# Hadronisierung

Bisher wurden alle Studien zur QCD vorgestellt, ohne auf eine prinzipielle Schwierigkeit einzugehen, der Hadronisierung, also der Frage, wie sich letztlich Quarks und Gluonen in Hadronen verwandeln. Aufgrund des dabei involvierten Confinement ist eine Berechnung der Hadronisierung aus den Prinzipien der QCD (noch) nicht möglich (es gibt verschiedene Ansätze, z.B. die Betrachtung der Hadronphase als eine Art "supraleitender" Phase, in der die Hadronen mit Cooper-Paaren verglichen werden; Diese Ansätze können hier leider nicht weiter vertieft werden). Daher müssen Modelle zur Beschreibung dieses Prozesses eingesetzt werden, die sich an den beobachteten Phänomenen orientieren und daher als phänomenologische Modelle bezeichnet werden. I.A. sind diese Modelle sehr komplex, sodass explizite analytische Berechnungen nicht damit gemacht werden können. Man nutzt daher eine numerische Methode, die sog. Monte-Carlo-Integration, zur Lösung der involvierten (DGL)-Gleichungen.

# Beschreibung von Reaktionen in Monte-Carlo-Modellen

Grob kann man 4 Schritte der Berechnung bzw. Simulation in solchen Modellen unterscheiden (hier am Beispiel $e^+e^- \to$ Hadronen):

(i) Vernichtungswechselwirkung $e^+e^- \to \gamma^*$ oder $Z \to q\bar{q}$
(berechenbar mit elektroschwacher Wechselwirkung)

(ii) Gluonabstrahlung und Gluonaufspaltung
$\longrightarrow$ Entwicklung eines Partonschauers

(iii) Hadronisierung als Übergang von Quarks, Antiquark, Gluonen in Hadronen

(iv) Hadronen und deren Zerfälle

Während (i) mittels elektroschwacher Theorie und (iv) aufgrund von Kinematik berechenbar sind ((iv) mit Einschränkungen, da Bedingungen des Confinement eine Rolle spielen), kann
(ii) teilweise mittels QCD berechnet und
(iv) derzeit gar nicht aus einer Theorie berechnet werden

Die Methoden zur Berechnung von (ii) wurden bereits angesprochen (NLO, NLLA,...), werden im Folgenden nochmals aufgegriffen, um das Prinzip der Monte-Carlo-Methode aufzuzeigen.

# Beschreibung von $e^+e^- \to$ Hadronen in Monte-Carlo-Modellen

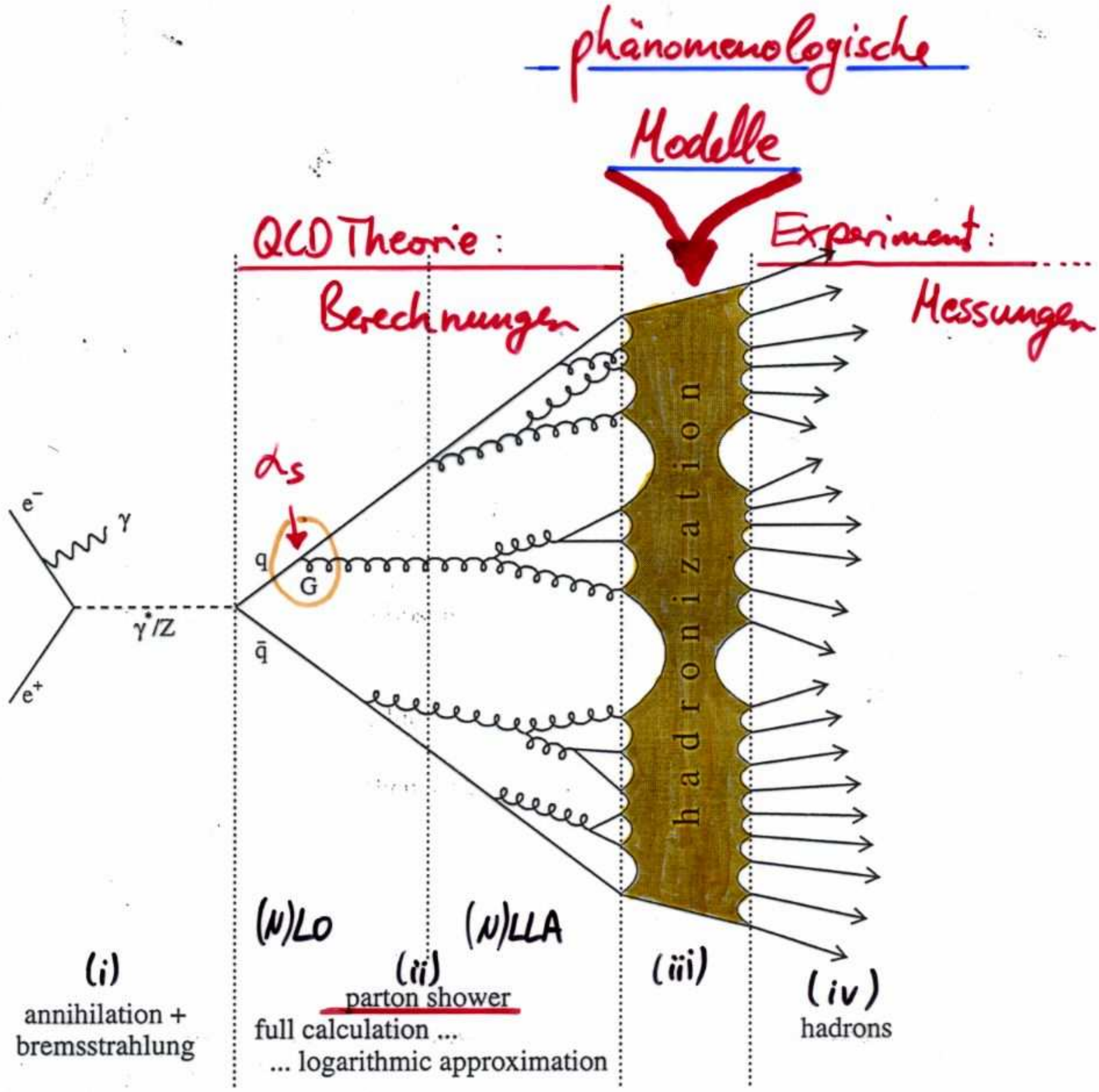



Fig. 3. Schematic representation of an $e^+e^-$ annihilation process into hadrons.

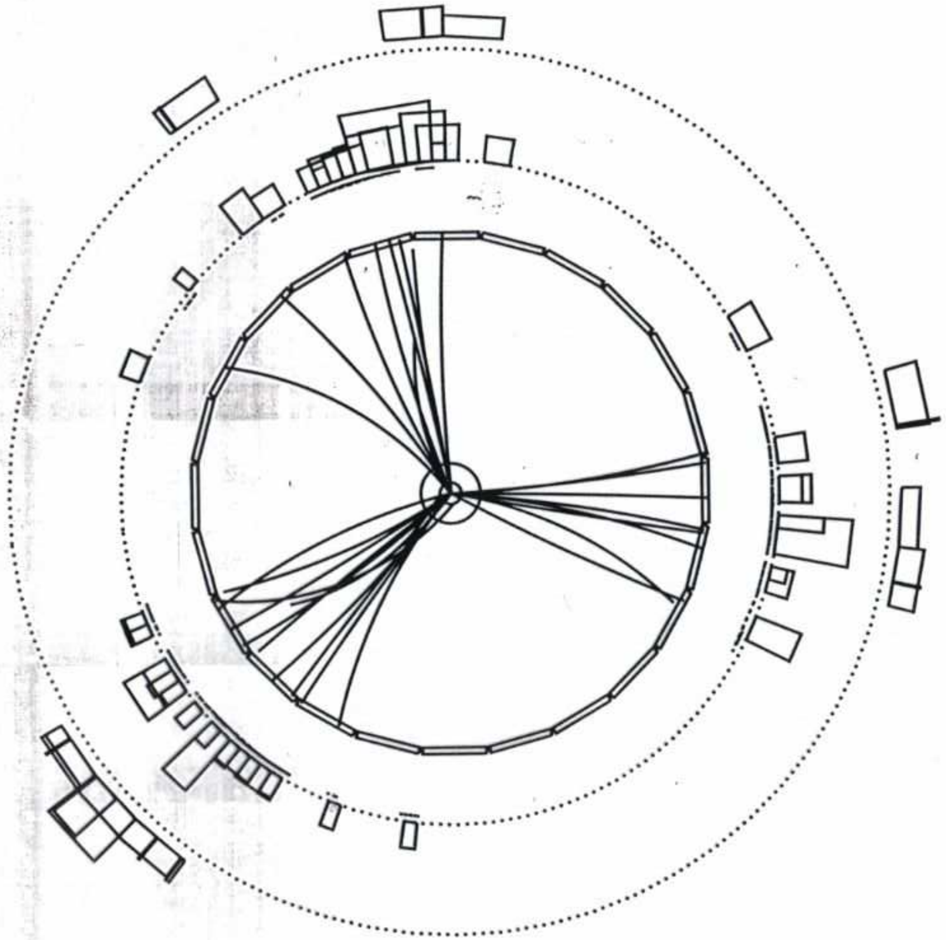
# Partonschauer

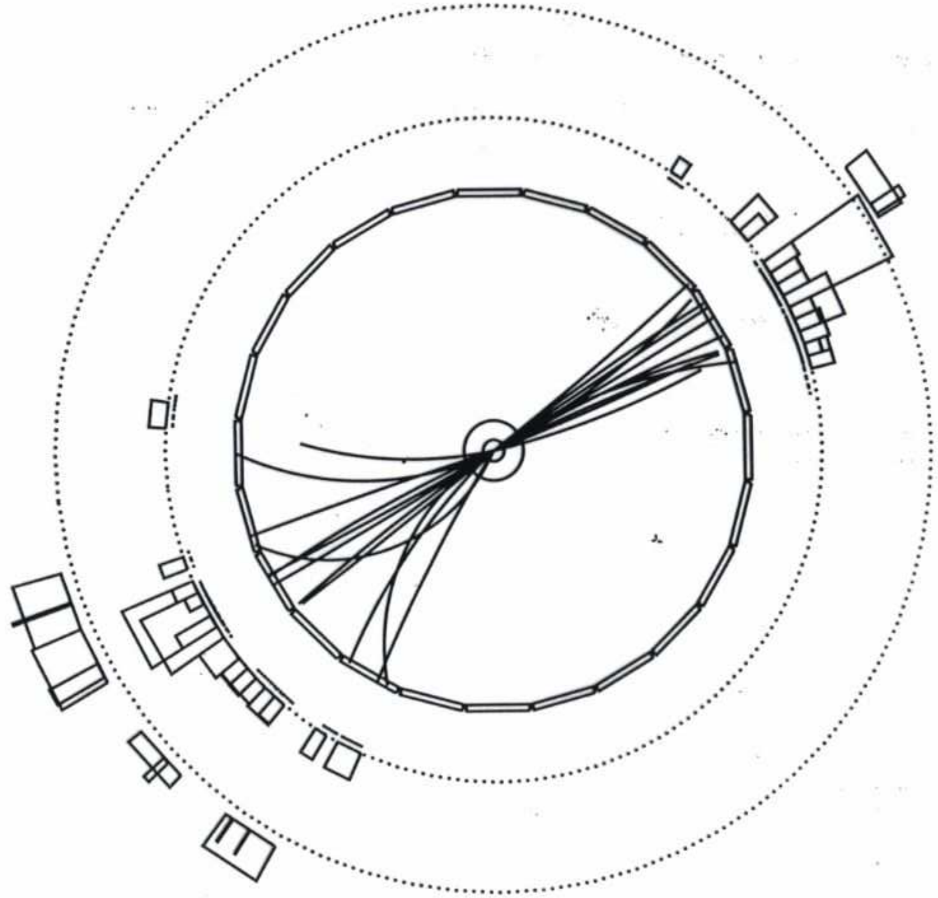
Zwar gibt es Rechnungen von Typ NLO und NLLA, jedoch sind diese nicht besonders gut geeignet, um in Monte-Carlo-Modellen benutzt zu werden:

(N)LO berechnet Endzustände mit bis zu 4 Partonen (Quarks, Antiquarks, Gluonen), im Experiment jedoch typ. z.B. ~20 Hadronen; Große Diskrepanz in Teilchen=zahl heißt: Hadronisierung ist sehr wichtig (4 → 20 Teilchen)

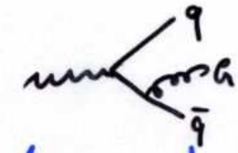
(N)LLA berechnet Endzustände mit (beliebig) vielen Partonen im Bereich der kollinearen und infraroten Divergenzen des 3-Parton-Wirkungsquerschnitts $\left(\frac{1}{\sigma_0}\frac{d^2\sigma}{dx_q\,dx_{\bar{q}}} = C_F\frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{x_q^2+x_{\bar{q}}^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})}\right)$ und wäre gut geeignet, jedoch gibt es keine bzw. nur sehr indirekte Information über die Verteilung der Partonen im Endzustand (d.i. die Konfiguration). Daher sind aus Konzepten der (N)LLA probabilistische Ausdrücke entwickelt worden, die sich leicht in eine Monte-Carlo-Methode zur Beschreibung eines Partonschauers integrieren lassen.

Beispiele für Hadronkonfigurationen bei $\sqrt{s} = 91\,GeV$





# Partonschauer




**Ansatz:** 3-Parton-Wirkungsquerschnitt ist divergent für $x_G \approx 0$ und für $m^2 := (p_{\bar q} + p_G)^2 = s(1-x_q) \approx 0$

Substituiere $x_q, x_{\bar q}$ durch $z := \frac{x_{\bar q}}{x_{\bar q} + x_G}$ und $m^2$ in:

$$(*) \quad \frac{1}{\sigma_0} \frac{d^2\sigma}{dx_q\, dx_{\bar q}} = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{x_q^2 + x_{\bar q}^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar q})}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma_0} \frac{d^2\sigma}{dz\, dm^2} \approx \frac{\alpha_s}{2\pi} \cdot \frac{1}{m^2} \, C_F \left[\frac{1+z^2}{1-z}\right] \quad (**)$$

Dabei ist $z$ der Energiebruchteil des $\bar q$ im $\bar q G$-System

**Resultat:**
- Der diff. WQ $(*)$ wurde in zwei Subprozesse faktorisiert:
  - Masse $m$ des $\bar q G$-Systems und
  - Energiebruchteil $z$ des Antiquarks
- Die Integration über $m^2$ oder $z$ liefert immer einen Logarithmus $\ln m^2$ bzw. $\ln(1-z)$, die am kinemat. Limit $m^2 \to 0$ bzw $z \to 1$ groß werden (Divergenzen von $(*)$). In der Leading Log Approximation LLA werden diese Logarithmen behalten und zu allen Ordnungen in $\alpha_s$ summiert.

$$\frac{1}{\sigma_0} d^2\sigma = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})} \, dx_q \, dx_{\bar{q}}$$

Variablentransformation:

$$m_{\bar{q}G}^2 \equiv m^2 = s\cdot(1-x_q) \quad \rightarrow \quad x_q = 1 - \frac{m^2}{s}$$

$$z := \frac{x_{\bar{q}}}{x_{\bar{q}} + x_G} = \frac{x_{\bar{q}}}{2-x_q} = \frac{x_{\bar{q}}}{1-\left(1-\frac{m^2}{s}\right)} \Rightarrow x_{\bar{q}} = z\left(1+\frac{m^2}{s}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma_0} d^2\sigma = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \cdot \frac{\left(1-\frac{m^2}{s}\right)^2 + z^2\left(1+\frac{m^2}{s}\right)^2}{\frac{m^2}{s}\cdot\left[1-z\left(1+\frac{m^2}{s}\right)\right]} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \partial x_q/\partial z & \partial x_q/\partial m^2 \\ \partial x_{\bar{q}}/\partial z & \partial x_{\bar{q}}/\partial m^2 \end{vmatrix}}_{\text{Funktionaldeterminante}} dz\, dm^2$$

$$\frac{\partial x_q}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial x_q}{\partial m^2} = -\frac{1}{s}$$

$$\frac{\partial x_{\bar{q}}}{\partial z} = 1+\frac{m^2}{s} \qquad \frac{\partial x_{\bar{q}}}{\partial m^2} = \frac{z}{s}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma_0} d^2\sigma = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \cdot \frac{\left(1-\frac{m^2}{s}\right)^2 + z^2\left(1+\frac{m^2}{s}\right)^2}{\frac{m^2}{s}\cdot\left[1-z\left(1+\frac{m^2}{s}\right)\right]} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1/s \\ 1+\frac{m^2}{s} & z/s \end{vmatrix} dz\, dm^2$$

$$= \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{\left(1-\frac{m^2}{s}\right)^2 + z^2\left(1+\frac{m^2}{s}\right)^2}{\frac{m^2}{s}\cdot\left[1-z\left(1+\frac{m^2}{s}\right)\right]} \cdot \frac{1}{s}\left(1+\frac{m^2}{s}\right) dz\, dm^2$$

$$\overset{\frac{m^2}{s} \ll 1}{\simeq} \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1+z^2}{m^2(1-z)} \, dz\, dm^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sigma_0}\frac{d^2\sigma}{dz\,dm^2} \simeq \frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{1}{m^2} C_F \left[\frac{1+z^2}{1-z}\right]}$$

# Partonschauer

Der Erfolg von LLA liegt darin, dass die (Re-)summation in einem probabilistischen Bild verstanden werden kann, welches mit d. Monte-Carlo-Methode zur Beschreibung eines Multiparton-Endzustandes verwendet werden kann. Dazu sei die Ableitung von (**) nach $\ln(t) := \ln Q^2/\Lambda^2_{LLA}$ betrachtet:

$$\frac{d\,\mathcal{P}_{q\to qG}}{d\,\ln(t)} \sim \int dz\ \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot C_F \left[\frac{1+z^2}{1-z}\right] \qquad (*{*}*)$$

Diese Gleichung kann als <u>Wahrscheinlichkeit des Prozesses</u>: $q \to qG$ (analog $\bar{q} \to \bar{q}G$) betrachtet werden, also als Wahrscheinlichkeit, dass ein Quark $q$ in ein Quark mit Energiebruchteil $z$ plus ein Gluon mit $1-z$ übergeht. Aus der "<u>Nacheinanderschaltung</u>" von mehreren solchen Prozessen gemäß (***) <u>entwickelt</u> sich ein LLA-Partonschauer.

Der Term in [...] in (***) bestimmt die Wahrscheinlichkeit für dieses $q \to qG$-Splitting. Es ist eine von mehreren Funktion, den Altarelli-Parisi-Splittingfunktionen, die für alle Verzweigungen $q\to qG$, $G\to GG$, $G \to q\bar{q}$ berechnet sind.

# Altarelli-Parisi-Splittingfunktionen

G. Altarelli, G. Parisi, Nucl. Phys. B126 (1977)



lauten:

$$P_{q \to qG}(z) = C_F \cdot \left[ \frac{1+z^2}{1-z} \right]$$

$$P_{G \to GG}(z) = 2 C_A \frac{[1 - z(1-z)]^2}{z(1-z)}$$

$$P_{G \to q\bar{q}}(z) = T_F \left[ z^2 + (1-z)^2 \right]$$

(Korrekturen dazu in der Ordnung $\alpha_s$ sind auch berechnet worden)

Durch die Kaskadierung gemäß der Wahrscheinlichkeiten $\mathcal{P}$ in $\frac{d\mathcal{P}}{d\ln(t)}$ (s.z.B. ) ergibt sich ein Multiparton-Endzustand, wenn $t := Q^2/\Lambda^2_{LLA}$ als dimensionslose Entwicklungs- oder Ordnungsparameter betrachtet wird. Eine mögliche Wahl für $Q^2$ könnte das Quadrat der virtuellen Masse, $m^2$, sein (wie in der Herleitung gewählt). $\Lambda_{LLA}$ ist vergleichbar dem $\Lambda$-Parameter der QCD. Er signalisiert die Gültigkeitsgrenze der Störungsrechnung, sodass ein Partonschauer bei einem $Q_0 > \Lambda_{LLA}$ enden muss!

# Partonen → Hadronen: Hadronisierung

▷ in analytischen Rechnungen, z.B.

- Lokale Parton-Hadron-Dualität besagt, dass Verteilungen auf Partonniveau proportional zu Verteilungen auf Hadronniveau sind. M.a.W. nur eine Aussage über ein Gesamtsystem von Partonen bzw. Hadronen, trotzdem sehr erfolgreich

▷ in Monte-Carlo-Methoden wird ein explizites Modell benötigt, das sagt, wie aus einem Quark oder Gluon Hadronen werden. Zwei unterschiedlich, aber beide erfolgreiche Modelle sind:

- String-Modell
  Nimmt einen Farbstring zwischen Farbladungsträgern an, der eine konstante "Federkonstante" $\kappa \approx 1\,\mathrm{GeV/fm}$ aufweist und bei ausreichender Energie in $q'\bar{q}'$ zerreißt
- Cluster-Modell

  Beachtet den Farbfluss zw. Farbladungsträgern und fügt diese zu farblosen Clustern zusammen, welche dann in Hadronen zerfallen

# Zwei verbreitete Hadronisierungsmodelle

## String-Modell

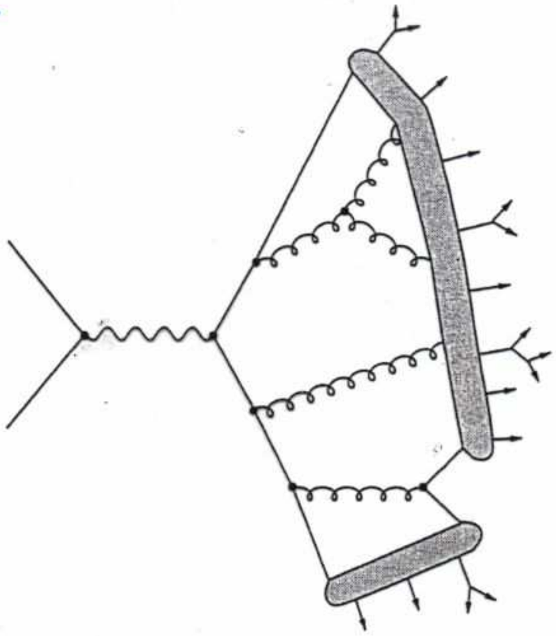


Fig. 5.14. Parton shower with string hadronization model for $e^+e^- \to$ hadrons.

Zwischen Quarks und Antiquarks bildet sich ein String aus, der beim Auseinanderziehen unter Bildung neuer $q\bar{q}$-Paare zerreißt, bis sich Hadronen aus den Resten bilden, wenn die Energie zum Zerreissen nicht mehr genügt

## Cluster-Modell

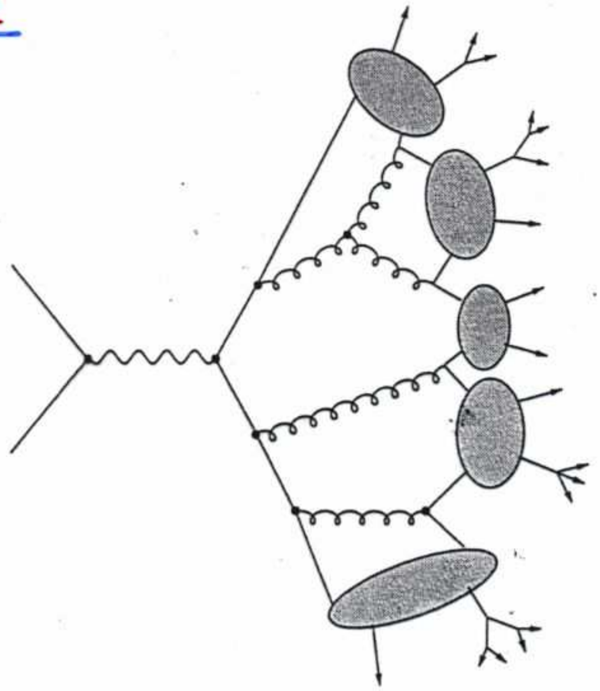


Fig. 5.15. Parton shower with cluster hadronization model for $e^+e^- \to$ hadrons.

Quarks und Antiquarks bilden farbneutrale Cluster, die quasi superschwere Teilchen ohne festen Massenwert darstellen, welche dann in die bekannten Teilchen zerfallen.

# String-Hadronisierungsmodell

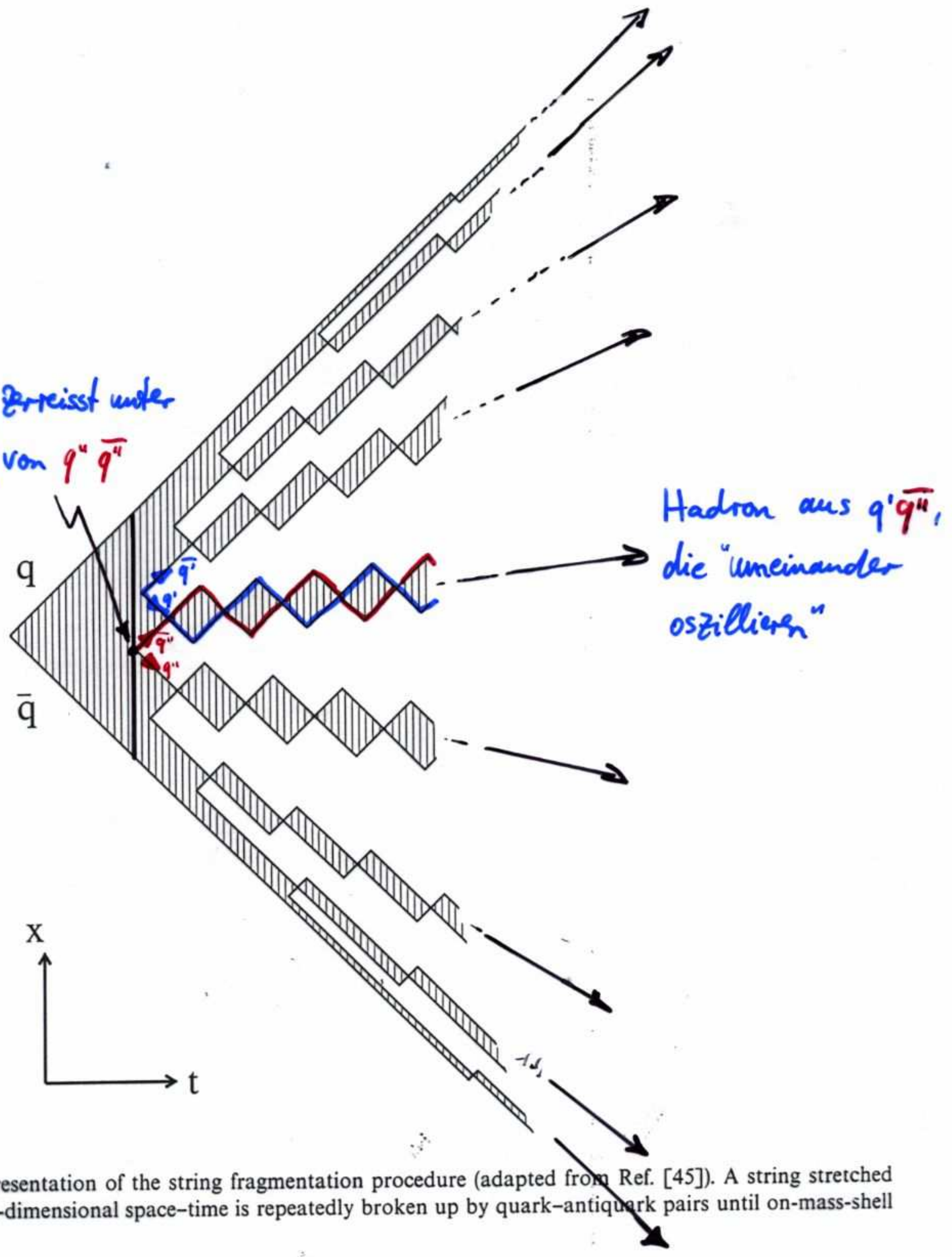



Fig. 10. Schematic representation of the string fragmentation procedure (adapted from Ref. [45]). A string stretched between $q$ and $\bar{q}$ in two-dimensional space–time is repeatedly broken up by quark–antiquark pairs until on-mass-shell hadrons remain.

# Cluster - Hadronisierungsmodell

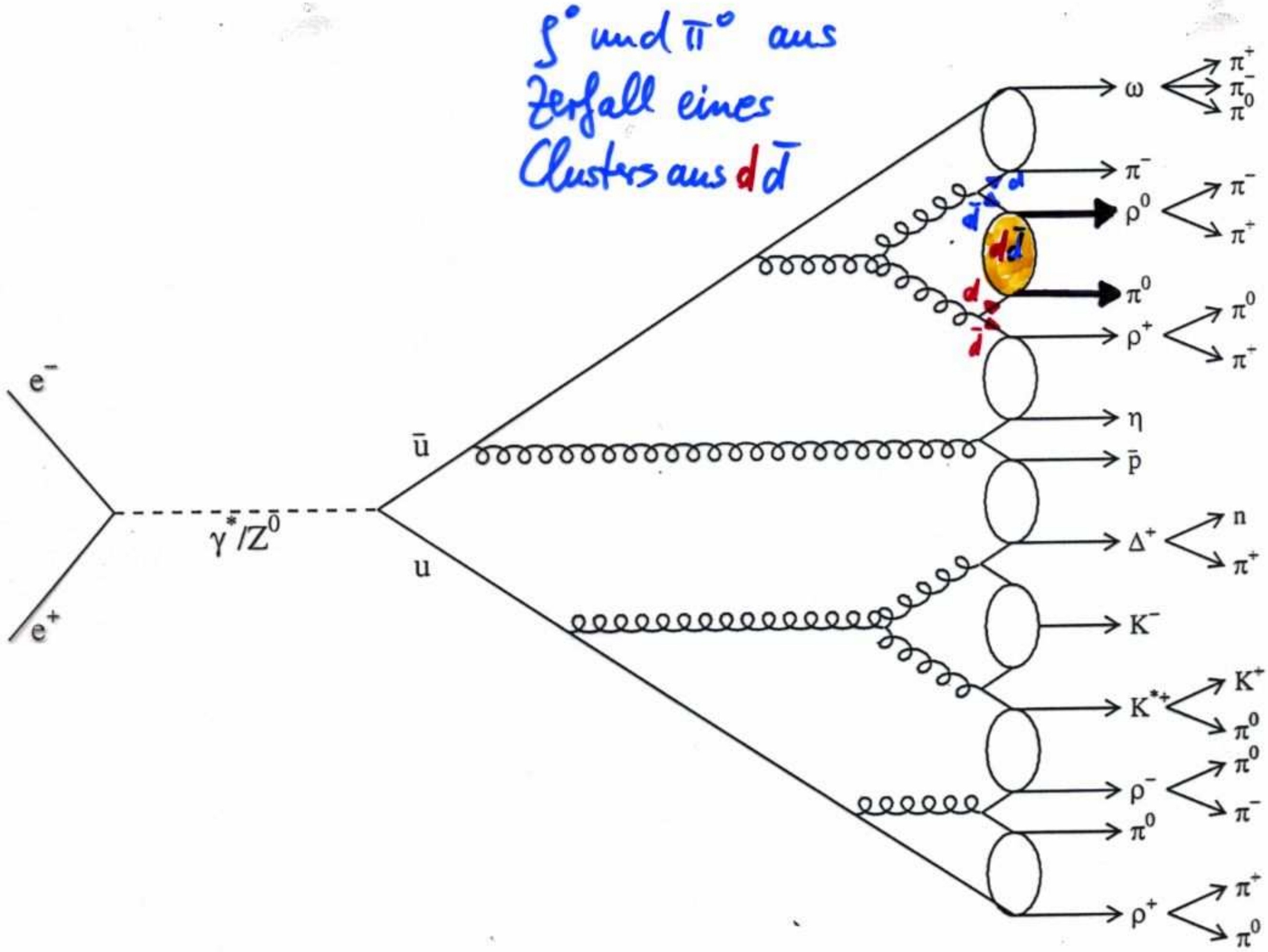



Fig. 11. Schematic representation of the cluster fragmentation procedure (adapted from [45]).

## weitere Hadronisierungsmodelle

... existieren, die z.T. sogar wesentlich älter sind als String- und Cluster-Modell und z.T. auch erheblich einfacher wie z.B. das Modell der unabhängigen Hadronisierung (s. Bild unten) und z.T. diverse technische Probleme (Energie- & Impulserhaltung, Erhaltung d. Farbladung) haben

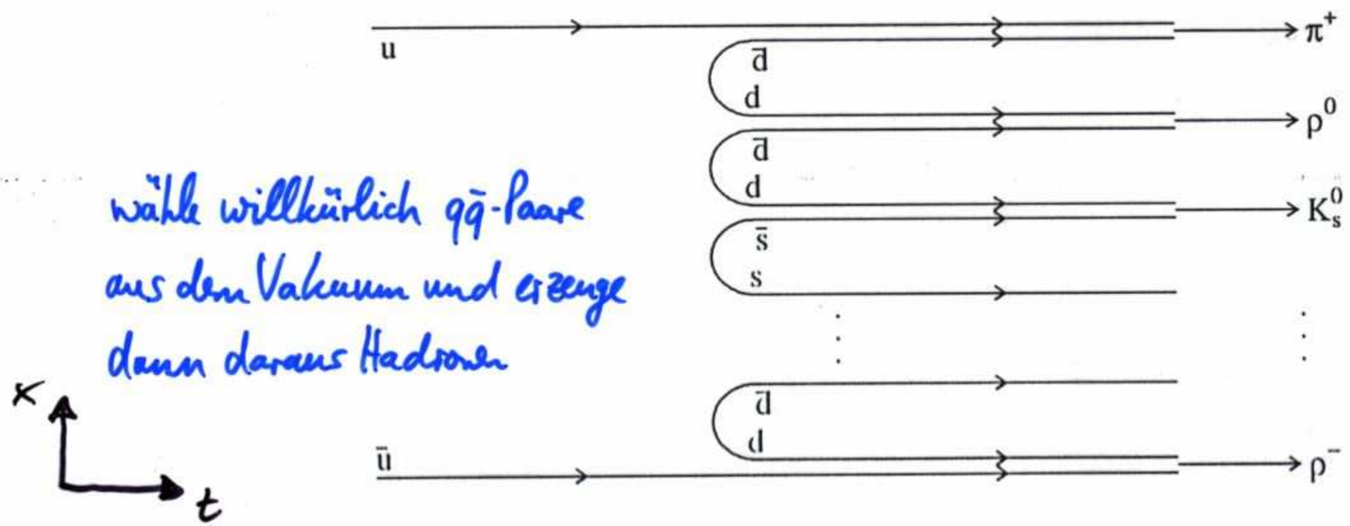



Fig. 8. Schematic representation of the independent fragmentation procedure (adapted from Ref. [45]).

# Hadronisierungsmodelle

- an experimentellen Beobachtungen orientiert, d.i.: phänomenologisch
- in aufwändigen Computerprogrammen realisiert
  z.T. über 10 000 Zeilen Source-Code
- von vielen, nicht fundamental berechenbaren, phänomenologischen Parametern abhängig
  → Anpassung der Modellparameter an Messdaten
- String- und Cluster-Modell sehr erfolgreich in $e^+e^-$-, $ep$- und $p\bar{p}$-Reaktionen eingesetzt.
- unverzichtbar in nahezu allen QCD-Studien!
- Beispiele:

  ⊕ JETSET, PYTHIA, ARIADNE : String-Modell

  ⊕ HERWIG : Cluster-Modell

  ⊖ COJETS : unabhängige Hadronisierung

Vergleich: Messung-Modell