

Quarkmassen und deren Auswirkungen

In den bisher dargestellten Untersuchungen zur starken Wechselwirkung wurden die endlichen Massen der Quarks m_q meist vernachlässigt, da die untersuchte Energieskala $Q \gg m_q$. Tatsächlich sind Vorhersagen für Effekte durch $m_q \neq 0$ schon 1978 in niedrigster Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s)$ gerechnet worden. Danach wird das Matrixelement für Gluonabstrahlung in $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ von

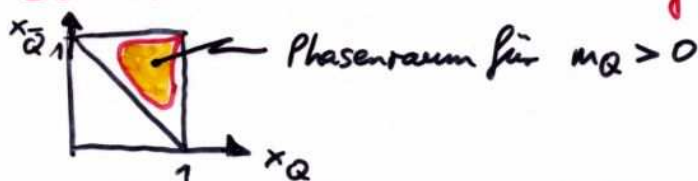
$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d^2\sigma}{dx_q dx_{\bar{q}}} = C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1-x_q) \cdot (1-x_{\bar{q}})} \quad (\text{masselose Quarks})$$

zu (massive Quarks $m_Q > 0$)

$$\otimes \frac{1}{\sigma_0} \frac{d^2\sigma}{dx_Q dx_{\bar{Q}}} = C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[\frac{x_Q^2 + x_{\bar{Q}}^2}{(1-x_Q) \cdot (1-x_{\bar{Q}})} - \frac{4m_Q^2}{s} \left(\frac{1}{1-x_Q} + \frac{1}{1-x_{\bar{Q}}} \right) - \frac{2m_Q^2}{s} \left(\frac{1}{(1-x_Q)^2} + \frac{1}{(1-x_{\bar{Q}}}^2} \right) - \frac{4m_Q^4}{s^2} \left(\frac{1}{1-x_Q} + \frac{1}{1-x_{\bar{Q}}} \right)^2 \right]$$

Man beachte:

- $m_Q > 0$ schränkt den Phasenraum für Gluonabstrahlung ein



- $m_Q > 0$ unterdrückt Gluonabstrahlung im Matrixelement in \otimes werden alle m_Q -Term subtrahiert

3-Jet-Phasenraum für massive Quarks

ist insbesondere im Bereich kollinear divergenzen des Wirkungsquerschnitts ($x_Q \rightarrow 1$ bzw. $x_{\bar{Q}} \rightarrow 1$) eingeschränkt

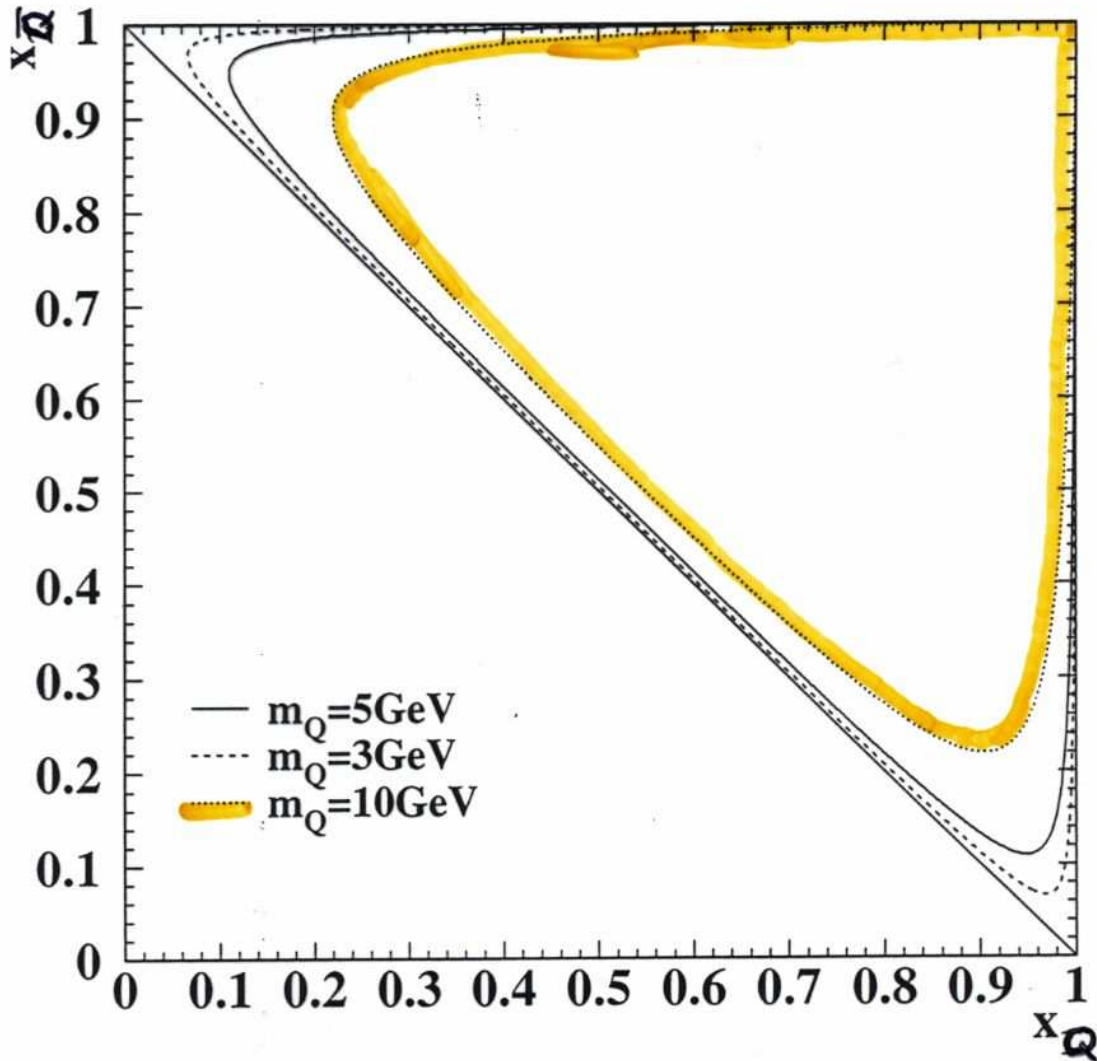


Abbildung 4.4: Die Reduktion des Phasenraumes durch endliche Quarkmasse der Teilchen 1 und 2 bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 91.2 \text{ GeV}$. Die Reduktion für drei Massen sind dargestellt, $m_Q = 3 \text{ GeV}$, $m_Q = 5 \text{ GeV}$ und $m_Q = 10 \text{ GeV}$.

⇒ Einschränkung des Integrationsbereichs für Matrixelement des diff. 3-Jet-WQ.

Quarkmassen und deren Auswirkungen


Endliche und nicht verschwindende Quarkmassen haben zentralermaßen den Effekt, dass kollineare Divergenzen (i.e. $x_q \rightarrow 1$) nicht mehr auftreten können, da

$$1 - x_Q = \frac{m_Q^2}{s} \geq m_Q^2/s \quad \text{gilt, sodass der}$$

Grenzübergang $x_Q \rightarrow 1$ nicht mehr möglich ist ($\sim x_Q < 1 - \frac{m_Q^2}{s}$).

Daraus und aus der Helizitätserhaltung bei der Abstrahlung eines Spin-1 Gluons von einem massiven Spin- $\frac{1}{2}$ Quark folgt, dass kollineare Gluonabstrahlung nahe der kinematischen Grenze des Phasenraums unterdrückt ist, der sogenannte "dead cone". Man kann dies aus dem Matrixelement für massive Quarks als Näherung für den Fall $x_G = 2 - x_Q - x_{\bar{Q}} \ll 1$ und kleiner Abstrahlwinkel zwischen Quark und Gluon, d.h. $\theta \approx 0$ herleiten:

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d^2\sigma}{dx_Q dx_{\bar{Q}}} \rightarrow \frac{1}{\sigma_0} \frac{d^2\sigma}{dx_G d\theta^2} \approx C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{\theta^2}{(\theta^2 + 4m_Q^2/s)^2}$$

Daraus liest man ab, dass Gluonabstrahlung im Konus  $\theta \lesssim 2m_Q/\sqrt{s}$ unterdrückt ist und dieser Konus mit wachsender Quarkmasse m_Q zunimmt.

Quarkmassen und deren Auswirkungen

in Zusammenfassung:

- **schwere Quarks strahlen weniger Gluonen ab als leichte Quarks**
Dem muss in Präzisionsbestimmungen von α_s Rechnung getragen werden, sonst gibt es systematische Messfehler.
- **insbesondere wird eine reduzierte Rate von 3-Jet-Endzuständen in Reaktionen mit schweren Quarks erwartet:**
Dies ist für den hier zumeist betrachteten Energiebereich von $\sqrt{s} \approx 10$ bis 200 GeV vor allem für das b-Quark als schwerstes in diesem Energiebereich zugängliches Quark von Interesse.

Werden alle Quarkflavour inklusive betrachtet, spielen die individuellen Eigenschaften keine bedeutende Rolle. Erst im Studium einzelner Quarkflavour kommen diese Eigenschaften zum Tragen. So würde eine α_s -Bestimmung mittels der 3-Jet-Rate in b-Quarkreaktionen einen kleineren α_s -Wert ergeben, wenn die b-Quarkmasse vernachlässigt wird, d.h. α_s scheinbar flavourabhängig zu sein.

Nun ist QCD als Feldtheorie mit einer flavourunabhängigen Kopplung formuliert (tatsächlich ginge es anders gar nicht), daher ist eine exp. Überprüfung dieser **Quarkflavourunabhängigkeit von α_s** notwendig.

Identifikation der Quarkflavour

... ist Voraussetzung für Flavourabhängigkeitsstudie.

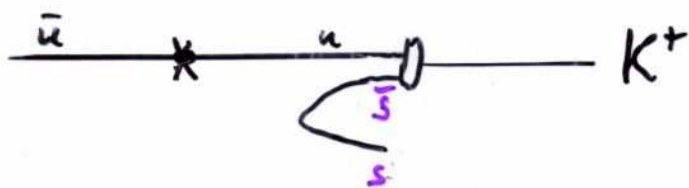
Da Quarks nicht direkt beobachtbar, müssen Eigenschaften der gemessenen Hadronen ausgenutzt werden:

- **Leading Particle Effekt:** Das Teilchen mit der höchsten Energie hat die Quantenzahlen des Quarks (insbesondere die Quarkflavour) geerbt. z.B.:



($u\bar{u}$ aus dem Vakuum [See] erzeugt)

Problematisch ist, dass v.a. die Leichten u, d (s) Quarks aus dem Vakuum produziert werden können:

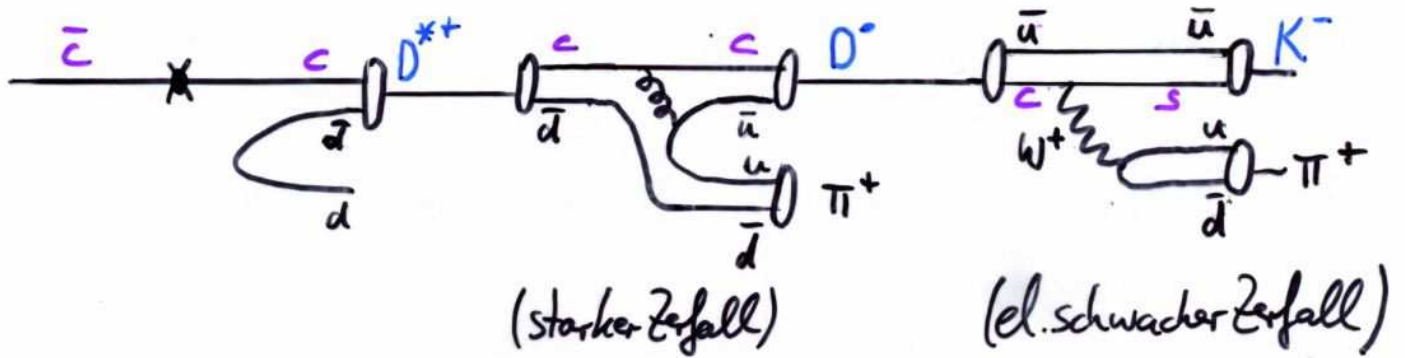
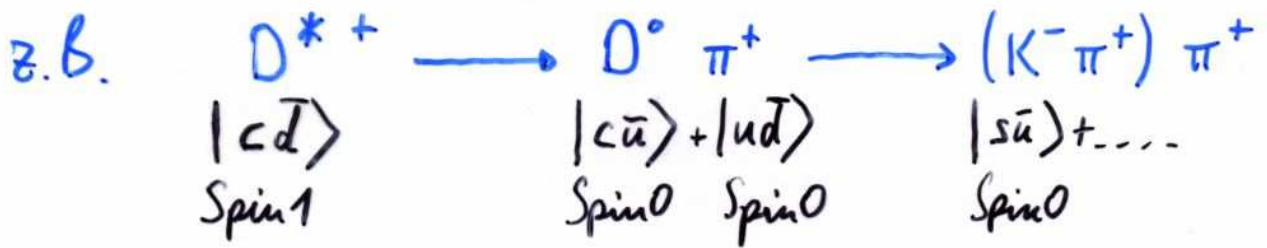


Hierzu kann/muss man ausnutzen, dass s -Quarks aufgrund ihrer etwas größeren Masse seltener aus dem Vakuum erzeugt werden können ($\frac{s}{d} \approx 30\%$). So kann man durch Vergleich von $K^+ = |u\bar{s}\rangle$ mit $K^0 = |d\bar{s}\rangle$ auf statistische Weise zwischen s und u, d trennen

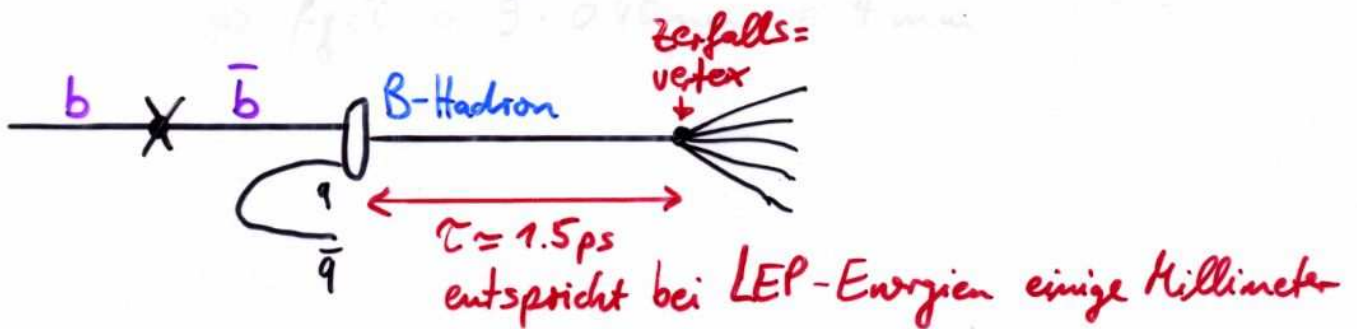
Identifikation der Quarkflavour

... ist leichter für schwere Quarks, die i.w. nicht aus dem Vakuum erzeugt werden können:

- **exklusive Rekonstruktion** einer Teilchenzerfallskaskade,



- **inklusive Rekonstruktion** aufgrund charakteristischer Teilcheneigenschaften, z.B. "lange Lebensdauer" von B-Hadronen mit b-Quarks (typ. 1.5 ps):



Möglich ist die inkl. Rekonstruktion aus durch Identifikation eines Elektrons/Myons im el. schwachen Zerfall von b- bzw. c-Quarks:



Identifikation der Quarkflavour

...in Übersicht:

● Leading Particle Effekt:

- + für leichte Quarkflavours nutzbar
- Trennung nur auf statistische Weise

● exklusive Rekonstruktion:

- + keine Selektion für schwere Quarks
- meist nur für wenige Zerfallskanäle mit kleinem Verzweigungsverhältnissen nutzbar (z.B. $B(D^{*+} \rightarrow D^+ \bar{v}^+ \rightarrow (K^+ \bar{v}^+) \pi^0) \approx 2\%$)

● inklusive Rekonstruktion:

- + direkte Beobachtung von Zerfallsvertices möglich
- + Umkehrung der Forderung eines Zerfallsvertex selektiert leichte u, d, s-Quarks (Hadronen aus diesen Quarks haben viel größere Lebensdauern, meist aufgrund kinematischer Beschränkungen wegen der geringen Hadronmassen)
- / selektieren b- und c-Quarks (typ. Hadronlebensdauern für Hadronen aus b-Quarks $\sim 1.5 ps$, aus c-Quarks $\sim 0.4 ps$)

Anmerkung: Alle diese Methoden wurden und werden benutzt, doch durch die Einführung leistungsfähiger Vertexdetektoren auf Basis von Silizium-Streifenzählern ist die Rekonstruktion von Zerfallsvertices mittlerweile den übrigen Methoden für b-, u, d, s- und (mit Einschränkungen) c-Quarks in hohem Maße in puncto Effizienz und Reinheit haushoch überlegen.

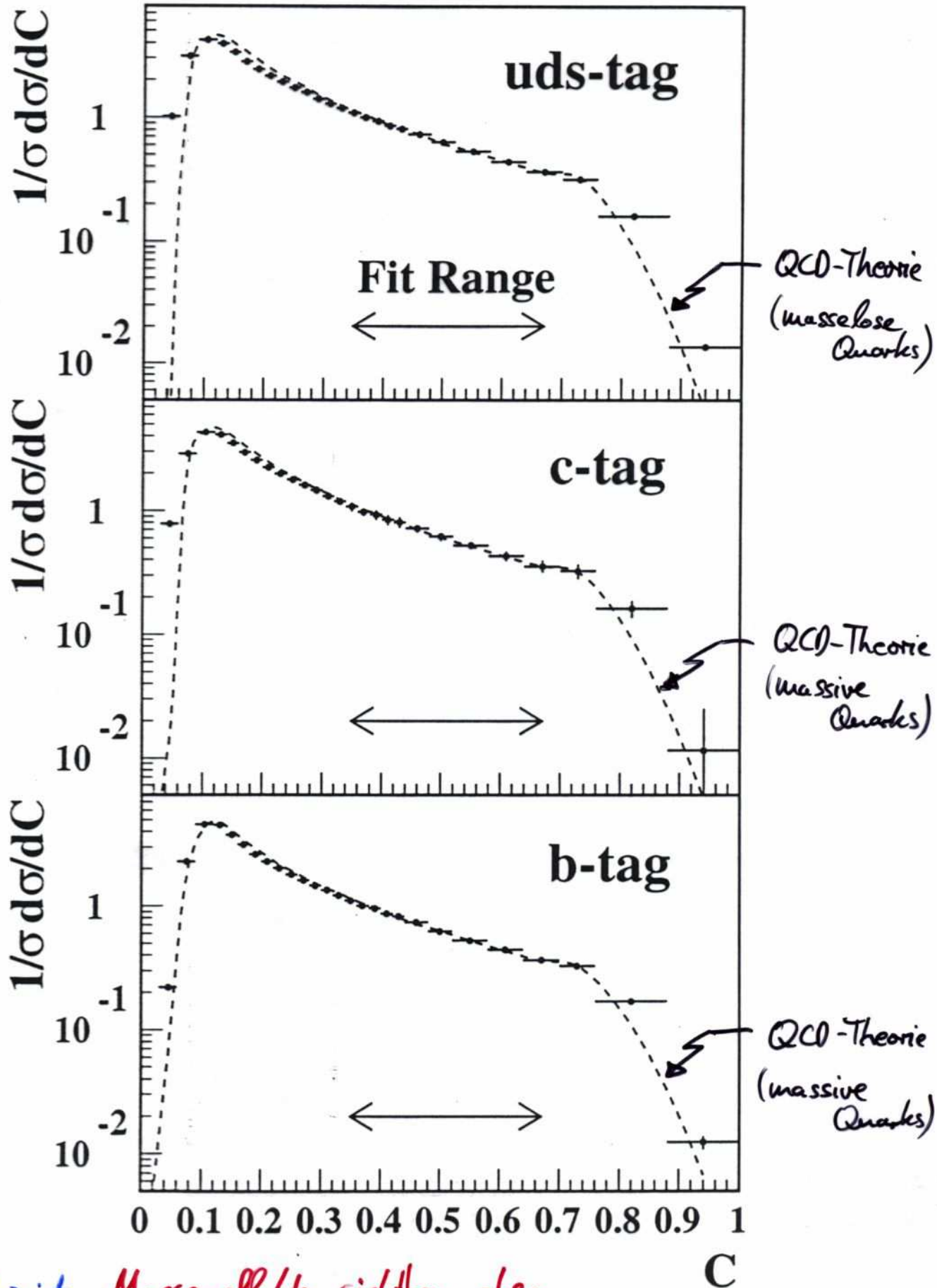
Flavourunabhängigkeit von α_s

- Selektiere aus allen beobachteten e^+e^- -Annihilationen Datensätze mit identifizierter primärer Quarkflavour, z.B. b^- , c^- , uds -Quark
- Messe Topologiemessgrößen für jeden dieser Datensätze, z.B. Thrust, Jetraten, C-Parameter, ...
- Bestimme α_s^q aus diesen Topologiemessgrößen, $q = uds, c, b$ unter Verwendung von QCD-Theorie rechnungen für masselose bzw. massive Quarks
- Betrachte Verhältnisse zwischen diesen α_s^q -Resultaten, z.B. $\alpha_s^b / \alpha_s^{uds}$; $\alpha_s^c / \alpha_s^{uds}$
- Flavourunabhängigkeit verlangt:

$$\alpha_s^Q / \alpha_s^{uds} = 1 \quad Q = c, b$$

- Verwendung der masselosen QCD-Theorie für α_s^Q , $Q = c, b$ zeigt Existenz und Größe des Masseneffektes
- Bestimmung der Quarkmasse aus Masseneffekt unter der Annahme der Flavourunabhängigkeit

OPAL



Vergleich zeigt: Masseneffekte sichtbar, aber sehr gering

OPAL

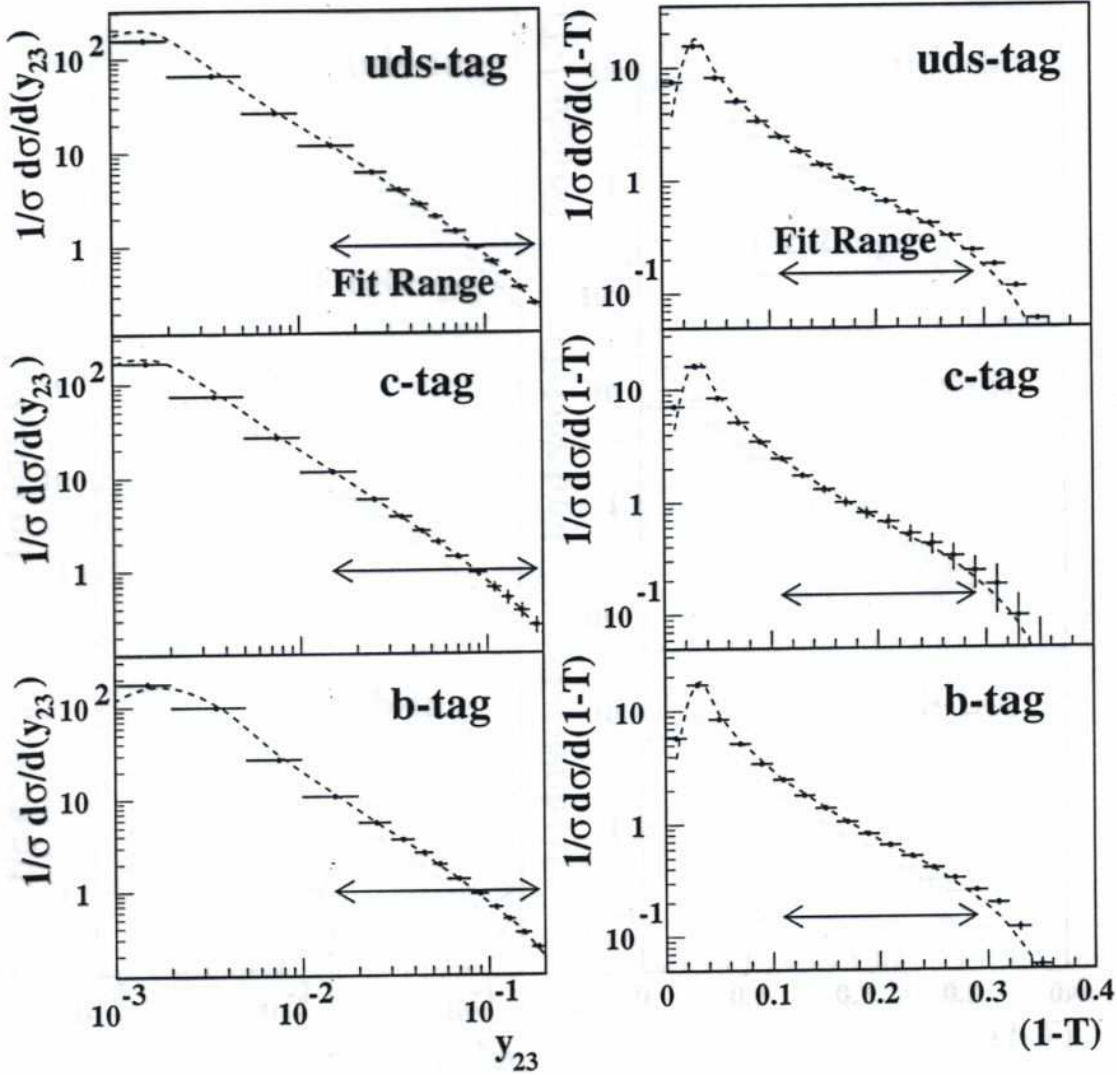


Figure 4: The points with error bars are the distributions of y_{23} and $1 - T$ measured in three flavour-tagged event samples (uds-tag, c-tag and b-tag) corrected to the hadron level. The curves show the result of simultaneous fits of $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ calculations to the distributions measured in each flavour-tagged event sample. The renormalization scale x_μ was fixed equal to one. The fit range for each distribution is indicated by the arrows.

Existenz und Größe der Masseneffekte

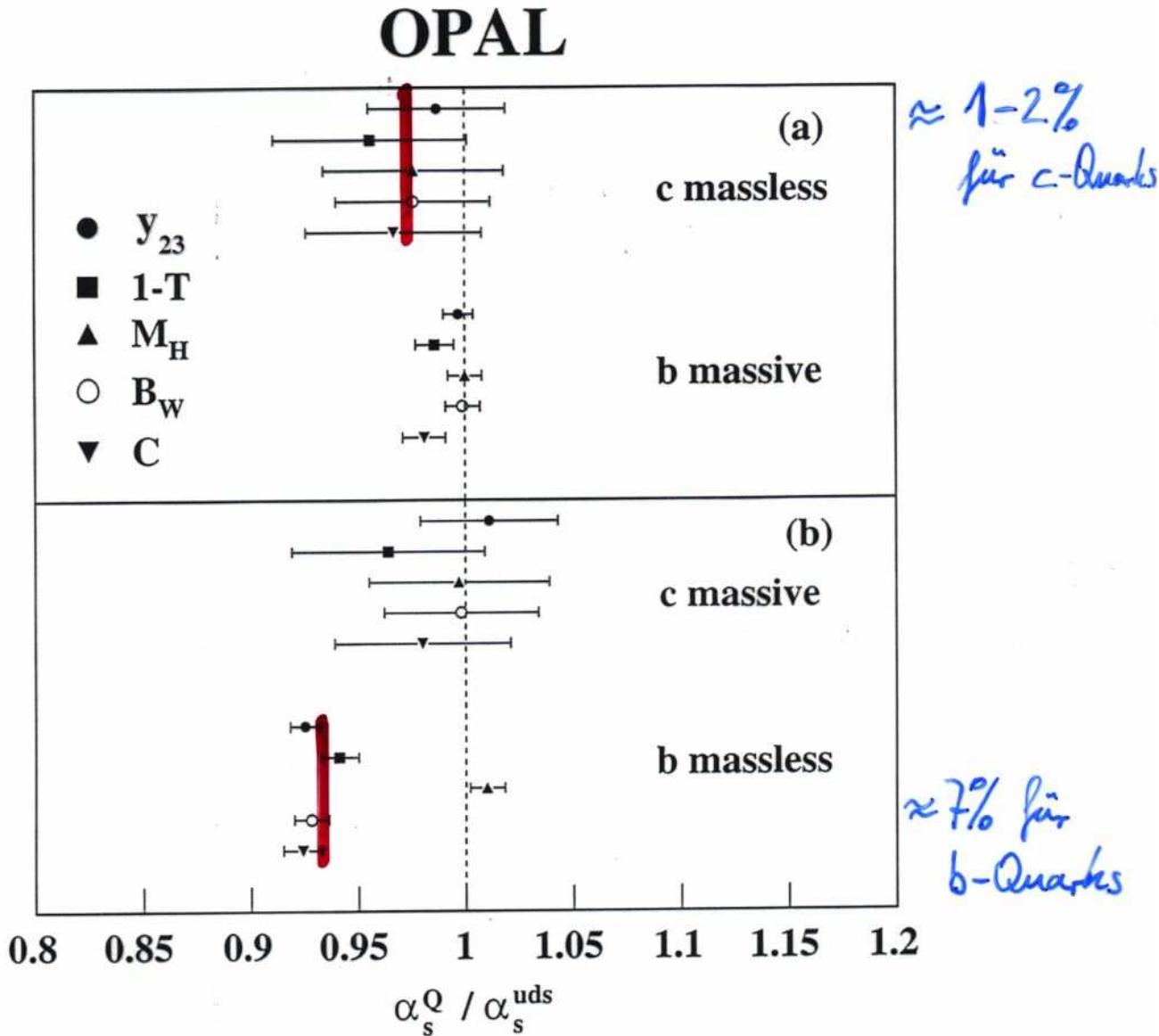


Figure 8: The ratios $\alpha_s^c / \alpha_s^{uds}$ and $\alpha_s^b / \alpha_s^{uds}$ determined in two different ways: (a) where the uds and c quarks were treated as if massless and the b quark was considered to be massive and (b) where the uds and b quark were treated as massless and the c quark was considered massive. The errors shown are statistical only.

Flavourunabhängigkeit der starken Kopplung

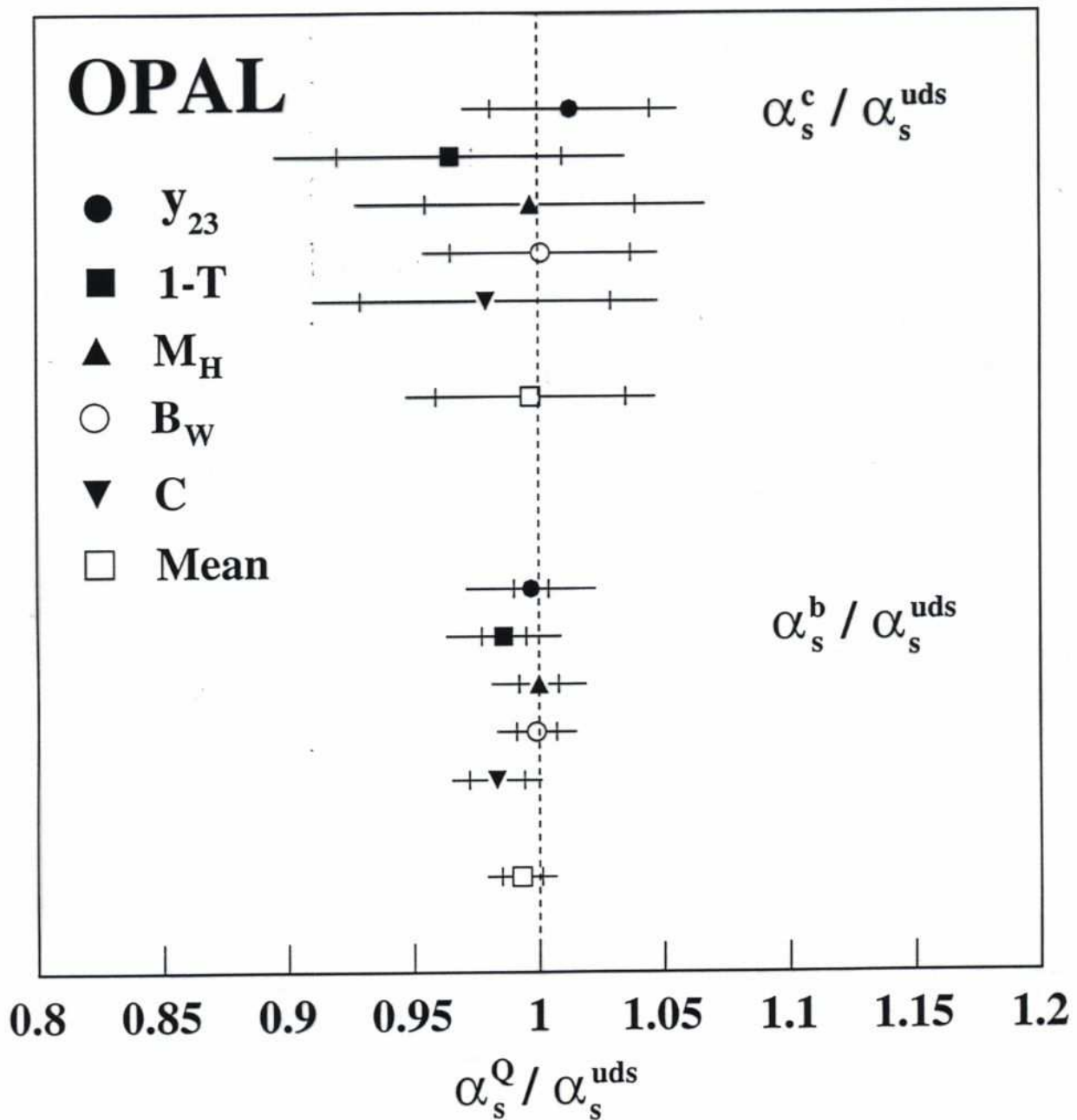


Figure 7: The ratios $\alpha_s^c / \alpha_s^{uds}$ and $\alpha_s^b / \alpha_s^{uds}$ determined for each of the event shapes studied. The weighted mean of the results derived for the five event shape observables is also shown. The inner error bar represents the statistical error while the full error bar represents the statistical error and the systematic error added in quadrature.

⇒ Flavourunabhängigkeit gilt!

getestet auf $\sim 1\%$ Niveau für b-Quarks, 5% -Niveau für c-Quarks

Flavourunabhängigkeit der starken Kopplung

... mit leading partide effect auch für leichte Quarkflavours untersucht:

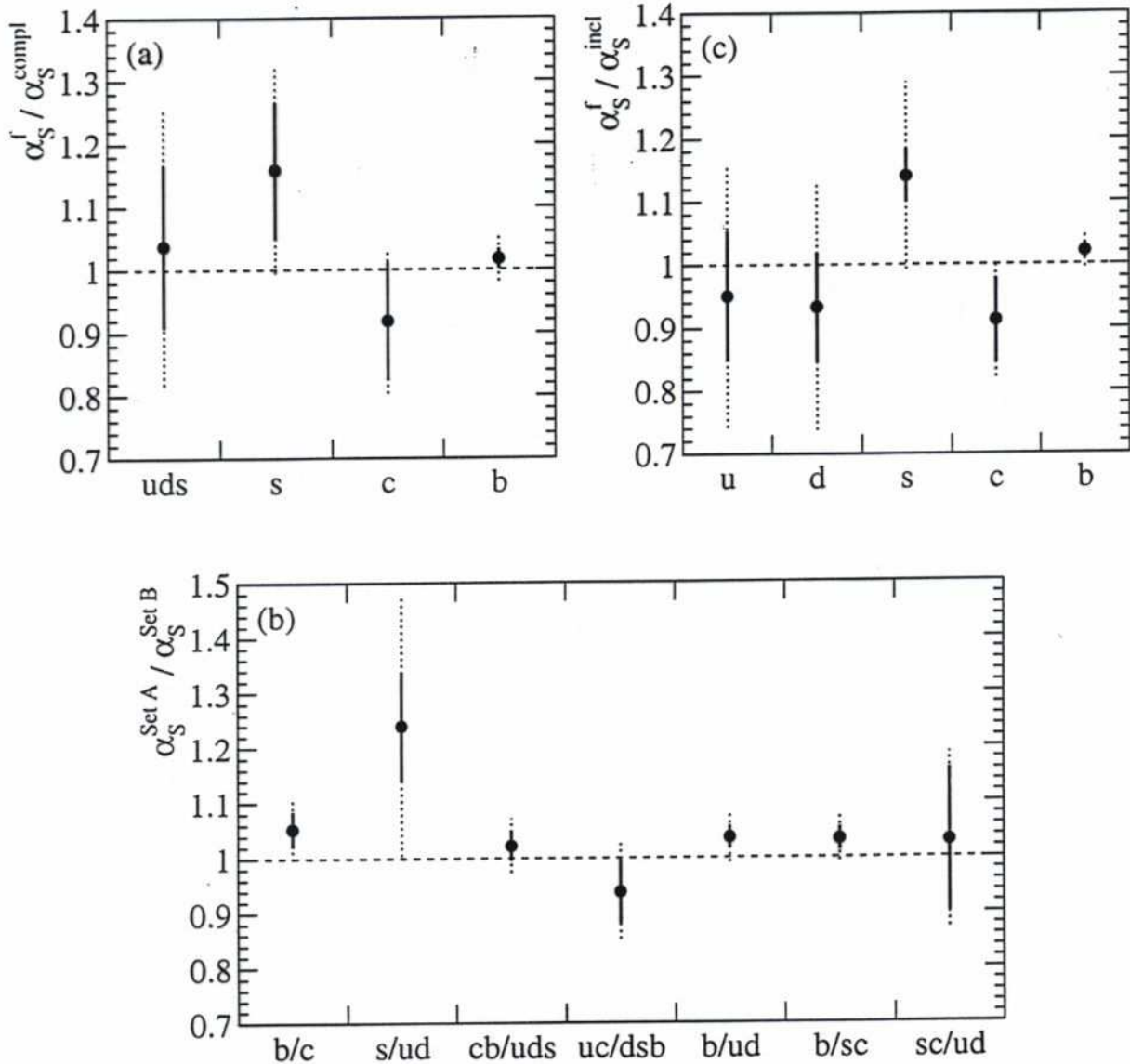


Abbildung 7.1: (a) Verhältnisse von $\alpha_s^f / \alpha_s^{\text{compl}}$ für eine spezifische Quarkflavour f , die aus der Anpassung für eine einzelne Quarkflavour in einer Selektion gewonnen ist, (b) von $\alpha_s^{\text{Set A}} / \alpha_s^{\text{Set B}}$ für eine Anpassung von in Gruppen (Set A/Set B) zusammengefaßter Quarkflavours und (c) von $\alpha_s^f / \alpha_s^{\text{incl}}$ für die gemeinsame Anpassung aller Quarkflavours f in allen Selektionen. Gezeigt sind die statistischen (durchgezogen) und die quadratisch kombinierten statistischen und systematischen Fehler (gestrichelt). Für Bottom-Quarks wurde eine Massenkorrektur basierend auf den Rechnungen von Ballestrero et al. [69] benutzt (siehe Text).

⇒ Flavourunabhängigkeit gilt auch für leichte Quarks
 (NB. bei niedrigeren Energien schon durch starke Isospin-Symmetrie bekannt; hier getestet bei hohen Energien $\approx 91\text{GeV}$)

Bestimmung der b-Quarkmasse

mit Annahme der Flavourunabhängigkeit von d_s aus dem beobachtbaren Masseneffekt.

Eigentlich sollten Quarks eine eindeutige und konstante Masse haben. Wegen des Confinements sind sie aber nur innerhalb von Hadronen beobachtbar. Um ihre Masse festzustellen, braucht man eine ^{auf} perturbativen Rechnungen basierende theoret. Vorschrift. Tatsächlich gibt es viele solcher Massendefinitionen, die der jeweiligen theoret. Fragestellung angepasst sind.

Im Folgenden wird die so genannte \overline{MS} -Massendef. benutzt. Diese entspricht letztlich der Masse, welche in der Lagrange-dichte einzusetzen ist.

\overline{MS} ist ein Renormierungsschema. Also gibt die Renormierungs-Gruppen-Gleichung:

$$0 \stackrel{!}{=} \mu^2 \frac{dR}{d\mu^2} = \left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(d_s) \frac{\partial}{\partial d_s} - \gamma_m(d_s) \cdot m \frac{\partial}{\partial m} \right) R \stackrel{!}{=} 0$$

Dabei ist $\gamma_m(m)$ die anomale Massendimension, für die gilt:

$$-\gamma_m(d_s) = \frac{1}{m} \mu^2 \frac{\partial m}{\partial \mu^2} = -\gamma_{m,0} d_s - \gamma_{m,1} d_s^2 - \dots$$

$$\text{wobei } \gamma_{m,0} = \frac{1}{\pi} ; \quad \gamma_{m,1} = \frac{1}{32\pi^2} (303 - 10n_f) ;$$

Laufende renormierte Quarkmasse

Für die DGL: $\frac{1}{m} \mu^2 \frac{\partial m}{\partial \mu^2} = -\gamma_m \alpha_s - \dots$

ergibt sich nach Separierung der Veränderlichen:

$$m(Q^2) = m(\mu^2) \cdot \exp\left[-\int_{\mu^2}^{Q^2} \gamma_m(\mu^2) \frac{d\mu^2}{\mu^2}\right]$$

Substituiert man noch mit der Renormierungsgleichung

$$\text{für } \alpha_s: \mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2} = \beta(\alpha_s) \Rightarrow \frac{d\mu^2}{\mu^2} = \frac{d\alpha_s}{\beta(\alpha_s)}$$

so ergibt sich:

$$m(Q^2) = m(\mu^2) \cdot \exp\left[-\int_{\alpha_s(\mu^2)}^{\alpha_s(Q^2)} \gamma_m(\alpha_s) \frac{d\alpha_s}{\beta(\alpha_s)}\right]$$

Also bestimmt die β -Funktion $\beta(\alpha_s)$ zusammen mit $\gamma_m(\alpha_s)$ das Laufen der renormierten Quarkmasse. Eine explizite Rechnung für b-Quarks liefert den Ausdruck:

$$\bar{m}_b(Q^2) = \bar{m}_b(Q_0^2) \cdot \left(\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(Q_0^2)}\right)^{12/23} \cdot \text{höhere Korrekturen}$$

(Der Querstrich über \bar{m}_b soll direkt auf das \overline{MS} -Renormierungsschema hinweisen, weil in anderen Renorm.-schemata die Koeffizienten ggf. anders sind)

In dieser \overline{MS} -Massendefinition findet man also eine

mit der starken Kopplung α_s laufende Quarkmasse

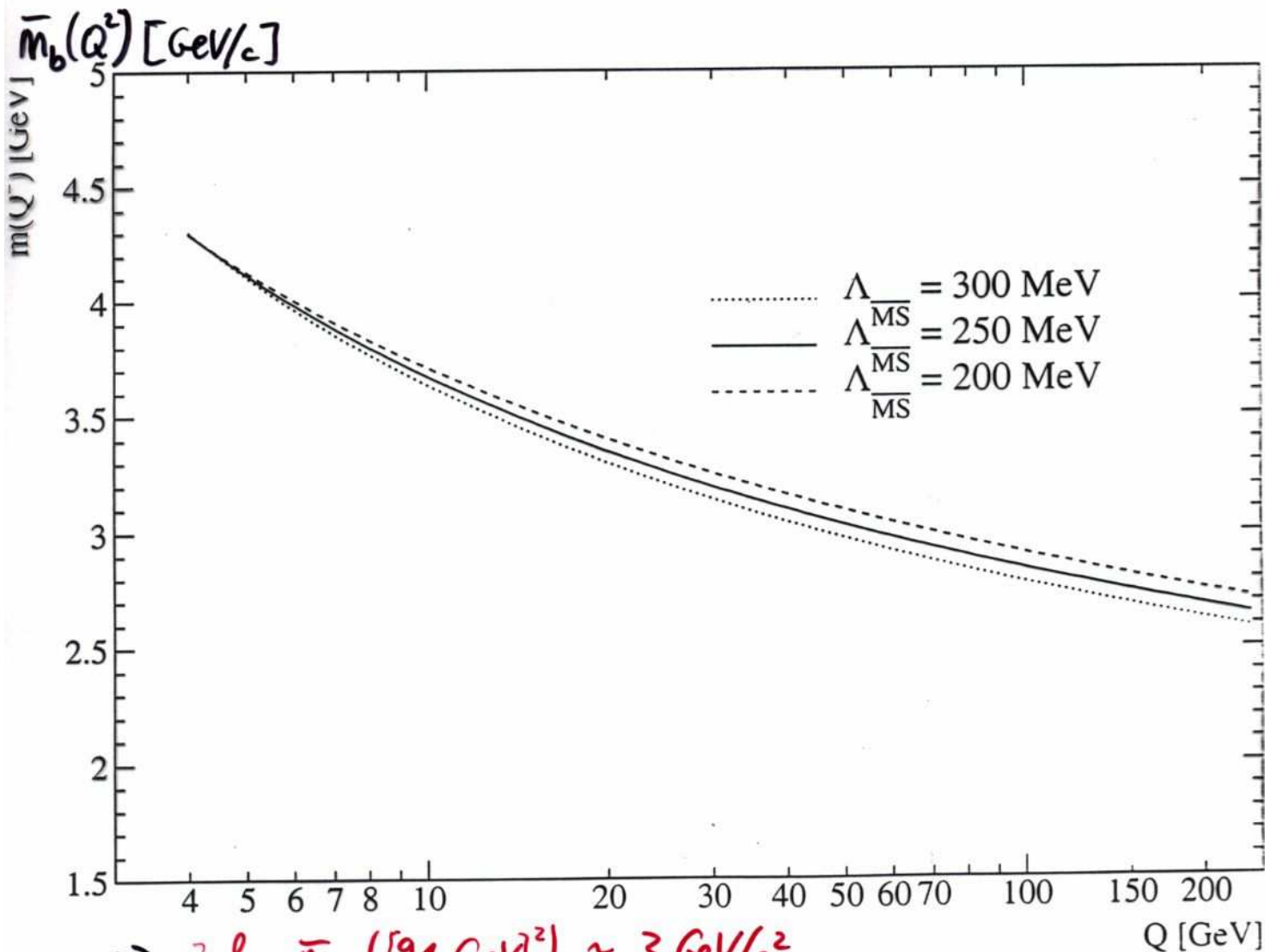
Laufende renormierte b-Quarkmasse

$$\bar{m}_b(Q^2) = \bar{m}_b(\bar{m}_b^2) \cdot \left(\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(\bar{m}_b^2)} \right)^{12/23} \cdot \text{höhere Korrekturen}$$

wobei

$$\bar{m}_b(\bar{m}_b^2) = 4.25 \text{ GeV}/c^2$$

benutzt wird (entsprechend dem "Weltmittelwert" aus vielen zumeist theoretischen Bestimmungen der b-Quarkmasse \bar{m}_b aus der Masse von B-Hadronen und Bottomonium [ein $b\bar{b}$ -Zustand])

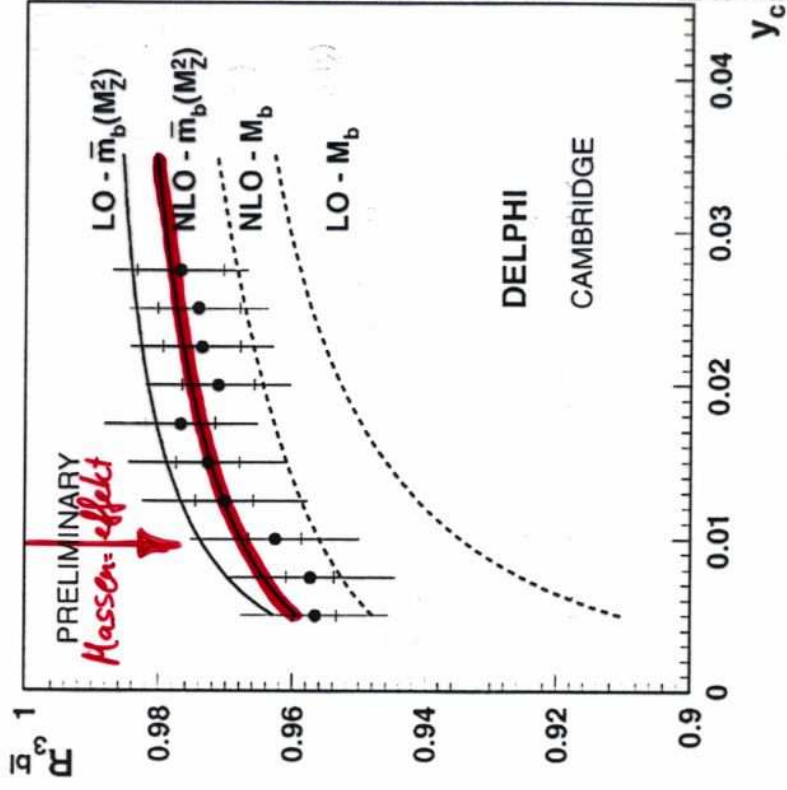
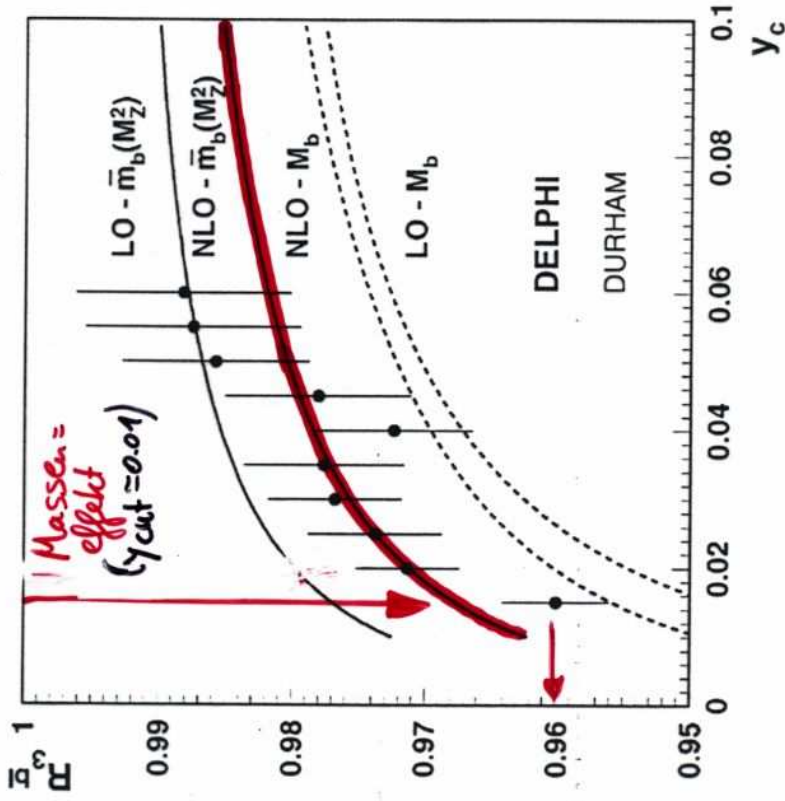


Experimentelle Bestimmung von \bar{m}_b (91 GeV)

Frage bei $M_Z^2 = [91 \text{ GeV}]^2$ auf: $R_3^{bl} := \frac{\#(\bar{q} \rightarrow \bar{q} g g)}{\#(\bar{q} \rightarrow \bar{q} g q)}$

als Funktion des Jetauflöseparameters

$$Y_c \equiv Y_{cut}^{DELPHI/MS}$$



NB: Messpunkte sind stark korreliert. Daher: Wähle ein Y_c und bestimme dafür $\bar{m}_b(M_Z^2)$

Fig. 25. The 3-jet rate ratio for bottom and light quarks is shown for the DURHAM and CAMBRIDGE jet algorithms [164,174]. The curves stem from leading (LO) and next-to-leading (NLO) calculations for the pole mass, M_b , or the \overline{MS} mass at the Z scale. Plots are taken from Ref. [174].

$$\Rightarrow \bar{m}_b(M_Z^2) \approx 3 \text{ GeV}/c^2$$

Rate von 3-Jet-Reaktionen: massive ÷ masselose Quarks

Betrachte:

$$\frac{R_3^{\text{massiv}}}{R_3^{\text{masselos}}} = \frac{\# \left(\begin{array}{c} Q \\ \bar{Q} \end{array} \rightarrow \text{3 Jets } G \right)}{\# \left(\begin{array}{c} q \\ \bar{q} \end{array} \rightarrow \text{3 Jets } G \right)}$$

• Einschränkung d. Phasenraums

• Quarkmasseneffekt im Matrixelement des diff. WK

Beachte:

Definition des Abstandsmaßes (Auflöseparameter) ist i.a. abhängig von Quarkmasse

Daher:

Für manche Jetalgorithmen beobachtet man eine Erhöhung der 3-Jetrate bedingt durch Verschiebung in y_{ij} aufgrund der endlichen Quarkmasse

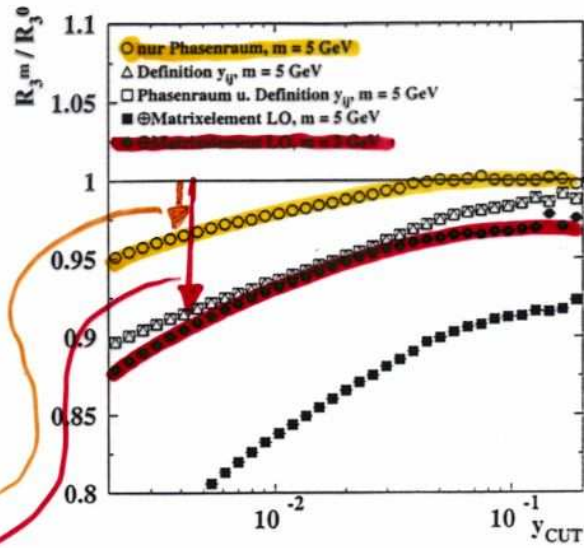


Abbildung 4.6: Gezeigt sind dieselben Doppelverhältnisse nun für Abstandsmaße y_{ij} , identisch zu denen beim JADE Jetalgorithmus. Die Bedeutung der Symbole ist identisch zu der in Abbildung 4.5 und in Tabelle 4.4 aufgelistet.

Histogramm	Berücksichtigung der Masse im		
	Phasenraum	Abstandsmaß	Matrixelement
○	ja	nein	nein
△	nein	ja	nein
□	ja	ja	nein
■	ja	ja	ja
•	ja, $m_q = 3 \text{ GeV}$		

Tabelle 4.4: Die Bedeutung der Symbole in Abbildungen 4.5 und 4.5.

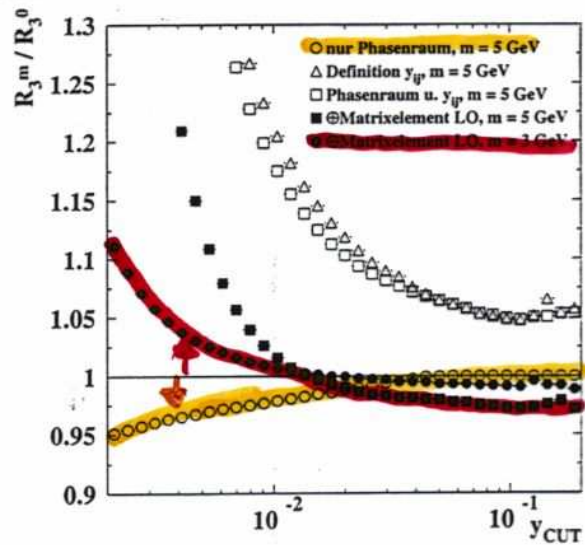


Abbildung 4.5: Gezeigt ist das Doppelverhältnis der 3-Jetrate massiver Quarks R_3^m unter jeweiliger Berücksichtigung der Masse der Quarks in Phasenraum, Abstandsmaß und Matrixelement zur 3-Jetrate von masselosen Quarks R_3^0 . Die Definition des Abstandsmaßes y_{ij} ist identisch zu der bei den JADE E, E0, P und P0 Jetalgorithmen. Die Bedeutung der Symbole ist in Tabelle 4.4 dargestellt.

Theorierechnung für $B_3 \equiv R_3^{bl}$

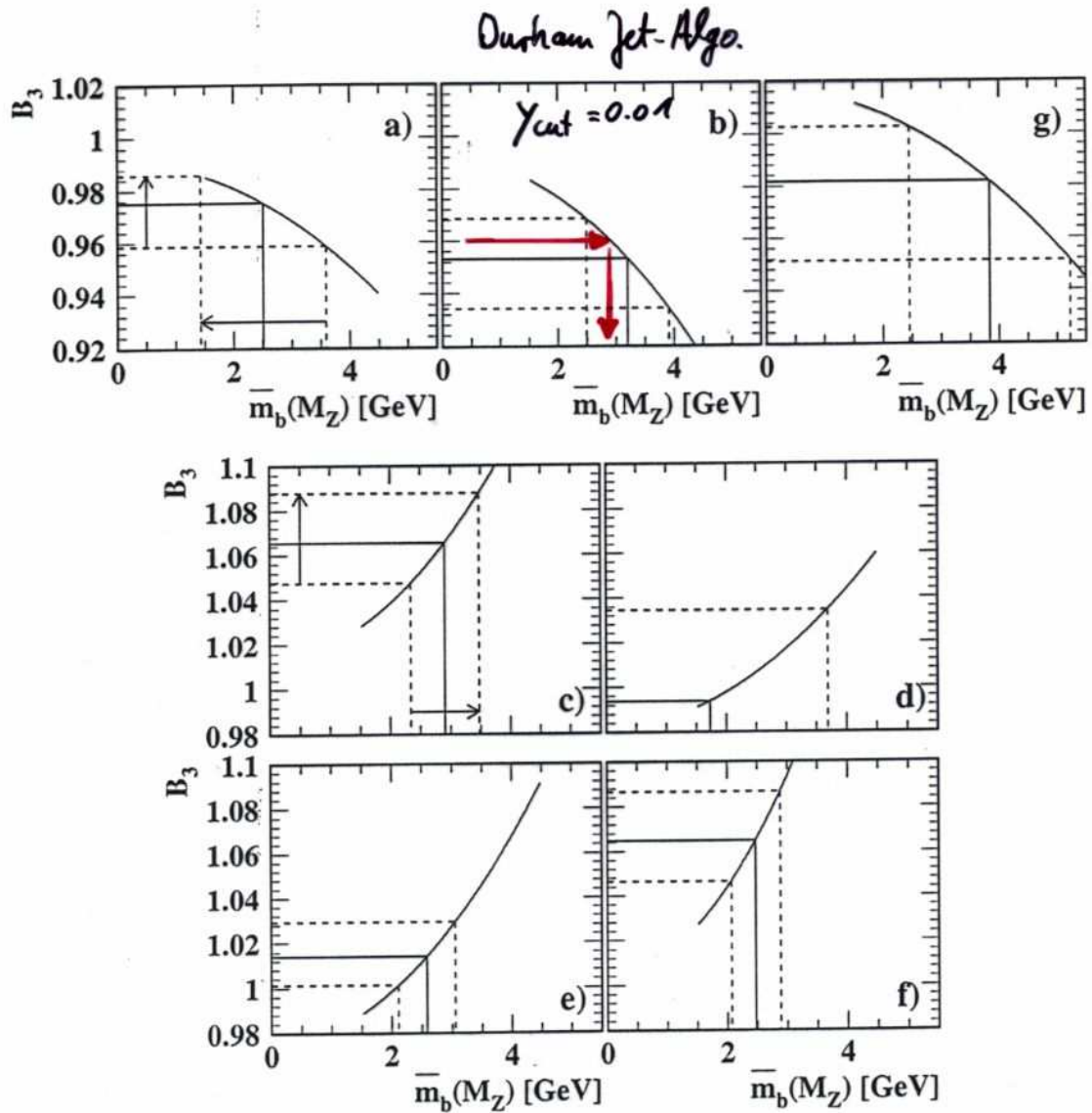


Figure 5: For each jet finder the fit to the theoretical prediction, Eq. (11), is shown together with each measured double ratio B_3 displayed on the y-axis. The b quark mass can be read from the x-axis. The band represents the total uncertainty for the double ratio and b quark mass. In a) JADE, b) DURHAM, c) JADE E0, d) JADE P, e) JADE P0, f) JADE E and in g) GENEVA schemes are shown. No lower bound on the b quark mass for the JADE P scheme is shown as this bound reaches the physical limit of a vanishing b quark mass. The arrows in a) and c) indicate, how two positively correlated systematic uncertainties on B_3 turn into negatively correlated ones in \bar{m}_b .

Ergebnis für $\bar{m}_b(M_Z^2)$ für viele Jetalgorithmen

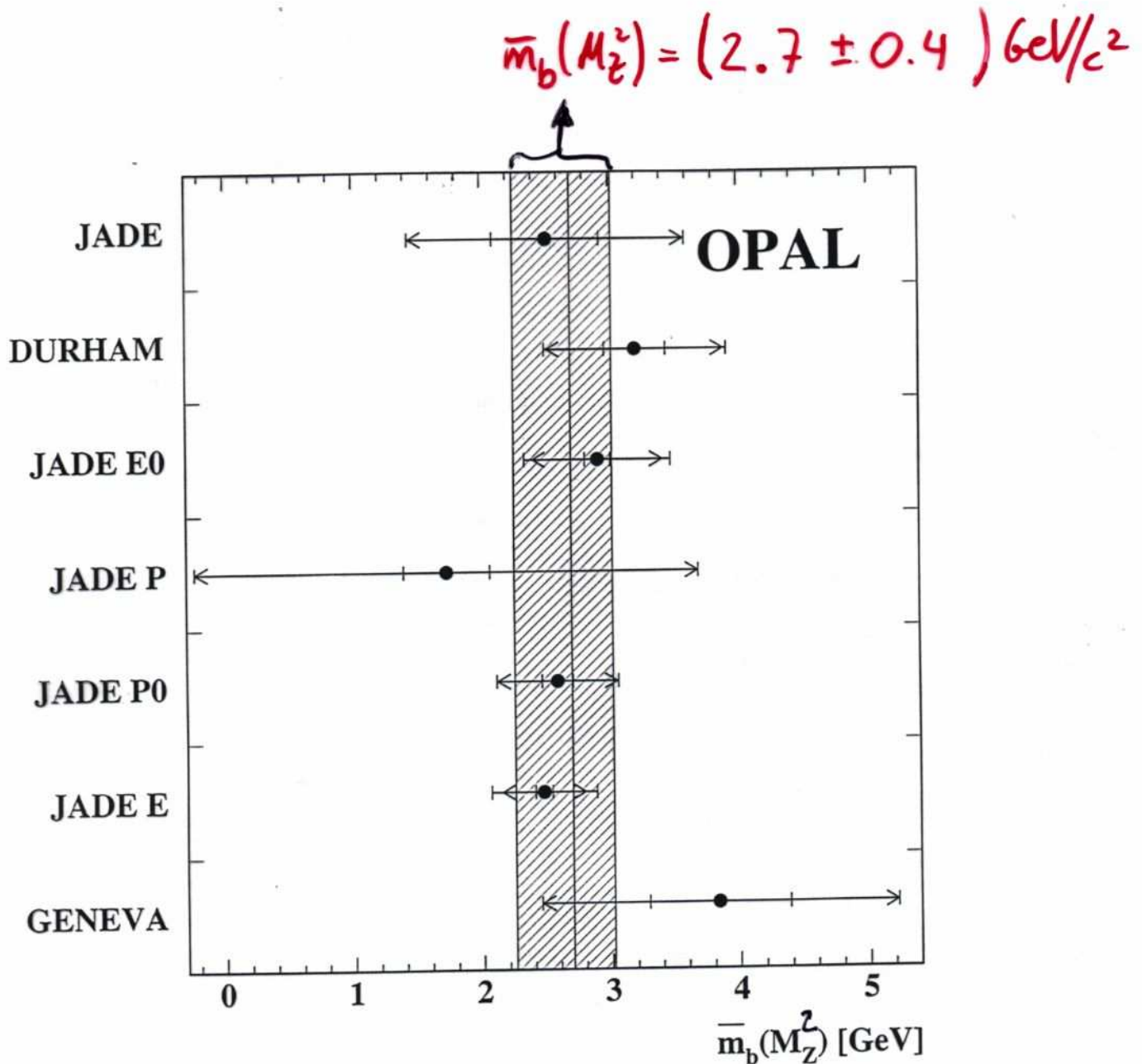


Figure 6: The result of the combination of the seven individual measurements is shown by the vertical line, the hatched band displays its total uncertainty. Also shown are the mass values with their uncertainties for each individual jet finder. The inner error bars are the statistical uncertainty. The arrows depict the statistical and systematic uncertainties added in quadrature, and the outer error bars depict the total uncertainty.

Vergleich $\bar{m}_b(\bar{m}_b^2)$ mit $\bar{m}_b(M_Z^2)$

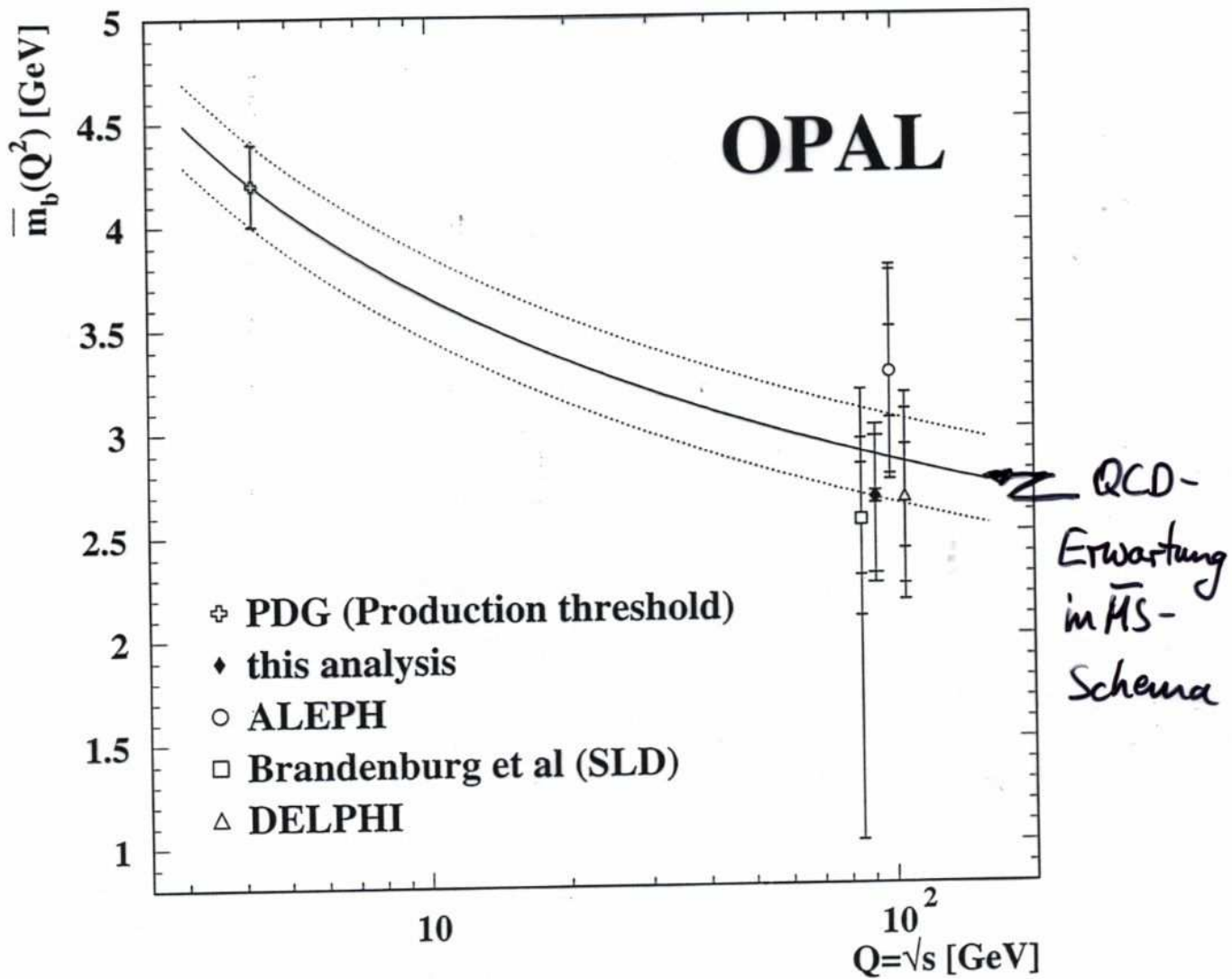


Figure 7: Results for $\bar{m}_b(m_Z)$ from this analysis and at the scale \bar{m}_b from the compilation in [3], together with other determinations at the Z mass scale from DELPHI [8], ALEPH [9] and Brandenburg et al. [10]. The solid curve shows the theory expectation for the running of the b quark mass, Eq.(2), using $\alpha_s(m_Z^2) = 0.1184$ [31] and $\bar{m}_b^{(PDG)}(\bar{m}_b) = 4.2$ GeV [3]. The dotted lines display the total uncertainty on the b quark mass run from production threshold to the Z pole. This total uncertainty includes the uncertainty on the mass itself, $\bar{m}_b^{(PDG)}(\bar{m}_b) = (4.2 \pm 0.2)$ GeV and the uncertainty on $\alpha_s(m_Z^2) = 0.1184 \pm 0.0031$. The error bars of the data points show the statistical, the systematic and the theoretical uncertainties added in quadrature. For displaying purposes the four measurements at the Z pole have been separated.

\Rightarrow laufende renormierte Quarkmasse
wie im \overline{MS} -Schema für QCD erwartet!

Überblick zu den \overline{MS} -Quarkmassen

- 13 -

Zumeist mittels Theorie aus den Massen der Hadronen berechnet

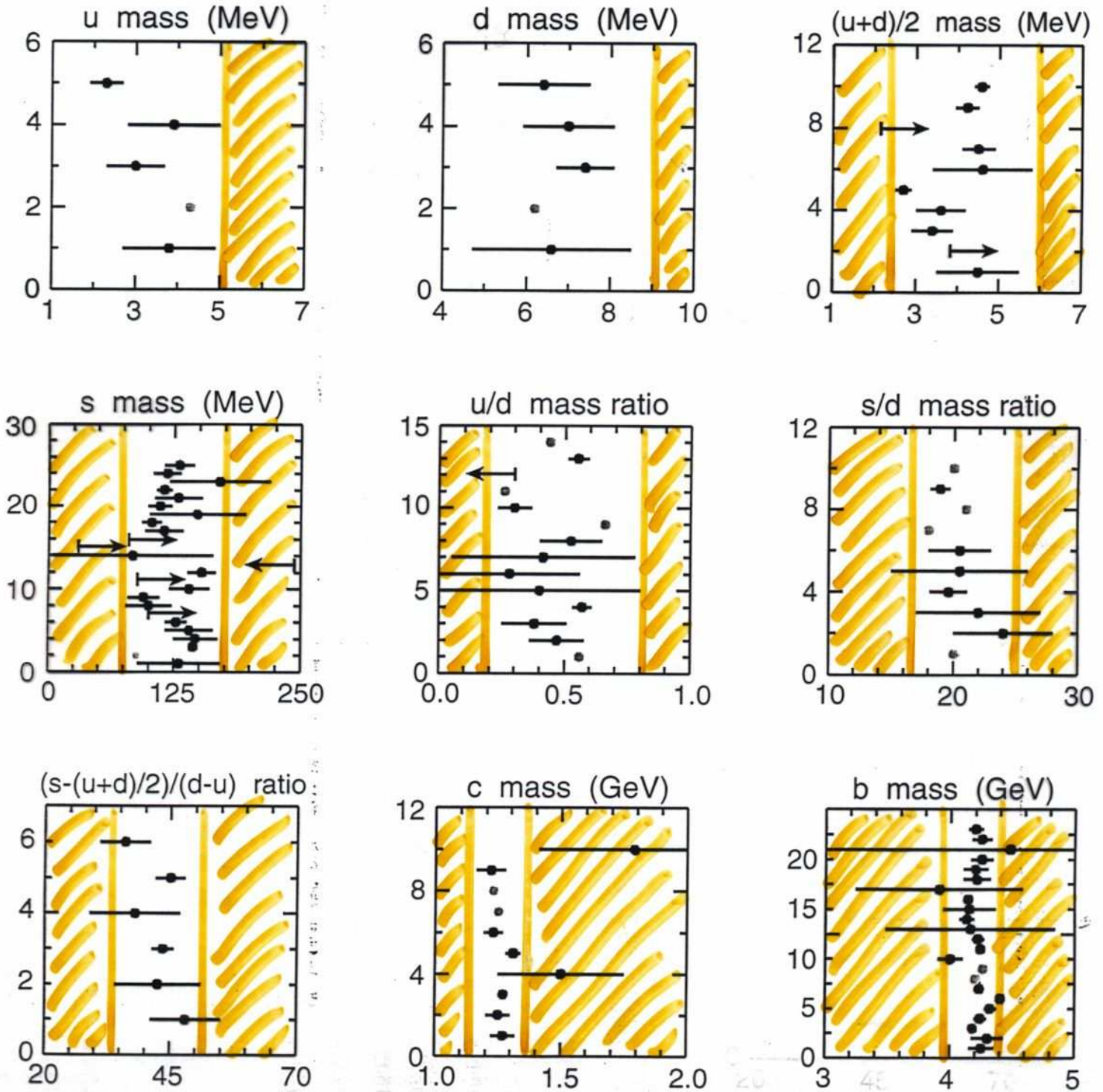


Figure 1: The values of each quark mass parameter taken from the Data Listings. Points from papers reporting no error bars are colored grey. Arrows indicate limits reported. The grey regions indicate values excluded by our evaluations; some regions were determined in part though examination of Fig. 2.

yellow