

Bestimmung der starken Kopplungskonstante

Aus der Lösung der Renormierungs-Gruppengleichung der QCD folgt in niedrigster/einfachster (d.h. 1-Schleifen-) Näherung

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln \mu^2 / \Lambda^2}$$

wobei μ^2 die Energieskala bestimmt, $\beta_0 = (33 - 2n_f)/12\pi$ und Λ der QCD-Parameter ist, welcher ^{nur} aus dem Experiment bestimmt werden kann.

Um α_s bzw. $\alpha_s(\mu^2)$ zu messen, muss man

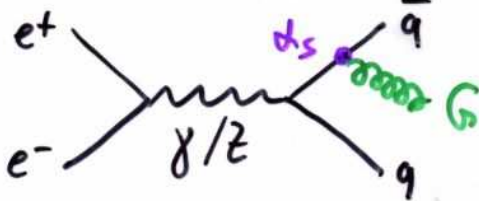
- Prozesse betrachten, an denen Gluonen beteiligt sind,
- " " , deren Energieskala (z.B. Q^2) man kennt und
- bei mehreren Energieskalen messen, um Λ zu bestimmen

Ob diese Energieskala μ^2 allerdings automatisch identisch mit der Energieskala der Streuung Q^2 ist, wird von der Theorie nicht festgelegt. Prinzipiell könnte μ jeden Wert aufweisen, also z.B. $\mu^2 = Q^2$, $\mu^2 = Q^2/10$ oder auch $\mu^2 = 10 Q^2$. Diese Wahlfreiheit schlägt sich in den exp. Messergebnissen als theoretische Unsicherheit, die sog. Renormierungsskala-Unsicherheit nieder. Per Konvention wählt man $\mu^2 = \frac{1}{4} Q^2, Q^2, 4 Q^2$.

Bestimmung von $\alpha_s(\mu^2)$

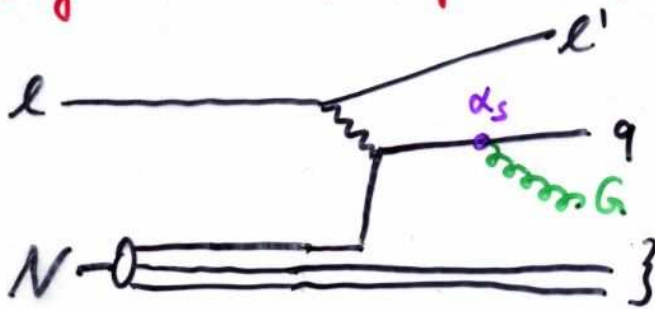
Prozesse, an denen Gluonen beteiligt sind, können an allen Collider-Experimenten untersucht werden:

- e^+e^- -Annihilation (LEP, SLC, ...)



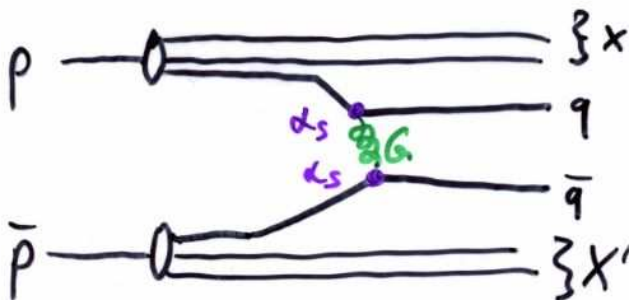
z.B. 3-Jet-Endzustände
 $\sim \alpha_s$

- tiefinelastische Lepton-Nukleon-Streuung (z.B. HERA)



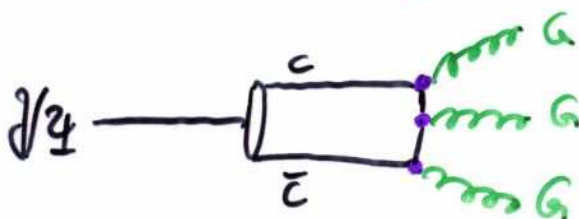
z.B. (2+1)-Jet-Endzustände
 $\sim \alpha_s$

- $P\bar{P}$ -Kollisionen (Sp̄pS, Tevatron, LHC, ...)



z.B. (2+2)-Jet-Endzustände
 $\sim \alpha_s^2$

- Quarkonia-Zerfälle (CESR, PEP-II, KEKB, ...)



z.B. 3-Gluon-Endzustand
 $\sim \alpha_s^3$

Bestimmungen von $d_s(\mu^2)$ in e^+e^- -Annihilation

Generell kann zwischen

- vollkommen inklusive Messgrößen und
- inklusive Messgrößen

unterschieden werden.

► Vollkommen inklusive Meßgrößen sind z.B.

Wirkungsquerschnitte, Verzweigungsverhältnisse

Vorteil: Unabhängigkeit von Details des Endzustandes

Nachteil: i.a. geringe Sensitivität auf d_s , da die nur als Korrektur zu einem dominierenden Term eingeht

► Inklusive Meßgrößen sind z.B.

Jetraten, Ereignisform- bzw. -topologievariablen

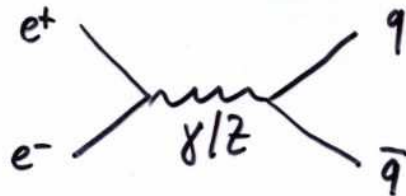
Vorteil: starke Sensitivität auf d_s , da Meßgrößen meist direkt proportional zu d_s

Nachteil: Abhängig von Details des Endzustandes wie z.B. die Hadronisierung nur in bestimmten Bereichen des Phasenraums anwendbar aufgrund von Divergenzen

α_s aus vollkommen inklusiven Meßgrößen

● Wirkungsquerschnitt $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$

zusätzlich zum Graphen in niedrigster Ordnung (i.e. α_s^0):



tragen Graphen der Ordnung α_s^1 (und höhere) bei:



Diese realen und virtuellen Gluonabstrahlungen vergrößern den Wirkungsquerschnitt des Prozesses $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$. Wird auf den Wirkungsquerschnitt von $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ normiert, so gilt:

$$R_{QCD} \equiv R \cdot \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \dots \right)$$

Terme bis α_s^3 sind berechnet worden

dabei ist

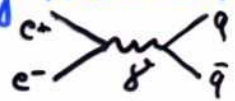
$$R(Q^2) \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

eine Funktion der Energieskala $Q^2 = (\sqrt{s})^2$ (,d.i. Schwerpunktsenergie).

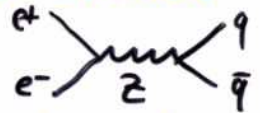
Energie- und α_s -Abhängigkeit von R_{QCD}

Energieabhängigkeit

▶ bei geringen Energien ($\sqrt{s} \ll M_Z$) dominiert γ -Austausch



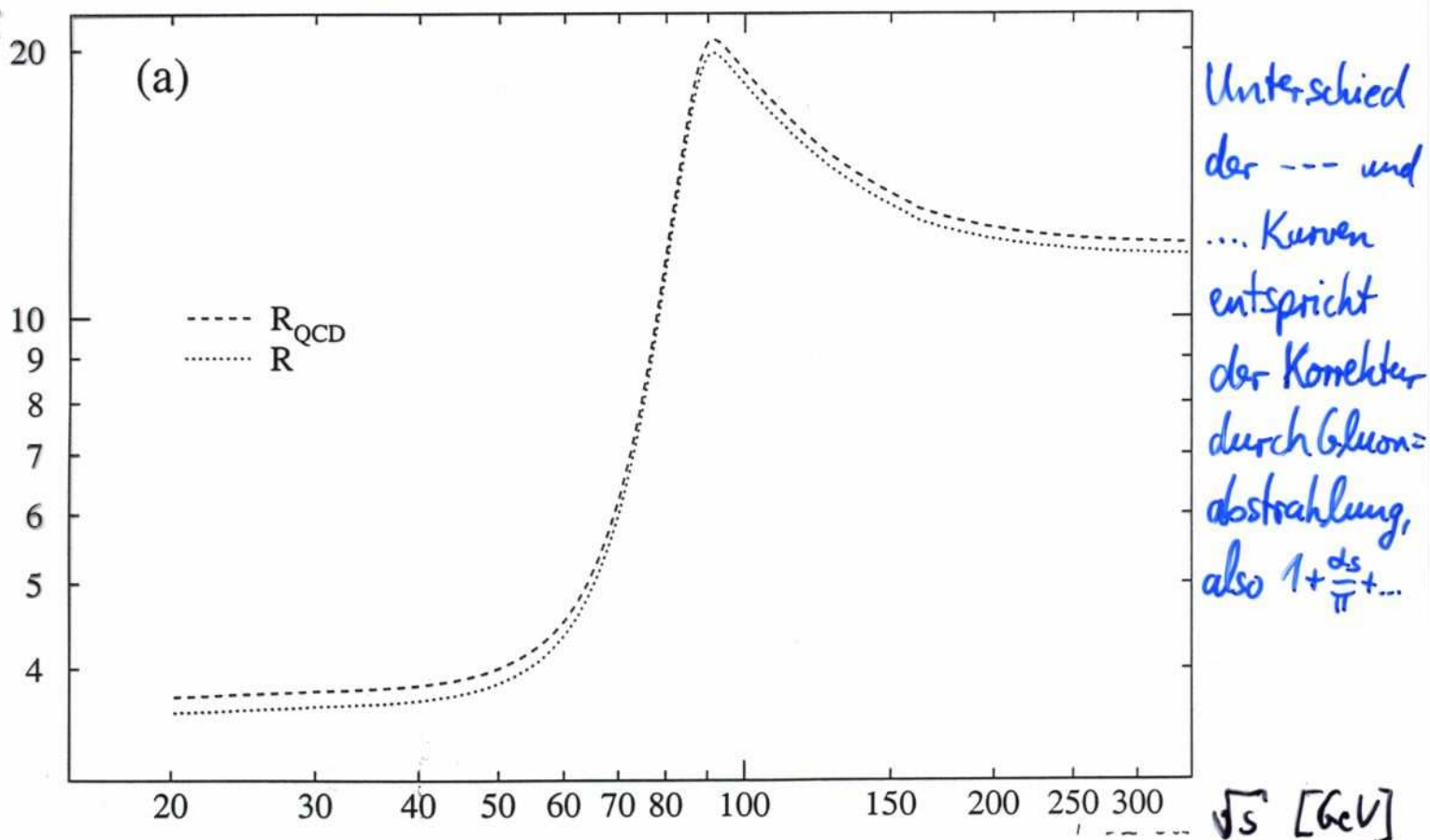
▶ bei $\sqrt{s} = M_Z$ (Z-Bosonmasse) dominiert Z-Austausch



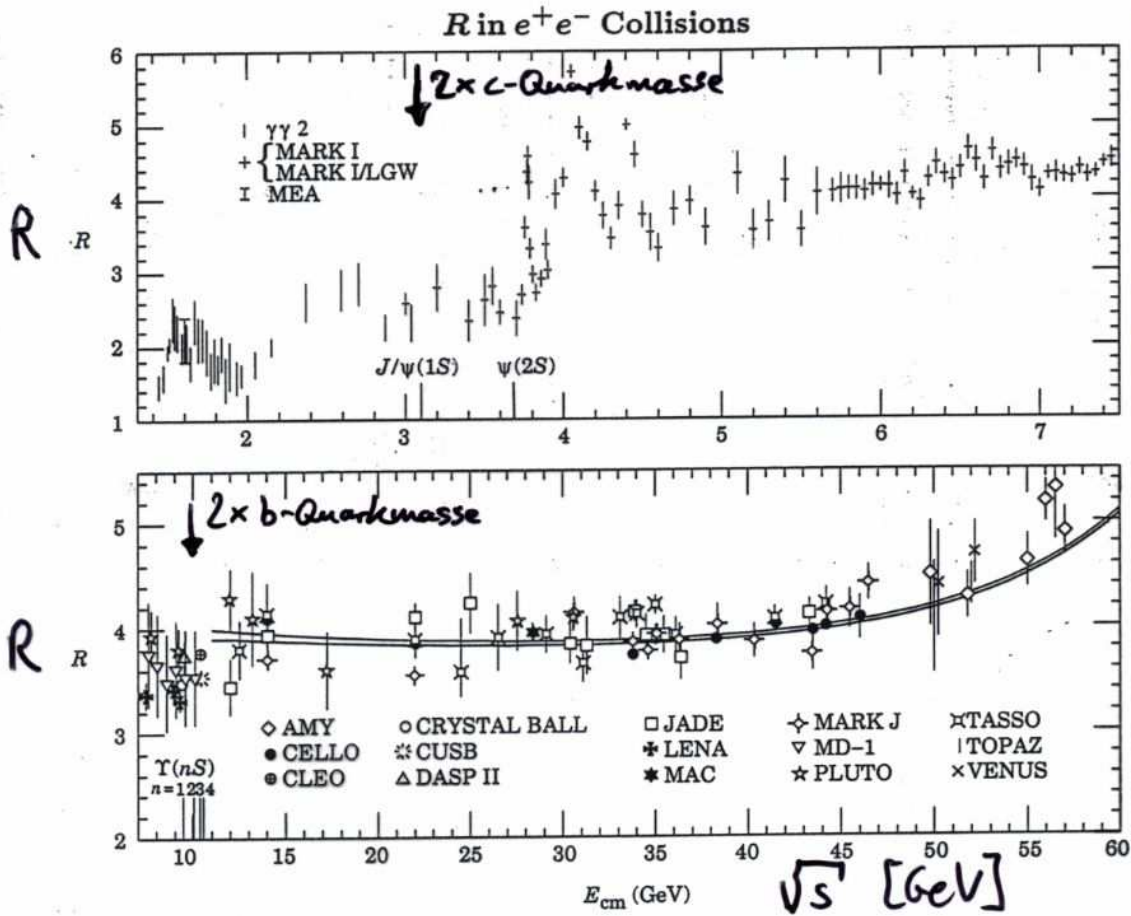
▶ sonst eine Überlagerung von γ - und Z-Austausch

NB.: Da γ - und Z-Boson unterschiedl. stark an die verschiedenen Quarks koppeln (und auch an $\mu^+\mu^-$) ergibt sich eine Bevorzugung der Quarkproduktion bei $\sqrt{s} = M_Z$ und darüber.

• α_s -Abhängigkeit $R_{QCD} = R \cdot \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \dots\right)$



R_{QCD} bei geringen Energien



Schwellen-
effekte bei
2x c-Quark-
und 2x b-
Quarkmasse

Figure 38.6: Selected measurements of $R \equiv \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$, where the annihilation in the numerator proceeds via one photon or via the Z . Measurements in the vicinity of the Z mass are shown in the following figure. The denominator is the calculated QED single-photon process; see the section on Cross-Section Formulae for Specific Processes. Radiative corrections and, where important, corrections for two-photon processes and τ production have been made. Note that the ADONE data ($\gamma\gamma 2$ and MEA) is for ≥ 3 hadrons. The points in the $\psi(3770)$ region are from the MARK I—Lead Glass Wall experiment. To preserve clarity only a representative subset of the available measurements is shown—references to additional data are included below. Also for clarity, some points have been combined or shifted slightly ($< 4\%$) in E_{cm} , and some points with low statistical significance have been omitted. Systematic normalization errors are not included; they range from $\sim 5\text{--}20\%$, depending on experiment. We caution that especially the older experiments tend to have large normalization uncertainties. Note the suppressed zero. The horizontal extent of the plot symbols has no significance. The positions of the $J/\psi(1S)$, $\psi(2S)$, and the four lowest Υ vector-meson resonances are indicated. Two curves are overlaid for $E_{\text{cm}} > 11$ GeV, showing the theoretical prediction for R , including higher order QCD [M. Dine and J. Sapirstein, Phys. Rev. Lett. 43, 668 (1979)] and electroweak corrections. The Λ values are for 5 flavors in the $\overline{\text{MS}}$ scheme and are $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(5)} = 60$ MeV (lower curve) and $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(5)} = 250$ MeV (upper curve). (Courtesy of F. Porter, 1992.) References (including several references to data not appearing in the figure and some references to preliminary data):

<p>AMY: T. Mori <i>et al.</i>, Phys. Lett. B218, 499 (1989); CELLO: H.-J. Behrend <i>et al.</i>, Phys. Lett. 144B, 297 (1984); and H.-J. Behrend <i>et al.</i>, Phys. Lett. 183B, 400 (1987); CLEO: R. Giles <i>et al.</i>, Phys. Rev. D29, 1285 (1984); and D. Besson <i>et al.</i>, Phys. Rev. Lett. 54, 381 (1985); CUSB: E. Rice <i>et al.</i>, Phys. Rev. Lett. 48, 906 (1982); CRYSTAL BALL: A. Osterheld <i>et al.</i>, SLAC-PUB-4160; and Z. Jakubowski <i>et al.</i>, Z. Phys. C40, 49 (1988); DASP: R. Brandelik <i>et al.</i>, Phys. Lett. 76B, 361 (1978); DASP II: Phys. Lett. 116B, 383 (1982); DCI: G. Cosme <i>et al.</i>, Nucl. Phys. B152, 215 (1979); DHHM: P. Bock <i>et al.</i> (DESY-Hamburg-Heidelberg- MPI München Collab.), Z. Phys. C6, 125 (1980); $\gamma\gamma 2$: C. Bacci <i>et al.</i>, Phys. Lett. 86B, 234 (1979); HRS: D. Bender <i>et al.</i>, Phys. Rev. D31, 1 (1985); JADE: W. Bartel <i>et al.</i>, Phys. Lett. 129B, 145 (1983); and W. Bartel <i>et al.</i>, Phys. Lett. 160B, 337 (1985); LENA: B. Niczyporuk <i>et al.</i>, Z. Phys. C15, 299 (1982).</p>	<p>MAC: E. Fernandez <i>et al.</i>, Phys. Rev. D31, 1537 (1985); MARK J: B. Adeva <i>et al.</i>, Phys. Rev. Lett. 50, 799 (1983); and B. Adeva <i>et al.</i>, Phys. Rev. D34, 681 (1986); MARK I: J.L. Siegrist <i>et al.</i>, Phys. Rev. D26, 969 (1982); MARK I + Lead Glass Wall: P.A. Rapidis <i>et al.</i>, Phys. Rev. Lett. 39, 526 (1977); and P.A. Rapidis, thesis, SLAC-Report-220 (1979); MARK II: J. Patrick, Ph.D. thesis, LBL-14585 (1982); MD-1: A.E. Blinov <i>et al.</i>, Z. Phys. C70, 31 (1996); MEA: B. Esposito <i>et al.</i>, Lett. Nuovo Cimento 19, 21 (1977); PLUTO: A. Bäcker, thesis Gesamthochschule Siegen, DESY F33-77/03 (1977); C. Gerke, thesis, Hamburg Univ. (1979); Ch. Berger <i>et al.</i>, Phys. Lett. 81B, 410 (1979); and W. Lackas, thesis, RWTH Aachen, DESY Pluto-81/11 (1981); TASSO: R. Brandelik <i>et al.</i>, Phys. Lett. 113B, 499 (1982); and M. Althoff <i>et al.</i>, Phys. Lett. 138B, 441 (1984); TOPAZ: I. Adachi <i>et al.</i>, Phys. Rev. Lett. 60, 97 (1988); and VENUS: H. Yoshida <i>et al.</i>, Phys. Lett. 198B, 570 (1987).</p>
---	---

R_{QCD} und Messdaten

- Messung von R_{QCD} ist eine "Zählaufgabe":

$$R_{QCD}^{exp} = \frac{\text{Zahl beob. } e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}}{\text{Zahl beob. } e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}$$

- $R_{QCD}^{exp}(\sqrt{s} \approx 10 \text{ GeV}) = 3.53 \pm 0.05$

$$R_{QCD}(\sqrt{s} \approx 10 \text{ GeV}) = \underbrace{R(\sqrt{s} \approx 10 \text{ GeV})}_{= 10/3} \cdot \left(1 + \underbrace{1.0179}_{\neq 1 \text{ wegen Korrektur durch Quarkmassen und QED-Strahlung}} \frac{\alpha_s}{\pi} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow \alpha_s([10 \text{ GeV}]^2) = 0.17 \pm 0.04$$

nach Berücksichtigung diverser Korrekturen wie z.B. höhere Ordnungen in (α_s/π) , Übertragung von $n_f = 4$ Quarkflavours bei Messung auf $n_f = 5$ für die nachfolgenden Vergleiche

- $R_{QCD}^{exp}(\sqrt{s} = M_Z = 91 \text{ GeV}) = 20.765 \pm 0.026$

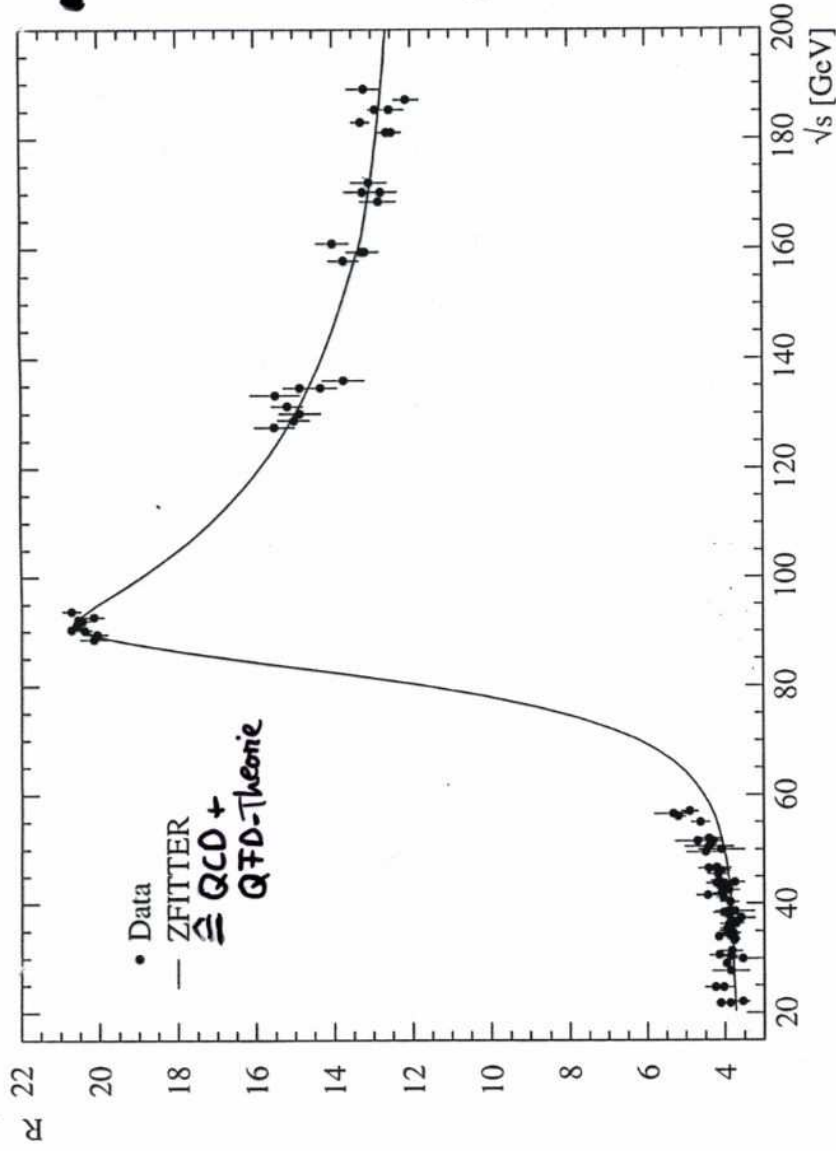
$$R_{QCD}(\sqrt{s} = M_Z) = \underbrace{R(M_Z)}_{= 19.938} \cdot \left(1 + \underbrace{1.060}_{\neq 1 \text{ wegen Korrektur durch elektroschwache Beiträge und QED-Strahlung}} \frac{\alpha_s}{\pi} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow \alpha_s(M_Z^2) = 0.122 \pm 0.006$$

ebenfalls nach Berücksichtigung höherer Ordnungen in (α_s/π) und für $n_f = 5$ Quarkflavours

□ $\alpha_s(100 \text{ GeV}^2) \approx 0.17 > \alpha_s(8100 \text{ GeV}^2) = 0.122$

R_{QCD} und Messdaten in Abhängigkeit von \sqrt{s}



- Messung von R_{QCD} ist eine "Zählaufgabe":

$$R_{QCD} = \frac{\text{Zahl beob. } e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}}{\text{Zahl beob. } e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}$$

- Theorie enthält neben QCD auch alle berechneten elektroschwachen Beiträge (→ umfangreiches Computerprogramm mit > 5000 Zeilen, genannt: ZFITTER)

Fig. 13. The ratio of hadronic and muonic cross-section measured between 20 and 189 GeV is shown [84-90]. Measurements at identical energies are spread horizontally for clarity. For the same reason solely OPAL data are presented at the Z pole. The curve is calculated using the ZFITTER program [30]. It includes initial state photon radiation but not contributions from pair production of W and Z bosons.

- Anpassung des Parameters α_s zur besten Beschreibung der Daten und unter Berücksichtigung der erwarteten Energieskalen-Abhängigkeit von α_s liefert
 $\alpha_s([20-55 \text{ GeV}]^2) = 0.163 \pm 0.022$, $\alpha_s([91 \text{ GeV}]^2) = 0.122 \pm 0.006$, $\alpha_s([130-190 \text{ GeV}]^2) = 0.130 \pm 0.035$

α_s aus vollkommen inklusiven Meßgrößen

• Hadronisches Verzweigungsverhältnis des τ -Leptons

Der Zerfall des τ -Leptons in Hadronen wurde als ein exp. Beleg für die Existenz der Farbladung angeführt. Natürlich tragen zu diesem Zerfall auch QCD-Korrekturen durch "Gluonabstrahlung" bei:



die wiederum von $\alpha_s(M_\tau^2)$ abhängen ($M_\tau = 1.77 \text{ GeV}/c$).

$$R_\tau \equiv \frac{\Gamma_{\tau \rightarrow \text{Hadronen} + \nu_\tau}}{\Gamma_{\tau \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\tau}} = \frac{B(\tau \rightarrow \text{Hadronen} + \nu_\tau)}{B(\tau \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\tau)}$$

Nutze aus, dass die Summe aller Verzweigungsverhältnisse $B(\tau \rightarrow X \nu_\tau) = B(\tau \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\tau) + B(\tau \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu \nu_\tau) + B(\tau \rightarrow \text{Hadronen} + \nu_\tau)$ gerade $B(\tau \rightarrow X \nu_\tau) = 1$ ist.

$$R_\tau = \frac{1 - B(\tau \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\tau) - B(\tau \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu \nu_\tau)}{B(\tau \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\tau)}$$

$$\Rightarrow 3.058 \cdot \left[1 + \frac{\alpha_s(M_\tau^2)}{\pi} + \dots \right]$$

$$R_\tau^{\text{exp}} = 3.64 \pm 0.02$$

$$\Rightarrow \alpha_s(M_\tau^2) = 0.32 \pm 0.02$$

↑ Korrekturen in höheren Potenzen von (α_s/π) , Masseneffekte und nicht störungstheoret. berechenbare Korrekturen

mit Berücksichtigung höherer Ordnungskorrekturen und Übertragung von $n_f=3$ nach $n_f=5$

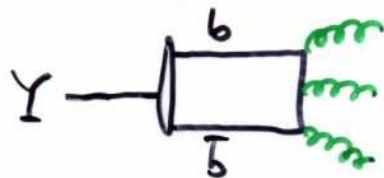
α_s aus vollkommen inklusive Meßgrößen

• Hadronischer Zerfall des Υ -Mesons

Dem leichtesten der Υ -Mesonen (ein $b\bar{b}$ -Zustand, sog. Quarkonium) ist es kinematisch nicht erlaubt in Mesonen mit b -Quarks zu zerfallen, da $m_\Upsilon = 9.46 \text{ GeV}/c^2$ und $m_{B\text{-Meson}} \approx 5.28 \text{ GeV}/c^2$ daher $\Upsilon \not\rightarrow BB$.

Hadronische Zerfälle von Υ -Mesonen laufen nach folgenden

Graph ab



(min. 2 Gluon wg. Farbladungserhaltung, ungerade Anzahl von Gluonen wg. Spin 1 des Υ -Mesons \rightarrow 3 Gluonen)

Für diesen Graph gilt: $(\Upsilon \rightarrow \mu^+ \mu^-)$

$$R_\Upsilon = \frac{\Gamma(\Upsilon \rightarrow GGG \rightarrow \text{Hadronen})}{\Gamma(\Upsilon \rightarrow \mu^+ \mu^-)} = \frac{10(\pi^2 - 9)}{3\pi} \frac{\alpha_s^3(m_\Upsilon^2)}{\alpha_{em}^2(m_\Upsilon^2)}$$

$$R_\Upsilon^{\text{exp}} = 32.5 \pm 0.9$$

$$\Rightarrow \alpha_s(m_\Upsilon^2) = 0.17 \pm 0.02$$

mit Berücksichtigung von Korrekturen höherer Ordnung und Übertragung von $n_f = 4$ nach $n_f = 5$

$\alpha_s(Q^2)$ über Flavour-Schwellen

Aus Lösung der Renormierungs-Gruppenagl. folgt:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln Q^2/\Lambda^2} = \frac{12\pi}{(33 - 2 \cdot n_f) \cdot \ln Q^2/\Lambda^2}$$

⇒ Energieabhängigkeit von α_s hängt zusätzlich von Zahl der Quarkflavourfreiheitsgrade n_f ab.

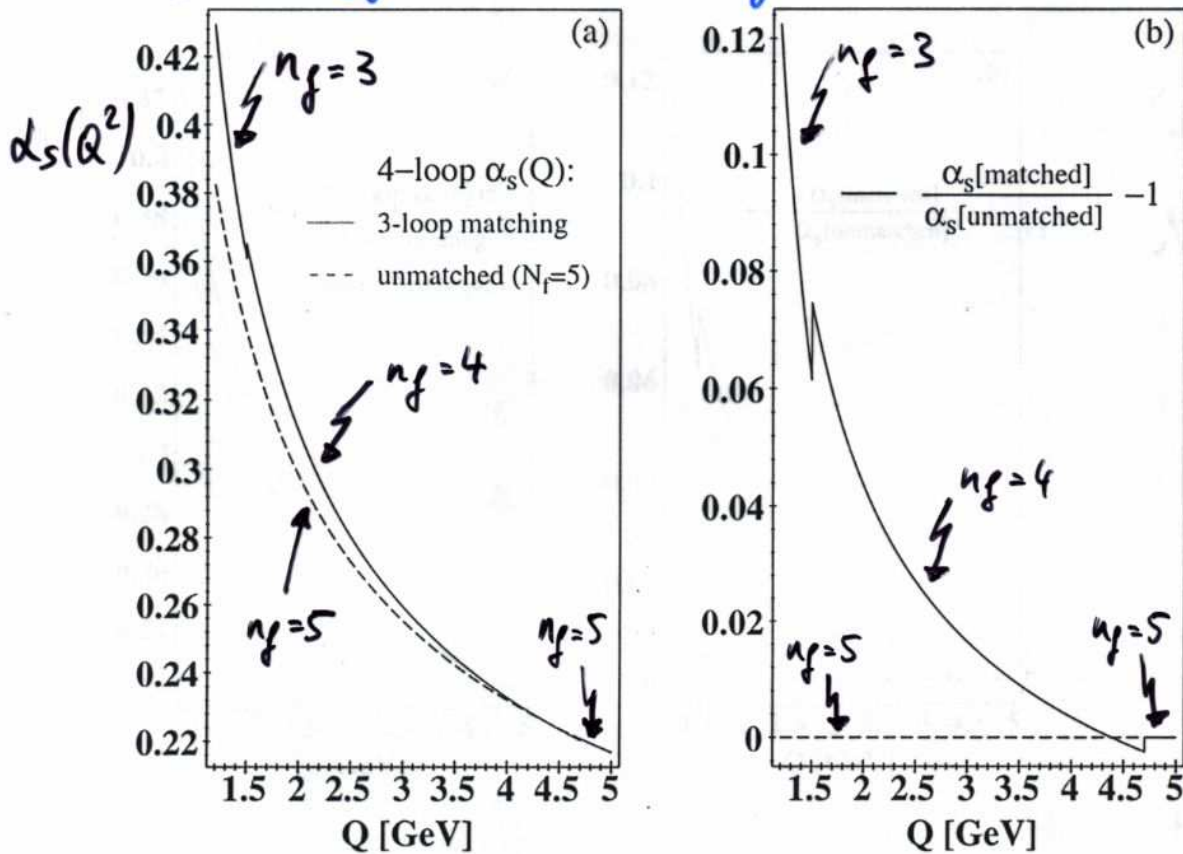


Figure 3: (a) 4-loop running of $\alpha_s(Q)$ with 3-loop quark threshold matching according to equations 7 and 8, with $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(N_f=5)} = 220$ MeV and charm- and bottom-quark thresholds at the pole masses, $\mu_c^{(N_f=4)} \equiv M_c = 1.5$ GeV and $\mu_b^{(N_f=5)} \equiv M_b = 4.7$ GeV (full line), compared with the unmatched 4-loop result (dashed line). (b) The fractional difference between the two curves in (a).

⇒ Je nach betrachtetem Prozess und zugehöriger Energieskala muß eine Übertragung der α_s -Werte gemäß der Zahl der Quarkflavourfreiheitsgrade stattfinden, um vergleichbare Resultate zu erhalten.

Wahl der Renormierungsskala

In allen α_s -Bestimmungen muß eine Wahl für die Renormierungsskala μ getroffen werden. Die Wahl $\mu^2 = Q^2$ scheint natürlich, ist aber für eine Störungsrechnung in beschränkter Ordnung nicht zwangsläufig konklusiv.

Aus der Lösung der Renormierungs-Gruppengleichung folgt in niedrigster Ordnung

$$\alpha_s(Q^2) \approx \alpha_s(\mu^2) \cdot \left(1 - \alpha_s(\mu^2) \cdot \beta_0^{\text{QCD}} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right),$$

eine Relation der renormierten Kopplung $\alpha_s(\mu^2)$ und der Kopplung an Skala des untersuchten Prozesses, also $\alpha_s(Q^2)$.

Da jede phys. Observable R unabhängig von μ sein muss und wenn $R(Q^2)$ als Potenzreihe in $\alpha_s(\mu^2)$ entwickelt wird, d.h.

$$R(Q^2) = R_0 + R_1 \alpha_s(\mu^2) + R_2 \alpha_s^2(\mu^2) + \dots,$$

dann folgt aus Anwendung der Renormierungs-Gruppengleichung:

$$0 \stackrel{!}{=} \mu^2 \frac{dR(Q^2)}{d\mu^2} = \mu^2 \frac{\partial R}{\partial \mu^2} + \beta(\mu^2) \frac{\partial R}{\partial \alpha_s} \quad [\alpha_s \equiv \alpha_s(\mu^2)]$$

$$= \left[\frac{\partial R_0}{\partial \ln \mu^2} \right] + \alpha_s \left[\frac{\partial R_1}{\partial \ln \mu^2} \right] + \alpha_s^2 \left[\frac{\partial R_2}{\partial \ln \mu^2} - \beta_0 R_1 \right] + \dots = 0$$

dass jeder Term in $[]$ identisch Null sein muss, insbesondere dass

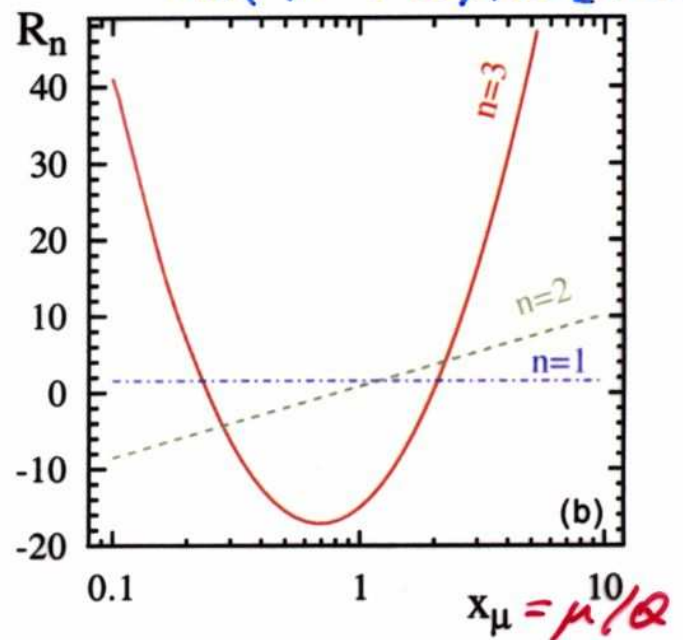
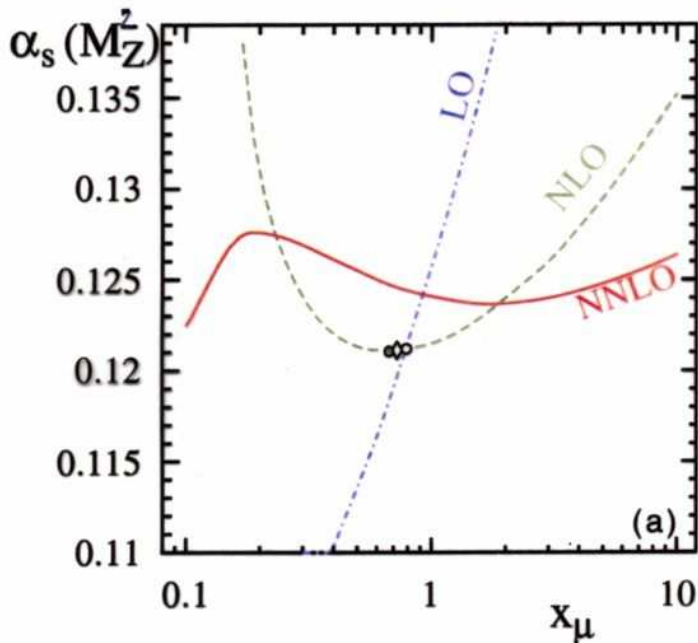
$$R_2\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) = R_2(1) - \beta_0 R_1 \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \quad \text{von } \mu^2 \text{ abhängt}$$

Wahl der Renormierungsskala μ

Z.B. in $R_{QCD} = R_0 + R_1 \alpha_s + R_2 \alpha_s^2 + R_3 \alpha_s^3 + \dots$ ☒

müssen R_2 und R_3 explizit von μ^2 abhängen, um die Renormierungs-Gruppengleichung für eine solche Rechnung in endlicher Ordnung der Störungstheorie zu erfüllen.

$$R_n(x_\mu^2 \equiv \mu^2/Q^2), Q^2 = [91.6 \text{ GeV}]^2$$



Löst man die Gl. ☒ für ein gemessenes $R_{QCD}^{\text{exp}} (= 20.768$ in diesem Beispiel) nach α_s unter Berücksichtigung von R_n bis $n=1, 2, 3$ (d.i. LO, NLO, NNLO) auf, so findet man $\alpha_s(M_Z^2)$ für verschiedene Wahl der Renormierungsskala $\mu = x_\mu \cdot M_Z$.

- ⇒
- Wert von $\alpha_s(M_Z^2)$ hängt von Wahl von x_μ ab
 - je höher die Ordnung n , die berücksichtigt wird, desto geringer wird die Renormierungsskalen-Abhängigkeit

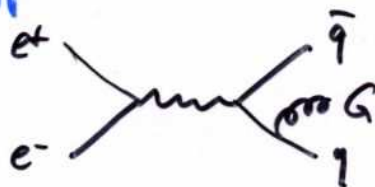
Wahl der Renormierungsskala

Es gibt verschiedene, theoretisch motivierte Vorschläge, welchen Wert für $\mu^2 = x_\mu^2 Q^2$ man wählen sollte. Da diese aber jeder für sich mit nicht prinzipiell begründbaren Annahmen verbunden ist, werden sie hier nicht näher diskutiert.

Die übliche Vorgehensweise ist, $\alpha_s(Q^2)$ für verschiedene Wahlen des Renormierungsskalenfaktors $x_\mu \equiv \mu/Q$ im Bereich 0.5 bis 2 zu untersuchen bzw. x_μ aus experimentellen Daten zu bestimmen. Dem Ergebnis von $\alpha_s(Q^2)$ wird dann eine Unsicherheit (typischerweise die Hälfte des minimal und maximal bestimmten Wertes für die Wahlen bzw. Anpassung von x_μ) zugewiesen, die sog. Renormierungsskalenunsicherheit, welche aus der nur bis zu endlicher Ordnung ausgeführten Störungsrechnung stammt. Tatsächlich liefert diese Unsicherheit in den meisten Fällen den dominierenden Beitrag zur Gesamtunsicherheit der α_s -Bestimmung.

α_s aus inklusiven Messgrößen

Inklusive Messgrößen sind sensitiv auf die Form des Endzustandes einer e^+e^- -Vernichtungsreaktion. Im Prinzip wird der differentielle Wirkungsquerschnitt für den Prozess



mit solchen

Messgrößen vermessen. Die theoretischen Berechnungen liefern dafür

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d^2\sigma}{dx_q dx_{\bar{q}}} = C_F \cdot \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1-x_q) \cdot (1-x_{\bar{q}})} \quad \otimes$$

wobei x_q und $x_{\bar{q}}$ die auf halbe Schwerpunktsenergien $\sqrt{s} \equiv Q$ normierten Energien von Quark und Antiquark sind $x \equiv \frac{2E}{\sqrt{s}}$.

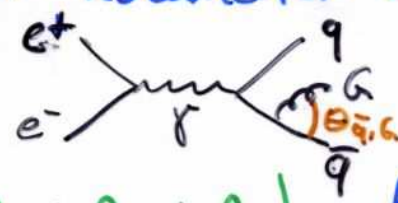
Eine Topologie messgröße \mathcal{F} ist dann das Integral über den

Phasenraum  gewichtet mit dem diff. WQ 

und der Definition der Größe \mathcal{F} , die sich aus $x_{\bar{q}}, x_q$ und $x_G \equiv 2 - x_q - x_{\bar{q}}$ berechnet.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{d\mathcal{F}} &= \int_0^1 \int_0^1 dx_q dx_{\bar{q}} \left[\frac{1}{\sigma_0} \frac{d^2\sigma}{dx_q dx_{\bar{q}}} \right] \cdot \delta(\mathcal{F} - f_{\mathcal{F}}(x_q, x_{\bar{q}}, x_G)) + \dots \\ &= \mathcal{R}(\mathcal{F}) \cdot \frac{\alpha_s}{2\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \end{aligned}$$

differentieller 3-Jet-Wirkungsquerschnitt

... hat das Problem so genannter kollinearer und infraroter Divergenzen. Dazu betrachte  mit der Viererimpulssumme $\otimes p_Y = (p_q + p_{\bar{q}} + p_G)$, für die $s = p_Y^2$ gilt. Für die invariante Masse zw. \bar{q} und G gilt (masselose q, \bar{q}):

$$(i) (p_{\bar{q}} + p_G)^2 \stackrel{\otimes}{=} (p_Y - p_q)^2 = p_Y^2 - 2p_Y p_q + \underbrace{p_q^2}_{=0 \text{ masselos}} = p_Y^2 - 2p_Y p_q$$

und

$$(ii) (p_{\bar{q}} + p_G)^2 = \underbrace{p_{\bar{q}}^2}_{=0} + 2p_{\bar{q}} p_G + \underbrace{p_G^2}_{=0} = 2p_{\bar{q}} p_G = 2E_{\bar{q}} E_G (1 - \cos \theta_{\bar{q}G})$$

Also gilt:

$$(i) p_Y^2 - 2p_Y p_q = s - 2\sqrt{s} E_q = s(1 - x_q) \stackrel{(ii)}{=} 2E_{\bar{q}} E_G (1 - \cos \theta_{\bar{q}G})$$

$$\Rightarrow \otimes \otimes \boxed{1 - x_q = \frac{2E_{\bar{q}} E_G}{s} (1 - \cos \theta_{\bar{q}G}) = \frac{1}{2} x_{\bar{q}} x_G (1 - \cos \theta_{\bar{q}G})}$$

Gl. $\otimes \otimes$ besagt:

$$1 - x_q \approx 0 \quad \text{falls} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_G \approx 0 \quad \text{infrarote Divergenz} \\ \theta_{\bar{q}G} \approx 0 \quad \text{kollinear} \end{array} \right.$$

des diff. WQ für 3-Jetproduktion:

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d^2 \sigma}{dx_q dx_{\bar{q}}} = C_F \frac{ds}{2\pi} \cdot \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1-x_q) \cdot (1-x_{\bar{q}})} \rightarrow \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} x_G \approx 0 \\ \theta_{\bar{q}G} \approx 0 \end{array} \right.$$

Divergenzen & Topologiemessgrößen

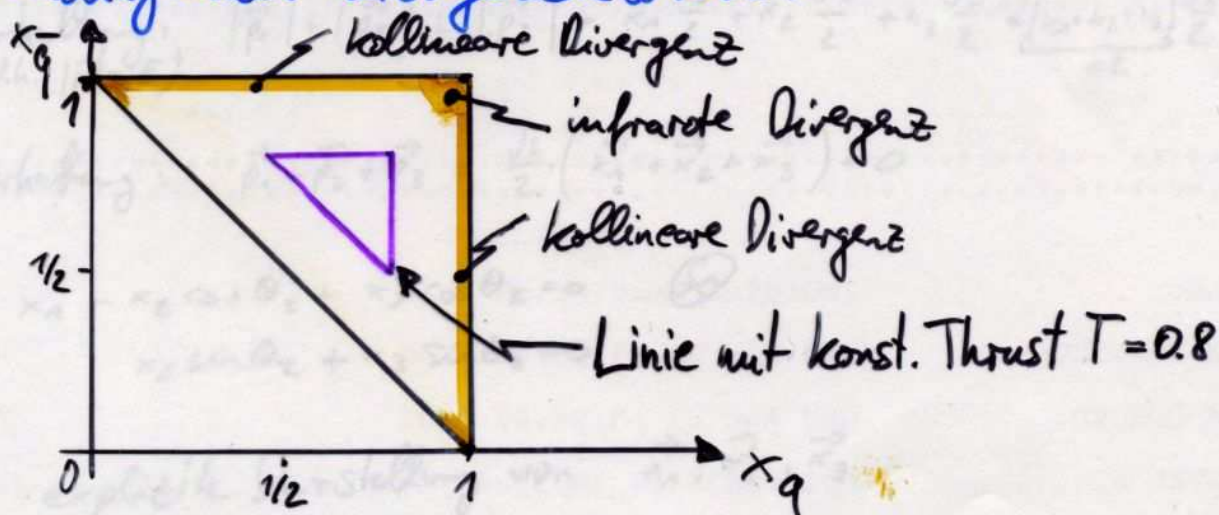
Eine wichtige Konsequenz aus den kollinearen & infraroten Divergenzen des diff. WQ ist, daß "gute" Topologiemessgrößen \hat{F} linear in den Impulsen bzw. Energien der eingehenden Teilchen sein müssen. Nichtlinearitäten würden den Phasenraum in $x_q, x_{\bar{q}}$ ungleichmäßig gewichten, sodass eine Ersetzung von x_q durch x'_q und x'_G mit $x_q = x'_q + x_G$ (also eine kollineare Gluonabstrahlung) einen anderen Wert der Größe \hat{F} zur Folge hätte (symbol. $\hat{F}(x_q) \neq \hat{F}(x'_q + x_G)$).
Im gleichen Sinne würde die Addition eines zusätzlichen $x'_G \neq 0$ zu x_q zu einem anderen Wert für \hat{F} führen, auch wenn $x_q + x'_G \approx x_q$ gelten würde (Fall der infraroten Gluonabstrahlung).
(Daher wird der Impulstensor (siehe Vorlesung über Entdeckung des Gluons) tatsächlich linearisiert zu

$$\Theta^{\alpha\beta} = \sum_i \frac{p_i^\alpha \cdot p_i^\beta}{|\vec{p}_i|} / \sum_i |\vec{p}_i|$$

und aus den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ wird der sogenannte C-Parameter: $C = 3(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3)$ berechnet.)

Divergenzen in diff. 3-Jet-WQ

Die kollineare und infrarote Divergenzen können leicht im Phasenraumdiagramm hervorgehoben werden:






In diesen Zonen kollinearer bzw. infraroter Divergenz sind Berechnungen für Topologiemessgrößen \mathcal{F} nicht verlässlich. Entsprechend müssen "gute" Topologiemessgrößen diesen Bereich mit verschwindender Gewichtung versehen bzw. ausschließen. z.B. hat die Observable Thrust die Gewichtung $f_T(x_q, x_{\bar{q}}, x_G) = \max(x_q, x_{\bar{q}}, x_G)$, welche aus der Definition

$$\text{Thrust: } T = \max_{\vec{n}} \frac{\sum_i |\vec{p}_i \cdot \vec{n}|}{\sum_i |\vec{p}_i|}$$

für \vec{p}_i , $i=q, \bar{q}, G$ als Impulse für Quark, Antiquark und Gluon nach einfacher Rechnung folgt. M.a.W. solange $T < 1$ gilt, bleibt die Integration $\int_0^1 \int_0^1 dx_q dx_{\bar{q}}$ von den Bereichen kollinearer und infraroter Divergenz fern.

Topologie messgrößen

Viele verschiedene Messgrößen wurden vorgeschlagen, z.B.

\mathcal{F}	$f_{\mathcal{F}}(x_q, x_{\bar{q}}, x_G)$				
Thrust	$\max(x_q, x_{\bar{q}}, x_G)$	max. Longitudinalimpuls	1	$\geq \frac{2}{3}$	$\geq \frac{1}{2}$
C-Parameter	$\frac{16}{\pi^2} \frac{\prod_i (1-x_i)}{\max(x_i^2)}$	$\overline{\sin^2 \theta_{ij}}$ θ_{ij} : Winkel zw. Teilchen	0	$\leq \frac{3}{4}$	≤ 1
Jetraten		$\frac{\#(\text{2-jet})}{\#(\text{1-jet}) + \#(\text{2-jet}) + \dots}$	2-	3-	n-jetartig

⋮
und viele mehr

Für jeder gemessene Reaktion $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$ wird aus Impulsen \vec{p}_i und Energien E_i der Hadronen ein Zahl berechnet, z.B. für

Thrust:
$$T = \max_{\vec{n}} \frac{\sum_i |\vec{p}_i \cdot \vec{n}|}{\sum_i |\vec{p}_i|}$$
 (\vec{n} ist dann der sog. Thrustvektor)

C-Parameter: (folgt aus expliziter Berechnung d. Eigenwerte)

$$C = \frac{3}{2} \frac{\sum_{i,j} [|\vec{p}_i| \cdot |\vec{p}_j| - (\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j)^2 / (|\vec{p}_i| \cdot |\vec{p}_j|)]}{(\sum_i |\vec{p}_i|)^2}$$

und diese in eine Verteilung (Histogramm) eingetragen, der Form

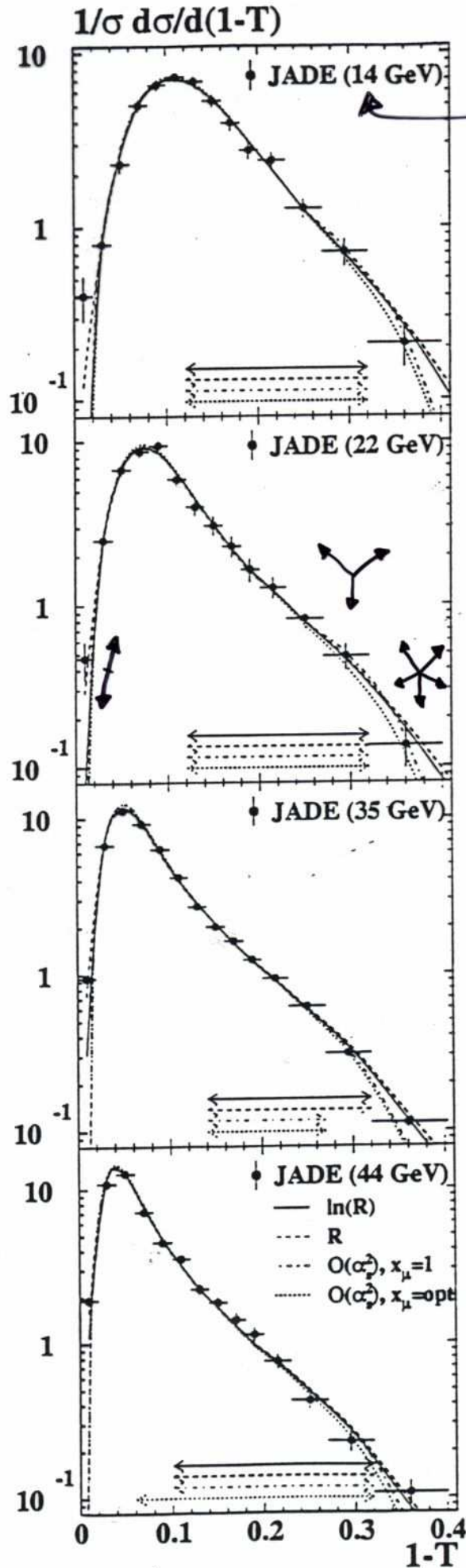
$$\left[\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\mathcal{F}} \right]^{exp} = \left[\frac{1}{N_{events}} \cdot \frac{\Delta N}{\Delta \mathcal{F}} \right]$$

Anzahl der Einträge im Intervall $[\mathcal{F}, \mathcal{F} + \Delta \mathcal{F}]$
 Anzahl der beob. e^+e^- Reaktionen

Verteilung von Thrust

bei verschiedenen Schwerpunktsenergien \sqrt{s}

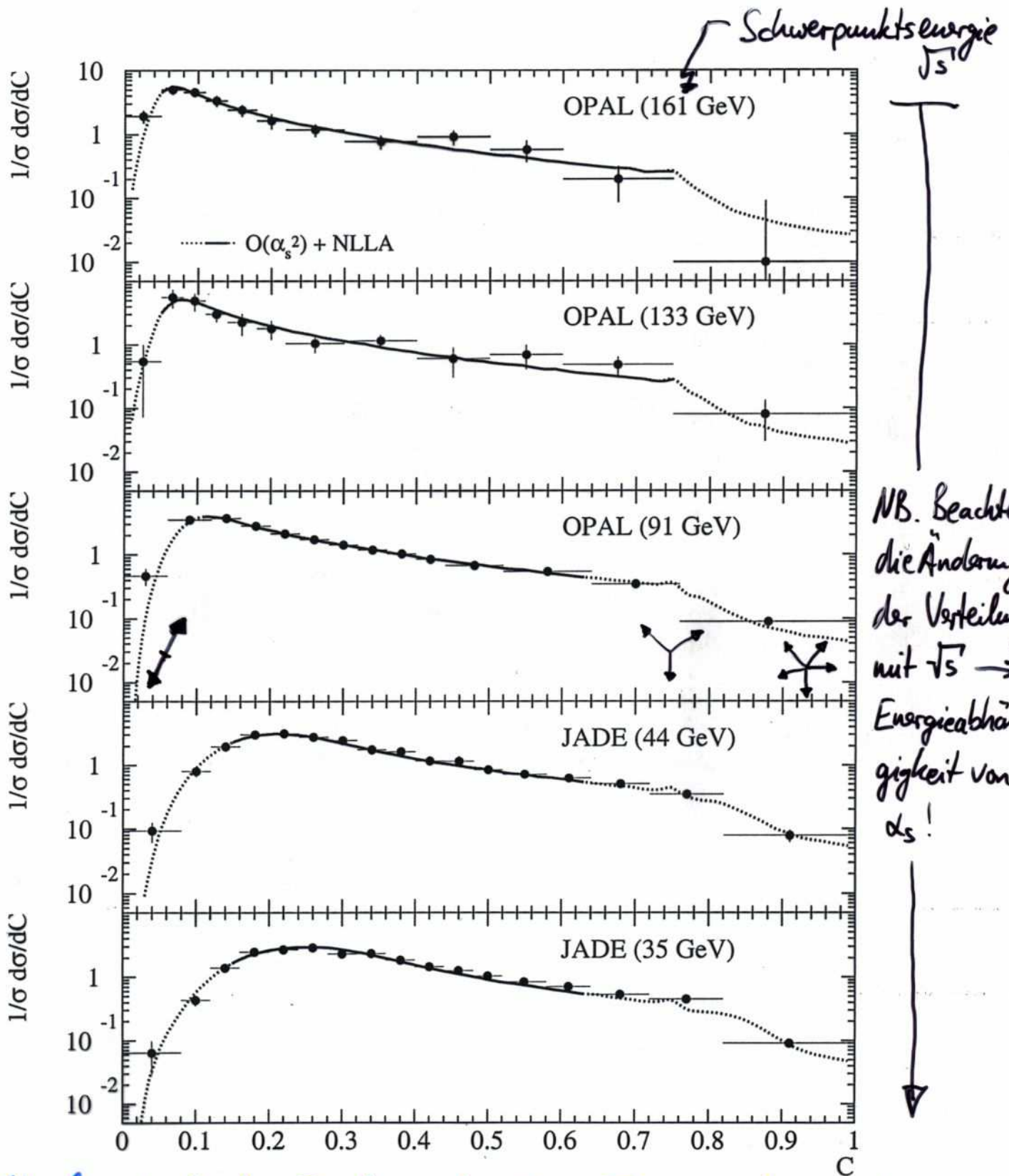
Überlagert ist das Ergebnis der QCD-Theorierechnung dargestellt, wobei α_s als freier Parameter zur besten Beschreibung der Daten angepasst wurde.



NB. Beachte die Änderung der Verteilung mit \sqrt{s} (u.a.) Energie = abhängigigkeit von α_s !

Verteilung des C-Parameters

bei verschiedenen Schwerpunktsenergien \sqrt{s}



Überlagert ist das Ergebnis der QCD-Theorierechnung dargestellt, wobei α_s ein freier Parameter ist, der zur besten Beschreibung der Daten angepaßt wurde.

Verteilung des differentiellen 2-Jetrates

bei verschiedenen Schwerpunktsenergien $E_{cm} = \sqrt{s}$
mit überlagerten QCD-Theorierechnungen

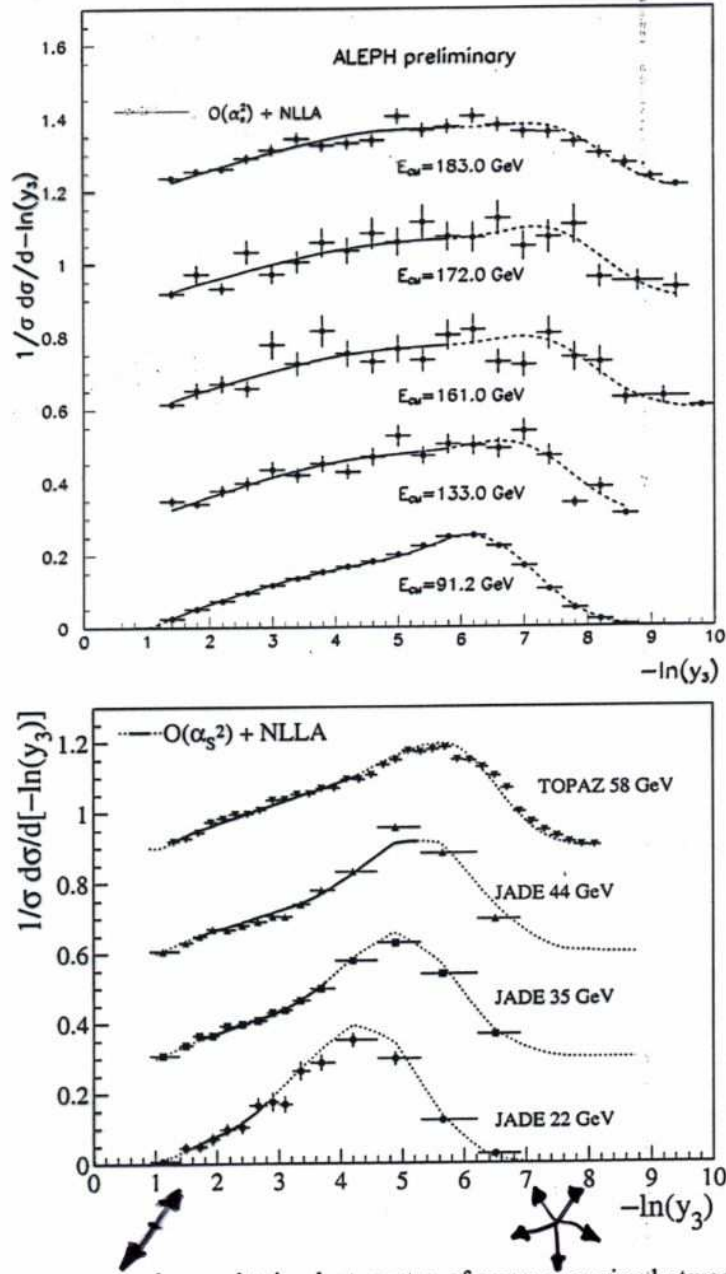


Fig. 19. Differential 2-jet rate versus $-\ln y_3$ obtained at centre-of-mass energies between 22 and 183 GeV using the DURHAM jet algorithm. The data, which are displaced vertically by multiples of 0.3, are corrected to hadron level. At each energy the result of a fit of the combined fixed second-order calculation ($O(\alpha_s^2)$) and the next-to-leading logarithmic approximation (NLLA) to the distributions is overlaid. The range of data used in the fit is indicated by a solid line. The extrapolations are shown as dashed and dotted curves. The upper figure is taken from Ref. [136], the data of the lower figure are compiled from Refs. [138,139].

diff. 2-Jetrates bezeichnet Abnahme der Häufigkeit von 2-jetartigen Endzuständen bei Steigerung des Jetauflösungsvermögens y_3 des Jetrekonstruktionsalgorithmus

Zusammenfassung vieler α_s -Bestimmungen

aus: ● e^+e^- -Vernichtung (Wirkungsquerschnitte, Verzweigungsverhältnisse, Topologie-Messgrößen)

● tiefinelastischer Lepton-Nukleon-Streuung

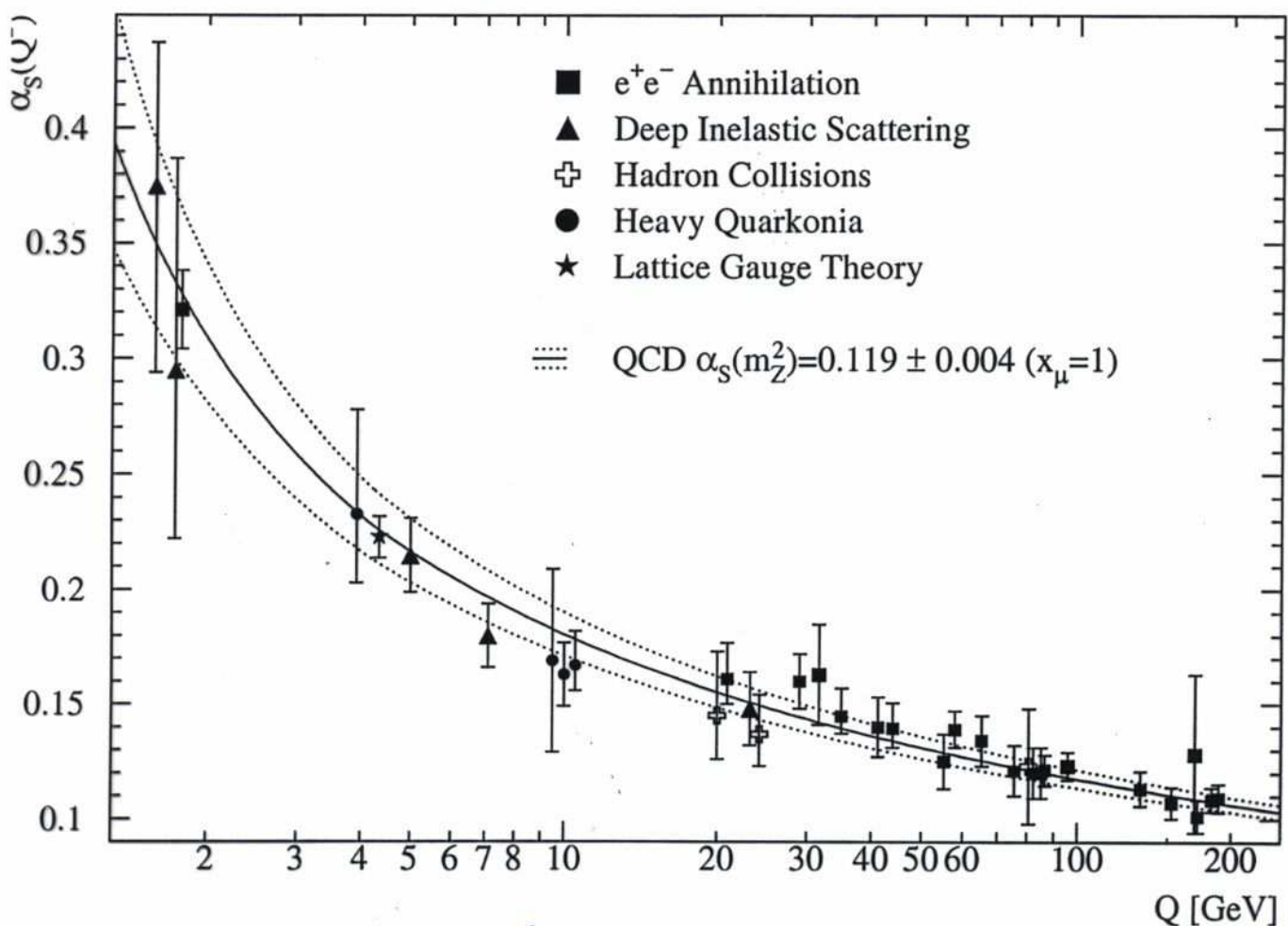
● Hadron-Hadron-Kollisionen

alle beschreibbar durch

$$\alpha_s(Q^2) \approx \alpha_s(M_Z^2) \cdot \left[1 - \alpha_s(M_Z^2) \cdot \beta_0^{QCD} \cdot \ln \frac{Q^2}{M_Z^2} \right] + \dots$$

mit

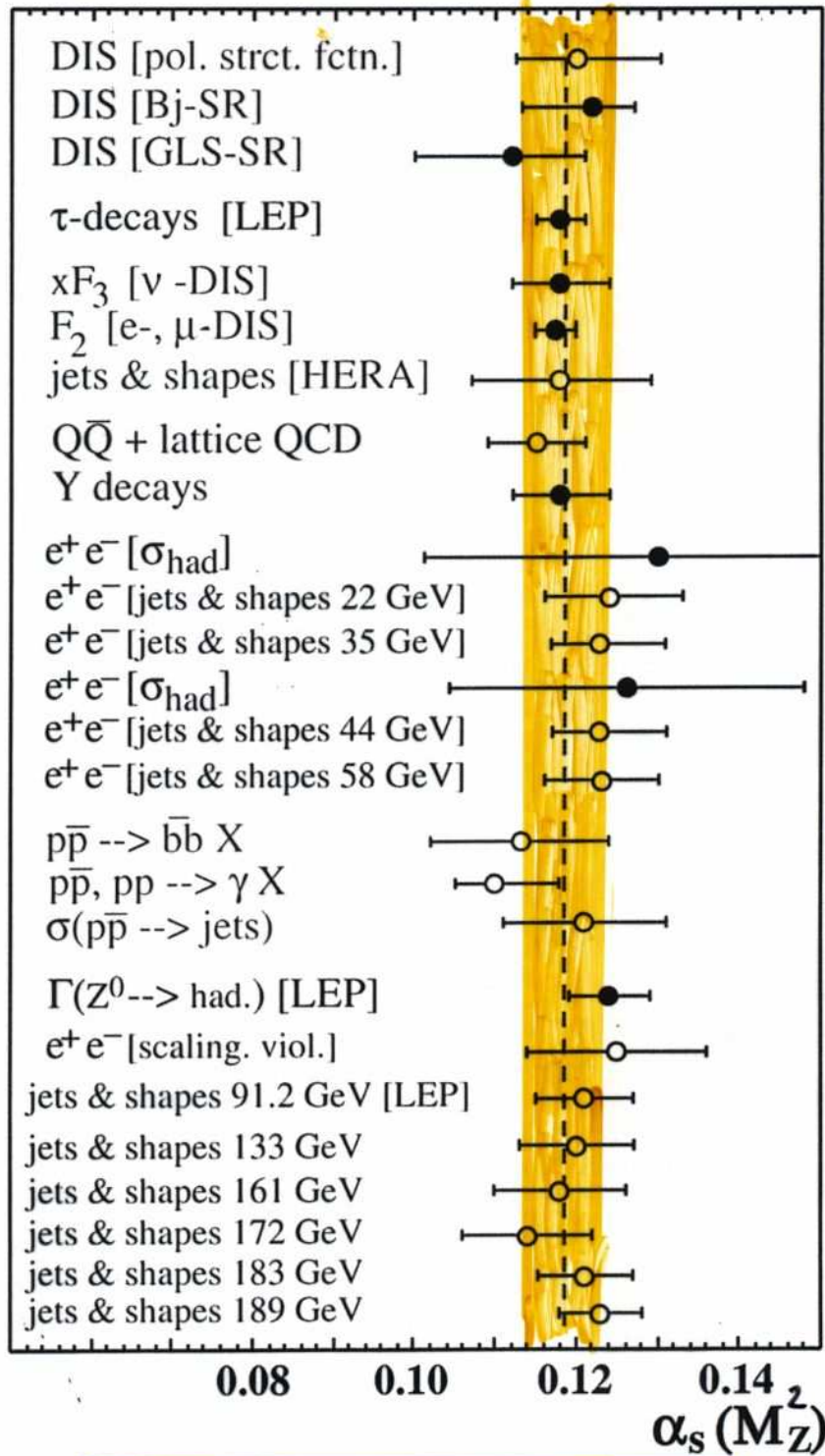
$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.119 \pm 0.003$$



NB. Die renormierte Kopplungskonst. α_s hängt wie von der Theorie erwartet von der Energieskala ab!

Zusammenfassung von α_s -Bestimmungen

diesmal $\overset{2}{4}$ übersetzt vom Q^2 der Bestimmung zur Skala M_Z^2



\Rightarrow

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.119 \pm 0.003$$

(z. Vgl.:

$$\alpha_{em}(M_Z^2) \approx 1/128.8)$$

Perturbative Vorhersagen für Topologiemessgrößen

Beispiel Thrust:

- Perturbative Vorhersage folgt aus Integration des diff. WQ über den Phasenraum. Im \mathbb{S} -Jetfall:

$$\frac{1}{\mathcal{V}_0} \frac{d\mathcal{V}}{dT} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx_q dx_{\bar{q}} dx_G \underbrace{C_F \frac{d_s}{2\pi}}_{\text{Matrixelement } \mathcal{O}(d_s)} \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})} \cdot \underbrace{\delta(T - \max(x_q, x_{\bar{q}}, x_G))}_{\text{Messgröße}} \cdot \underbrace{\delta(2 - x_q - x_{\bar{q}} - x_G)}_{\text{Energieerhaltung}}$$

Dies kann analytisch berechnet werden. Eine (längere) Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \otimes \frac{1}{\mathcal{V}_0} \frac{d\mathcal{V}}{dT} &= C_F \cdot \frac{d_s}{2\pi} \cdot \left[\frac{2 \cdot (3T^2 - 3T + 2)}{T \cdot (1-T)} \ln \frac{2T-1}{1-T} - \frac{3 \cdot (3-T)(2-T)}{1-T} \right] \\ &= \mathcal{A}(T) \cdot \frac{d_s}{2\pi} \end{aligned}$$

- In der nächsten Ordnung ist das Matrixelement (in $\mathcal{O}(d_s^2)$) bekannt, die Integration über den (dafür 5-dimensionalen) Phasenraum nur noch numerisch möglich:

$$\frac{1}{\mathcal{V}_0} \frac{d\mathcal{V}}{dT} = \mathcal{A}(T) \cdot \frac{d_s}{2\pi} + \mathcal{B}(T) \cdot \left(\frac{d_s}{2\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(d_s^3)$$

- Diese Form der perturbativen Vorhersagen entspricht also einer Entwicklung in Potenzen von $d_s/2\pi$
- NB: Der Term \otimes hat folgendes Grenzwertverhalten:
 $\mathcal{A}(T) \underset{T \rightarrow 1}{\sim} \ln(1-T)/(1-T)$, d.h. logarithmisch

Resummation großer Logarithmen

Eine alternative Entwicklung, die ^{auf} eine bessere Beschreibung des Bereich $T \approx 1$ abzielt, benutzt eine Darstellung mit Exponentialfunktion (man sagt auch: Exponentanzierung von Thrust). Dazu wird betrachtet:

$$f(\tau) \equiv f(1-T) := \int_T^1 dT' \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dT'} = \int_{1-\tau}^1 dT' \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dT'}$$

mit $\tau \equiv 1-T$, was durch folgende Entwicklung beschrieben wird:

$$f(\tau) = C(\alpha_s) \cdot \exp\left[G(\alpha_s, \ln \frac{1}{\tau})\right] + \underbrace{D(\alpha_s, \tau)}_{\text{Restfunktion } \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0}$$

dabei haben die Koeffizientenfkt. C und die Exponentenfkt. G die folgende Darstellung ($L := \ln 1/\tau$):

$$C(\alpha_s) = 1 + C_1 \alpha_s + C_2 \alpha_s^2 + \dots$$

$$G(\alpha_s, L) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n+1} G_{nm} \cdot \alpha_s^n \cdot L^m$$

$$\text{leading log LL:} = L \cdot [G_{12}(\alpha_s L) + G_{23}(\alpha_s L)^2 + G_{34}(\alpha_s L)^3 + \dots]$$

$$+ \text{next-to-leading log NLL:} + [G_{11}(\alpha_s L) + G_{22}(\alpha_s L)^2 + G_{33}(\alpha_s L)^3 + \dots]$$

$$+ \text{sub-leading log:} + \alpha_s [G_{21}(\alpha_s L) + G_{32}(\alpha_s L)^2 + G_{43}(\alpha_s L)^3 + \dots]$$

+ ...

$$\text{Dieser Schritt ent:} = L \cdot \underbrace{g_1(\alpha_s L)}_{LL} + \underbrace{g_2(\alpha_s L)}_{NLL} + \alpha_s \underbrace{g_3(\alpha_s L)}_{\text{subleading}} + \dots$$

spricht der Resummation

der LL- und NLL-Terme zu allen Ordnungen in $\alpha_s L$.

Perturbative Vorhersagen

Man unterscheidet daher:

- **LO, NLO, NNLO, ...** als leading^{order}, next-to-leading^{order}, next-to-next-to-leading^{order}, ... Vorhersagen, die aus einer Entwicklung in $\alpha_s/2\pi$ stammen. Diese Vorhersagen sind anwendbar im Bereich fern der infraroten und kollinearen Singularitäten, also im sogenannten 3-, 4-, ..., n-Jetbereich. Für Thrust ist dies bei $T \ll 1$.

- **LLA, NLLA, ...** als leading log approximation, next-to-leading log approx., ... Vorhersagen, die aus einer Entwicklung nach z.B. $(\alpha_s \cdot \ln \frac{1}{z})$ stammen. Diese Vorhersagen sind anwendbar im Bereich der infraroten & kollinearen Divergenzen, im sogenannten 2-Jetbereich. Für Thrust ist dies $F \equiv \tau = 1 - T \approx 0$ oder $T \approx 1$.

- Die beste Vorhersage erhält man aus der Kombination von z.B. NLO und NLLA, wobei man "Doppelzählungen" korrigieren muß, weil die Gültigkeitsbereiche nicht scharf getrennt sind. Dies ist das so genannte **matching** der Vorhersagen.