \frac{\lambda_{HF}}{2}$$

Moderne Form: Alvarez Struktur

Driftrohren bilden HF-Resonator in geschlossener Struktur



6.3 Kreisbeschleuniger

- Viel Formen: Betatron (Strahltrafo), Zyklotron, ...
- Höchstenergetische Beschleuniger zumeist: Synchrotron

▷ Designkriterium: $\frac{1}{R} = \frac{ze\beta}{\rho} = \text{const}$

→ $B \sim \rho = \gamma m v$

▷ Umlauf-/Zyklotronfrequenz

$$f_{\text{Uml}} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{ze\beta}{\rho} \frac{v}{2\pi}$$

$\rho = \gamma m v \Rightarrow f_{\text{Uml}} = \frac{ze\beta}{2\pi m \gamma} \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{\omega_{\text{Zyklotron}}}{2\pi}$

⇒ Synchrotritätsbedingung:

$$f_{\text{HF}} = h \cdot f_{\text{Uml}}$$

$h = 1, 2, 3, \dots$ harmonic number

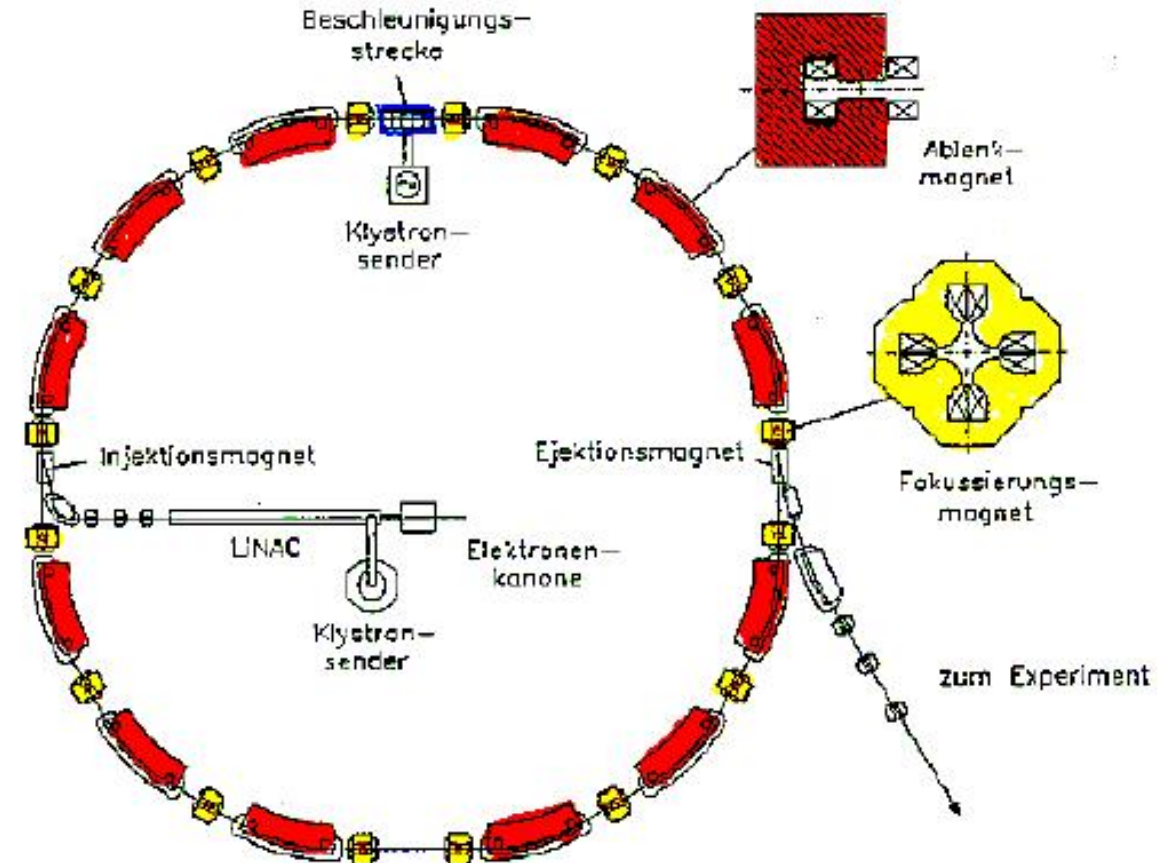
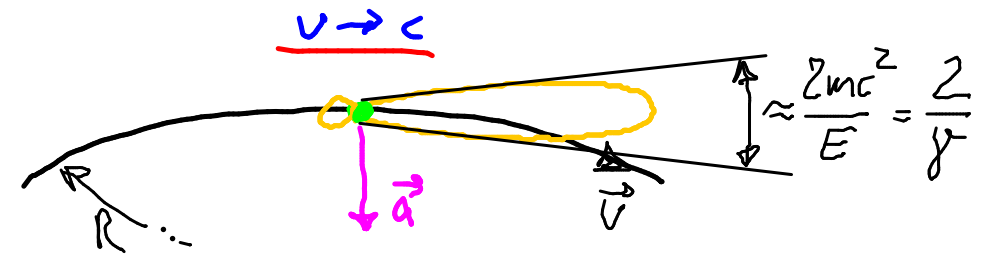
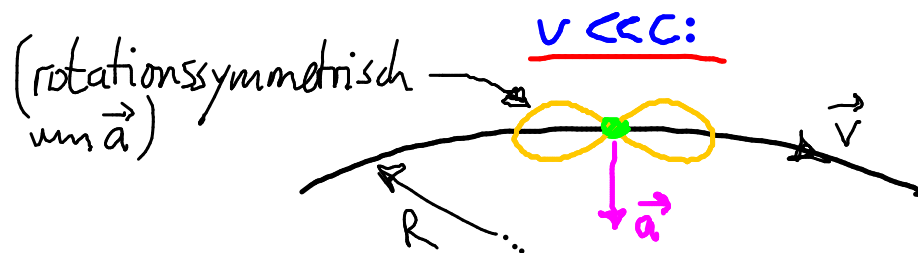


Fig. 1.16 Prinzipieller Aufbau eines modernen Synchrotrons. Die Bahn wird durch Ablenkmagnete mit homogenem Feld festgelegt, während die Fokussierung des Strahls durch gesonderte Magnete besorgt wird. Die Beschleunigung geschieht durch eine oder mehrere kurze HF-Strukturen. Die Teilchen werden von einem Vorbeschleuniger (Linac oder Microtron) geliefert.

- Strahlführung \perp zum Strahl durch Quadrupolmagnete (\cong Zylinderlinsen)
- Strahlführung \parallel zum Strahl durch Phasenfokussierung um Sollphase
- Synchrotronstrahlung limitiert Maximalenergie von e^-/e^+ -Kreisbeschleunigern

▶ beschleunigte Ladung strahlen elektromagnetische Wellen ab

▶ Abstrahlcharakteristik im ruhenden Laborsystem (\leadsto Lorentztransformation)



▶ Energieverlust pro Umlauf

$$\Delta E \sim \frac{e^2}{R} \cdot \left(\frac{E}{mc^2} \right)^4 \sim \frac{e^2}{R} \cdot \gamma^4$$

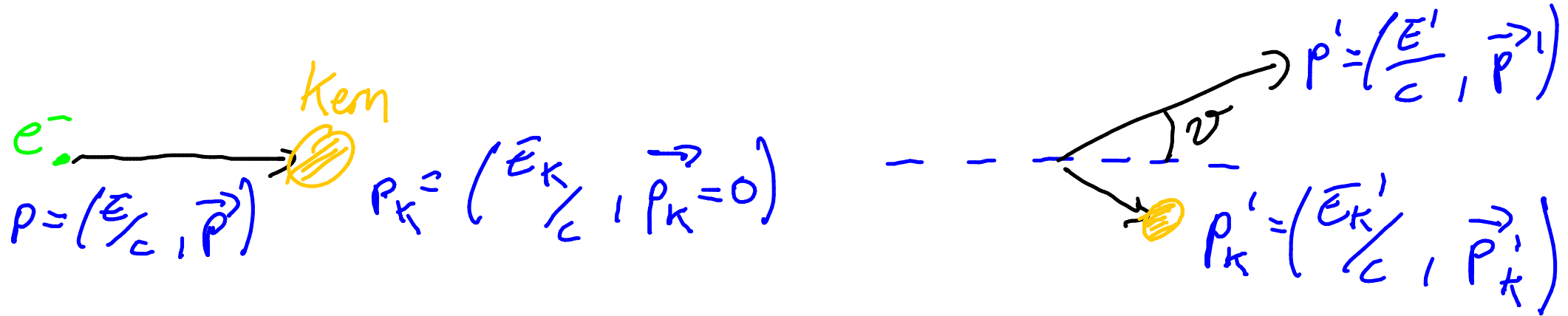
in prakt. Einheiten für e^+, e^- :

$$\Delta E = 88.5 \text{ keV} \cdot \frac{(E [\text{GeV}])^4}{R [\text{m}]}$$

NB: Proton-Beschleuniger energielimitiert durch \vec{B} -Ablenkfelder

7 Elektronenstreuung am Kern / Nucleon

7.1 Kinematik



$p', p'_K \hat{=} 8$ Unbekannte

- 4 x Zwangsbed. (E, p -Erhaltung, 4er-Impuls erh.)
- 1 x Rotations-symmetrie
- 2 x Massen im Endzustand (elast. Str. \Rightarrow Kern bleibt stabil)

\Rightarrow 1 zu messende Größe: z. B. Streuwinkel $\vartheta = \angle(\vec{p}, \vec{p}')$

Energie und Impulserh.

$$p + p_K = p' + p_K'$$

$$p^2 + 2pp_K + p_K^2 = p'^2 + 2p'p_K' + p_K'^2$$

elastische Streuung:

$$p^2 = p'^2 = m_e^2 c^2 \quad ; \quad p_K^2 = p_K'^2 = M_K^2 c^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{p p_K}_{= \frac{\bar{E}}{c} M_K c} = p' p_K' = p' (p + p_K - p') = p' p + p' p_K - p'^2$$

$$= \frac{E'}{c} \frac{E}{c} - \vec{p} \vec{p}' + \bar{E}' M_K - m_e^2 c^2$$

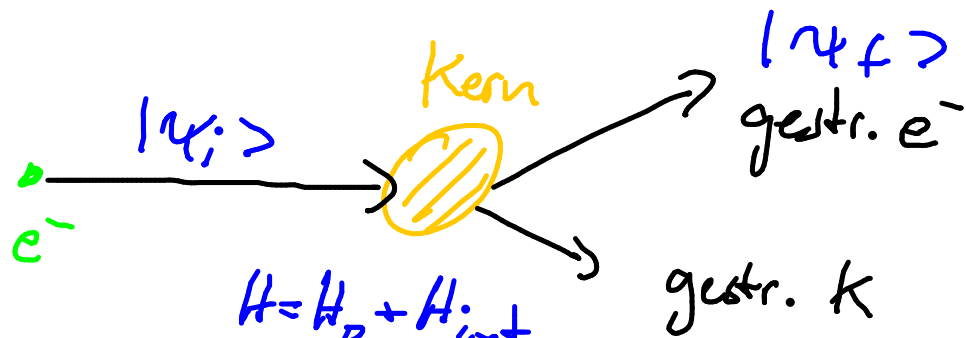
Näherung $m_e \approx 0$: $\Rightarrow |\vec{p}| = \frac{\bar{E}}{c} \quad ; \quad |\vec{p}'| = \frac{E'}{c}$

$$\Rightarrow E M_K = \frac{E' \bar{E}}{c^2} (1 - \cos \vartheta) + \bar{E}' M_K$$

\Rightarrow

$$E' = \frac{\bar{E}}{1 + \frac{\bar{E}}{M_K c^2} (1 - \cos \vartheta)}$$

7.2 Rutherford-Wirkungsquerschnitt (WQ)



zeitunabh. Hamiltonoperator

$$H = H_0 + H_{\text{int}}$$

↔ Wechselwirkungs-H.-Operator

Fermis 2. Goldene Regel:
$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \frac{dn}{dE'}$$

Reaktionsrate:
$$W = \frac{\dot{N}}{N_S N_T} = \frac{\phi_S N_T \sigma}{N_S N_T} \stackrel{\phi_S = \frac{N_S}{V} v_S}{=} \frac{\sigma v_S}{V} \quad (\text{s. Kapl. 2})$$

Übergangsmatrixelement:
$$M_{fi} = \langle \psi_f | H_{\text{int}} | \psi_i \rangle$$

$$= \int d^3x \psi_f^*(\vec{x}) H_{\text{int}} \psi_i(\vec{x})$$

Zustandsdichte $\frac{dn}{dE}$

$\Delta x \Delta p \geq h = 2\pi \hbar \Rightarrow$ Volumen im 3+3 dim. Phasenraum pro Zustand: $(2\pi \hbar)^3$

$$\Rightarrow n = \frac{\int d^3x d^3p}{(2\pi \hbar)^3} = \frac{V}{(2\pi \hbar)^3} \int p^2 dp d\Omega$$

aus $E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$: $\frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E}$

$$\Rightarrow \frac{dn}{dE} = \frac{V}{(2\pi \hbar)^3} \frac{E}{pc^2} \frac{d}{dp} \int p^2 dp d\Omega$$

$$\frac{dn}{dE} = \frac{V p E}{(2\pi \hbar)^3 c^2} \int d\Omega = 4\pi \frac{V p E}{(2\pi \hbar)^3 c^2} \xrightarrow{p \rightarrow E/c} 4\pi \frac{V E^2}{(2\pi \hbar c)^3}$$

$$\left. \begin{array}{l} v_s \rightarrow c \\ p \rightarrow \frac{E}{c} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = v^2 \frac{E'^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |M_{fi}|^2$$

Berechnung von M_{fi} :

Ein-/auslaufendes e^- : $|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar}$, $|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}'\vec{r}/\hbar}$

Hint = $e \cdot \phi(\vec{r})$ mit elektr. Potential $\phi(\vec{r})$

$$\Rightarrow M_{fi} = \frac{e}{v} \int d^3r e^{-i\vec{p}'\vec{r}/\hbar} \cdot \phi(\vec{r}) \cdot e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar}$$

mit $\vec{q} := \vec{p} - \vec{p}'$

$$M_{fi} = \frac{e}{v} \int d^3r \underbrace{\phi(\vec{r})}_{\equiv u} \underbrace{e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar}}_{\equiv v = -\frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2} \Delta v}$$

$\int d^3r (u \Delta v - v \Delta u) = 0$
 Greensches Theorem (mit $\Delta = \vec{\nabla}^2$)

$$\Rightarrow M_{fi} = \frac{e}{V} \frac{-\hbar^2}{|\vec{q}|^2} \int d^3r \underbrace{\Delta \phi(\vec{r})}_{\text{Poisson-Gl.: } = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}} e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar}$$

Annahme: kugelsymmetrische (Kern-) Ladungsdichte: $\rho(\vec{r}) = z \cdot e f(r)$

$$\text{mit } \alpha_{\text{em}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

$$\text{mit } \int_V d^3r f(r) = 1$$

$$\Rightarrow M_{fi} = 4\pi \frac{z \alpha_{\text{em}} (\hbar c)^3}{|\vec{q}c|^2 V} \underbrace{\int d^3r f(r) e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar}}_{=: F(\vec{q})}$$

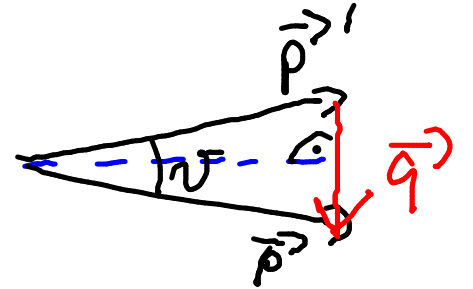
$F(\vec{q})$: Fouriertransform. von $f(r) \rightarrow$ Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$

$$\text{punktförmiger Kern: } f(r) = \frac{1}{z e} \rho(r) = \delta(r) \Rightarrow F(\vec{q}) = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth.}} = \frac{v^2 E'}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\mathcal{M}_{\text{fil}}|^2 = \frac{4 Z^2 \alpha_{\text{em}}^2 (\hbar c)^2 E'^2}{|\vec{q}' c|^4}$$

Vernachl. Kernrückstoß: $E = E'$; $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$

$$\Rightarrow |\vec{q}'| = |\vec{p} - \vec{p}'| = 2|\vec{p}| \sin \frac{\vartheta}{2}$$



(I) relativistisch: $|\vec{p}' c| = E \Rightarrow$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth.}} = \frac{Z^2 \alpha_{\text{em}}^2 (\hbar c)^2}{4 E^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

(II) nicht-relativistisch:

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{p^2}{2m} \\ \Rightarrow q^2 &= 4(2m E_{\text{kin}}) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \\ E &= \frac{p'^2}{2m} + m c^2 \approx m c^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth.}} = \frac{Z^2 \alpha_{\text{em}}^2 (\hbar c)^2}{16 E_{\text{kin}}^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

(vgl. Kap. 1.3)

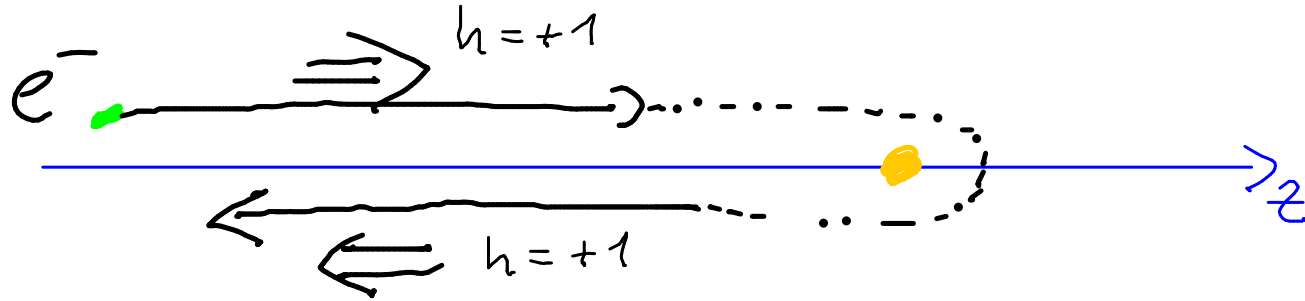
7.3 Mott - WQ

Annahmen für Rutherford - Formel

- (1) Kernrückstoß vernachlässigt, $E' = E$
- (2) Kernladung Z nicht groß. $Z \cdot \alpha_{\text{em}} \ll 1$ (Bornsche Näher.)
- (3) Kern ist punktförmig
- (4) Kern ist spinlos
- (5) Projektil ist spinlos und relativistisch ($v_s \approx c$)

Abweichung, wenn (1) - (5) nicht erfüllt

~~5~~ Elektron als Projektil hat Spin $\frac{1}{2} \hbar$!



Erhaltung der e^- -Helizität ($v=c$) $h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{p}|}$, $h = \pm 1$
 verlangt $\Delta j_z(e^-) = \pm 1 \hbar$ (Helizitätserh. aus relativ. QM, Dirac-Gl.)

wegen (3) + (4): $\Delta j_z(\text{Kern}) = 0 \Rightarrow$ Drehimpulserh. verletzt

\Rightarrow Rückwärtstreuung ($\vartheta = 180^\circ$) verboten!

Mott-WQ:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}} \cdot \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)$$

* : rückstoßfrei

7.4 Formfaktor

falls Kern nicht punktförmig (d.h. ~~ist~~), dann

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}^* \cdot |F(\vec{q})|^2$$

mit $F(\vec{q}) = \int f(r) e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar} d^3r$, d.h. Fouriertransf. der Ladungsverf. $f(r) = \frac{1}{Ze} \rho(r)$

Kugelsymmetrie: $f(r) \Rightarrow F(q^2)$
↑ Betrag!

Integration über Winkel: $F(q^2) = 4\pi \int f(r) \frac{\sin(|\vec{q}| r/\hbar)}{|\vec{q}| r/\hbar} r^2 dr$

Beispiele:

Ladungsverteilung $f(r)$		Formfaktor $F(q^2)$	
Punkt	$\delta(r)/4\pi$	1	konstant
exponentiell	$(a^3/8\pi) \cdot \exp(-ar)$	$(1 + q^2/a^2\hbar^2)^{-2}$	Dipol
Gauß	$(a^2/2\pi)^{3/2} \cdot \exp(-a^2r^2/2)$	$\exp(-q^2/2a^2\hbar^2)$	Gauß
homogene Kugel	$\begin{cases} C \text{ für } r \leq R \\ 0 \text{ für } r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$ mit $\alpha = q R/\hbar$	oszillierend

Ladungsverteilung $\rho(r)$	Formfaktor $F(q)$	Beispiel
punktförmig	konstant	Elektron
exponentiell	Dipol	Proton
gaußförmig	gaußförmig	${}^6\text{Li}$
homogene Kugel	oszillierend	—
Kugel mit diffusem Rand	verwaschene Oszillation	${}^{40}\text{Ca}$

$r \rightarrow$ $|q| \rightarrow$

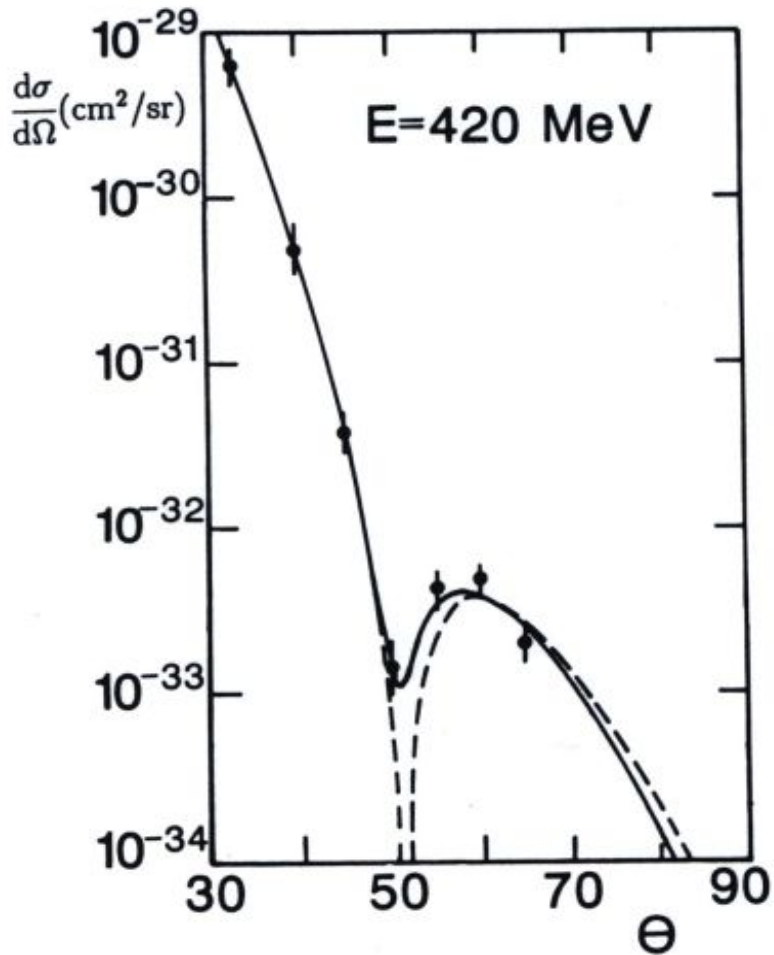
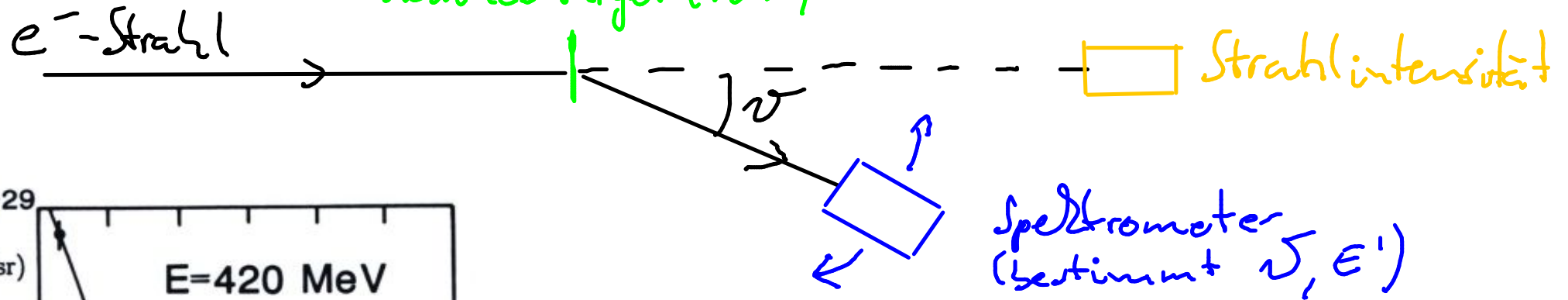
$\Rightarrow F(q^2)$ hat Nullstellen bzw. Minima bei $\tan\alpha = \alpha$

\Rightarrow 1. Minimum bei $\alpha = \frac{|q|R}{\hbar} \approx 4.5$

(gilt näherungsweise auch für kugelf. Kerne mit diffusem Rand)

\Rightarrow Bestimmung von Kernradien

- erste Messungen am Stanford e^- Linac, Hofstadter et al., 1953
dünnes Target (Folie)



- Kernradius

Bsp. ^{12}C : 1. Minimum bei $\theta \approx 50^\circ$
 $\Rightarrow \frac{|\vec{q}|}{\hbar} = \frac{2}{\hbar} (p) \sin \frac{\theta}{2} \approx 1.8 \text{ fm}^{-1}$

$\Rightarrow R = 4.5 \frac{\hbar}{|\vec{q}|} = 2.5 \text{ fm}$

- mittlere quadratische Kernradius

$$\langle r^2 \rangle = \int d^3r r^2 f(r)$$

Bestimmung aus Vorwärtsstreuung, d.h. $\vec{q} \rightarrow 0$

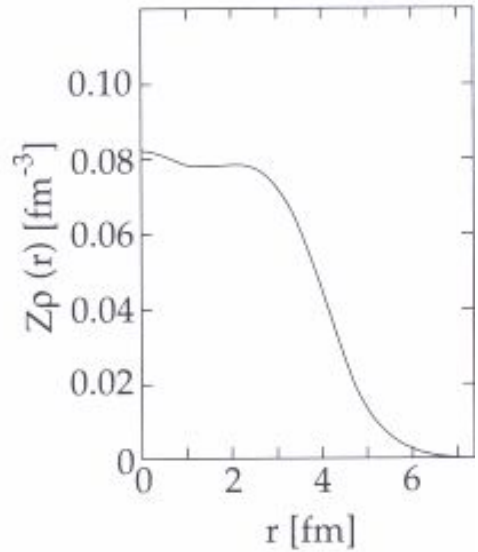
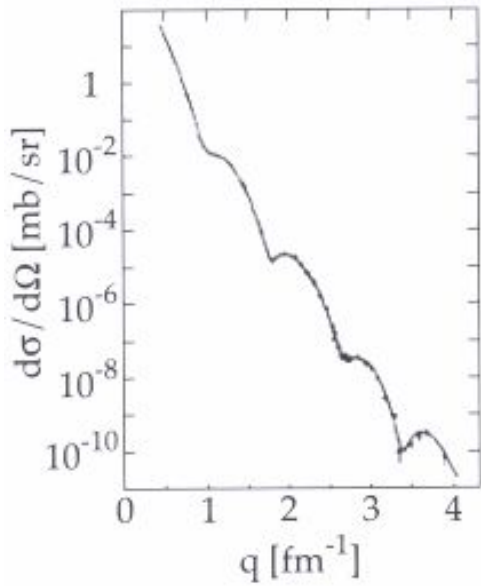
Taylor-Entw. um $|\vec{q}|R/\hbar \ll 1$

$$\begin{aligned}
 F(\vec{q}) &= \int d^3r f(r) e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar} = \int d^3r f(r) \left[1 + \frac{i\vec{q}\vec{r}}{\hbar} - \frac{(\vec{q}\vec{r})^2}{2\hbar^2} + \dots \right] \\
 &= \underbrace{\int d^3r f(r)}_1 + \underbrace{\int d^3r f(r) \frac{i\vec{q}\vec{r}}{\hbar}}_{=0, \text{ da asymm.}} - \underbrace{\int f(r) \frac{1}{2\hbar^2} (\vec{q}\vec{r})^2 d\phi d\cos\vartheta r^2 dr}_{\langle r^2 \rangle} \\
 &= \frac{-|\vec{q}|^2}{6\hbar^2} \underbrace{4\pi \int r^2 f(r) r^2 dr}_{\langle r^2 \rangle}
 \end{aligned}$$

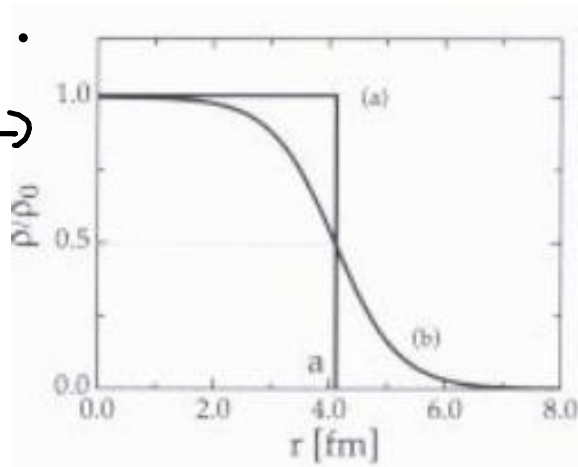
$$\Rightarrow \left. \frac{dF(\vec{q})}{d|\vec{q}|^2} \right|_{|\vec{q}|^2=0} = -\frac{1}{6\hbar^2} \langle r^2 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle r^2 \rangle = -6\hbar^2 \left. \frac{dF}{d|\vec{q}|^2} \right|_{|\vec{q}|^2=0}$$

• Ladungsverteilung, z. B. ^{58}Ni (450 MeV e^-)



vgl.
↕



Wood-Saxon-Vert.

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + \exp\left(\frac{r-c}{a}\right)}$$

• aus Analyse von vielen Kerne:

$$c = 1,07 \text{ fm } A^{1/3}, \quad a = 0,54 \text{ fm (mittlere bis schwere Kerne)}$$

$$\rightarrow \sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0,94 \text{ fm}$$

$$\rightarrow \text{Annahme: homogener gel. Kugel: } R = \sqrt{\frac{5}{3} \langle r^2 \rangle} = 1,21 \cdot A^{1/3} \text{ fm}$$

$$\text{Nukleondichte im Kern } \rho_N(0) = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx 0,17 \text{ fm}^{-3}$$

7.5 Formfaktor der Nucleonen

- Kernrückstoß nicht vernachlässigbar (d.h. ~~(*)~~) $\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}^* \cdot \frac{E'}{E}$

Energieverlust $\nu := E - E' \neq 0 \Rightarrow$ betrachte 4er-Impuls $\vec{q} \rightarrow q$

$$q^2 = (p - p')^2 = 2m_e^2 c^2 - 2 \left(\frac{EE'}{c^2} - |\vec{p}| \cdot |\vec{p}'| \cos \vartheta \right)$$

$$\approx -4 \frac{EE'}{c^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} < 0 \Rightarrow \boxed{Q^2 := -q^2 > 0}$$

- Nucleon hat Spin $\frac{1}{2}$ t_2 (d.h. ~~(*)~~)

Annahme: punktförm. Nucleon der Masse M :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{punktf. Spin } \frac{1}{2}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[1 + 2z \tan^2 \frac{\vartheta}{2} \right], \quad z = \frac{Q^2}{4M^2 c^2}$$

• Nukleon ist ausgelehnt (d.h. ~~ist~~)

⇒ elektr. / magnet. Formfaktoren $G_E(Q^2)$, $G_M(Q^2)$

Rosenbluth-

Formel:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{en}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot \left[\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \tan^2 \frac{\nu}{2} \right]$$

- $Q^2 = 0$: - Proton: $G_E^p(0) = 1$, $G_M^p(0) = \frac{\mu_p}{\mu_N} = 2.79$ ($\mu_N := \frac{e\hbar}{2m_p}$)

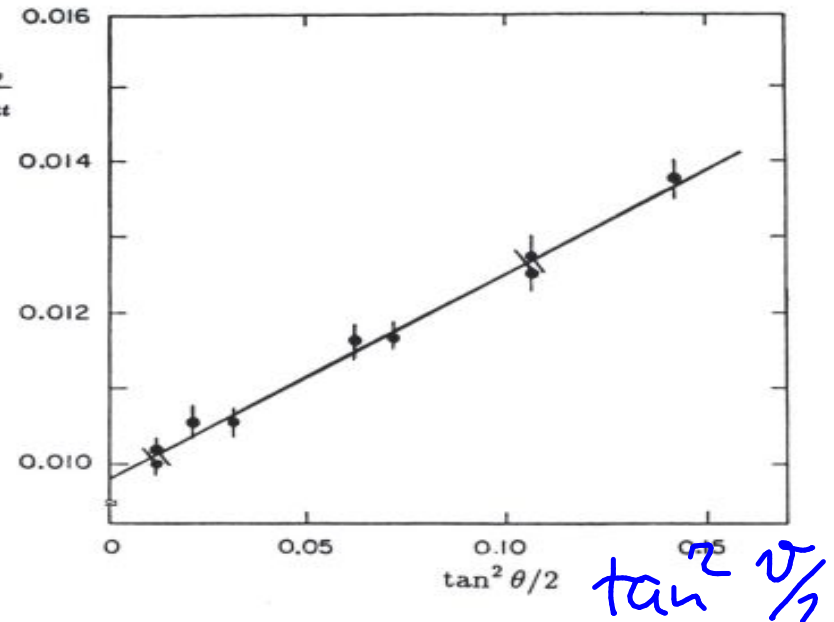
- Neutron: $G_E^n(0) = 0$, $G_M^n = \frac{\mu_n}{\mu_N} = -1.91$

- für festes Q^2 :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{en}} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \rightarrow$$

$$= A(Q^2) + B(Q^2) \tan^2 \frac{\nu}{2}$$

$$\Rightarrow G_M(Q^2), G_E(Q^2)$$

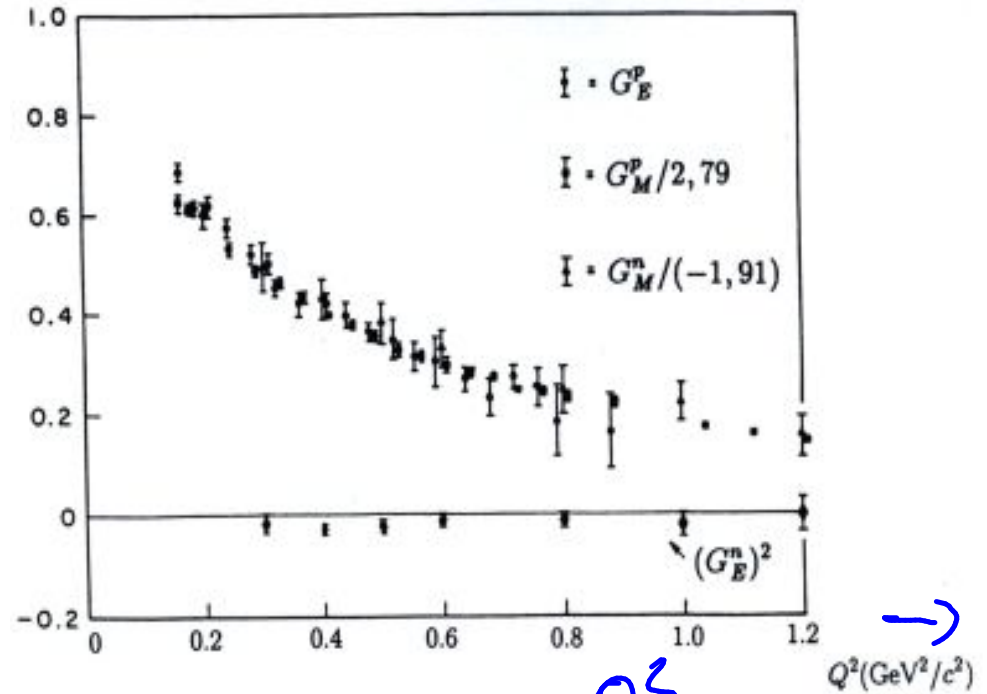


• Messung
es gilt (näherungsweise)

$$G_E^n = 0$$

$$G_E^p(Q^2) = \frac{G_M^p(Q^2)}{2,79} = \frac{G_M^n(Q^2)}{-1,91} = G^{\text{Dipol}}(Q^2)$$

$$\text{mit } G^{\text{Dipol}}(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0,71 \left(\frac{\text{GeV}}{c}\right)^2}\right)^{-2}$$



\Rightarrow Ladungsverf.: $\rho(r) = \rho(0) e^{-ar}$ mit $a = \frac{\sqrt{0,71} \text{ GeV}/c}{\hbar} = 4,28 \text{ fm}^{-1}$

\Rightarrow $\langle r^2 \rangle$ aus Integr. $\int dr r^2 f(r)$ oder:

$$\langle r^2 \rangle = -6 \hbar^2 \frac{d G^{\text{Dipol}}(Q^2)}{d Q^2} \Big|_{Q^2=0} = \frac{12 \hbar^2}{0,71 \left(\frac{\text{GeV}}{c}\right)^2}$$

\Rightarrow $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0,81 \text{ fm}$

7.6 Quasielastische Streuung

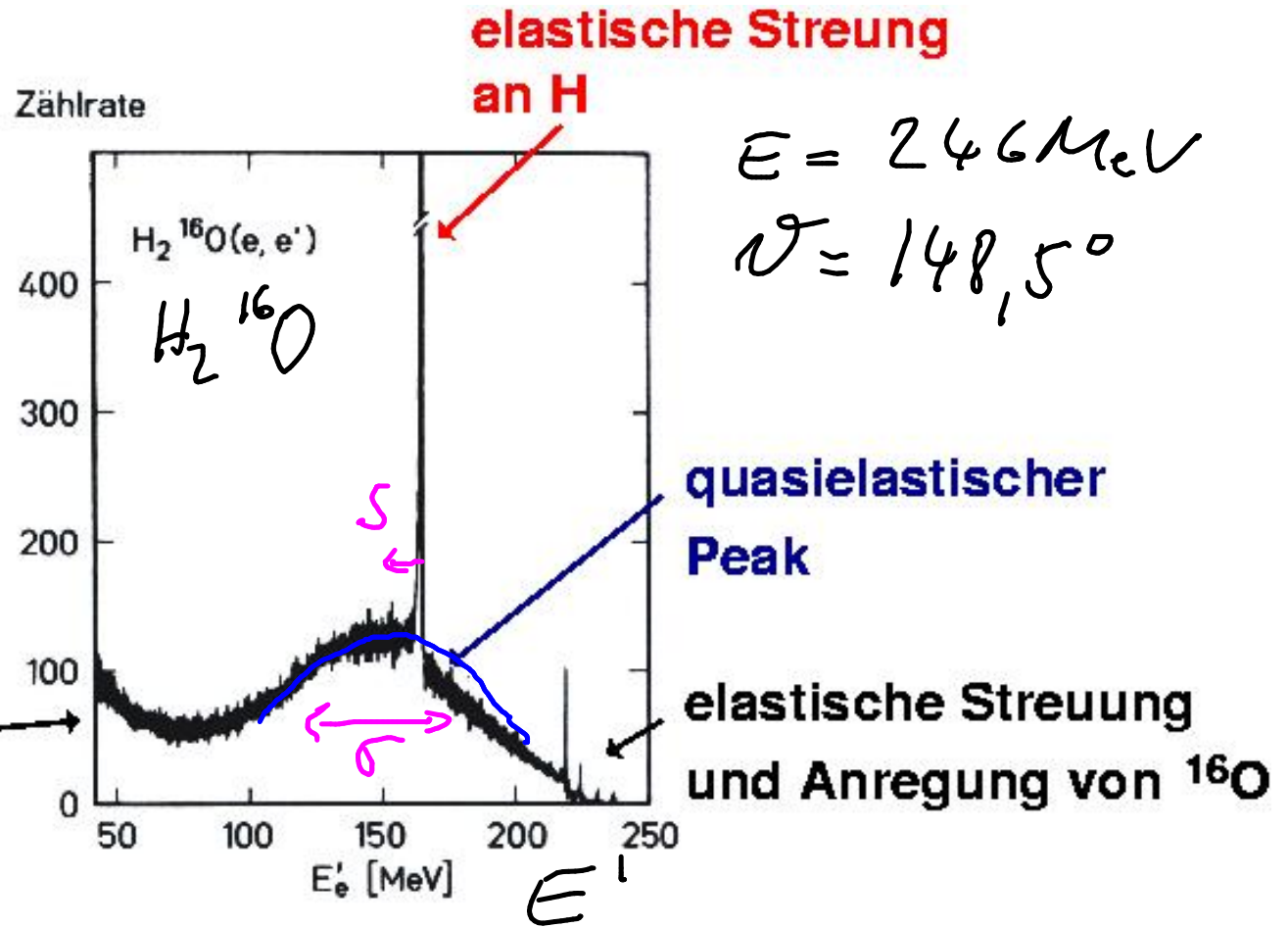
→ elastische Streuung an einzelnen, gebundenen Nukleon im Kern

- aus Verschiebung S :
Tiefe des Kernpotentials
z.B. $S(\text{Li}) = 17 \text{ MeV}$
 $S(\text{Pb}) = 44 \text{ MeV}$

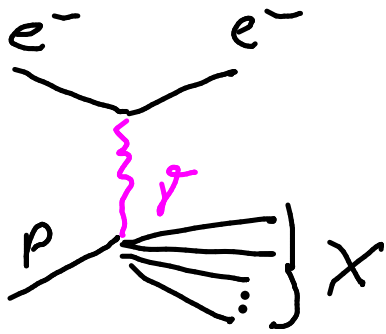
- Breite $\sigma \propto p_F$
(Fermimpuls)

⇒ $p_F \approx 250 \text{ MeV}/c$

Beginn der
 Δ Resonanz



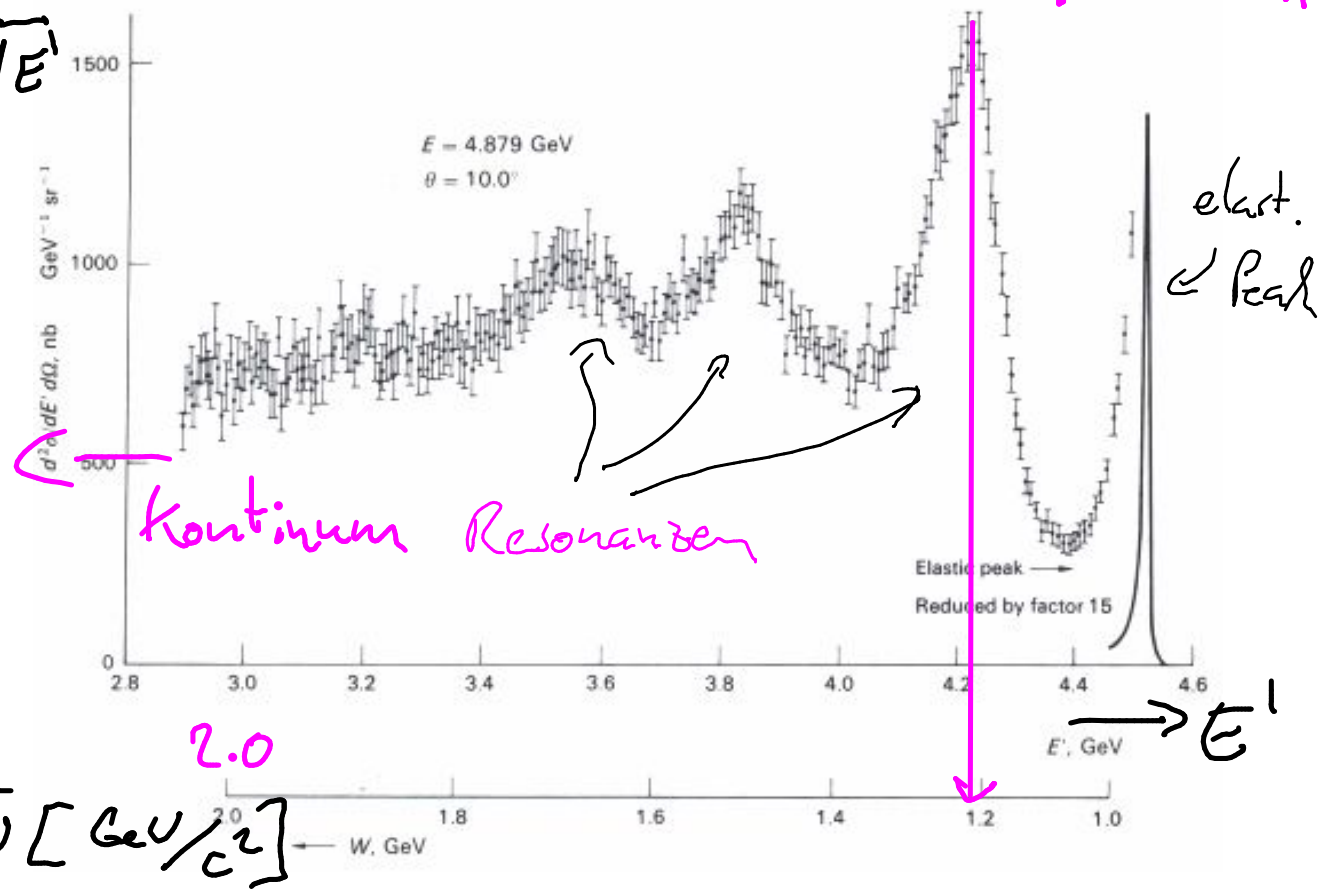
8 Tiefinelastische Elektron - Streuung



hadronisches System X
mit invarianter Masse W

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}$$

$\Delta^+(1232) \rightarrow p + \pi^0$
 $\Delta^+(1232) \rightarrow n + \pi^+$

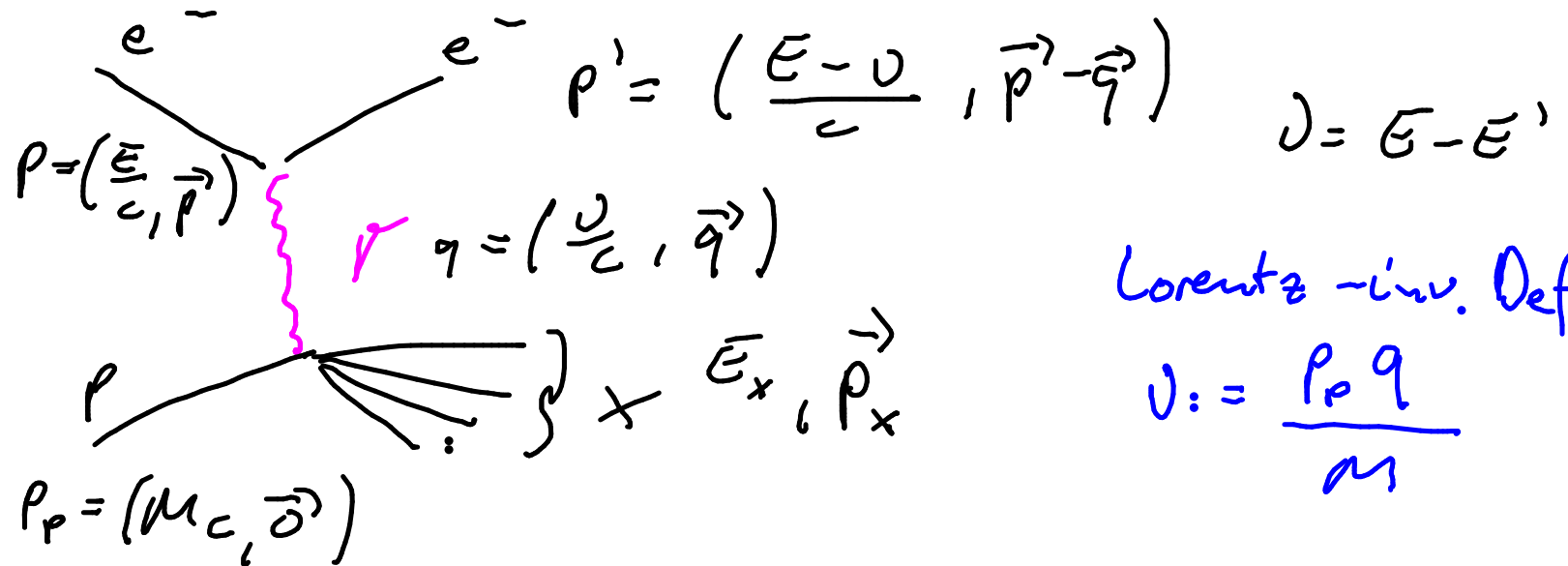


Kontinuum Resonanzen

- Resonanzen: Anregung des gesamten Protons \Rightarrow innere Struktur
- Kontinuum: quasi-elastische Str. an Konstituenten (tiefinelast. Str.)
 \Rightarrow Beschreibung durch Formfaktoren/bzw. Strukturfunktionen

• Kinematik:

(im Ruhesystem
des Protons
= Laborsystem)



- inv. Masse des hadronischen Systems X : W

$$W^2 c^2 = p_x^2 = (p_p + q)^2 = M^2 c^2 + 2 p_p \cdot q + q^2 = M^2 c^2 + 2 M U - Q^2$$

• elastisch: $W = M \Rightarrow Q^2 = 2 M U$ 1 unabh. Variable

• inelastisch: $W > M \Rightarrow 2 M U > Q^2$, 2 unabh. Variablen

dimensionlose Variablen:

$$x := \frac{Q^2}{2 M U}; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{Bjorken SkalenvARIABLE})$$

$$y := \frac{p_p \cdot q}{p_p \cdot p} = \left(\frac{U}{E}\right)_{\text{Lab.}}; \quad 0 \leq y \leq 1$$

8.1 Struktur des Protons

• WQ: vgl. $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{punktft. Spin } \frac{1}{2}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left(1 + 2\tau \tan^2 \frac{\nu}{2}\right)$

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left[W_2(Q^2, \nu) + 2W_1(Q^2, \nu) \tan^2 \frac{\nu}{2} \right]$$

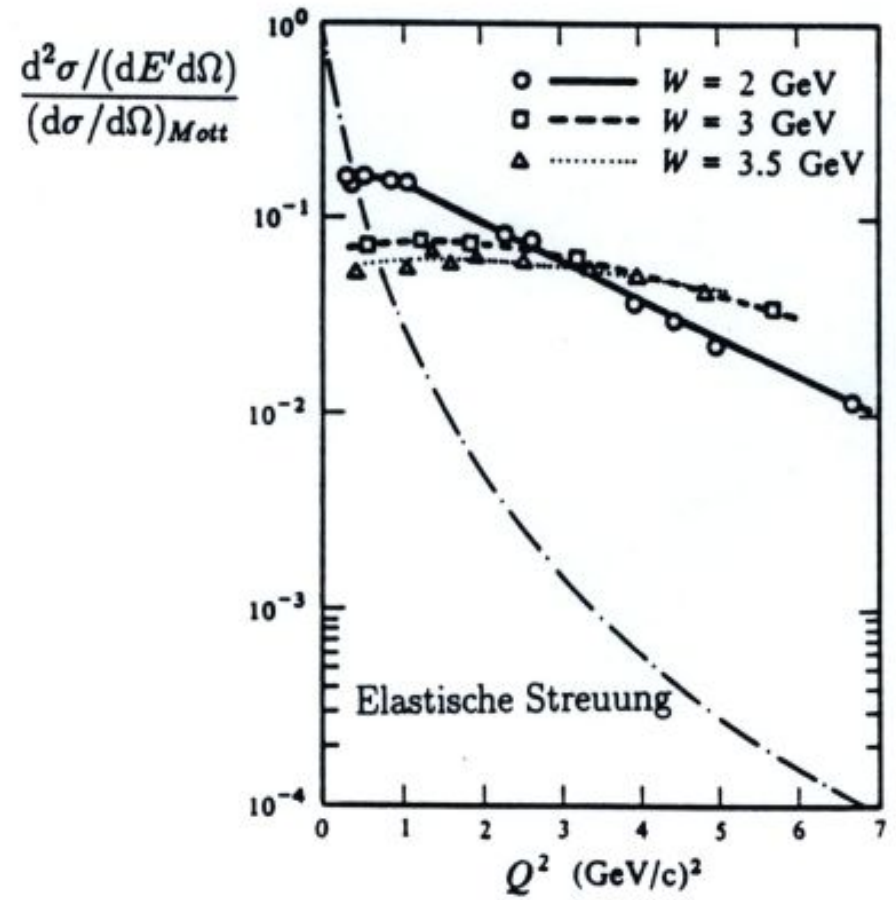
mit inelastischen Formfaktoren

W_1 : magnetische WW

W_2 : elektrische WW

Beobachtung:

Formfaktoren haben für $W \approx 3 \text{ GeV}/2$
 nur schwache Q^2 -Abhängigkeit



- Formfaktoren hängen kaum von Q^2 ab, sondern fast nur von dimensionsloser Variable

$$x = \frac{Q^2}{2M_0}$$

⇒ Definition der Strukturfunktionen

$$F_2(x, Q^2) = \nu W_2(Q^2, \nu)$$

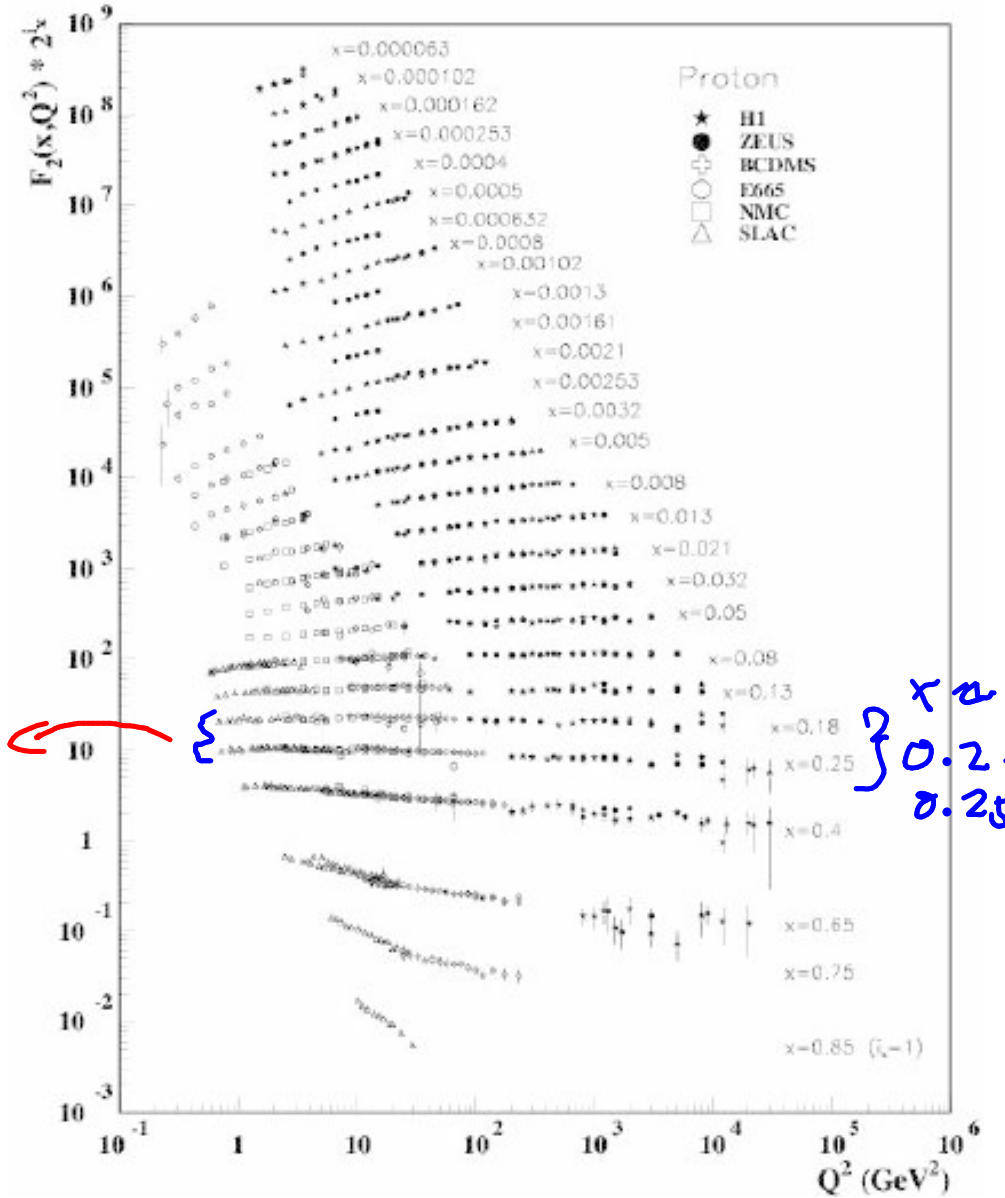
$$F_1(x, Q^2) = M_0^2 W_1(Q^2, \nu)$$

Skalenverhalten (Bjorken scaling)
für $x = 0.2 \dots 0.25$ beobachtet

⇒ verschwindende Q^2 -Abh.
⇒ Streuung an punktf.
konstituenten im Proton!

⇒ Partonen, Quarks!

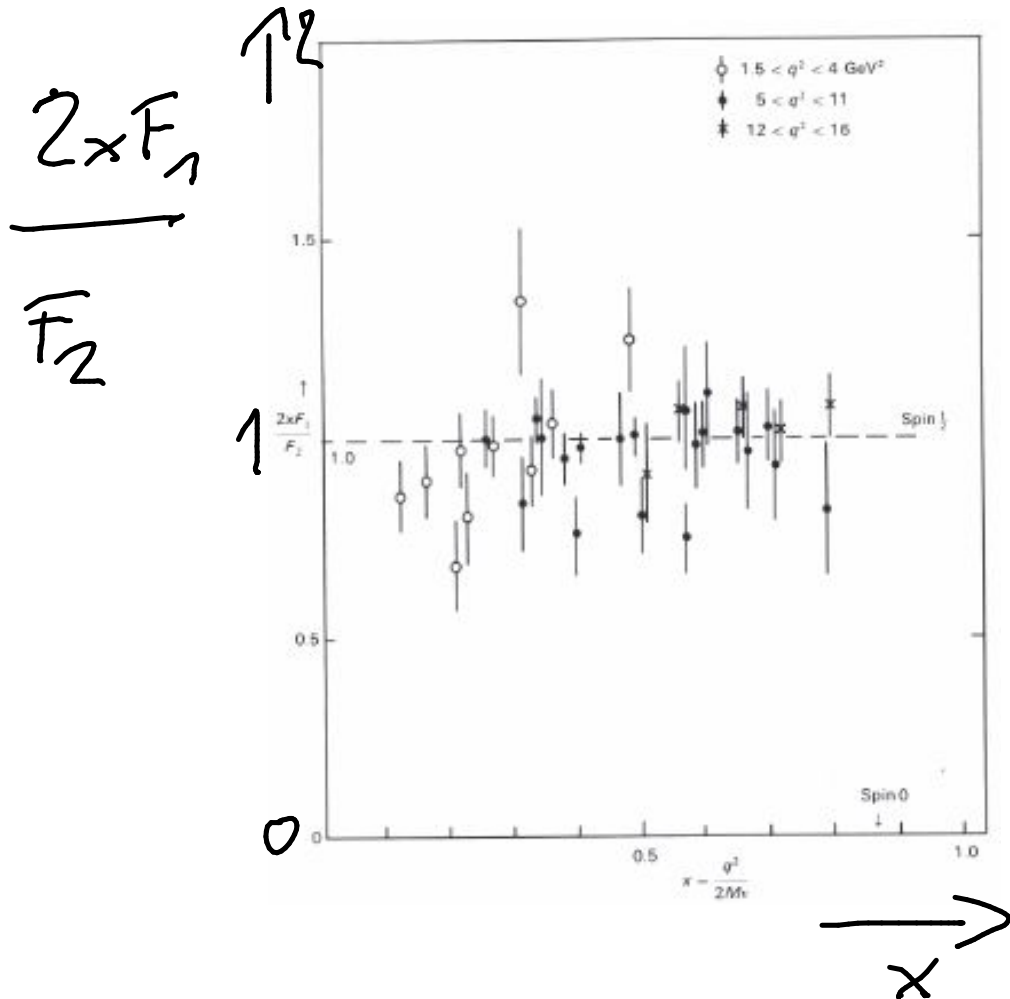
$$F_2(x, Q^2) \cdot c_x$$



→ Q^2

- F_1 beschreibt magnet. Wechselwirkung
d.h. Annahme: Partonen mit Spin $S=0 \rightarrow F_1=0$

$$\underbrace{\quad}_S=0 \quad \underbrace{\quad}_S=\frac{1}{2} \rightarrow 2 \times F_1(x, Q^2) = F_2(x, Q^2)$$



Callan - Gross - Relation

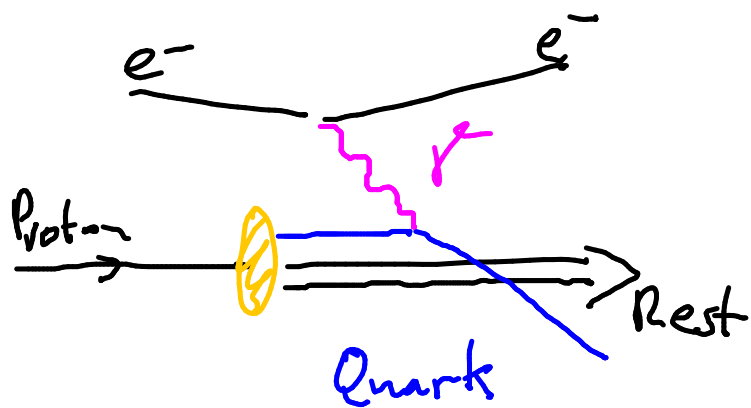
(Beweis Übung: vgl. $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega dx}\right)_{\text{partf.}}$
 $\frac{d\sigma}{d\Omega dx}$ Spin $\frac{1}{2}$)

\Rightarrow Partonen / Quarks haben
Spin $\frac{1}{2}$!

8.2 Partonmodell

- Proton aus punktf. Konstituenten mit Spin $\frac{1}{2}$ (\rightarrow Quarks) aufgebaut.

\Rightarrow tiefinelast. Streuung \rightarrow inkohärente, quasi-elastische Str. am Quark q



Betrachtung im "infinite momentum frame"

$$\rightarrow p_p = (|\vec{p}_p|, 0, 0, |\vec{p}_p|) ; |\vec{p}_p| \gg M c^2$$

$$E_q = \xi E_p$$

$$p_{\perp, q} = p_{\perp, p} = \xi p_{\perp, p} \quad , \vec{p}_{T, q} = 0$$

$$\Rightarrow m_q = \xi M$$

Schwerpunktsenergie e^- -Quark: $\hat{s} = (p_e + p_q)^2 \approx 2 p_e p_q = (2 p_e p_p) \xi = \xi s$
Schwerpunktsenergie e^-p

Bed. für elast. Str. am Quark: $Q^2 = 2 m_q v = 2 \xi M v$

\Rightarrow

$$\xi = \frac{Q^2}{2M_0} \equiv x$$

 \Rightarrow

Bjorken- $x \equiv$ Impulsbruchteil des Partons im Prot- n !

• Inkohärenz: Betr. e^-p Str. mit z.B. $Q^2 = 10 \frac{\text{GeV}^2}{c^2}$, $x = 0.25$
 $(\Delta E \Delta t \approx \hbar)$

$$\Delta E \approx \hbar = \frac{Q^2}{2Mx} = 20 \text{ GeV}$$

$$\text{Kohärenzlänge: } \lambda \approx c \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar c}{\Delta E} = \frac{197 \text{ MeV fm}}{20 \text{ GeV}}$$

$$\approx 0,01 \text{ fm} \ll \phi_{\text{Proton}}$$

\Rightarrow also addieren sich WQs, nicht Amplituden

$$\left(\frac{d^2 \sigma(s)}{dx dQ^2} \right)_{ep} = \sum_{q_i} \left(\frac{d\sigma(\vec{s} = xs)}{dQ^2} \right)_{eq_i} f_{q_i}(x)$$

mit $f_{q_i}(x)$: Wahrscheinlichkeit Parton q_i mit Impulsbruchteil x
 im Proton anzutreffen

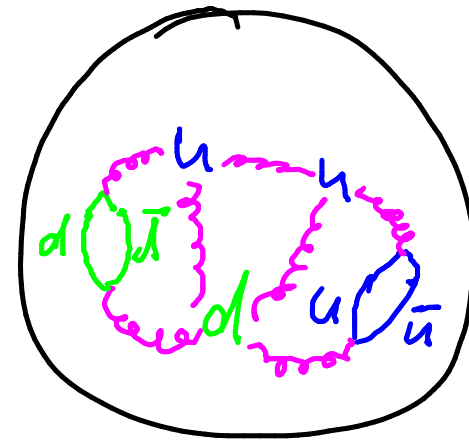
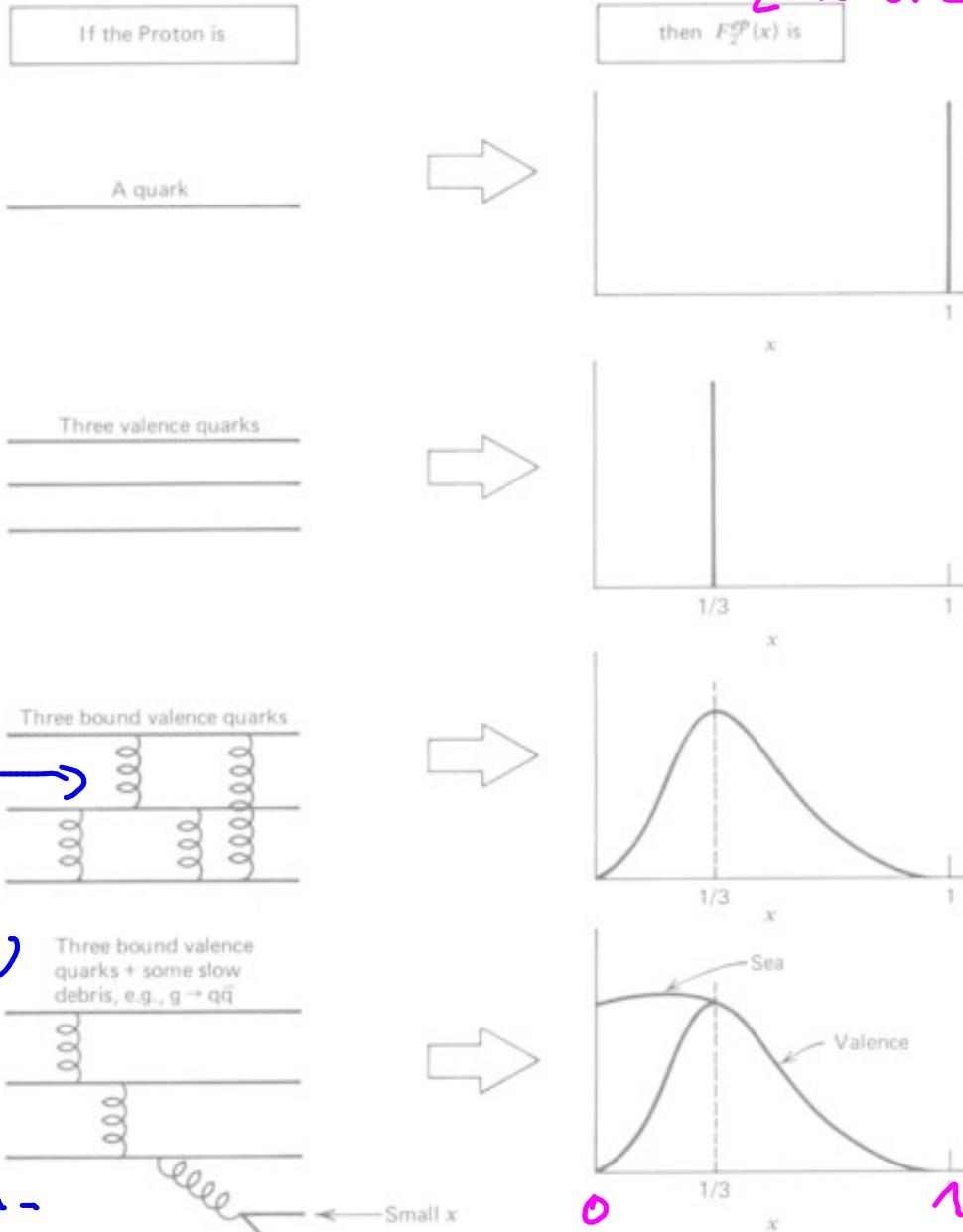
\Rightarrow Partondichtefunktion f_q :

\Rightarrow

$$F_2(x) = x \sum_{q_i} z_{q_i}^2 f_{q_i}(x)$$

Vorstellung der Protonenstruktur

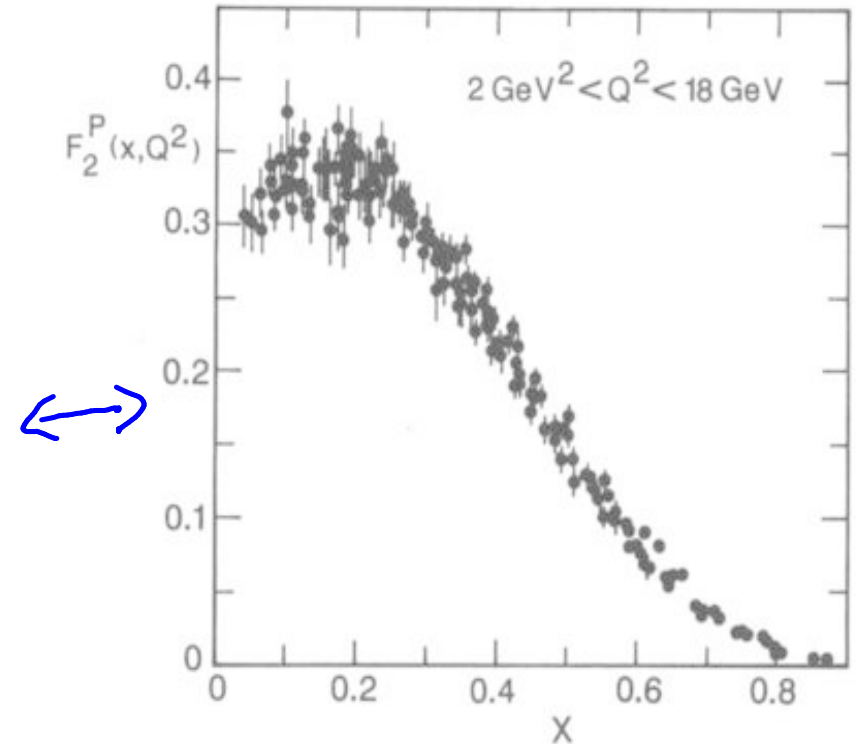
F_2 wäre:



$$z_u = +\frac{2}{3}$$

$$z_d = -\frac{1}{3}$$

Messung:



Gluonen:
Austausch-
teilchen der
starken WW

$g \rightarrow q\bar{q}$
Seaquarks
 \rightarrow aus Gluon-
splitting

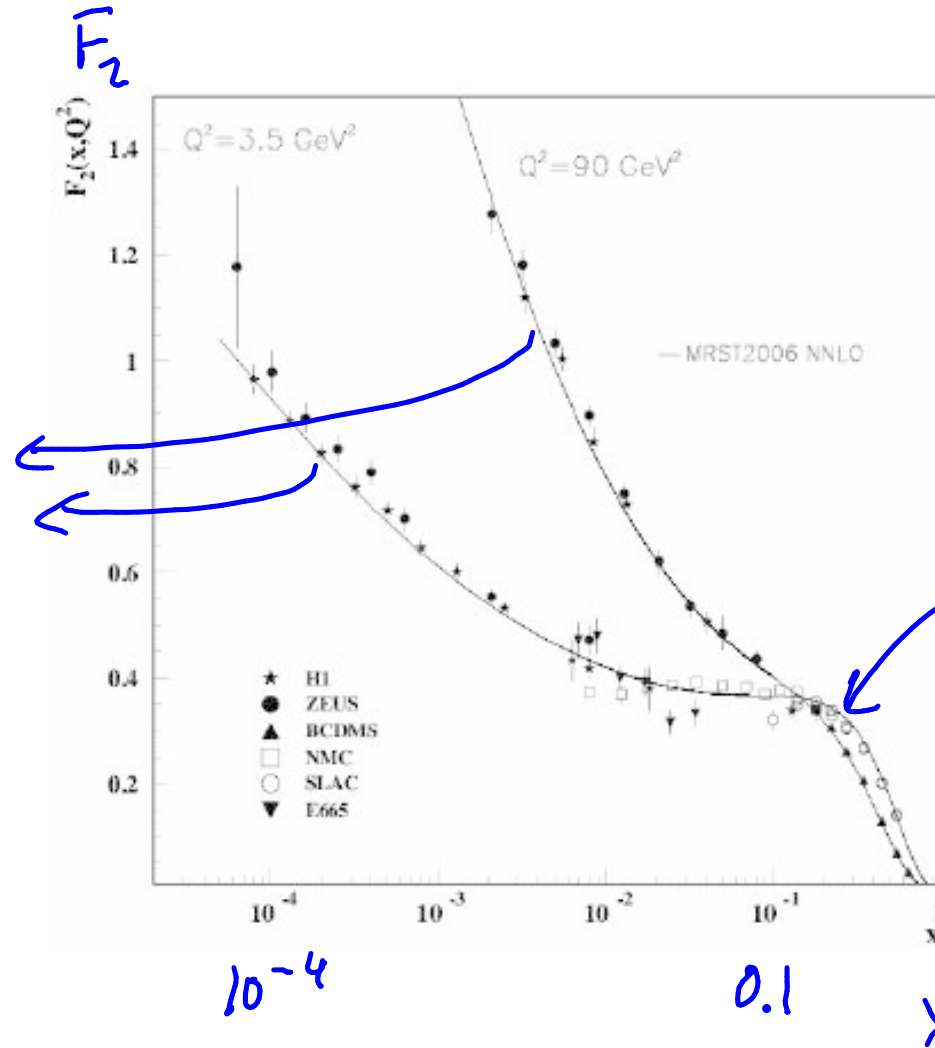
Small x

x

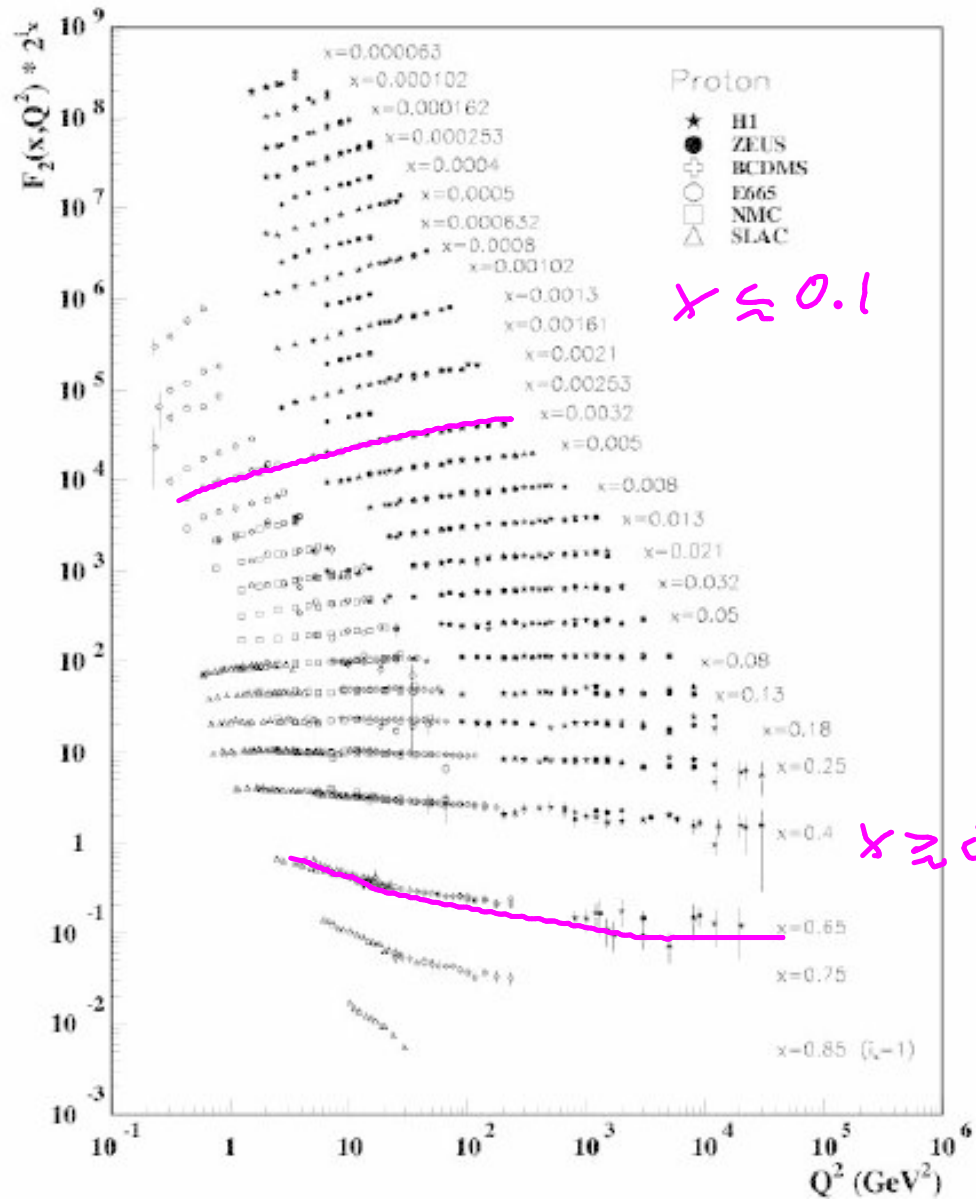
8.3 Messergebnisse zur Protonstruktur

Seesquarks
(aus $g \rightarrow q\bar{q}$)
bei $x \approx 0.1$

starker Anstieg für
 $x \rightarrow 0$



Valenzquarks
bei $x \approx 0.1$

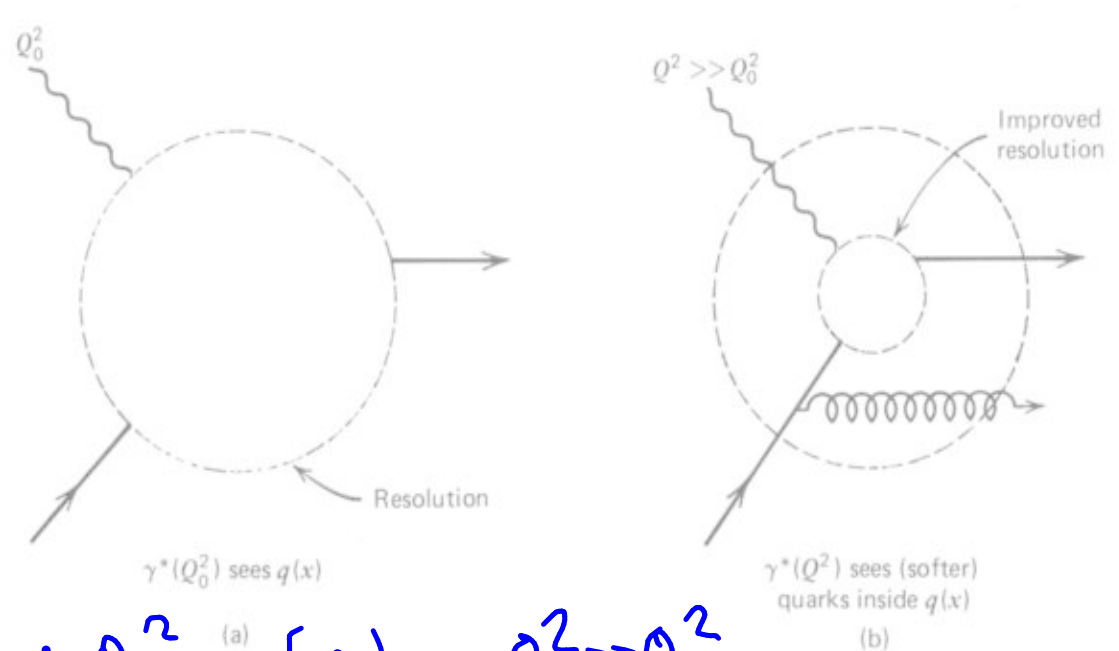


$x \lesssim 0.1$

$x \gtrsim 0.3$

Skalenverh. für $0.2 \lesssim x \lesssim 0.25$
sonst Skalenbrechung

- $x \lesssim 0.1$: F_2 steigt mit Q^2 an
 - $x \gtrsim 0.3$: F_2 fällt mit Q^2 ab
- Erklärung: Auflösung $\Delta x \propto 1/\sqrt{Q^2}$

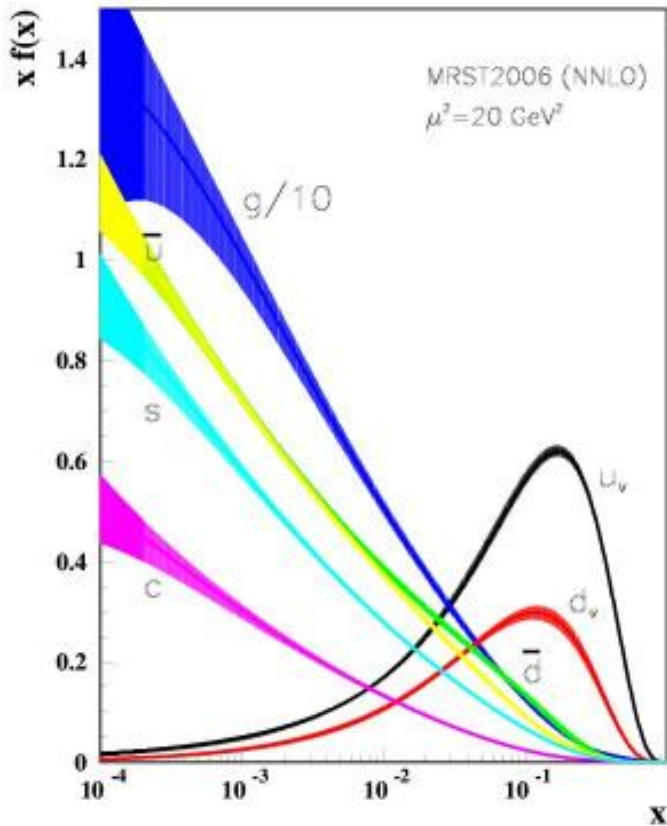


bei Q_0^2 : $q(x_0)$

$Q^2 \gg Q_0^2$
 $q(x_0) \rightarrow q(x_1) + q(x_2)$
 $x_1 < x_0$

Partondichte verteilungen $f_{q_i}(x)$ aus theoretischer Analyse
von Messdaten zu $F_2(x, Q^2)$

$x f(x)$



\Rightarrow • Gluonen dominieren bei
kleinen x

• Impulsbruchteil:

$$\text{Quarks: } \int dx x (q(x) + \bar{q}_i(x)) \approx 0.5$$

$$\text{Gluonen: } \int dx x g(x) \approx 0.5$$

X

9 Quarkstruktur des Hadronen

- Hadronen sind aus Quarks aufgebaute Elementarteilchen

➤ Baryonen: $|q_1 q_2 q_3\rangle$ $q_{1,2,3} = \text{Quarks}$

Beispiel: Proton $|p\rangle = |uud\rangle$, Neutron $|n\rangle = |udd\rangle$

NB: Antibaryonen: $|\bar{q}_1 \bar{q}_2 \bar{q}_3\rangle$ $\bar{q}_{1,2,3} = \text{Antiquarks}$

Es gilt (als exp. Fakt): Baryonzahlerhaltung
mit Baryon $A = +1$, Antibaryonen $A = -1$

d.h.: In keiner bekannten Wechselwirkung kann ein einzelnes Baryon erzeugt / vernichtet werden!

→ Proton ist stabil!

▶ Mesonen : $|q_1 \bar{q}_2\rangle$

Beispiel: Pionen $|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle$, $|\pi^-\rangle = |d\bar{u}\rangle$, $|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle)$

- Nur Baryonen und Mesonen werden in der Natur beobachtet, d.h. keine $(q_1 q_2 \bar{q}_3)$, $(q_1 q_2 q_3 q_4)$, $(q_1 q_2 q_3 q_4 \bar{q}_5)$, ...
- Quarks werden in Mesonen & Baryonen durch eine neue starke Kraft gebunden
 - ▶ freie Quarks bisher nicht experimentell beobachtet!
 - ▶ Vermittler der starken Kraft: Gluon

Quarks

Quantenzahlen (in starker & elmag. Wechselwirkung erhalten)

Familie	Name	Kürzel	elekt. Ladung	Baryonenzahl	starker Isospin $I_3 = \frac{1}{2}$	Strangeness S	Charm (C)	Beauty (B)	Truth (T)
1.	Up	u	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$I_3 = +\frac{1}{2}$	0	0	0	0
	Down	d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$I_3 = -\frac{1}{2}$	0	0	0	0
2.	Charm	c	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	+1	0	0
	Strange	s	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	-1	0	0	0
3.	Top	t	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	+1
	Bottom	b	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	-1	0

so gen. Flavour-Quantenzahlen

NB: ► alle Quarks sind Fermionen mit Spin $\frac{1}{2} \hbar$
 ► zu jedem Quark gibt es ein Antiquark mit negativen Quantenzahlen

starker Isospin

abgesehen von elektr. Ladung sind u, d wie zwei identische Partner
 → Beschreibung durch Spin analoge Größe: Isospin
 d.h. $|u\rangle = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$, $|d\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

⇒ Pionen als Ergebnis von "Isospin"-Addition:

$$2 \otimes 2 = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |1, 0\rangle \oplus |0, 0\rangle = 3 \oplus 1$$

↓
Singulett

Triplet: $|1, +1\rangle \hat{=} |\pi^+\rangle$, $|1, -1\rangle \hat{=} |\pi^-\rangle$, $|1, 0\rangle \hat{=} |\pi^0\rangle$

Bsp.: Anwendung des starken Isospin in $\sigma \sim |\langle f | \hat{H} | i \rangle|^2$
 für $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \pi^+\pi^-$

$$\langle f | \hat{H} | i \rangle = \langle \pi^+\pi^- | \hat{H} | \gamma^* \rangle = \left(\langle 1, +1 | \otimes \langle 1, -1 | \right) | \hat{H} | 0, 0 \rangle$$

$$\left(\langle 2, 0 | \oplus \langle 1, 0 | \oplus \langle 0, 0 | \right) | \hat{H} | 0, 0 \rangle$$

$$\underbrace{\langle 2, 0 | \hat{H} | 0, 0 \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 1, 0 | \hat{H} | 0, 0 \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 0, 0 | \hat{H} | 0, 0 \rangle}_{\neq 0}$$

da \hat{H} elmag WW

➤ Nur Strangeness spielt (neben Charm, Beauty, Truth) noch eine Rolle

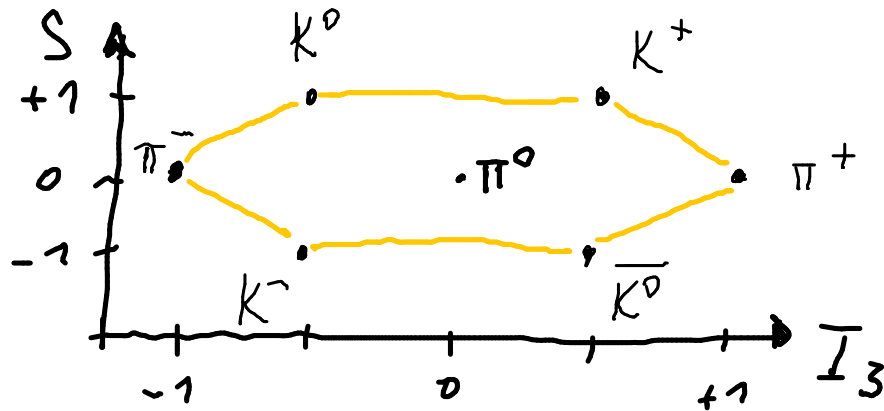
$$\Rightarrow Q = I_3 + \frac{A+S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}$$

starke Hyperladung
 $Y = A + S + (C) + (B) + (T)$

Gellmann-Nishijima-Relation

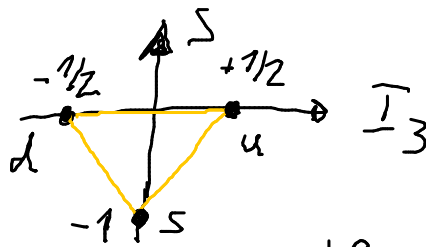
• Multipletts der Hadronen aus leichten u, d, s -Quarks

➤ Mesonen



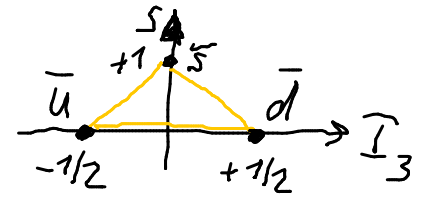
Konstruktion aus

$$3 \cong$$



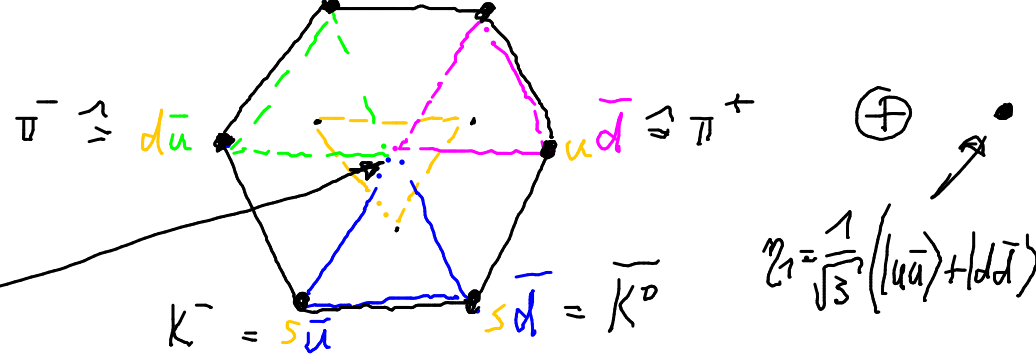
und

$$\bar{3} \cong$$



$$3 \otimes \bar{3} = \nabla \oplus \triangle =$$

$$K^0 \cong d\bar{s} \quad u\bar{s} \cong K^+$$



$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle)$$

$$\left. \begin{aligned} \pi^0 &\cong \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) \\ \eta_8 &\cong \frac{1}{\sqrt{6}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) \end{aligned} \right\}$$

$$= \text{Oktett } 8 \oplus \text{Singulett } 1$$

Baryonen

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (\nabla \otimes \nabla) \oplus \nabla = \dots = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

$$|ddd\rangle \cong \Delta^- \quad \Delta^0 \quad \Delta^+ \quad \Delta^{++} = |uuu\rangle$$

Dekuplett 10

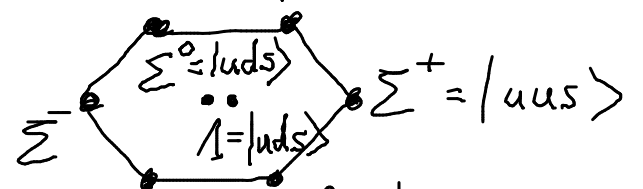
$$\Sigma^{*-} \quad \Sigma^{*0} \quad \Sigma^{*+} = |uus\rangle$$

$$|dss\rangle = \Xi^{*-} \quad \Xi^{*0} = |uss\rangle$$

$$\Omega^- = |sss\rangle$$

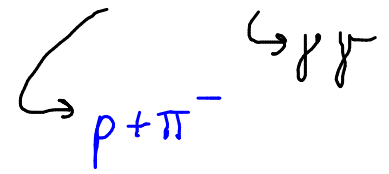
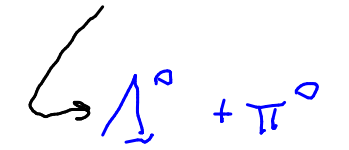
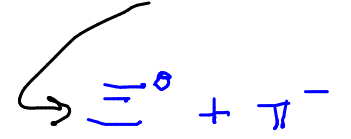
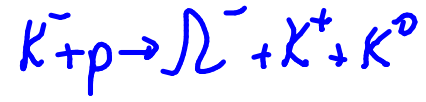
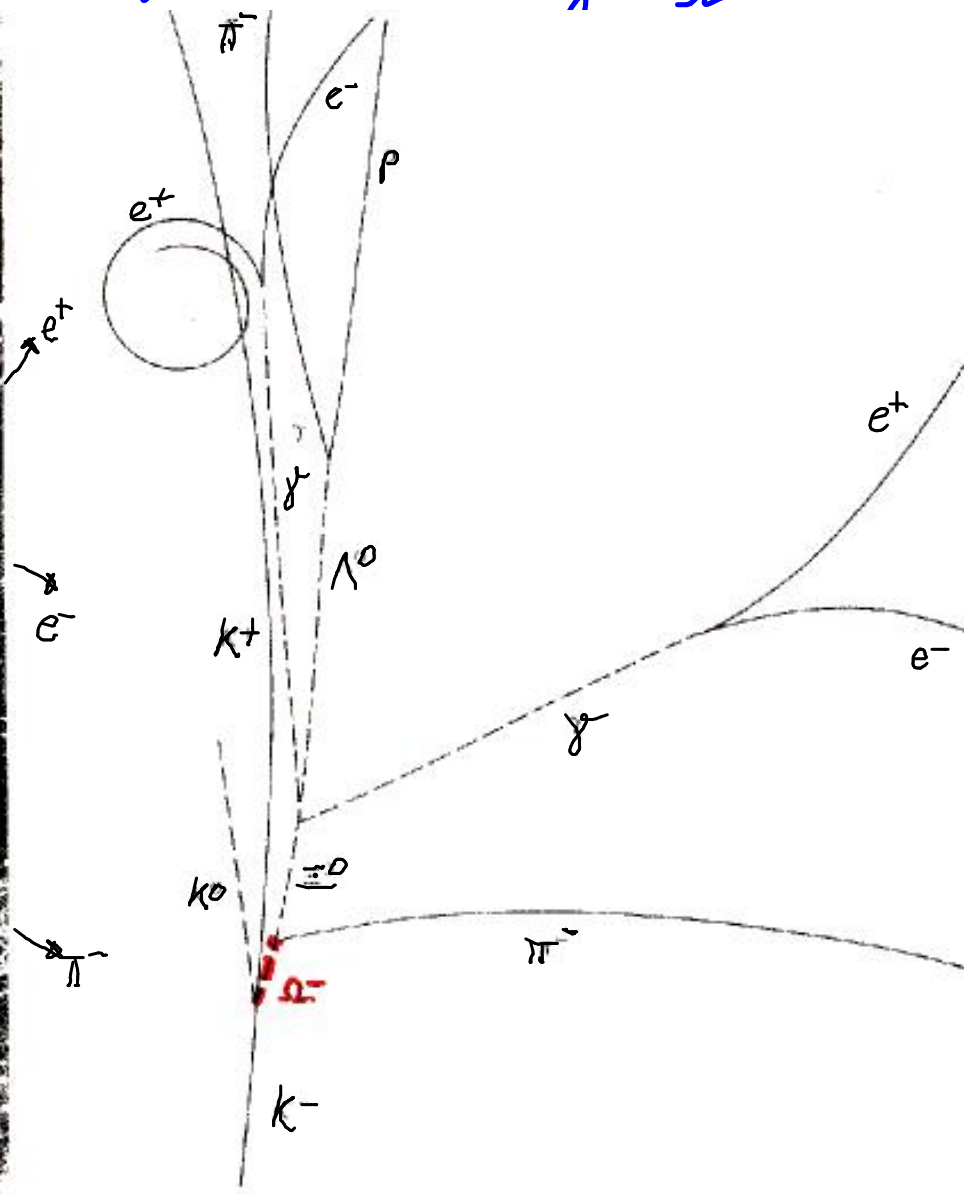
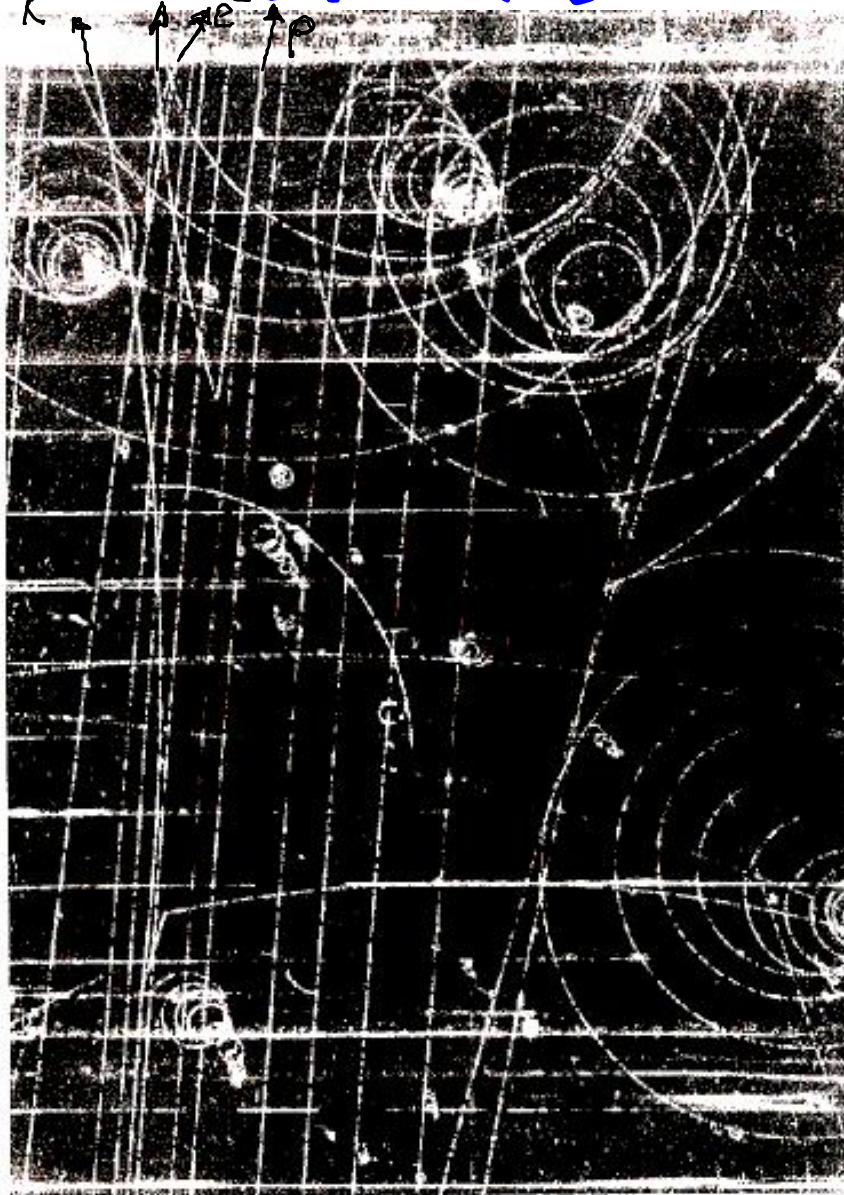
$$|udd\rangle = n \quad p = |uud\rangle$$

Oktett 8



$$|dss\rangle = \Xi^- \quad \Xi^0 \cong |uss\rangle$$

Gellmanns statisches Quarkmodell sagt Ω^- voraus



V.E. Barnes et al.
1964

Figure 1.10 The discovery of the Ω^- . The actual bubble chamber photograph is shown on the left; a line diagram of the relevant tracks on the right. (Photo courtesy Brookhaven)

$\Omega^- = |sss\rangle$ ist völlig symmetrische Wellenfunktion identischer Fermionen

Pauli-Verbot?

→ Postulat der "Farbladung" (colour charge) der Quarks:

z.B.: $|\Omega^-\rangle = |s_r s_g s_b\rangle$

d.h. Quarks durch Farbladung unter-schieden → Pauli-Verbot ✓

▶ Farbladung nur innerhalb der Hadronen, d.h.

Hadronen sind farbneutral

Baryon: $r + g + b = \text{weiß}$

Meson: $r + \bar{r} = g + \bar{g} = \dots = \text{schwarz}$

NB: Gesamtwellenfkt. $|\Psi\rangle = |\text{ort}\rangle \cdot |\text{Spin}\rangle \cdot |\text{Flavour}\rangle \cdot |\text{Farbladung}\rangle$ wird durch $|\text{Farbladung}\rangle$ antisymmetrisiert

• Experimenteller Beweis der Farbladung

$$R := \frac{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)_{\text{elekt. Quarkladung } Q}}{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)_{\text{N}_c\text{-Farbkombinationen}} = \frac{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)} = N_c \cdot \frac{(Q_u^2 + Q_d^2 + \dots + Q_b^2)}{11/9} = \frac{3.67 N_c=3}{2.22 N_c=1}$$

Experimentelle Resultate zu R:

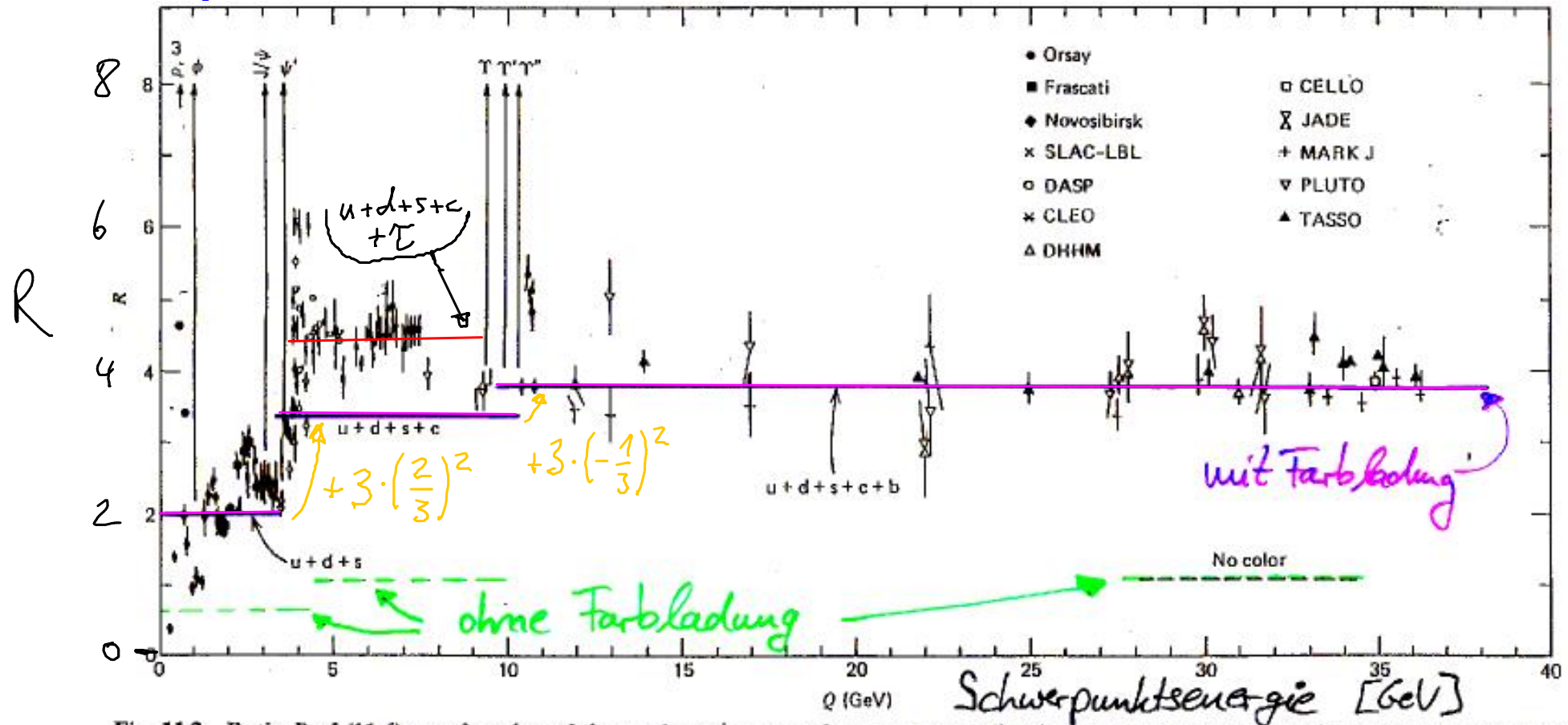


Fig. 11.3 Ratio R of (11.6) as a function of the total e^-e^+ center-of-mass energy. (The sharp peaks correspond to the production of narrow 1^- resonances just below or near the flavor thresholds.)

⇒ Farbladung existiert & $N_c = 3$

NB: Höhe der Stufen → elektr. Ladung der Quarks!

10 Symmetrien & Erhaltungsgrößen

Symmetrien (von Bewegungsgleichungen) haben eine große Bedeutung!

Emmy Noether (1917)

Symmetrie \leftrightarrow Erhaltungssätze

- z.B.

Translationsinvarianz	\leftrightarrow	Impulserhaltung
Zeit — " —	\leftrightarrow	Energie — " —
Rotation — " —	\leftrightarrow	Drehimpuls — " —
Eichtransformationen — " —	\leftrightarrow	Ladungs — " —

in E-Dynamik:

Vektorfeld \vec{A}	\rightarrow	$\vec{A} - \vec{\nabla} \chi$	} ohne Einfluss auf Lösung der Maxwell-Gleichungen	} $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
Potential ϕ	\rightarrow	$\phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$		
		$\chi = \chi(\vec{r}, t)$		$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$

\Downarrow

Ladungsdichte erhalten: $\rho \sim \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dots$

sind Beispiele für kontinuierliche Symmetrien, Erhaltungsgrößen additiv

diskrete Symmetrien: nur endliche Anzahl von Werten

\hat{P}

: Parität (Raumspiegelung) Eigenwerte: $P = \pm 1$

$$\hat{P}: (\vec{x}, t) \mapsto (-\vec{x}, t)$$

$$\hat{P}: (E, \vec{p}, \vec{L}, \vec{S}, \dots) \mapsto (+E, -\vec{p}, +\vec{L}, +\vec{S}, \dots)$$

$\vec{p} \times \vec{p}$ Spin

$$\hat{P}: |Y_l^m(\theta, \varphi)\rangle \mapsto (-1)^l \cdot |Y_l^m(\theta, \varphi)\rangle$$

Elementarteilchen besitzen intrinsische (innere) Parität/Eigenparität

$$\blacktriangleright \text{Photon (vgl. Kap. 3.7)} \quad P_\gamma = -1$$

$$\blacktriangleright \text{Fermionen (Quark & Lepton)} \quad P := +1$$

$$\text{Antifermionen} \quad P := -1$$

$$\Rightarrow \text{Baryon (mit } l=0\text{)}: \hat{P} |qqq\rangle = (+1)^3 \cdot |qqq\rangle = + |qqq\rangle$$

$$\text{Antibaryonen } (-u-): \hat{P} |\bar{q}\bar{q}\bar{q}\rangle = (-1)^3 \cdot |\bar{q}\bar{q}\bar{q}\rangle = - |\bar{q}\bar{q}\bar{q}\rangle$$

$$\text{Meson (mit } l\text{)}: \hat{P} |q\bar{q}\rangle = (+1) \cdot (-1) \cdot (-1)^l |q\bar{q}\rangle = -(-1)^l |q\bar{q}\rangle$$

Bezeichnung:

▶ Skalare Teilchen	:	$J = L + S = 0$	und	$\underline{P} = +1$
▶ Pseudoskalare ---	:	$J = 0$		$\underline{P} = -1$
▶ Vektor teilchen	:	$J = 1$		$\underline{P} = -1$
▶ Axialvektorkilchen	:	$J = 1$		$\underline{P} = +1$

Kurznotation: J^P mit $J^P = 0^+, 0^-, 1^-, 1^+$

NB: Parität \hat{P} ist in elektromagn. & starker Wechselwirkung erhalten



Ladungskonjugation, Eigenwerte $C = \pm 1$

\cong Vorzeichenänderung aller ladungsartigen Quantenzahlen
z. B. Ladung Q , magnet. Moment μ , Baryonzahl, ...

$$\hat{C} |\text{Proton}\rangle = \hat{C} |p\rangle \mapsto |\bar{p}\rangle = |\text{Antiproton}\rangle$$

Eigenzustände zu \hat{C} können nur Teilchen sein
mit ladungsartige Quantenzahlen = Null

z. B. $\pi^0, \eta, \gamma, \dots$

nicht $K^0 = |d\bar{s}\rangle$, da $S = +1 \neq 0$; nicht $n = |udd\rangle$, da $A = +1 \neq 0$

▶ Photon: $\hat{C} |\gamma\rangle \rightarrow -1 \cdot |\gamma\rangle$

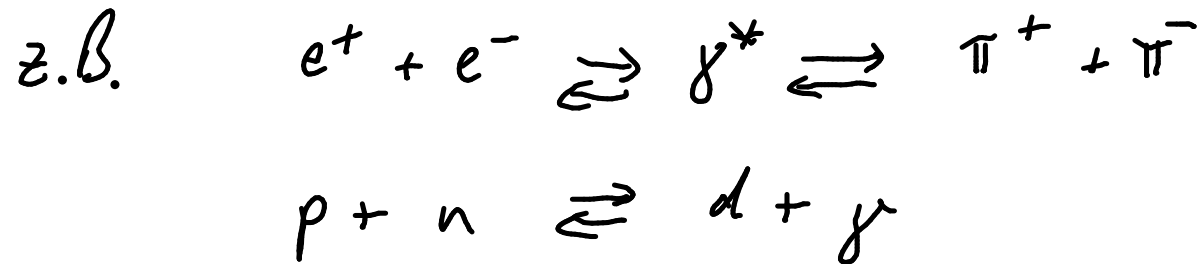
↳ für n Photon $\hat{C} |\gamma \dots \gamma\rangle \rightarrow (-1)^n \cdot |\gamma \dots \gamma\rangle$

z. B. $\hat{C} |\pi^0\rangle \rightarrow (-1)^2 \cdot |\pi^0\rangle = +1 \cdot |\pi^0\rangle$ wegen $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$



Zeitumkehr: dreht Zeitpfeil um
 $\blacktriangleright \hat{T}: (\vec{x}, t) \mapsto (\vec{x}, -t)$

Zeitumkehrinvarianz \iff reversible Prozesse



im Gleichgewicht

CPT - Theorem

Alle Wechselwirkungen müssen invariant sein unter gemeinsamer Anwendung $\hat{C}, \hat{P}, \hat{T}$

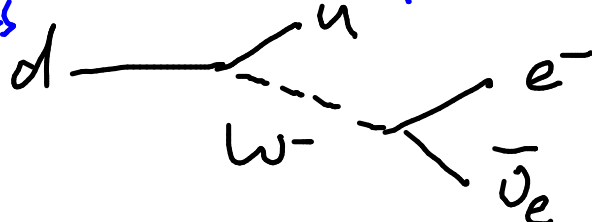
d.h. Eine Antiwelt, die durch einen Raumspiegel betrachtet und in der alle Prozesse rückwärts ablaufen, ist von unserer Welt ununterscheidbar!

Wechselwirkung	\hat{P}	\hat{C}	\hat{T}	$\hat{C}\hat{P}$
▶ elektromagnet.	✓	✓	✓	✓
▶ stark	✓	✓	✓	✓
▶ schwach (β -Zerfall)	✗	✗	✓	✓ (fast)

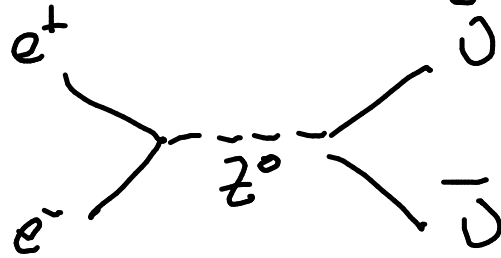
(✓ $\hat{=}$ erhalten
✗ $\hat{=}$ verletzt)

11. Schwache Wechselwirkung

- schwache WW wird über die massiven Bosonen W^\pm , Z vermittelt (geladener Strom)
- z. B. β -Zerfall des Neutrons



- $e^+ e^-$ -Annihilation



(neutraler Strom)

- vorerst: betrachte schwache WW als Punkt WW (\rightarrow formelle Einführung der schwachen Eichbosonen in Kap. 12)
- schwache WW koppelt an alle Quarks und Leptonen

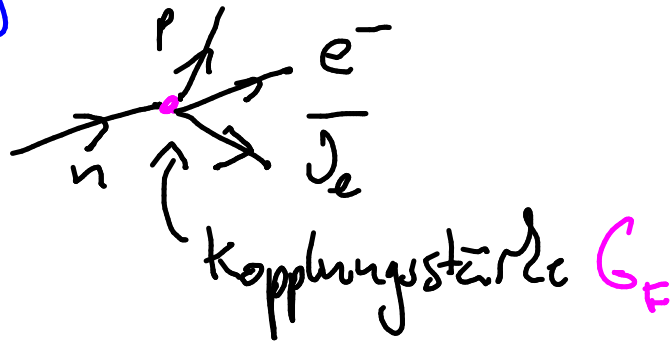
• Leptonen

Familie	Name	Notation	Masse [MeV/c ²]	Lebens- dauer	elektr. Ladung	Lepton-(Quanten-)zahl		
						L _e	L _μ	L _τ
1.	Elektron-Neutrino	ν_e	≈ 0	∞	0	+1	0	0
	Elektron	e^-	0.511	∞	-1	+1	0	0
2.	Myon-Neutrino	ν_μ	≈ 0	∞	0	0	+1	0
	Myon	μ^-	105.66	2.2 μs	-1	0	+1	0
3.	Tau-Neutrino	ν_τ	≈ 0	∞	0	0	0	+1
	Tau	τ^-	1777	291 fs	-1	0	0	+1

- Alle Leptonen sind Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}\hbar$
- Zu jedem Lepton gibt es ein Antilepton, z. B. $e^- \leftrightarrow e^+$, $\nu_e \leftrightarrow \bar{\nu}_e$
- Neutrinos sind fast masselos ($m_{\nu_e} < 2\text{eV}/c^2$)
- Leptonenzahl in schwacher WW erhalten
 z. B. $\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$
 $L_\mu = +1 = 0 + 0 + (+1)$
 $L_e = 0 = (+1) + (-1) + 0$
 - L_e, L_μ, L_τ nicht exakt erhalten (aufgrund ν -Oszillationen, z. B. $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$)
 (nur Summe $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ in allen Exp. exakt erhalten)
- Flavour-Quantenzahlen der Quarks in schwacher WW nicht erh.
 $d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$ (β^- -Zerfall)
 $s \rightarrow u + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ ($K^0 \rightarrow \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$) } geladener Strom
- jedoch im neutralen Strom erhalten
 z. B. $s \rightarrow d + e^+ + e^-$ verboten (keine FCNC)
- $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$ sind unterschiedliche Teilchen

11.1. Fermi - Theorie des β -Zerfalls

- Neutronzerfall $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ vor E. Fermi 1934 in Näherung einer Punktwechselwirkung betrachtet



$$m_e c^2 \leq E_e \leq E_0 = m_n c^2 - m_p c^2 = 1253 \text{ eV}$$

Aus Fermis Goldener Regel (s. Kap. 7)

$$\omega = \frac{2\pi}{\hbar} \underbrace{|\mathcal{M}_{fi}|^2}_{=: \frac{G_F^2}{V^2} |\tilde{\mathcal{M}}_{fi}|^2} \cdot S_f(E_0, E_e)$$

folgt:

$$\frac{d\omega(E_e)}{dE_e} = \frac{2\pi}{\hbar V^2} G_F^2 |\tilde{\mathcal{M}}_{fi}|^2 \frac{dS_f(E_e)}{dE_e}$$

⇒ Zerfallsbreite Γ_n bzw. Lebensdauer τ_n des Neutrons $(N_n(t) = N_n(0) \cdot e^{-\Gamma_n t})$

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar \int_{m_e c^2}^{E_0} \frac{d\omega}{dE_e} dE_e = 2\pi G_F^2 \frac{|\tilde{M}_{fi}|^2}{\sqrt{2}} \int_{m_e c^2}^{E_0} \frac{dS_f}{dE_e} dE_e$$

mit (Kap. 7): $\frac{dS_f}{dE_e} = v \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} p_e^2 \frac{dp_e}{dE_e} \sqrt{\frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3}} p_0^2 \frac{dp_0}{dE_0}$

$$\Rightarrow \Gamma = 2\pi G_F^2 |\tilde{M}_{fi}|^2 \cdot \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \underbrace{\int_{m_e c^2}^{E_0} E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} (E_0 - E_e)^2 dE_e}_{E_0 \gg m_e c^2 \rightarrow \approx \frac{1}{30} E_0^5}$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \left(\frac{G_F}{(\hbar c)^3} \right)^2 \cdot \frac{|\tilde{M}_{fi}|^2}{60\pi^3} E_0^5$$

(auf. Ableitung in Übungsblatt 6)

$$\Rightarrow \tau \propto \frac{1}{E_0^5} \quad (\text{Sargent-Regel})$$

155) Zahl der Zerfälle mit e^- -Energie E_e

$$\frac{dN}{dE_e} \propto \frac{d\omega}{dE_e} = \frac{1}{2\pi^3 h} \left(\frac{G_F}{(\hbar c)^3} \right)^2 \cdot |\tilde{M}_{fi}|^2 \cdot E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \cdot (E_0 - E_e)^2$$

bei Atomkernen Coulombkorrektur $\frac{dN}{dE_e} \propto F(E_e, Z) \cdot \frac{d\omega}{dE_e}$ (Fermi-F.)

$$\Rightarrow \frac{dN/dE_e}{E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \cdot F(E_e, Z)} \propto (E_0 - E_e)^2$$

(Kurie - Darstellung)

$$\Rightarrow m_{\nu_e} < \frac{2 \text{ eV}}{c^2} \text{ (Mainz-Tritium-Exp.)}$$

2005

Katrin-Exp. (Karlsruhe, im Aufbau) : Sensitivität $\approx 0.2 \text{ eV}$

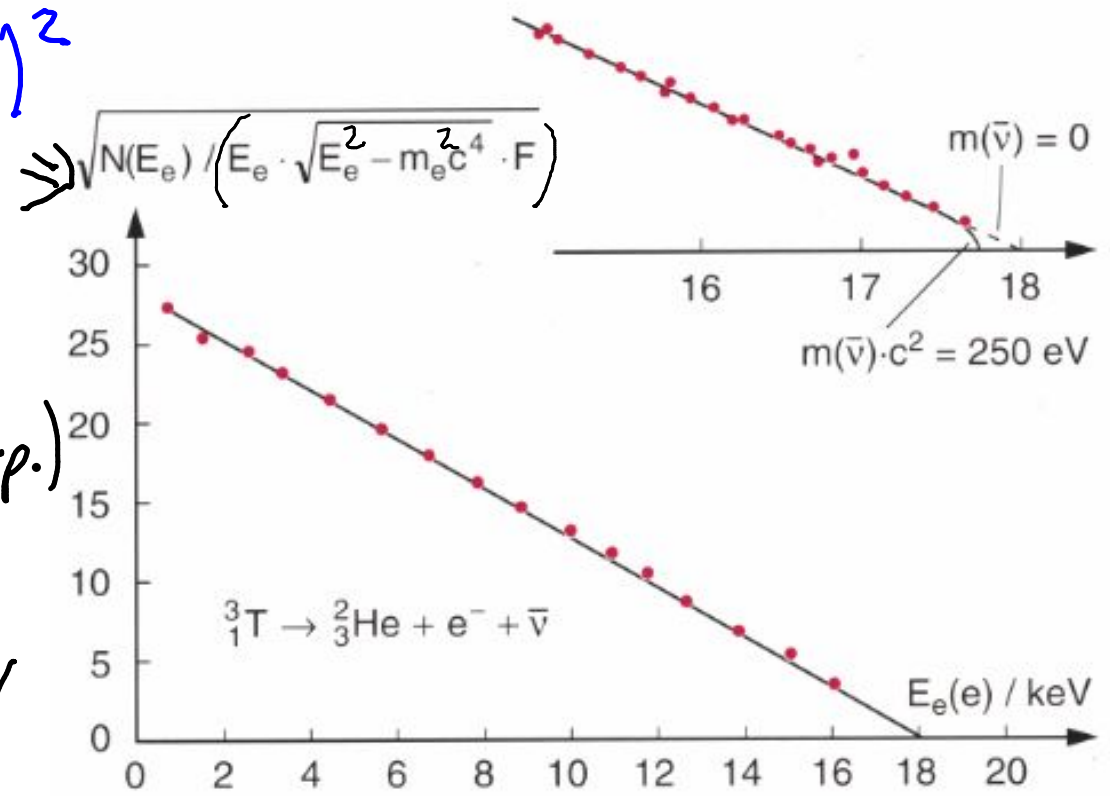


Abb. 3.26. Fermi-Kurie-Diagramm für den β^- -Zerfall des Tritiums ${}^3_1\text{T}$

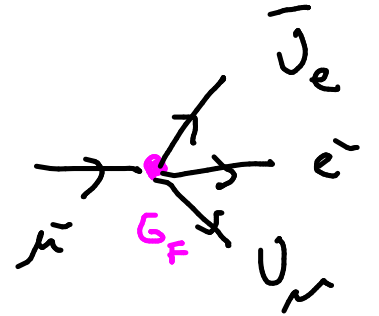
Transport des Spectromètres du Katrin - Expérimentales





11.1.1 Fermi-Konstante G_F

G_F bestimmt man experimentell aus Myon-Zerfall



mit $E_0 = m_\mu c^2$ erhält man:
$$\frac{1}{\tau_\mu} = \frac{1}{192\pi^3} \left(\frac{G_F}{(\hbar c)^3} \right)^2 (m_\mu c^2)^5$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_\mu = 2,1970 \cdot 10^{-6} \text{ s} \\ m_\mu = 105,65836 \text{ MeV}/c^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1,1664 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

- kleiner Wert von $G_F \rightarrow$ geringe Stärke der schwachen WW
 - G_F Bestimmung aus Neutron bzw. Kernzerfällen ergibt gleichen Wert (jedoch ungenauer)
- $\Rightarrow G_F$ ist universell (sowohl für Leptonen, als auch Quarks)

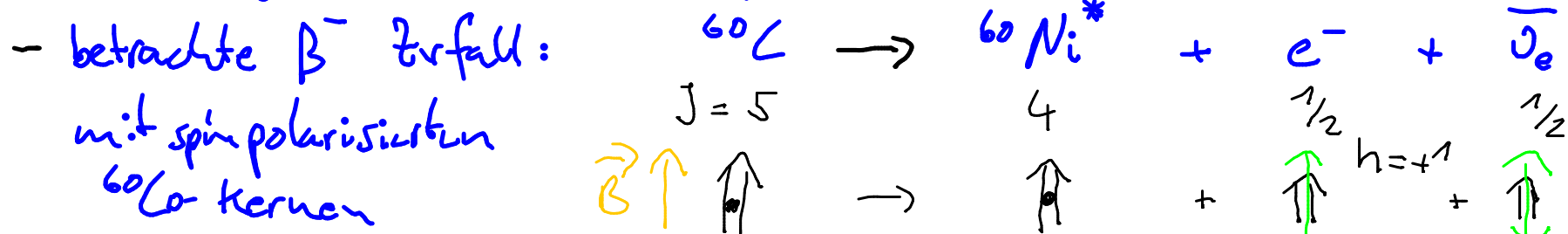
11.2 Paritätsverletzung im schwachen Zerfall

- bei Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen kann (vereinfacht, da eigentlich zeitl. Mittelwert der Projektion)
 - der Spin \uparrow in **Flugrichtung \uparrow** ($\hat{=}$ Rechtsschraube \uparrow , rechtshändig)
 - der Spin \downarrow entgegen der **Flugrichtung \uparrow** ($\hat{=}$ Linksschraube \downarrow , linkshändig)
- gerichtet sein

- Messgröße: Helizität $h := \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{p}|}$

mit Erwartungswert $\langle h \rangle = \pm \frac{v}{c}$ für \uparrow

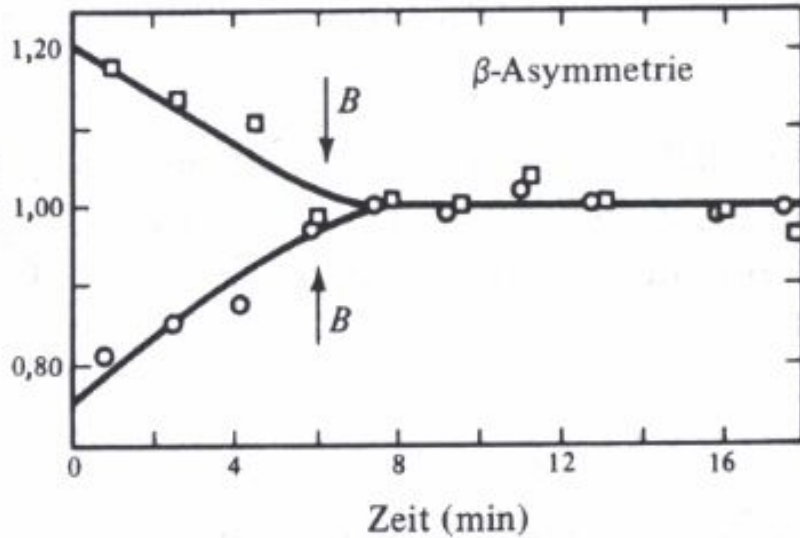
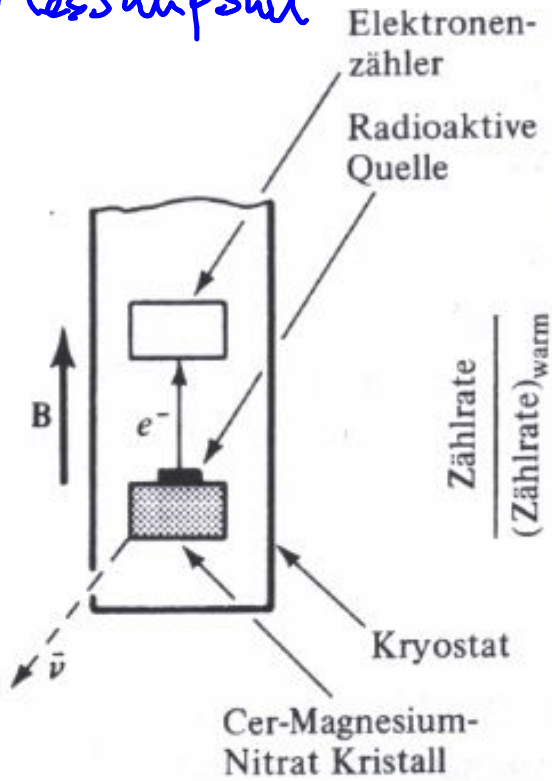
- Paritätsoperator \hat{P} ändert Helizität $\hat{P}(\vec{s} \cdot \vec{p}) = (+\vec{s}) \cdot (-\vec{p}) = -\vec{s} \cdot \vec{p}$
- Beobachtung der Paritätsverletzung: Experiment von C.S. Wu et al. (1957)



($\bar{\nu}_e$ -Richt. muss nicht antip. zur e^- -R. sein, aufgr. Kernrückstoß)

• Ausrichtung des ^{60}Co -Kernspins: bei tiefen Temperaturen ($\approx 0.01\text{K}$) durch Magnetfeld \vec{B}
 (Abkühlung durch adiabatische Entmagnetisierung eines paramagnetischen Salzes, CeMg -Nitrat)

• Messaufbau



- CeMg -Nitrat erwärmt sich
 \rightarrow Spinpolarisation von ^{60}Co verschwindet

• Beobachtung:
 e^- werden bevorzugt antiparallel zum ^{60}Co -Spin emittiert, also:

$$^{60}\text{Co} \uparrow + e^- \downarrow + \vec{J}_e \uparrow$$

$\chi = -\frac{v}{c}$ (links)

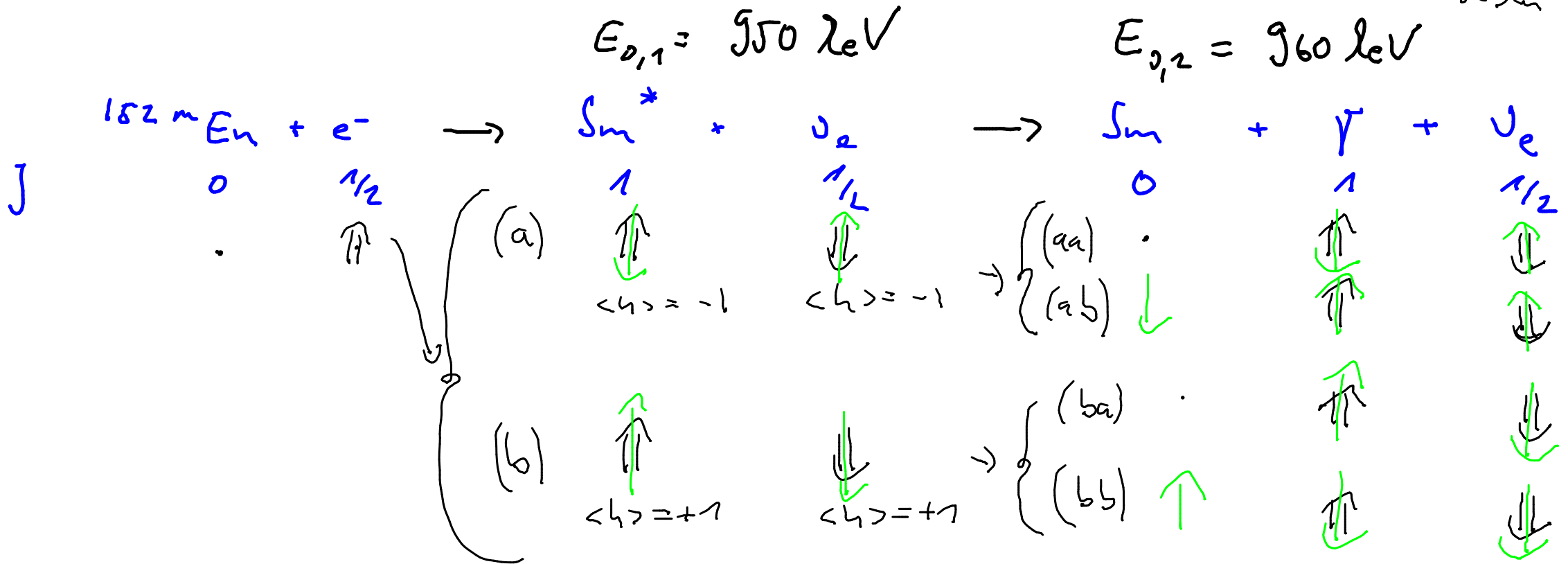
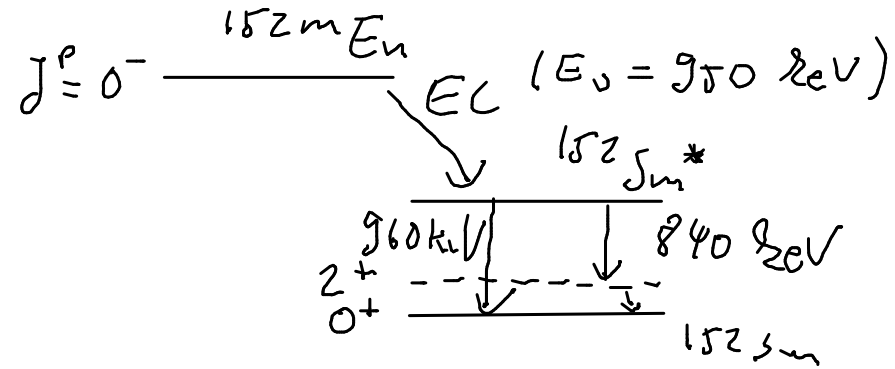
- Observable $\vec{J}(^{60}\text{Co}) \cdot \vec{p}(e)$ ist Pseudoskalar
 (Erh. der P. : e^- gl. häufig l und r händig)

\Rightarrow Schwache WW verletzt Parität! (Erh. der P. : e^- gl. häufig l und r händig)

\Rightarrow Schwache WW unterscheidet zw. links- und rechtshändigen Fermionen!

11.2.1 Helizität des Neutrinos

Experiment von Goldhaber (1958)



- (aa), (ba): γ -Emission in Vorwärtsrichtung (Richt. von Sm^*)
 $\rightarrow \gamma$ hat identische Helizität wie ν_e

→ S_{m} fast in Ruhe, da $E_{\gamma} \approx E_{0e}$

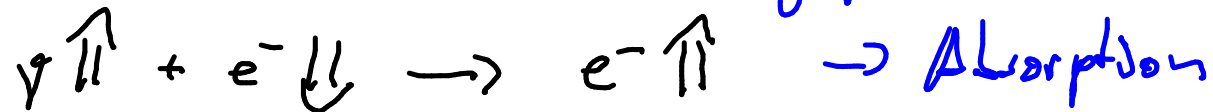
- Selektion von γ -Emission in Vorwärtsrichtung durch resonante Streuung:



nur für $E_{\gamma_1} > \Delta E(S_m^* \rightarrow S_m)$ (Kernrückstoß!),
d.h. Vorwärt., also (aa) bzw. (ba) möglich

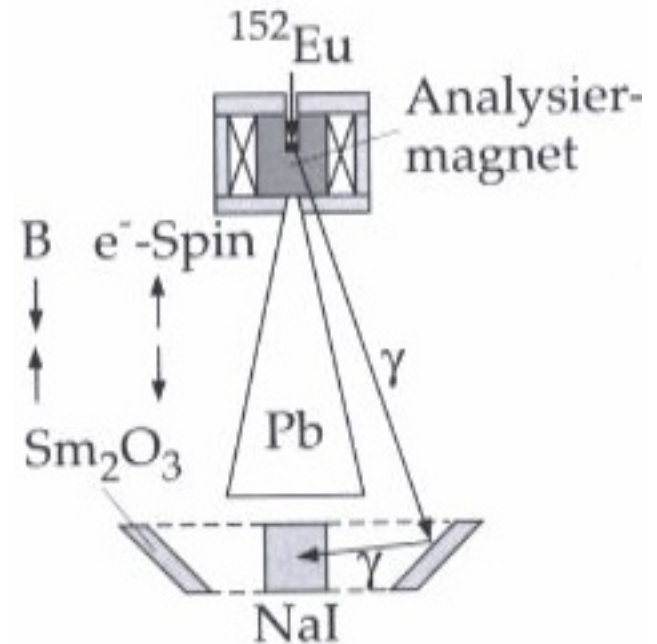
- Messung der (bzw. Filter auf) Zirkularpolarisation des γ mittels magnetisierten Eisen

$\vec{B} \uparrow \cong \downarrow$ Spin der ungepaarten e^-



→ Unterscheidung von (aa), (ba) $\Rightarrow h_{\gamma} = -1 \Rightarrow$

$$h_0 = -1$$



⇒ Helizität der (Anti-) Fermionen in Reaktionen des geladenen Stroms der schwachen WW:

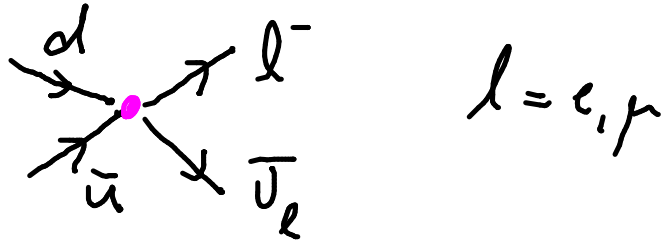
$$\left. \begin{array}{l} \text{Fermionen: } \nu_e : \langle h_{\nu_e} \rangle = -1 \\ e^- : \langle h_{e^-} \rangle = -\frac{v}{c} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{links-händig} \\ \bar{V}_L \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Antifermionen: } \bar{\nu}_e : \langle h_{\bar{\nu}_e} \rangle = +1 \\ e^+ : \langle h_{e^+} \rangle = +\frac{v}{c} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{rechts-händig} \\ \bar{V}_R \end{array}$$

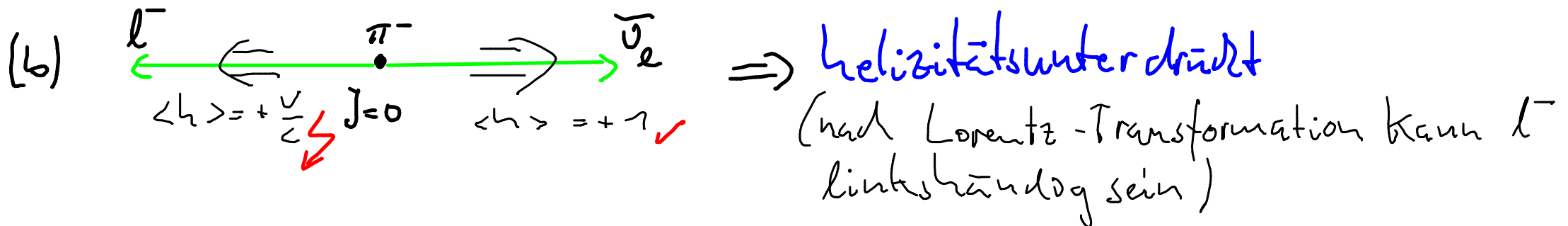
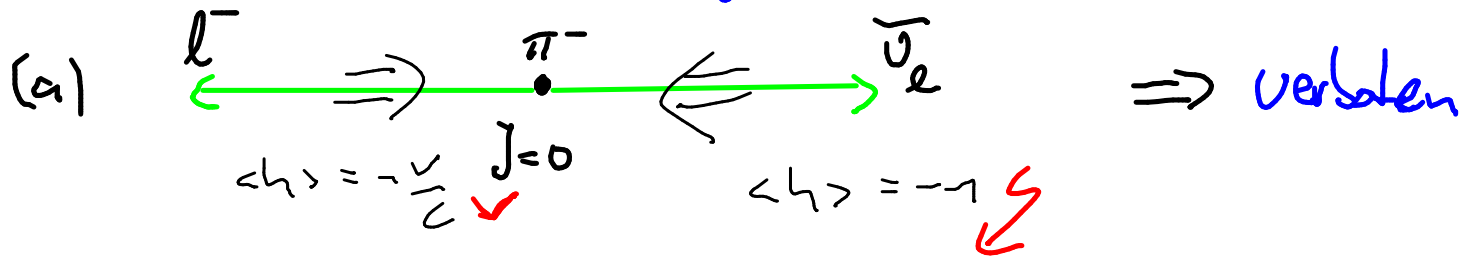
- gilt analog für alle (Anti-) Leptonen und (Anti-) Quarks

11.2.2 Paritätsverletzung bei Elementarteilchen: π^- -Zerfall

- $J^P(\pi^-) = 0^-$: Pseudoskalar
- $|\pi^- \rangle = |d\bar{u}\rangle$: $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ und $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ sind mögl.



- Drehimpulserhaltung im Zerfall.



$$|M_{fi}|^2 \propto (1 - \langle h_e^- \rangle) (1 + \langle h_{\bar{0}} \rangle) = \begin{cases} (a): 0 \\ (b): 1 - \beta = \dots = \overset{\text{Übung}}{\downarrow} = \frac{2m_e^2}{m_\pi^2 + m_e^2} \end{cases}$$

Zustandsdichte: $\rho_e \propto p_e^2 \frac{dp_e}{dE_e} = p_e^2 \frac{dp_e}{c^2 dm_\pi} = \dots$

$$= \frac{1}{c} \frac{(m_\pi^2 - m_e^2)^2 \cdot (m_\pi^2 + m_e^2)}{4 m_\pi^4}$$

\Rightarrow Zerfallratenverhältnis:

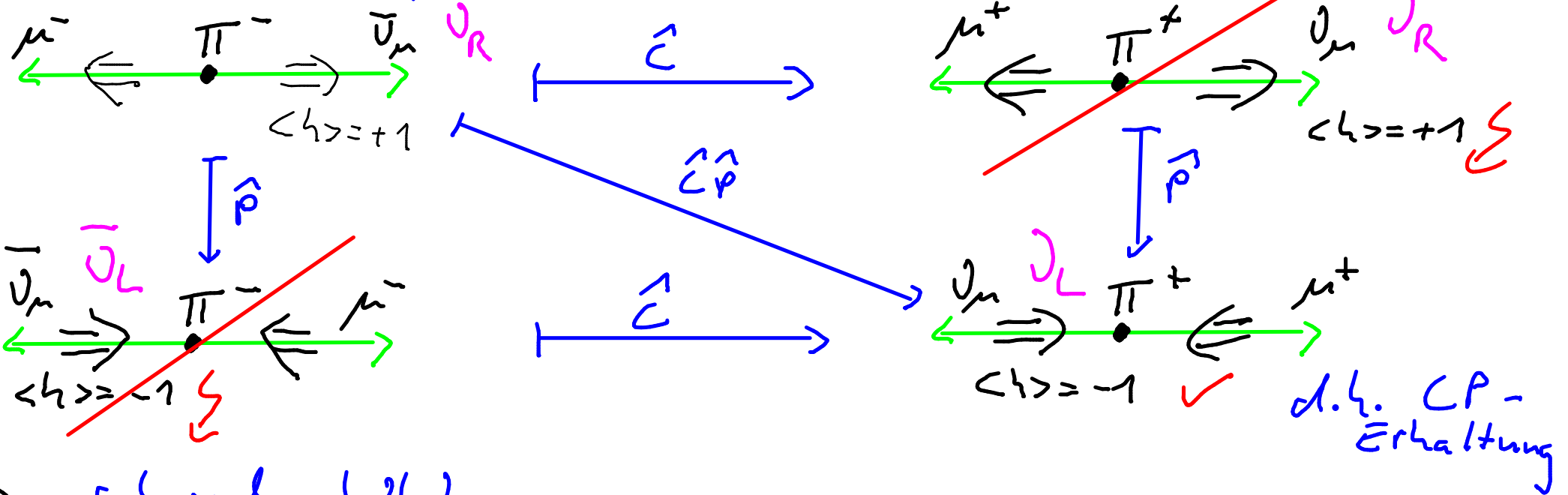
$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = \frac{2\pi |M_{fi}^e|^2 \cdot \rho_e}{2\pi |M_{fi}^\mu|^2 \cdot \rho_\mu} = \frac{m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} = 1.283 \cdot 10^{-4}$$

mit $m_\pi^\pm = 139.57 \text{ MeV}/c^2$

vgl. Experiment $\frac{\Gamma_{e^-}}{\Gamma_{\mu^-}} = (1.230 \pm 0.004) \cdot 10^{-4}$

11.2.3 C-Verletzung, CP-Symmetrie

• betrachte $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ Zerfall



d.h. CP-Erhaltung

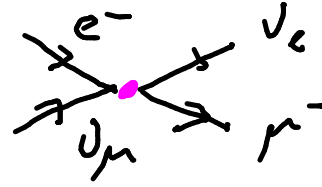
⇒ Schwache WW

- verletzt P- wie auch C-Symmetrie
- erhält CP-Symmetrie (in fast allen Reaktionen)

Verletzung der CP-Symmetrie beobachtet in Zerfällen des K^0 und Mesonen mit einem b-Quark (B^0, B^+)

12 Elektroschwache WW

- Grenze der Fermi-Theorie
 - betrachte $\nu_n e^-$ -Streuung



- mit Fermis Goldener Regel kann gezeigt werden.

$$\sigma(\nu_n e^-) = \frac{G_F^2}{\pi (\hbar c)^4} \cdot s$$

\Rightarrow d.h. σ würde für Schwerpunktsenergien $\sqrt{s} \rightarrow \infty$ divergieren \downarrow

- \exists noch stärkere Einschränkung

Jeder inelast. Wirkungsquerschnitt σ_{inel} kann in Partialwellen (mit best. Drehimpuls l) zerlegt werden (siehe z.B. Perkins)

$$\sigma_{inel} = \frac{4\pi (\hbar c)^2}{s} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\eta_l|^2)$$

Amplitude: $0 \leq |\eta_l| \leq 1$

(Entw. von $\mathcal{Y}_{i,j} = e^{i l z}$ nach Legendre-Polynomen $P_l(\cos \theta)$ ergibt Faktor $1/R^2$, $R \sim p \sim s$)

für punktförmige WW muss $l=0$ gelten (da Stoßparameter ≈ 0)

$$\Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{4\pi (\hbar c)^2}{s} \quad (\text{Unitaritätsgrenze})$$

$\hat{=} 100\%$ Streuwahrscheinlichkeit

\Rightarrow für $\sqrt{s} > 740 \text{ GeV}$ $\sigma(\nu_{\mu} e^-) > \sigma_{\max}$ \Leftarrow
(siehe Übungsaufgabe)

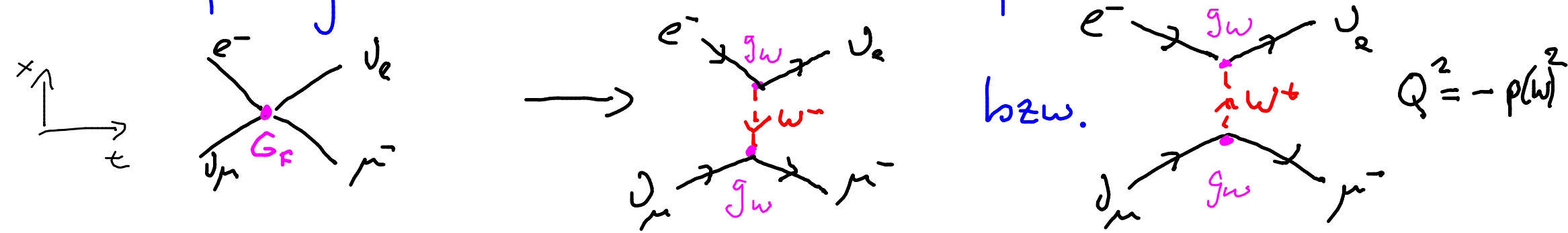
„Verletzung der Unitaritätsgrenze“

\Rightarrow Fermi - Theorie ist nur eine Niederenergie - Näherung!

12.1 Intermediäre Vektorbosonen (IVB)

zur Lösung des Unitaritätsproblems der Fermi-Theorie:

- Einführung von massiven Austauschteilchen für schwache WW



$$|\mathcal{M}_{\text{fi}}| \propto G_F \rightarrow |\mathcal{M}_{\text{fi}}| \propto g_w \frac{1}{Q^2 c^2 + M_W^2 c^4} g_w \xrightarrow{Q^2 \rightarrow 0} \frac{g_w^2}{M_W^2 c^4}$$

$$\Rightarrow G_F \propto \frac{g_w^2}{M_W^2 c^4} \quad \text{bzw. exakt}$$

$$G_F = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g_w^2}{M_W^2 c^4} (\hbar c)^3$$

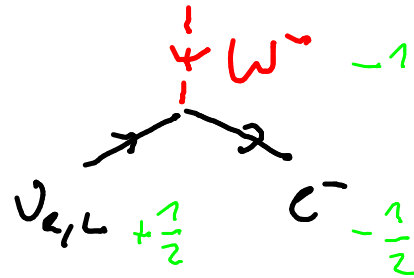
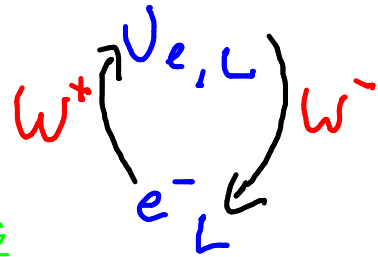
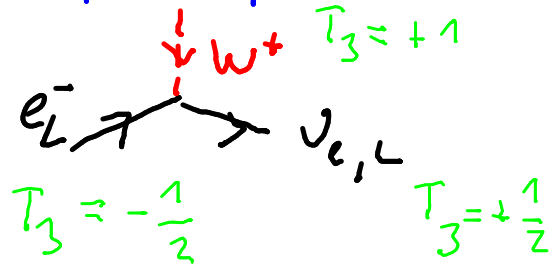
\Rightarrow geringe Stärke der schwachen WW aufgrund großer Masse der W-Bosonen

Eigenschaften der W - Bosonen:

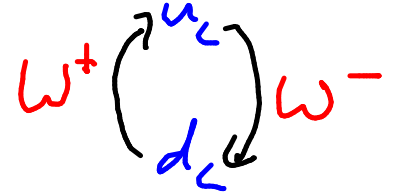
- $M_W = 80.398 \text{ GeV}/c^2$
- Spin 1 (\rightarrow Vektorteilchen)
- koppeln nur an linksständige Fermionen und rechtsständige Antifermionen
- treten mit 2 elektr. Ladungen auf: W^+ , W^-
 \rightarrow "geladener Strom" (Charged current, CC)

12.1.1 Wechselwirkungen der W^\pm - Bosonen

Leptonen, z.B.



Quarks, z.B.



→ W^+/W^- wirken wie Auf-/Absteigeoperatoren \hat{T}^+, \hat{T}^-
 ($\hat{T}^\pm = \hat{T}_1 \pm i \hat{T}_2$; $\hat{T}_{1,2,3}$: Pauli-Matrizen, vgl. Spin $\frac{1}{2}$ Systeme)

→ $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$ etc. bilden Dubletten → $SU(2)$ -Symmetrie

• Erhaltungsgröße: schwacher Isospin $T = \frac{1}{2}$, $T_3 = \pm \frac{1}{2}$

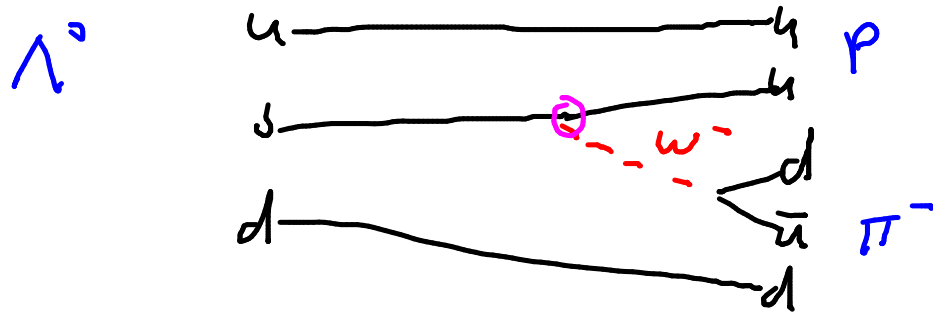
mit $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L \leftarrow T_3 = +\frac{1}{2} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$
 $\leftarrow T_3 = -\frac{1}{2} \rightarrow$

(Bedeutung von d', s', b' wird später klar)

- W^+/W^- -Bosonen "klappen schw. Isospin um", d.h. $\Delta T_3 = \pm 1$
- $\Rightarrow W^+, W^-$ haben schwachen Isospin mit $T_3 = +1, -1$
- \Rightarrow Schwaches Isospin - Triplet mit $T=1$
 - $W^+ : T_3 = +1$
 - $W^- : T_3 = -1$
 - Welches Teilchen mit $T_3 = 0$ ist drittes schwache Boson?
(vor Beantwortung, zuerst Flavormischungen)

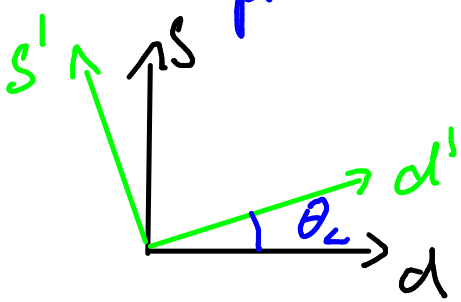
12.1.2 Quark-Flavourmischung

- Betrachte Zerfall $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$



Vertex \circ ist möglich da W^\pm nicht an $|d\rangle$ koppelt, sondern an Linearkombination $|d'\rangle = \cos\theta_c |d\rangle + \sin\theta_c |s\rangle$

- entspricht Drehung im Flavor-Raum



d, s : Eigenzustände bezügl. starker WW
 d', s' : „ „ „ „ schwacher WW

θ_c : Cabibbo-Winkel

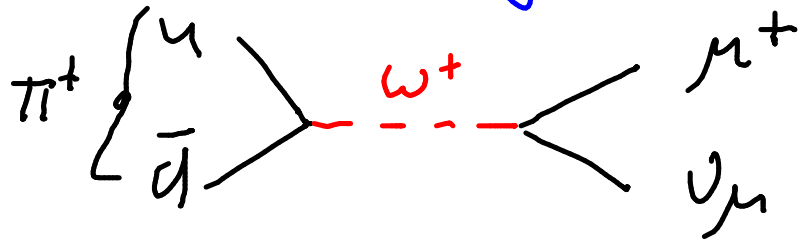
→ somit Isospin-Doublets $\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L$

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix}}_{\text{Cabibbo-Matrix}} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

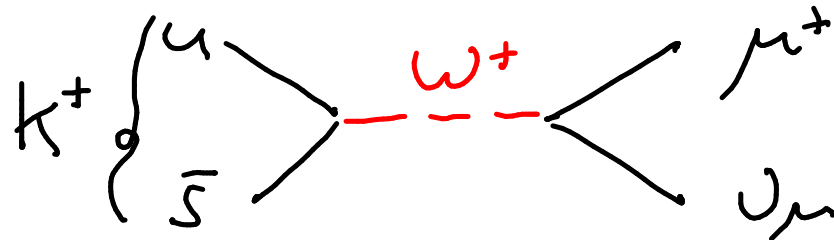
Cabibbo-Matrix

- Erweiterung auf 3 Quarkfamilien: 3×3 Matrix (CKM-Matrix) mit 3 Mischungswinkeln und einer Phase (\rightarrow Ursache für CP-Verletzung)

- Bestimmung von θ_c aus π^\pm, k^\pm - Zerfall



$$\Gamma_\pi \propto \cos^2 \theta_c$$



$$\Gamma_K \propto \sin^2 \theta_c$$

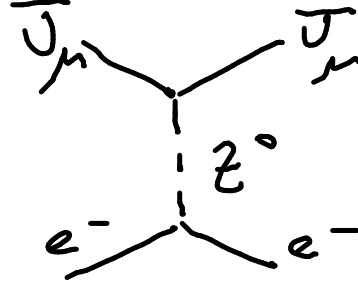
\rightarrow aus Verhältnis Γ_π / Γ_K :

$$\cos^2 \theta = 0.949, \quad \sin^2 \theta = 0.051 \quad \text{bzw.} \quad \theta = 13,05^\circ$$

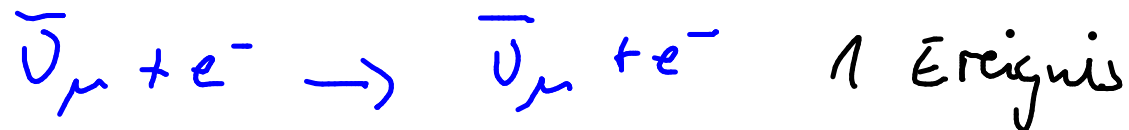
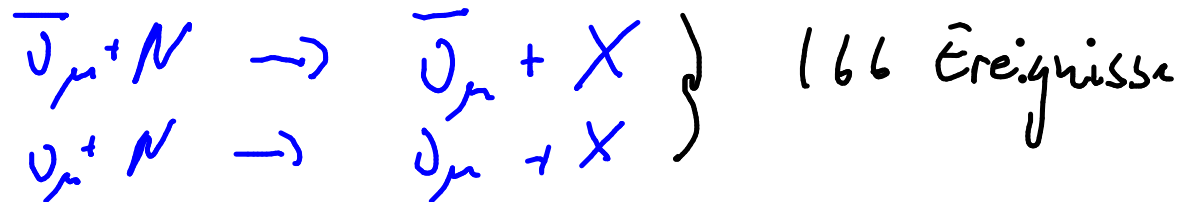
- NB: Wenn man die Mischung bei der Bestimmung von G_F aus Neutron- bzw. Kernzerfällen nicht berücksichtigt ist der Wert in der Tat $\sim 5\%$ niedriger als jener aus dem μ -Zerfall.

12.1.3 Neutraler Strom, Z^0 -Boson

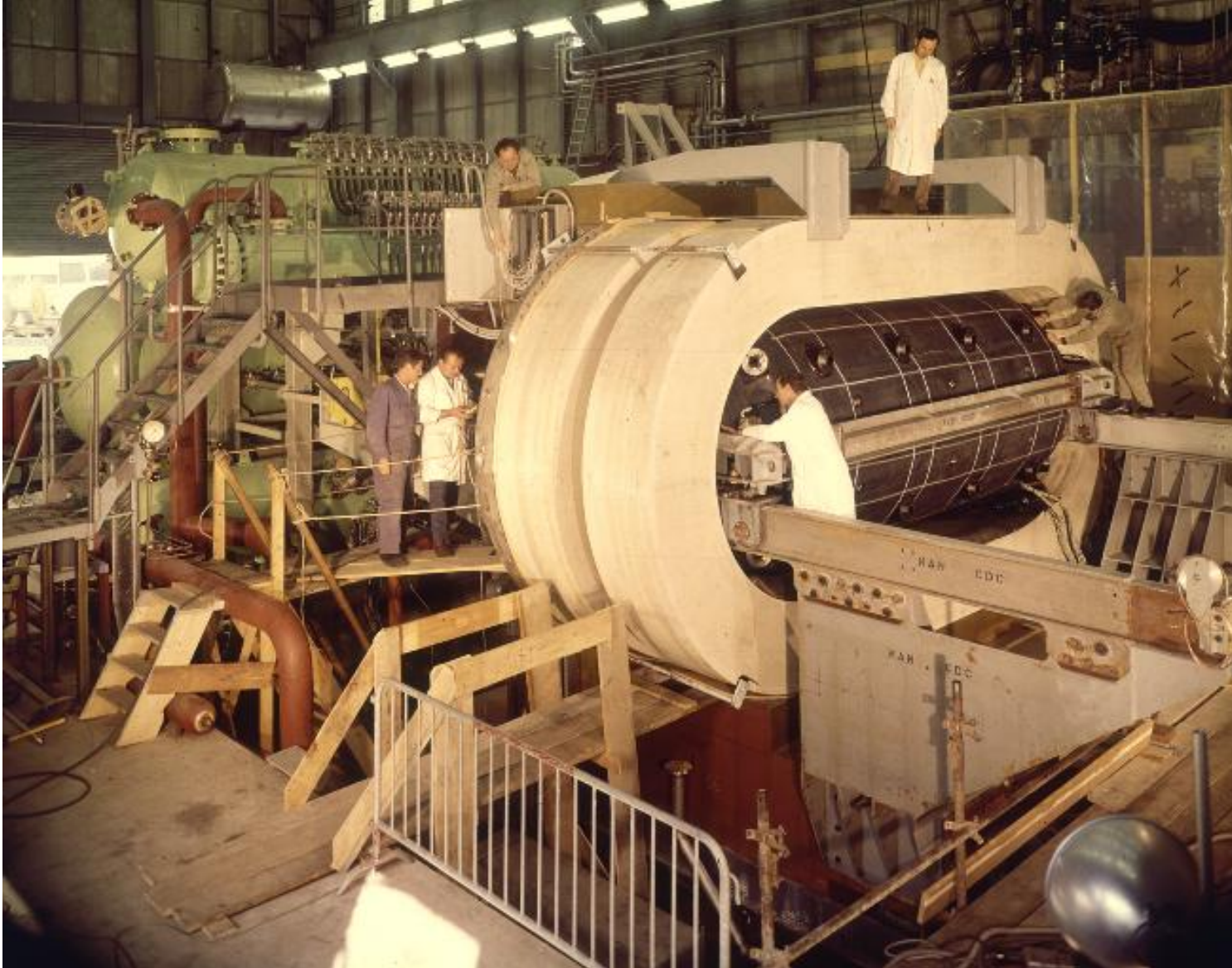
- Neutraler-Ström-Reaktion (NC = neutral current)
z.B. $\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$



- experimentelle Beobachtung von NC-Reaktionen (CERN, 1973)
 - Streuung von $\bar{\nu}_\mu$ an einem Flüssigtarget (Freon/Halogen, CF_3Br) in der Gargamelle-Blasenkammer

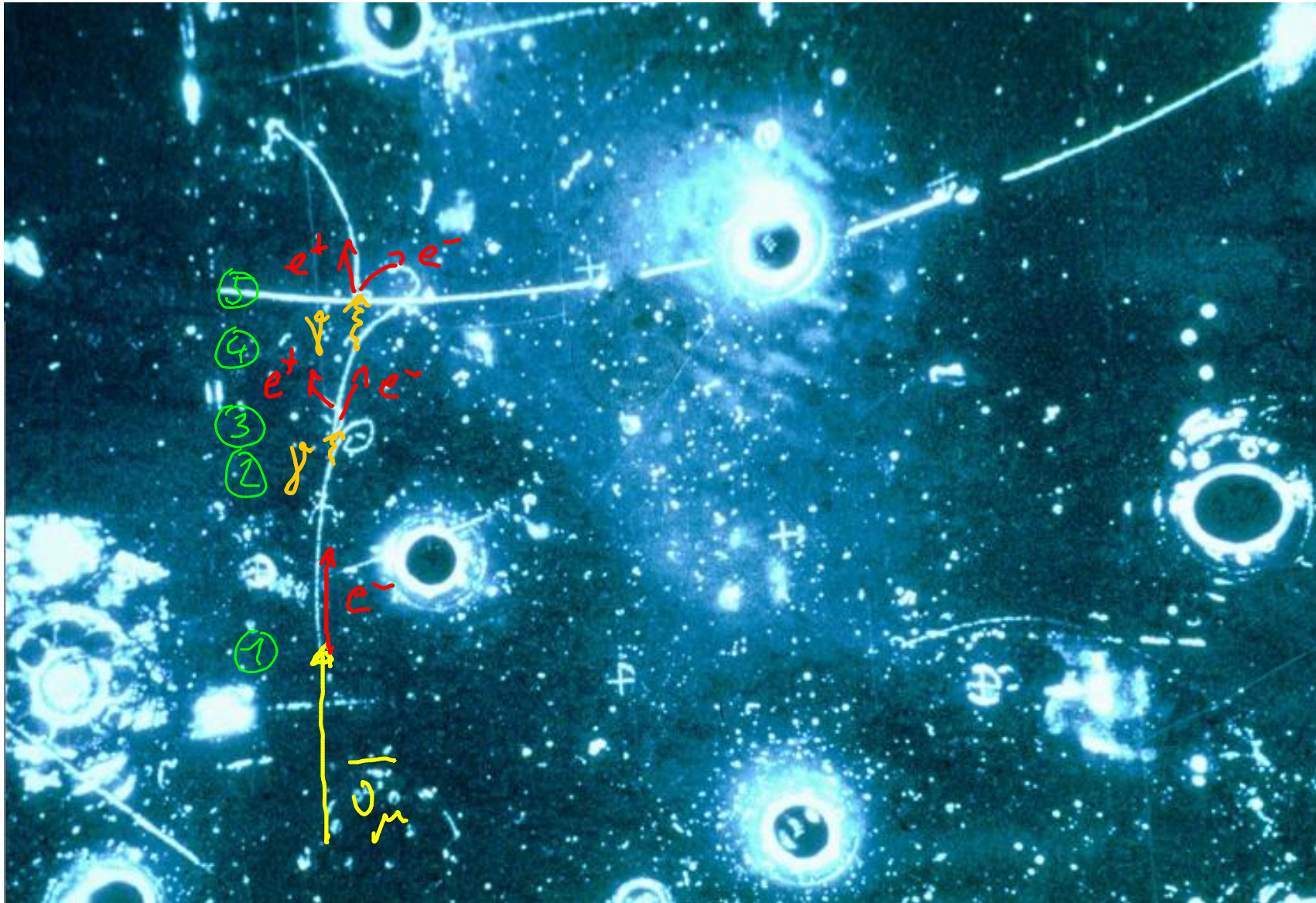


Gargamelle - BlasenKammer

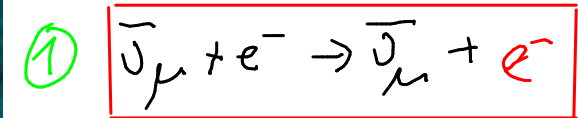


- Tank : $\approx 3\text{m}$ lang, $\varnothing = 2\text{m}$
- Magnetfeld durch Spulenpaar
- Funktionsprinzip einer BlasenKammer:
 - überhitzte Flüssigkeit (Freon)
 - Ionisation durch gel. Teilchen löst lokales Sieden der Flüssigkeit aus
 - Gasbläschen entlang Teilchenbahn
 - Fotografische Registrierung
 - zyklischer Betrieb:
 - schnelle Expansion \rightarrow Foto
 - \rightarrow Druckerhöhung (Gasbl. kollabieren)

Erste NC-Reaktion in Gargamelle



NC-Reaktion



② e^- macht Bremsstrahlung γ , verliert dabei viel Energie

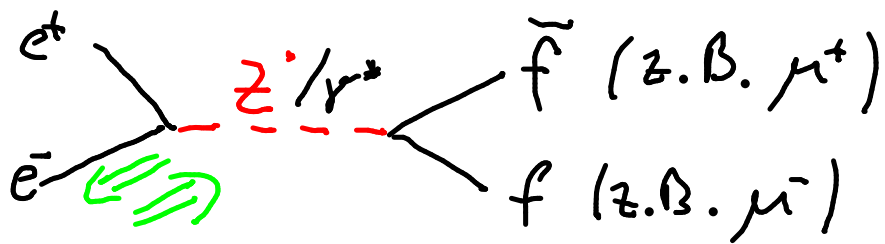
③ $\gamma \rightarrow e^+ e^-$
Paarbildung

④ $e^- \rightarrow e^- \gamma$
Bremsstrahlung

⑤ $\gamma \rightarrow e^+ e^-$
Paarbildung

12.2 Vereinigung der elektromagnet. + schwachen WW

- Welcher Teilchen ist $W_3 \hat{=}$ Isospinpartner zu W^+, W^-
 - $W_3 \neq \gamma$, da W_3 nur links-, γ gleichm. links- u. rechtsständig koppelt
 - Z^0 ? Betrachte polarisierte $e^+ e^-$ -Streuung (SLD-Experiment am SLC/SLAC, 1989-94)



σ_L, σ_R : WQ mit einkommenden e_L^- bzw. e_R^- bei Schwerpunktser.
 $\sqrt{s} = M_Z$ (γ -Beitrag vernachlässigbar)

Messung der L-R-Asymmetrie: $A_{LR} = \frac{\sigma_L - \sigma_R}{\sigma_L + \sigma_R}$ (\rightarrow Paritätsverletzung)

Erwartung für W_3 : $\sigma_R = 0 \Rightarrow A_{LR} = 1$

Messergebnis: $A_{LR} = 0.1514 \pm 0.0022$

\Rightarrow $Z^0 \neq W_3$, jedoch ist Z^0 -Austausch auch paritätsverletzend, da $A_{LR} \neq 0$

→ Nobelpreis 1979

- Vereinigung der WWs (Glashow-Salam-Weinberg Theorie, 1961/67)
- Idee: γ und Z^0 sind Linearkombinationen aus W_3 und neuem WW-Teilchen B , das an schwache Hyperladung Y koppelt:

$$Y := 2(Q - T_3)$$

schw. Hyperladung elektr. Ladung Schw. Isospin
 (vgl. Gellmann - Nishijima-Relation, starker Isospin, Hyperladung)

z. B.

	Q	T_3	Y
J_L	0	$+\frac{1}{2}$	-1
e_L	-1	$-\frac{1}{2}$	-1
e_R^-	-1	0	-2

$$|\gamma\rangle = \sin \theta_w \cdot |W_3\rangle + \cos \theta_w \cdot |B\rangle$$

$$|Z^0\rangle = \cos \theta_w \cdot |W_3\rangle - \sin \theta_w \cdot |B\rangle$$

θ_w : schwacher Mischungswinkel

W^+, W^-, W_3 : Eichbosonen/-felder der $SU(2)_L$ mit Kopplung $g_w T_3$
 B : Eichboson/-feld der $U(1)_Y$ — " — $g' \frac{Y}{2}$

$(SU(2)_L \otimes U(1)_Y)$ Eichgruppe

12.2.1 Relation der Kopplungsstärken

- γ koppelt an elektr. Ladung, Kopplungsstärke $g_e \equiv e$
- γ - " an links- wie rechtshändige Teilchen gleichermaßen
- γ - " nicht an Neutrinos

$$|\gamma\rangle = \sin\theta_w |W_3\rangle + \cos\theta_w |B\rangle \Rightarrow g_e Q = \sin\theta_w g_w T_3 + \cos\theta_w g' \frac{Y}{2}$$

$$(1) e_R^-: g_e \cdot (-1) = \sin\theta_w g_w \cdot 0 + \cos\theta_w \cdot g' \frac{-2}{2} \Rightarrow g_e = g' \cos\theta_w$$

$$(2) e_L^-: g_e \cdot (-1) = \sin\theta_w g_w \left(-\frac{1}{2}\right) + \cos\theta_w \cdot g' \cdot \frac{-1}{2}$$

$$(3) \nu_L: g_e \cdot 0 = \sin\theta_w g_w \left(+\frac{1}{2}\right) + \cos\theta_w \cdot g' \cdot \frac{-1}{2}$$

(3)-(2)

$$\Rightarrow g_e = g_w \sin\theta_w$$

\Rightarrow

$$g_e = g_w \sin\theta_w = g' \cos\theta_w$$

- aus verschiedenen Messungen (νe -Streuung, A_{LR} in $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ etc.)

$$\sin^2 \theta_w = 0.231$$

NB: Vorhersage des Higgs-Modells: $\cos \theta_w = \frac{M_W}{M_Z}$

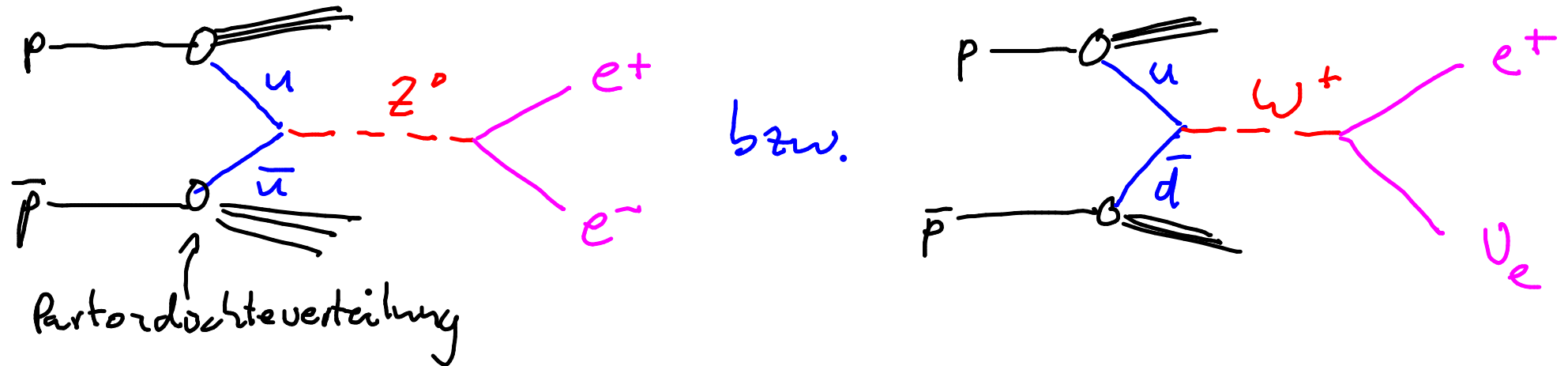
\Rightarrow Somit sind auch die Kopplungen des Z^0 -Bosons festgelegt:

- linksh. Fermionen: $\frac{g_e}{\sin \theta_w \cos \theta_w} (T_3 - Q \sin^2 \theta_w)$

- rechtsh. Fermionen: $\frac{g_e}{\sin \theta_w \cos \theta_w} (-Q \sin^2 \theta_w)$

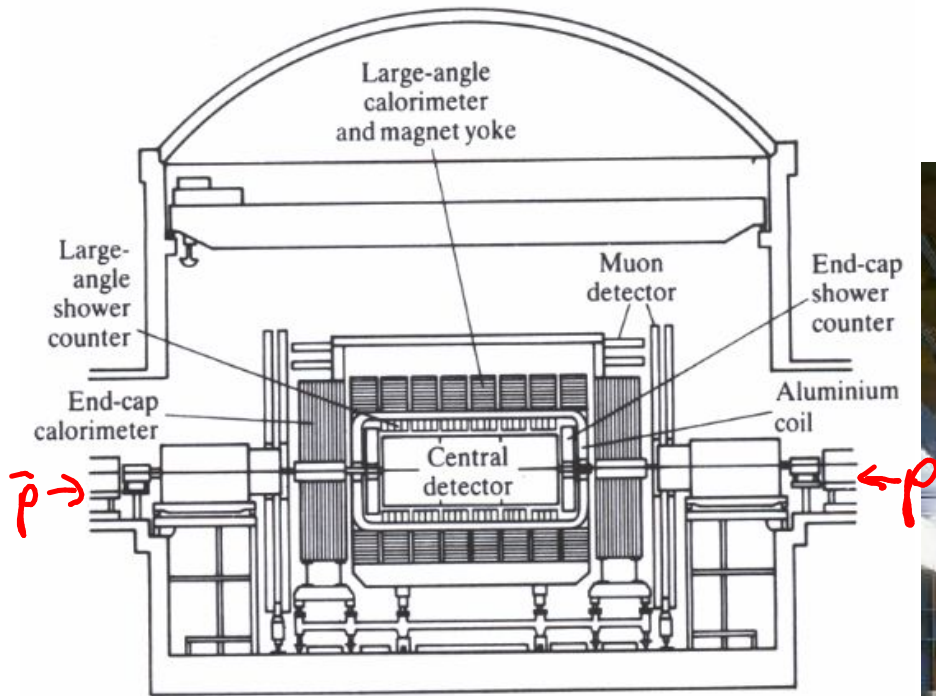
12.3 Entdeckung und Untersuchungen der W u. Z -Bosonen

- $p\bar{p}$ -Speicherung $SppS$ am CERN ($E_p = E_{\bar{p}} = 270 \text{ GeV}$)
- Nachweisreaktionen:

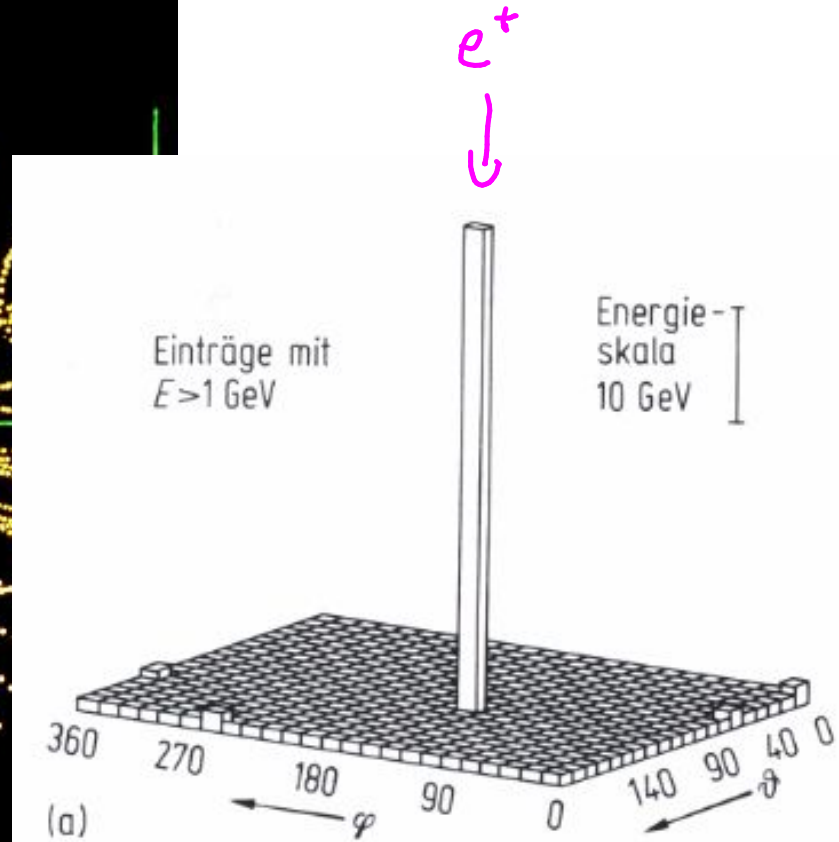
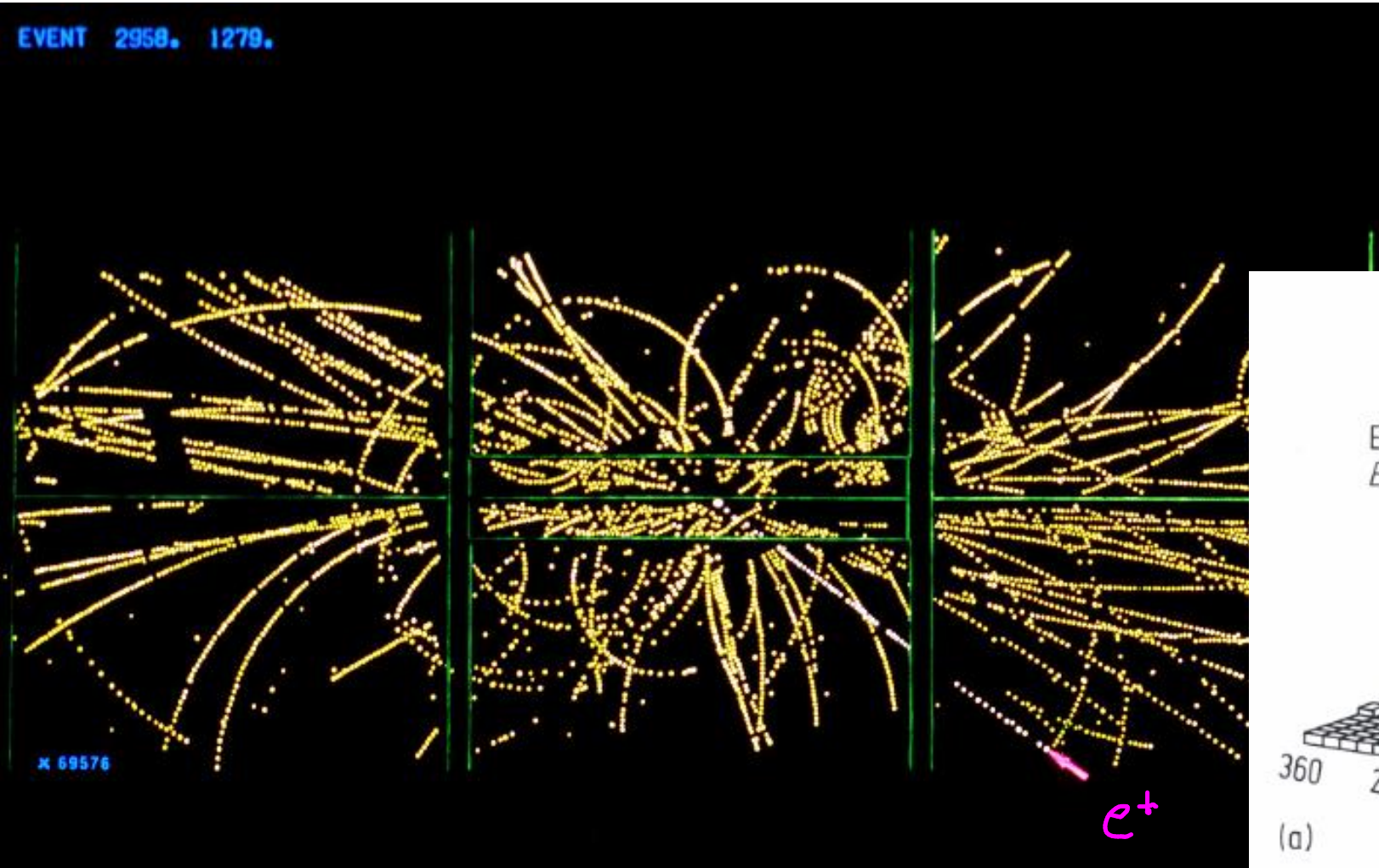


- Nachweis durch UA1 und UA2 Detektoren (1982)
(Nobelpreis: C Rubbia, S. v. d. Meer 1983)

- UA1 - Detektor

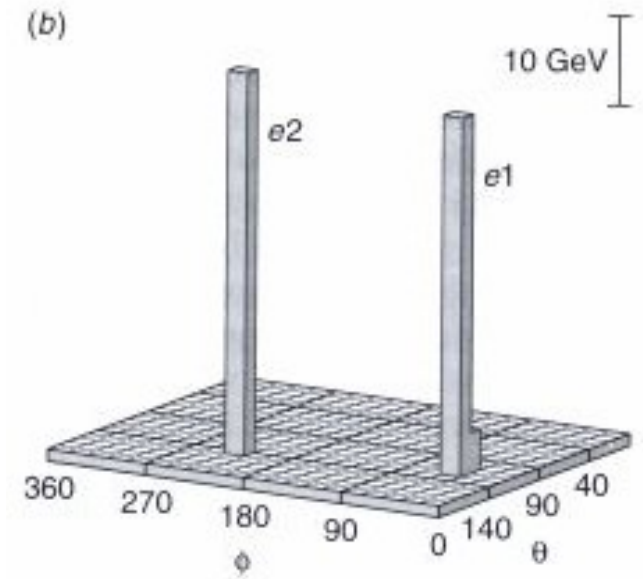
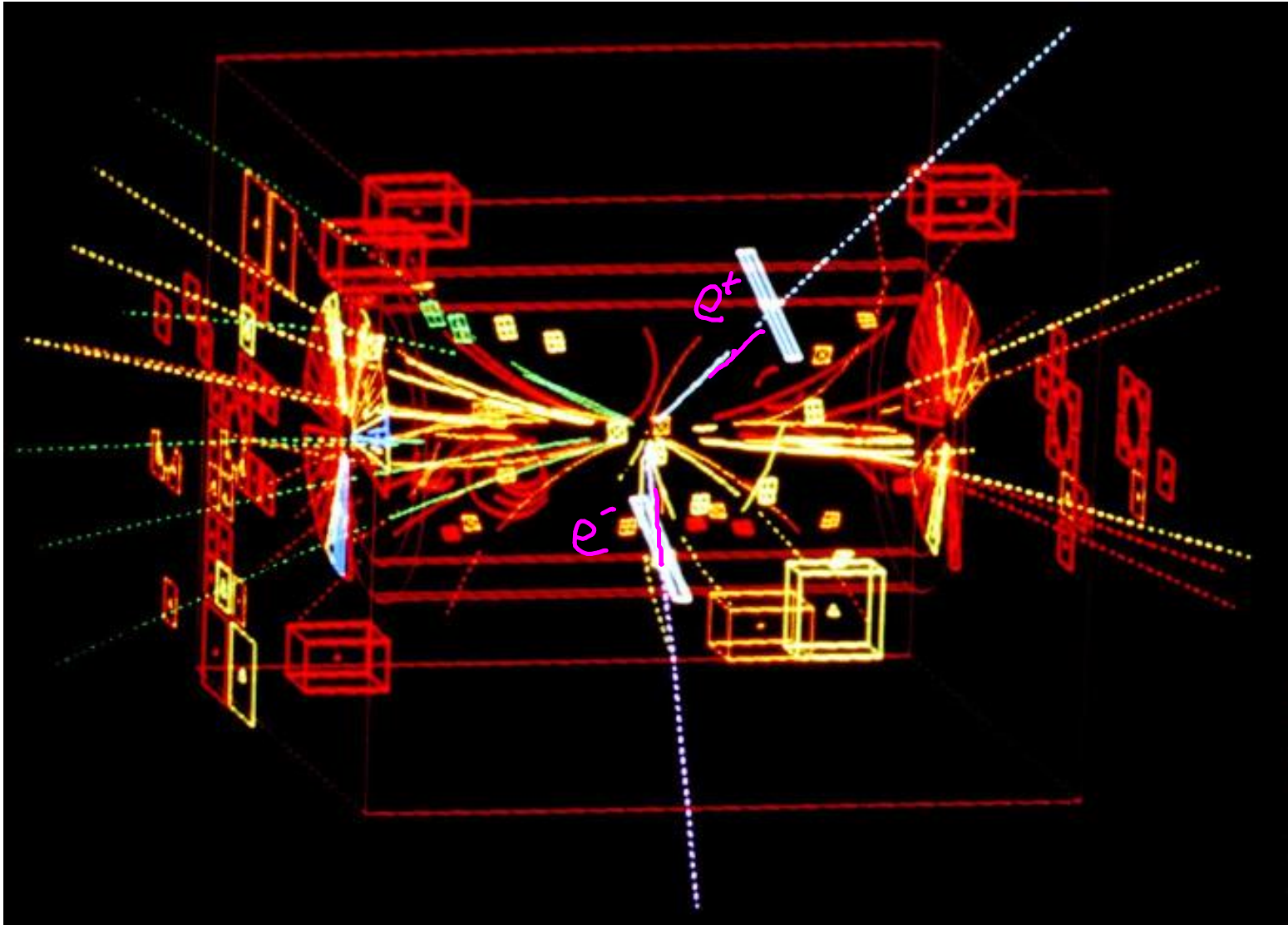


• UAI: $W^+ \rightarrow e^+ \nu_e$ Reaktion



Energiedepositor im Kalorimeter "aufgerollt" in Ebene
aus Azimut- und Polarwinkel

- UAT: $Z^0 \rightarrow e^+e^-$ Reaction



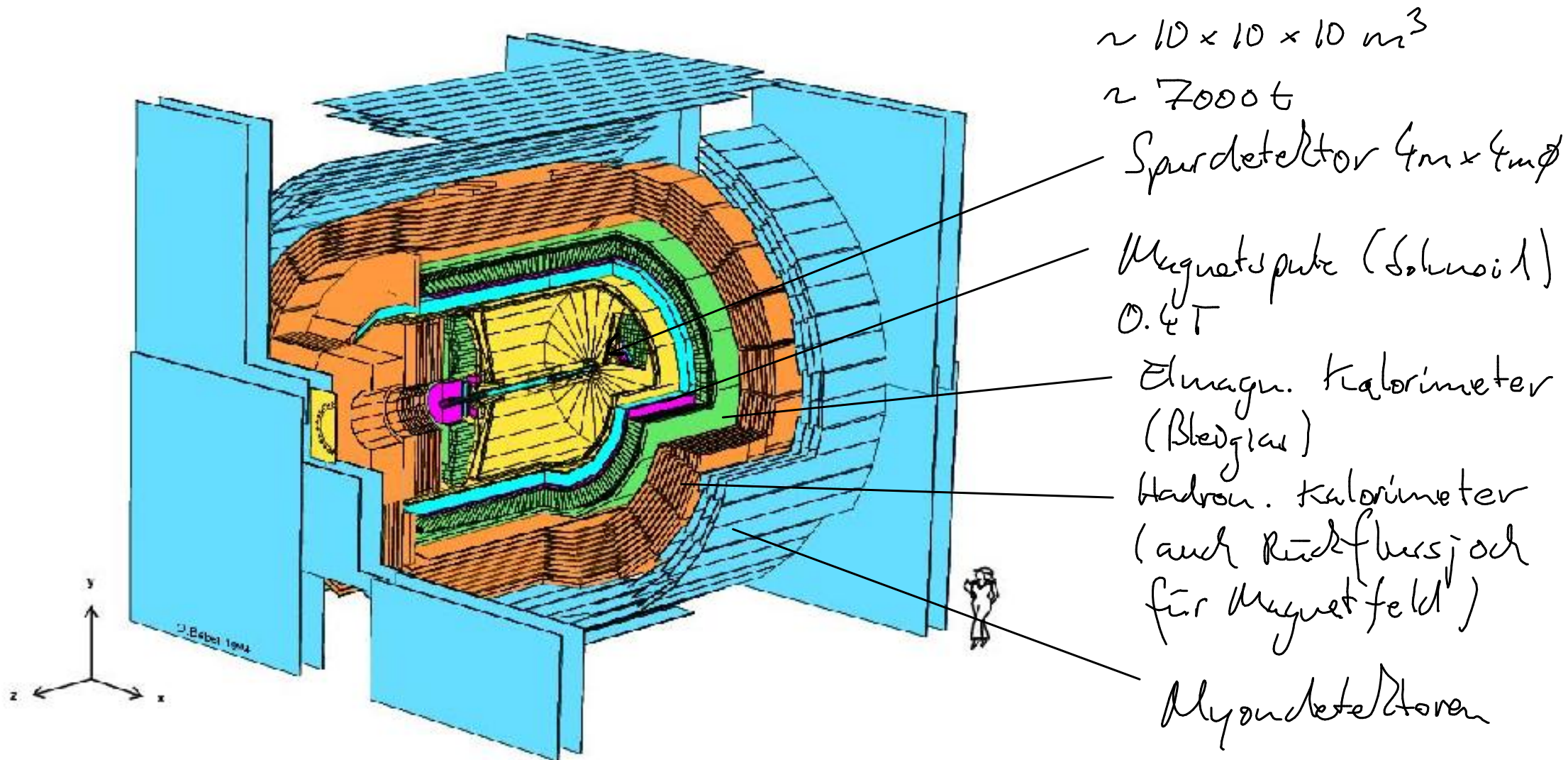
- Präzisionsmessungen am LEP-Beschleuniger
(Large Electron Positron Collider)

(CERN, 1989-2000)



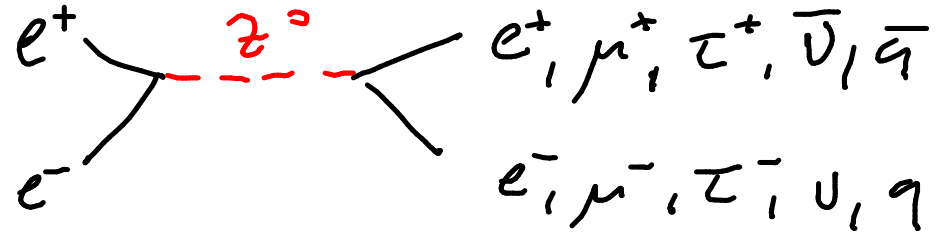
27 km Umfang
 ~100m unterirdisch
 bis $\sqrt{s} = 209 \text{ GeV}$
 bis $2 \times 8 \text{ mA}$
 Strahlstrom
 4 vielzweck-
 Detektoren
 ALEPH, DELPHI,
 L3, OPAL

• OPAL - Detektor

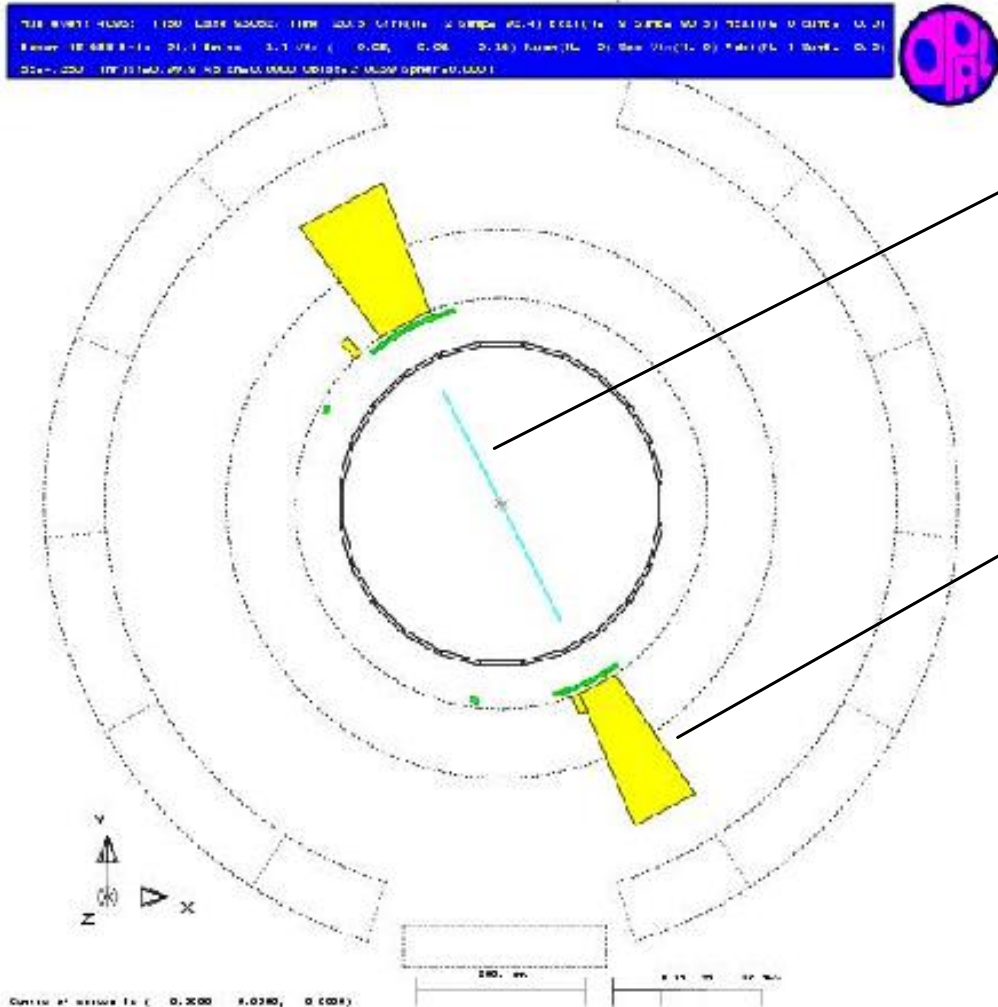


• Reaktionen mit Z^0 -Bosonen

$Z^0 \rightarrow e^+ e^-$

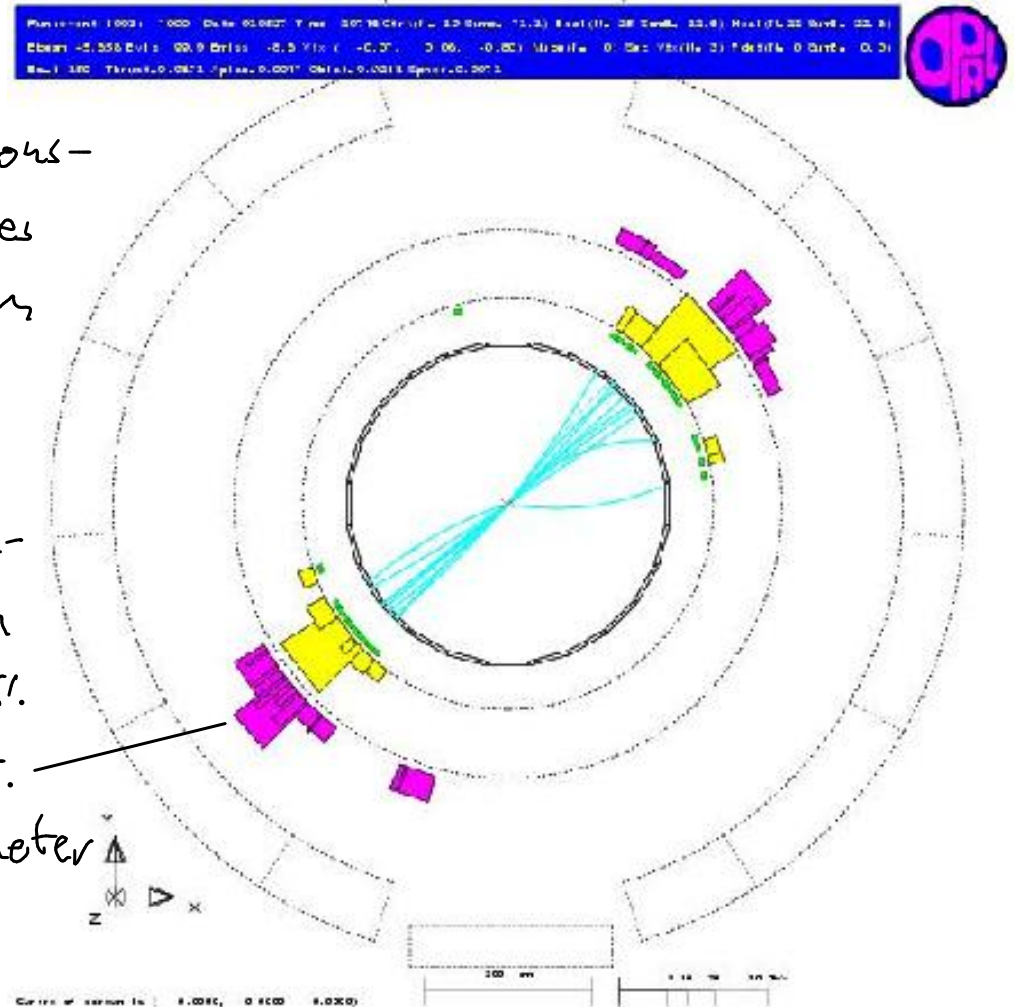


$Z^0 \rightarrow q \bar{q} \rightarrow 2 \text{ Hadron jets}$



Ionisations-
spur eines
geladenen
Teilchen

Energie-
deposition
im elektr.
u. hadr.
Kalorimeter



- Messung des Produktionswirkungsquerschnitt σ in e^+e^- -Annihilation

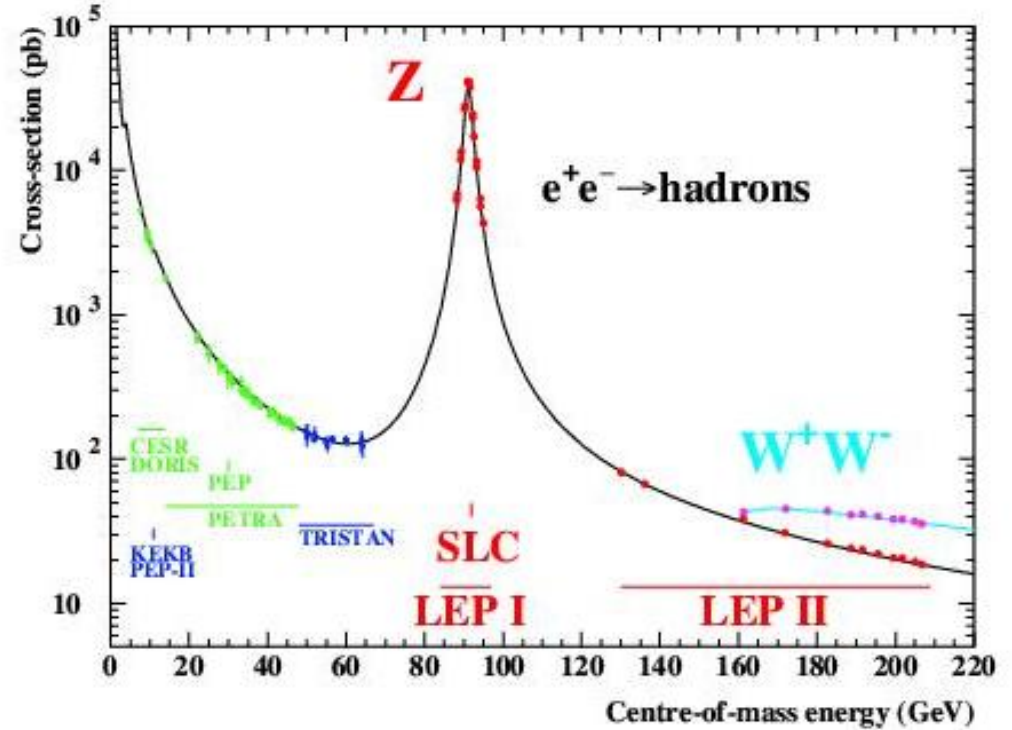
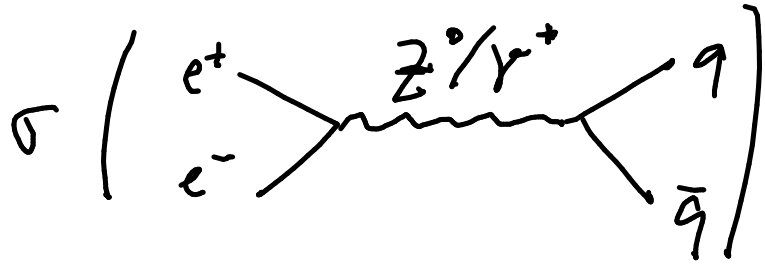
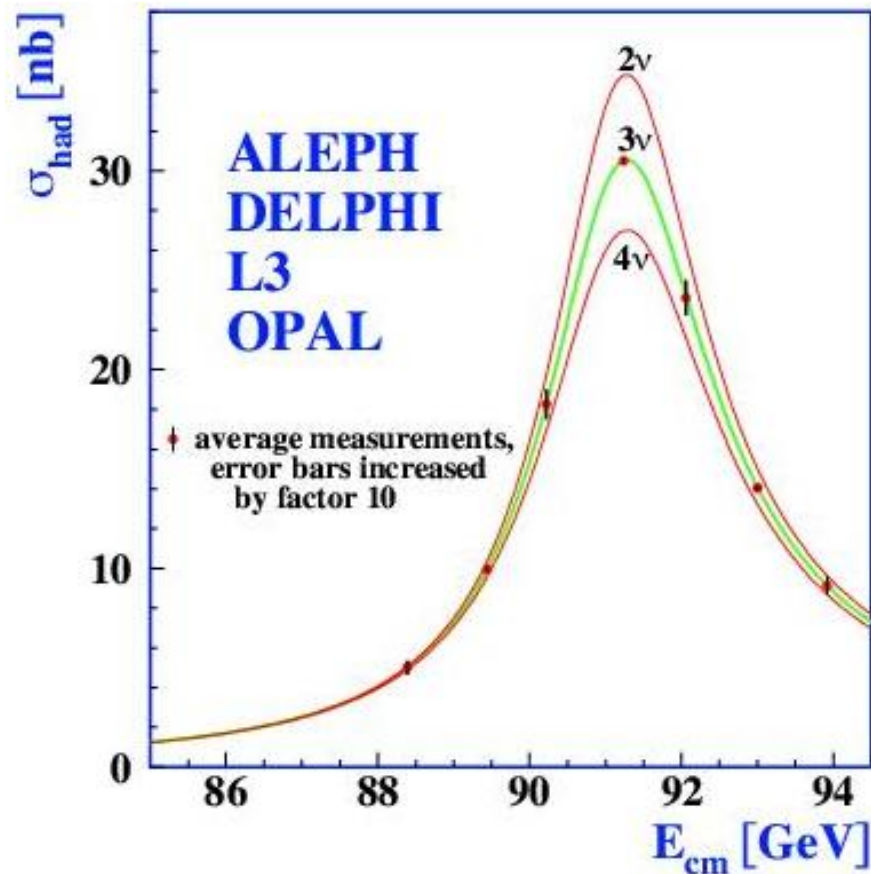


Figure 1.2: The hadronic cross-section as a function of centre-of-mass energy. The solid line is the prediction of the SM, and the points are the experimental measurements. Also indicated are the energy ranges of various e^+e^- accelerators. The cross-sections have been corrected for the effects of photon radiation.

- $\Rightarrow Z^0$ -Boson wird in e^+e^- -Annihilation in Resonanz erzeugt
- Resonanzmaximum $\rightarrow m_Z = (91,1876 \pm 0.0021) \text{ GeV}/c^2$
 - Breite der Resonanz $\rightarrow \Gamma_Z = \frac{\hbar}{\tau_Z} = (2.4952 \pm 0.0023) \text{ GeV}$

- Breite/Höhe der Resonanzkurve wächst/sinkt mit der Anzahl der möglichen Z^0 -Bosonzerfälle (insbesondere mit der Anzahl Neutrinos mit $m_\nu \leq m_Z/2$)



⇒ Es gibt nur 3 leichte Neutrino-Arten!

- Am LEP wurden die Eigenschaften der Z^0, W^\pm -Bosonen mit hoher Präzision vermessen: GSW-Modell hervorragend bestätigt!

13 Standardmodell der Elementarteilchen

- 3 Fermionfamilien

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L$$

$$e^-_R, \mu^-_R, \tau^-_R$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$$

$$u_R, c_R, t_R \\ d_R, s_R, b_R$$

- elektroschwache & starke Wechselwirkung vermittelt durch

$$\left. \begin{matrix} W^+ \\ W^- \\ Z^0 \\ \gamma \end{matrix} \right\}$$

$$G \text{ (Gluon)} \}$$

erhaltene Ladungen: $\underbrace{T_1, T_2, T_3}_{SU(2)_L} \otimes \underbrace{Y}_{U(1)_Y} \rightsquigarrow Q = T_3 + \frac{1}{2} Y$
 $U(1)_{em}$

erhaltene Ladungen: $\underbrace{r, g, b}_{SU(3)_c}$

\Rightarrow Symmetrie des Standardmodells: $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

• Durch Experimente (LEP, Tevatron, ...) hervorragend bestätigt, aber

▶ { Glashows Theorie erwartet masselose Z, W^+, W^- Bosonen
Experimente finden sehr massive Z, W^+, W^- Bosonen ↯

▶ Lösung durch Salam & Weinberg:

spontane Symmetriebrechung & Higgs Mechanismus

13.1 Spontane Symmetriebrechung & Higgsmechanismus

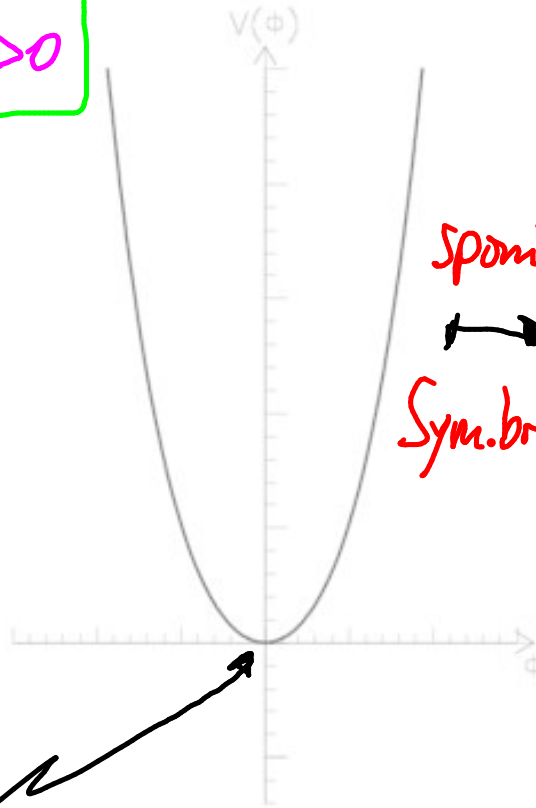
- Prinzipielles Konzept:
 - ▶ $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ Symmetrie $\xrightarrow{\text{spontane}}$ $U(1)_{em}$ - Symmetrie
 - ▶ W^+, W^-, W^3, B masselos $\xrightarrow{\text{Symmetrie=brechung}}$ Z^0, W^+, W^- massiv; γ masselos

Spontane Symmetriebrechung

- ▶ Physikalische Grundgesetze sind symmetrisch
- ▶ Lösungsgleichungen für betrachtetes System ist nicht symmetrisch
- ▶ Beispiel: Ferromagnetismus
 - ↳ Symmetrie: Drehinvarianz der Spin-Spin-Wechselwirkung bei $T > T_{\text{Curie}}$
 - ↳ spontane Sym.brechung: Ausbildung Weißsche Bezirke bei $T < T_{\text{Curie}}$

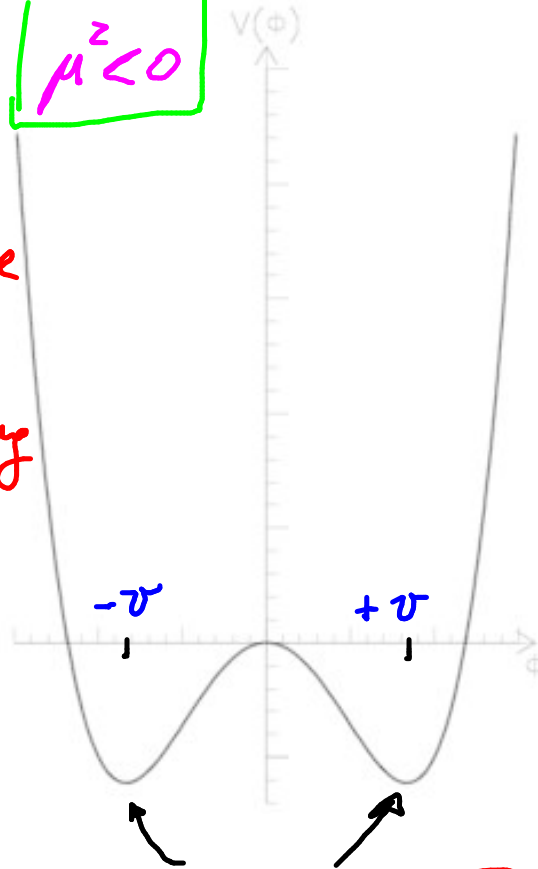
► Für Standardmodell: Neues Wechselwirkungspotential
 $V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \phi^4$ (Potential zum Higgs-Feld ϕ)

$$\mu^2 > 0$$



$$\mu^2 < 0$$

spontane
 Sym. brechung



im Minimum: $\langle |\phi| \rangle = 0$ \rightsquigarrow Minima $\langle |\phi| \rangle = \pm v$

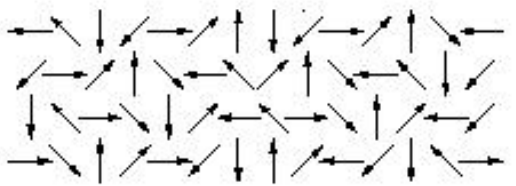
und $\phi \mapsto -\phi$ Symmetrie \rightsquigarrow keine Symmetrie um Minimum

▶ Analogie : Ferromagnetismus

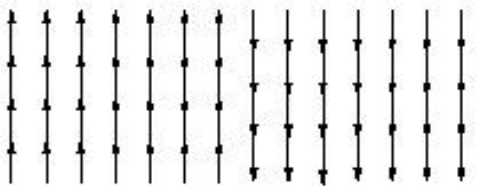
(i)

$T > T_{\text{Curie}}$

$T < T_{\text{Curie}}$

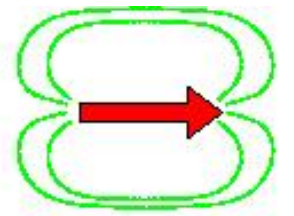


Magnetfeld im Mittel = 0
Rotationsymmetrie



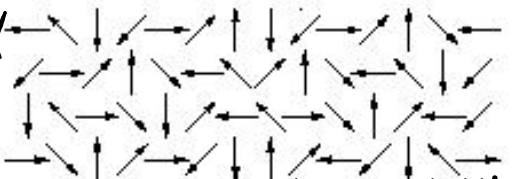
Magnetfeld im Mittel $\neq 0$
keine Rotationsym.

(ii)
Testdipol
masselos wegz *

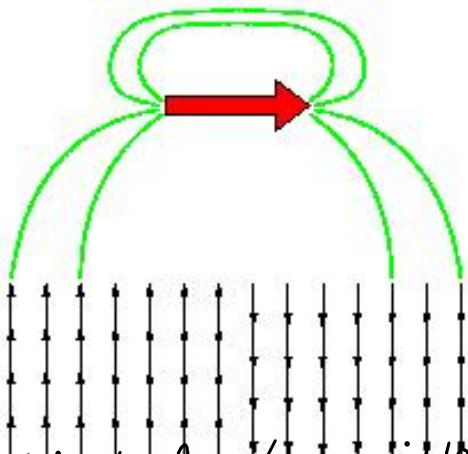


Testdipol massiv wegz *

Hintergrundfeld
 $\langle |\phi| \rangle = 0$

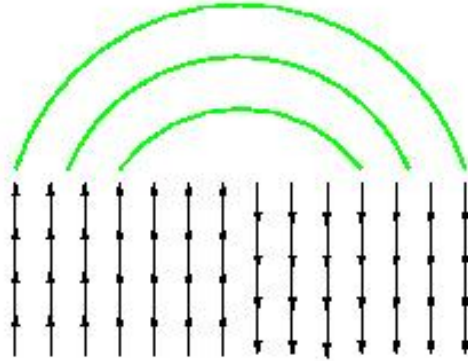
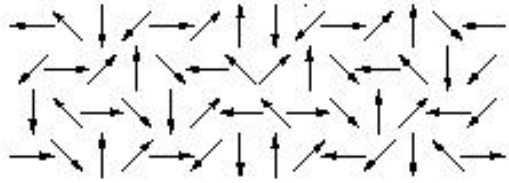


keine Wechselwirkung mit Hintergrund
gespeicherte Energie im Feld = 0 *



Hintergrundfeld
 $\langle |\phi| \rangle \neq 0$

Wechselwirkung mit Hintergrundfeld
↳ gespeicherte Energie im Feld $\neq 0$, gespeicherte Energie $\hat{=}$ Masse *



Selbstwechselwirkung im Hintergrundfeld

↳ gespeicherte Energie im Feld $\neq 0$

↳ massiver Zustand existiert ($\hat{=}$ Higgs-Boson)

• Zusammengefasst:

- ▷ An allen Orten und zu allen Zeiten existiert ein Higgs-Hintergrundfeld ϕ mit Vakuumerwartungswert $\langle |\phi| \rangle = \pm v \neq 0$
- ▷ W^+, W^-, Z^0 -Bosonen koppeln an ϕ und erhalten eine feste potentielle Energie $\sim \langle |\phi| \rangle = \pm v \Rightarrow$ Masse
- ▷ auch Fermionen können (per Yukawa-Kopplung) an ϕ koppeln und so massiv werden
- ▷ Higgs-Hintergrundfeld besitzt noch einen weiteren Freiheitsgrad der durch Selbstwechselwirkung ($\sim \lambda$) massiv wird
 \Rightarrow Higgs-Boson ($J^{PC} = 0^{++}$, Masse = ?)

13.2 Offene Fragen des Standardmodells

- Fragen
 - ▶ Standardmodell: Neutrinos (streng) masselos, aber Effekte von $m_\nu \neq 0$ exp. beobachtet
 - Erweiterung um massive Neutrinos
 - ▶ Standardmodell hat ≥ 25 Parameter (Massen, Kopplungen, etc.)
 - ▶ Woher kommt Familienstruktur der Fermionen?
 - ▶ Massen aller Teilchen durch Higgs-Hintergrundfeld?
 - ▶ Falls ja: Ursache der Massenhierarchie?

$$\frac{m_\nu}{m_t} > 10^{-11}$$
 - ▶ Grund für Materie-Antimaterie-Asymmetrie?
 - ▶ Standardmodell: kein Teilchenkandidat für beobachtete Dunkle Materie

Viele mögliche Erweiterungen, z. B.

▶ zusätzliche Teilchen ($\hat{=}$ zusätzliche Symmetrien)

z. B. Super-symmetrie

jedes Fermion erhält Partner: skalares Fermion (= Boson)

jedes Boson erhält Partner: Bosino (= Fermion)

▶ Innere Struktur von Fermionen & Bosonen: Compositeness

▶ zusätzliche Raumdimensionen \leadsto Stringtheorie

...

▶ Große Erwartungen & Hoffnungen auf LHC, diese

neuen physikalischen Phänomene

zu beobachten