Evolutionsgleichung & Strukturfunktionen

Die DGLAP-Evolutionsgleichung hat Bedeutung nicht nur für die Fragmentationsfunktionen, sondern auch für die Strukturfunktionen, welche die innere Dynamik von beispielsweise dem Proton beschreibt.

Zur Erinnerung: Im statischen Quarkmodell war das Proton durch

$$|p\rangle = \Psi(\text{flavour}) = (uud - duu)/\sqrt{2} + \text{Permutationen}$$

gegeben. Aber die Quarks u, u, d verharren nicht statisch im Proton.

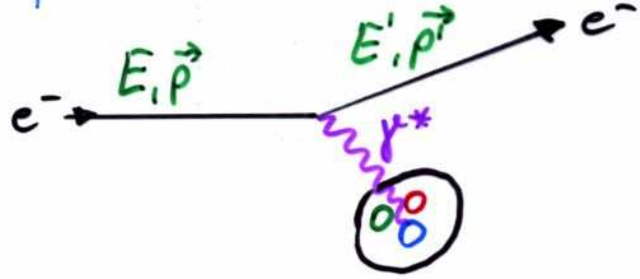
→ Strukturuntersuchung am Proton durch Streuung von Photonen (≙ "Röntgenbild") mit Auflösung:

$$\boxed{\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{hc}{E_{Photon}} \;\hat{=}\; \frac{1.24\ \text{fm}}{E_{Photon}\,[\text{GeV}]}}$$

, d.h. $E_{Photon} > 1\,\text{GeV}$ macht innere Protonstruktur sichtbar.

Prinzip der Strukturuntersuchung

Photonenquelle? ... z.B. ein Elektronenstrahl:



Dabei ist das Photon aber i.A. virtuell, d.h.

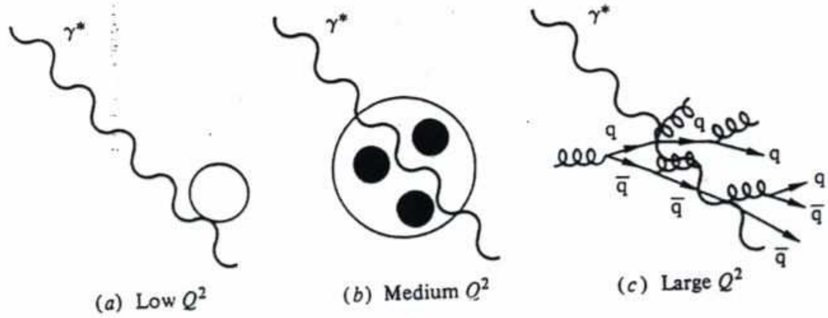
$$q_\gamma = \begin{pmatrix} E_\gamma \\ \vec{p}_\gamma \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad q_\gamma^2 = E_\gamma^2 - (\vec{p}_\gamma)^2 < 0$$

und zwar <0, weil meist $E' \approx E$, aber $|\vec{p}_\gamma| = |\vec{p}\,' - \vec{p}| \gg 0$

(Reelle Photonen haben $q_\gamma^2 = m_\gamma^2 = 0$)

Auch für virtuelle Photonen gilt: $\lambda \simeq \dfrac{1.24\ \text{fm}}{\sqrt{|q_\gamma^2|\ [\text{GeV}^2]}}$

Fig. 7.14 Schematic diagram showing the change in the resolution of the virtual photon with increasing Q^2.

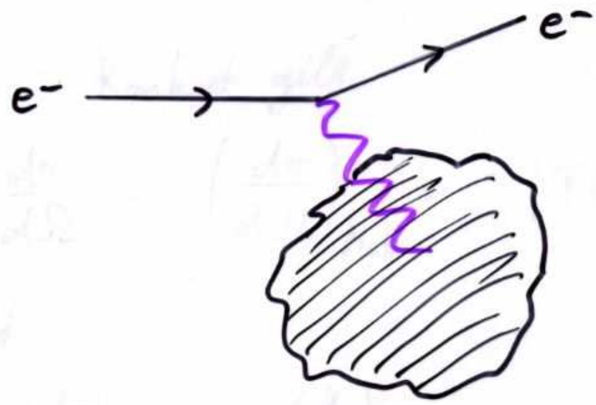


(a) Low Q^2 (b) Medium Q^2 (c) Large Q^2

$|q_\gamma^2| < 1\,\text{GeV}^2$ $\quad > 1\,\text{GeV}^2$ $\quad \gg 1\,\text{GeV}^2$

Formfaktoren und Ladungsdichteverteilung

Die Streuung (unpolarisierter) Elektronen an einer (ausgedehnten) Ladungsverteilung ...



... mit Gesamtladung $Z \cdot e$ und Ladungsdichteverteilung $\rho(x)$ $\left(\int_V \rho(\vec{x}) d^3x = Z \cdot e \right)$

kann durch so genannte Formfaktoren beschrieben werden. Ein solcher Formfaktor ist z.B. gerade die Fouriertransformierte der Ladungsdichte ρ:

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{x})\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar}\, d^3x$$

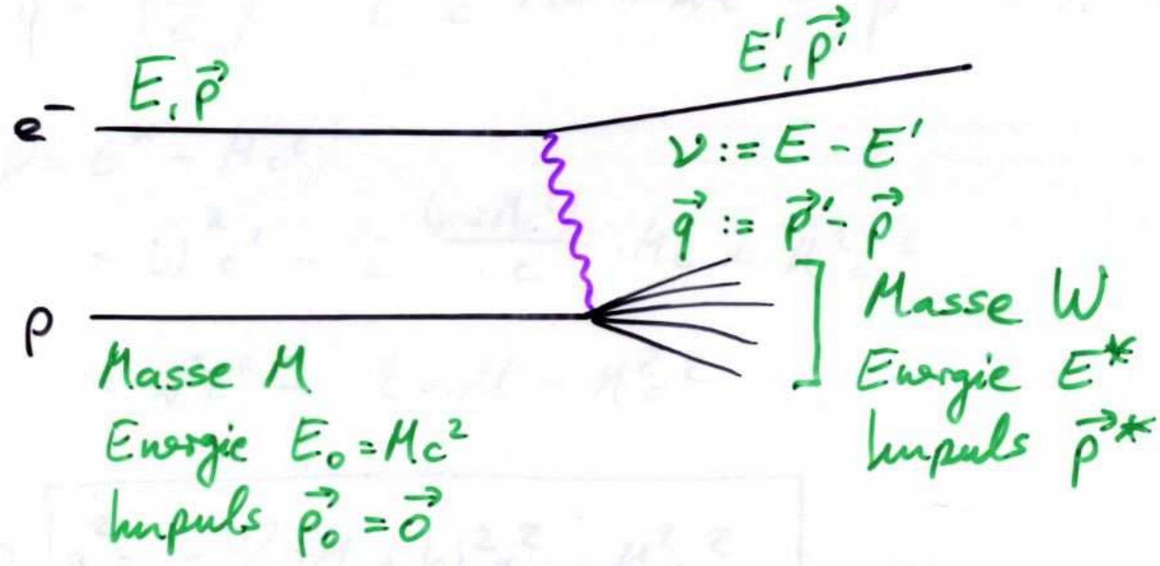
Impulsübertrag
$\vec{q} = \vec{p}\,' - \vec{p}$

$\Rightarrow$ Punktladung $\rho(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) \longmapsto$ Formfaktor $F(\vec{q}) = \text{const.}$

Nukleon $\exp(-r/b) \longmapsto$ " $(1 + b^2 q^2/\hbar^2)^{-1}$

(eigentlich gilt die Implikation fürs Nukleon umgekehrt: Aus der Messung des Formfaktors wurde die Ladungsdichte bestimmt und parametrisiert.)

Kinematik im (un-)elastischen Stoß



$$\Rightarrow \quad q = \begin{pmatrix} \nu/c \\ \vec{q} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q^2 = (\nu/c)^2 - \vec{q}^{\,2}$$

Der Viererimpuls q ist aber auch durch Protonanfangs- und -endzustand gegeben:

$$q = \begin{pmatrix} \nu/c \\ \vec{q} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} E^*/c - Mc^2/c \\ \vec{p}^* - \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow q^2 = \left(\frac{E^*}{c} - Mc\right)^2 - (\vec{p}^* - \vec{0})^2$$

Und mit $\nu = E^* - Mc^2$ und $W^2c^2 := (E^*/c)^2 - (\vec{p}^*)^2$

$$\Rightarrow \boxed{q^2 = -2\nu M + W^2c^2 - M^2c^2 =: -Q^2}$$

z.B. elastischer Stoß: $W^2 = M^2$ $\quad \boxed{q^2_{elast.} = -2\nu M}$

Dimensionslose Variablen

$$\boxed{\begin{aligned} x &:= \frac{Q^2}{2\nu M} = \frac{-q^2}{2\nu M} \\ y &:= \frac{\nu}{E} = \frac{E-E'}{E} \end{aligned}}$$

$$x \in [0,1]$$
$$y \in [0,1]$$

Alle Wirkungsquerschnitte werden in diesen Variablen geschrieben. (elast. Streuung $\Rightarrow x=1$). (x ist dabei gerade der Bruchteil der Protonenergie und -impuls, den ein Quark trägt:

$$E_q = x \cdot E_{Proton} \;;\quad p_{L,q} = x \cdot p_{L,Proton} \;;\quad p_{T,q} = p_{T,Proton} = 0)$$

Kinematisch erlaubter Bereich für $ep \to eX$:

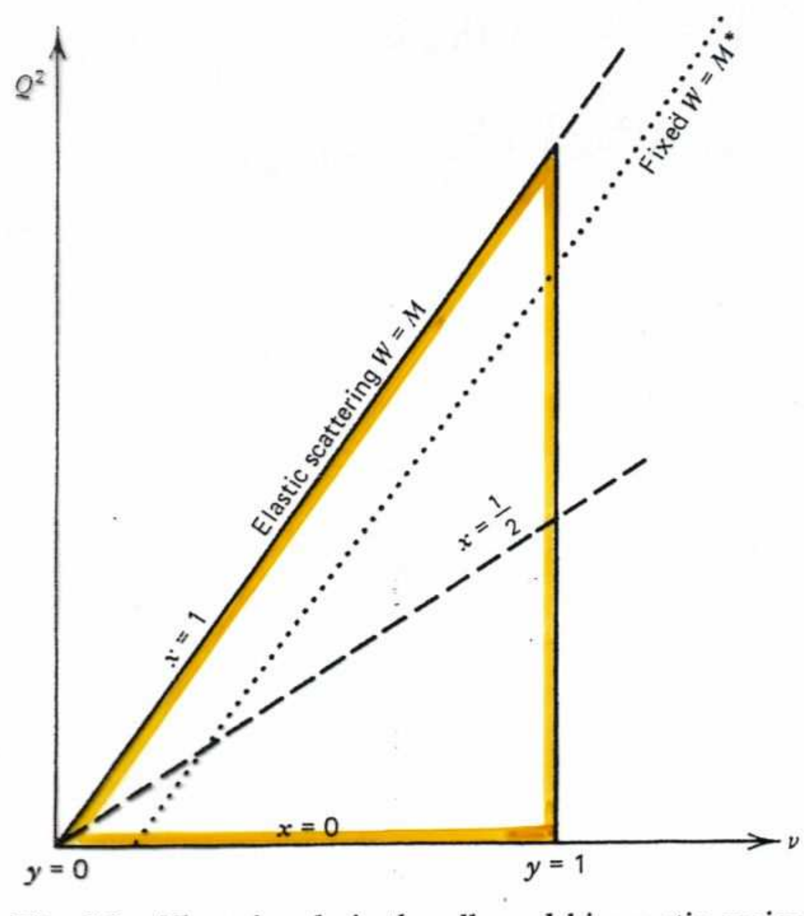


Fig. 9.3 The triangle is the allowed kinematic region for ep → eX. $\nu_{max} = E$ in the laboratory frame. W is the invariant mass of the hadronic state X, see (8.29).

Alle Prozesse, ob elastisch oder unelastisch liegen innerhalb dieses Dreiecks. Beispielsweise kann die Erzeugung einer Resonanz mit der Masse M^* nur entlang der gepunkteten Linie erfolgen (, wodurch eine feste Relation zwischen Energie E und Streuwinkel ϑ des gestreuten Elektrons besteht:

)

Bjorken Scaling

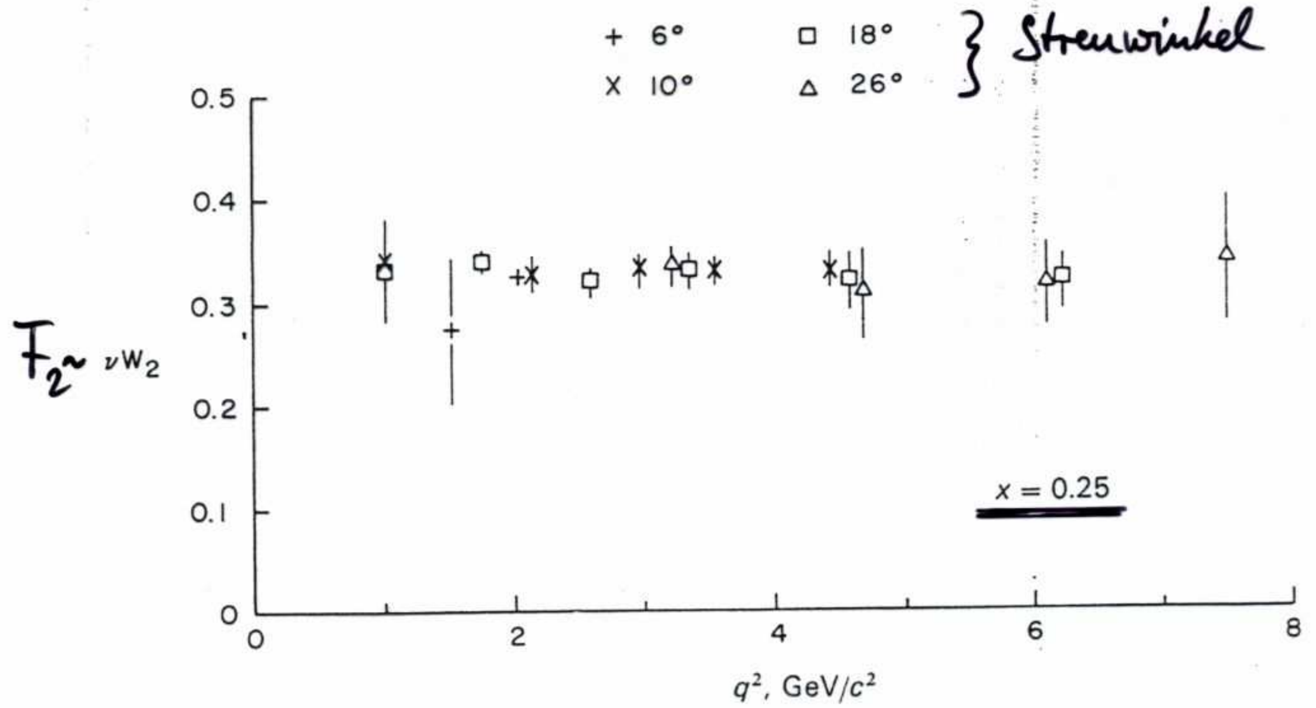


Fig. 7.17 νW_2 (or F_2) as a function of q^2 at $x = 0.25$. For this choice of x, there is practically no q^2-dependence, that is, exact "scaling". (After Friedman and Kendall 1972.)

Prinzipiell hängt der "Formfaktor" bei unelastischer Streuung von $Q^2 = -q^2$ und x ab. Da damit die Struktur des Protons beschrieben wird, nennt man diese Funktion $F(Q^2, x)$ Strukturfunktion (, wobei man zwei Funktionen F_1, F_2 unterscheidet durch die transversale oder longitudinale Polarisation des virtuellen Photons.)

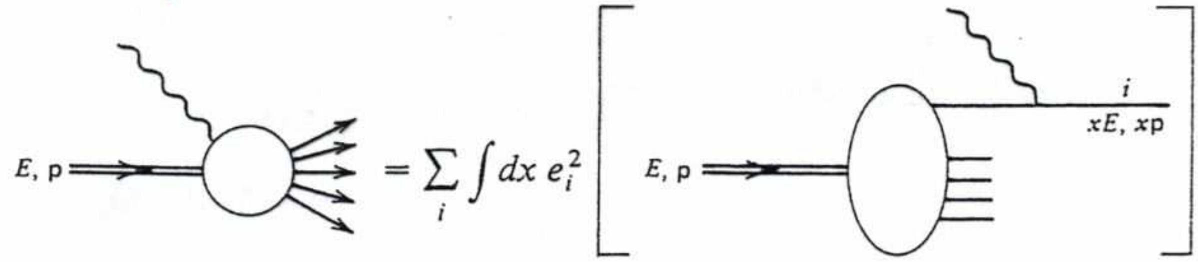
Die experimentelle Beobachtung des Bjorken Scalings belegt die Existenz punktförmiger Konstituenten (Quarks) im Proton! (Beachte: Punktladung $\rightsquigarrow$ Formfaktor = const.)

Interpretation der Strukturfunktion

Mit dem Bild punktförmiger Konstituenten im Proton kann man die Strukturfunktion als eine Überlagerung ansehen:

$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 \, x \cdot f_i(x)$$

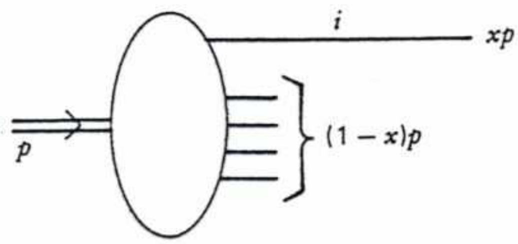
d.h.:



Und zwar der punktförmigen Partonen i, die das Proton aufbauen ($i = u, d, \ldots$, mit Ladung e_i) und jeweils einen Bruchteil x des Protonimpulses und -energie tragen.

Die Impulsverteilung dieser Partonen ist durch

$$f_i(x) = \frac{dP_i}{dx} =$$



gegeben. $f_i(x)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein getroffenes Parton den Bruchteil x des Protonimpulses trägt.

Beachte: $f_i(x)$ kann nicht aus QCD-Theorie berechnet werden. Die Evolution von $f_i(x)$ mit Q^2 wird aber durch die DGLAP-Evolutionsgleichung beschrieben!

Veranschaulichung der Strukturfunktion

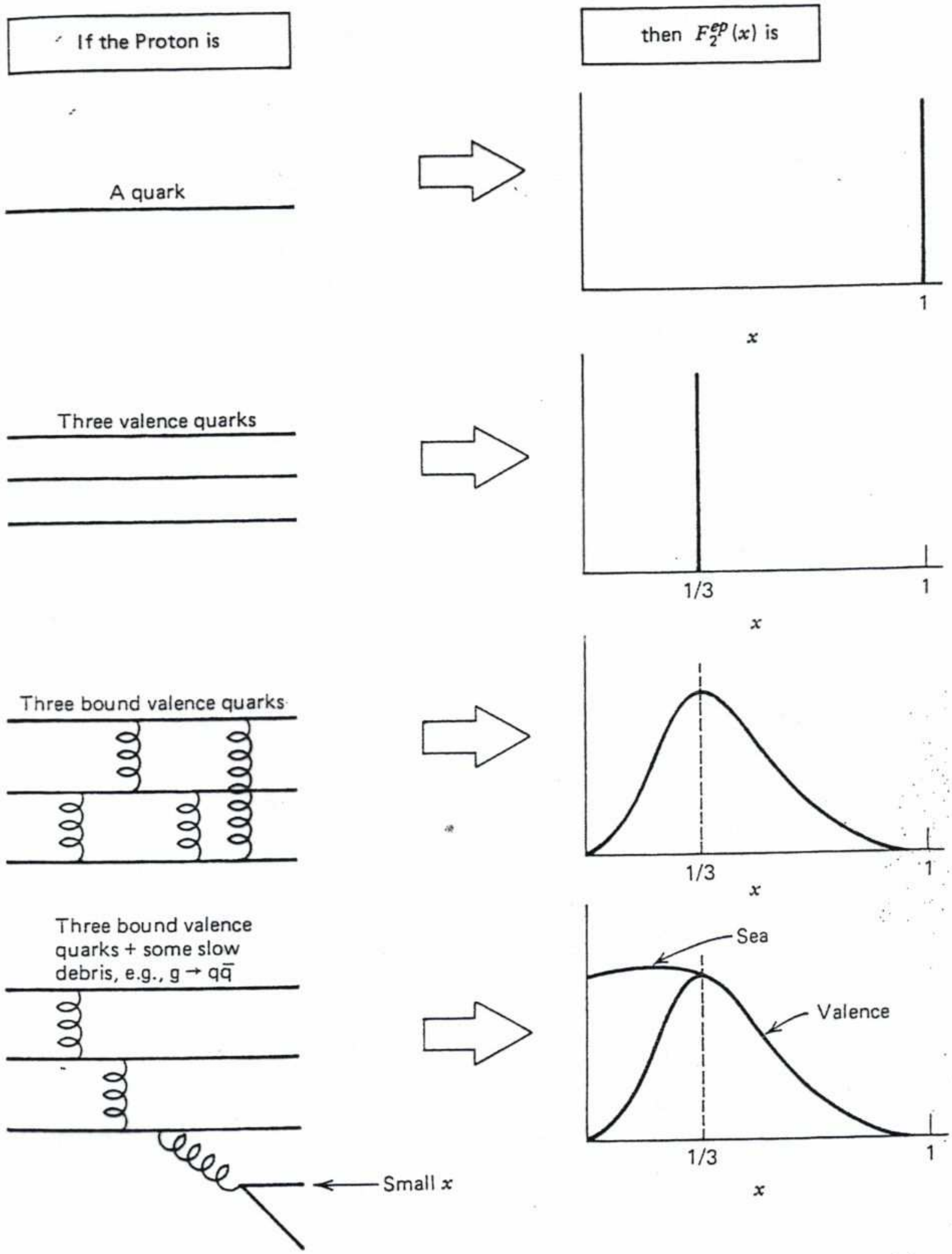


Fig. 9.7 The structure function pictured corresponding to different compositions assumed for the proton.

Messung der Protonstrukturfunktion F_2

- Der differenzielle Wirkungsquerschnitt in x und Q^2 lautet:

$$\frac{d^2\sigma}{dx\,dQ^2} \overset{y \ll 1}{\approx} \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(1+(1-y)^2\right) \cdot \frac{F_2(x,Q^2)}{x}\right]$$

(unter Ausnutzung der Callan-Gross-Relation $2x\,F_1(x,Q^2) = F_2(x,Q^2)$)

Die Strukturfunktion F_2 ergibt sich durch Messung von $\frac{d^2\sigma}{dx\,dQ^2}$ für Wertepaare (x, Q^2), die sich aus dem beobachteten Endzustand ermitteln lassen.

$$\begin{pmatrix} Q^2 \text{ aus Streuwinkel } \vartheta \text{ und Energie } E \text{ des Elektrons}; \; Q^2 \approx 4E^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2} \\ x \text{ aus } Q^2 \text{ und Masse des Endzustandes } W: \; x \approx \frac{Q^2}{Q^2 + W^2c^2} \end{pmatrix}$$

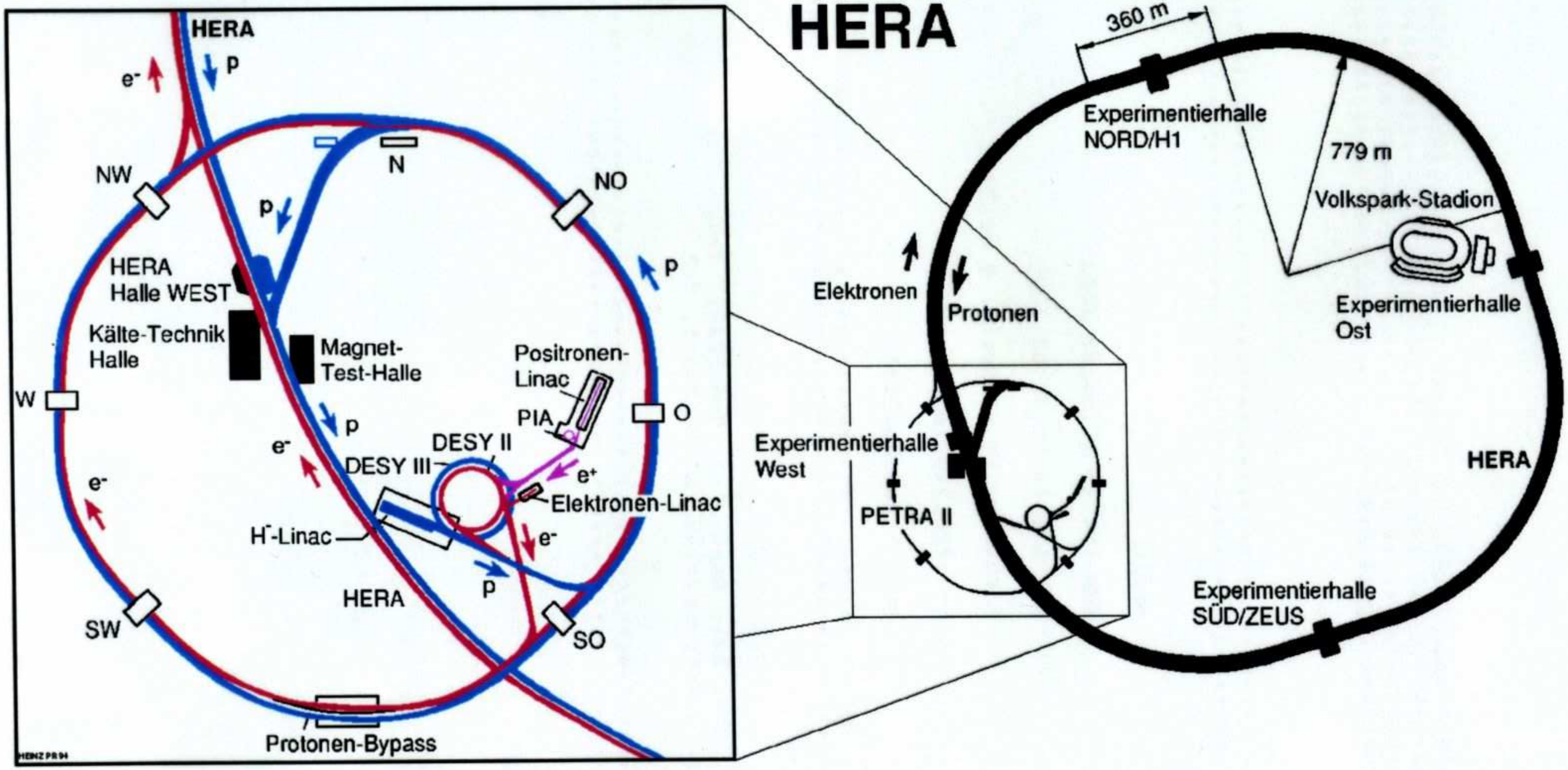
- Viele verschiedene Experimente; aktuellste am

HERA - Ringbeschleuniger

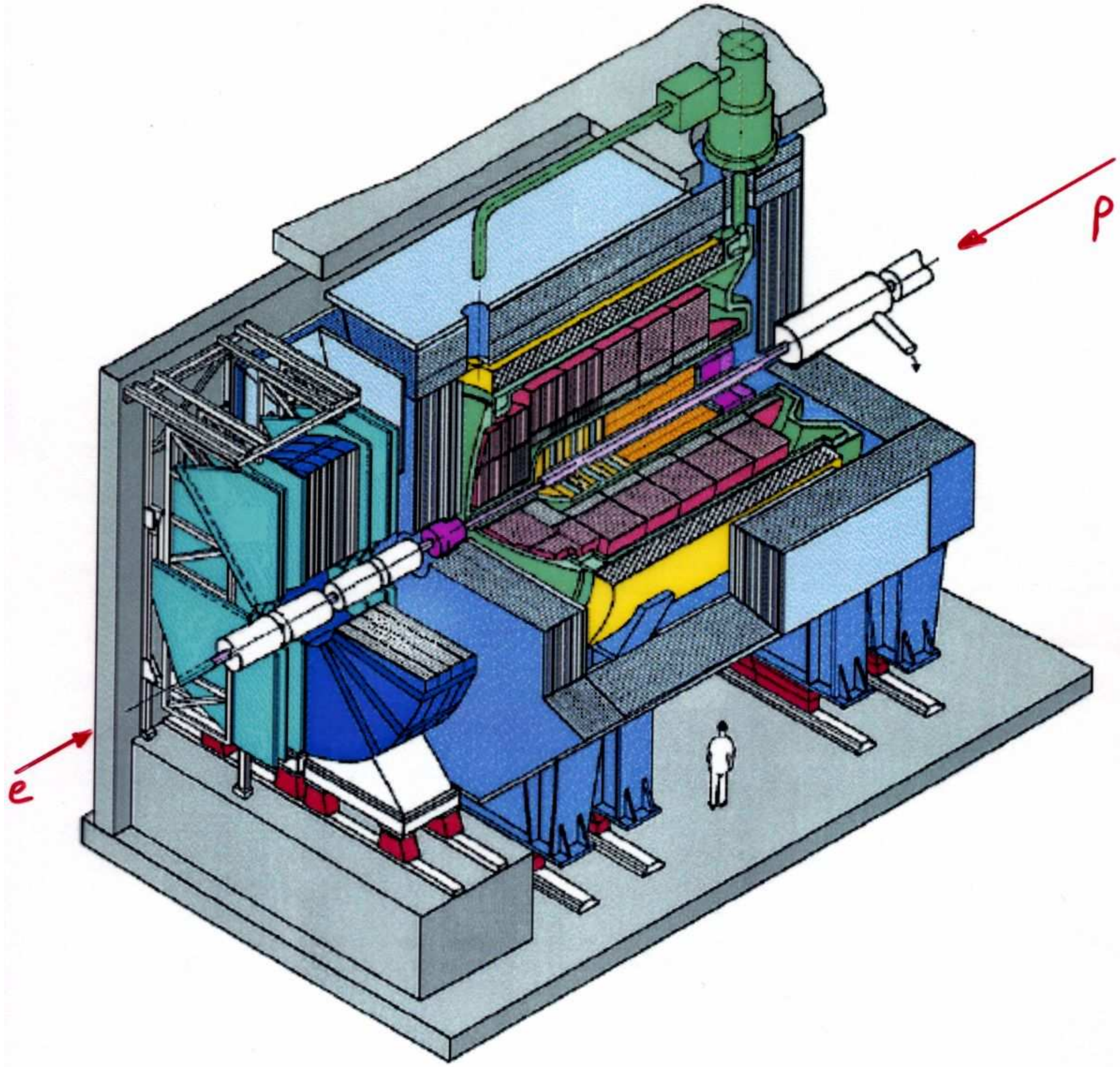
$E_{Proton} \simeq 820\,\text{GeV}$; $E_{Elektron} \simeq 30\,\text{GeV}$

$\Rightarrow$ maximale Energie im Stoß: $\sqrt{s} \simeq \sqrt{4E_p \cdot E_e} \simeq 314\,\frac{\text{GeV}}{c^2}$

entspricht auch max. Impulsübertrag $\sqrt{|q_\gamma^2|}$

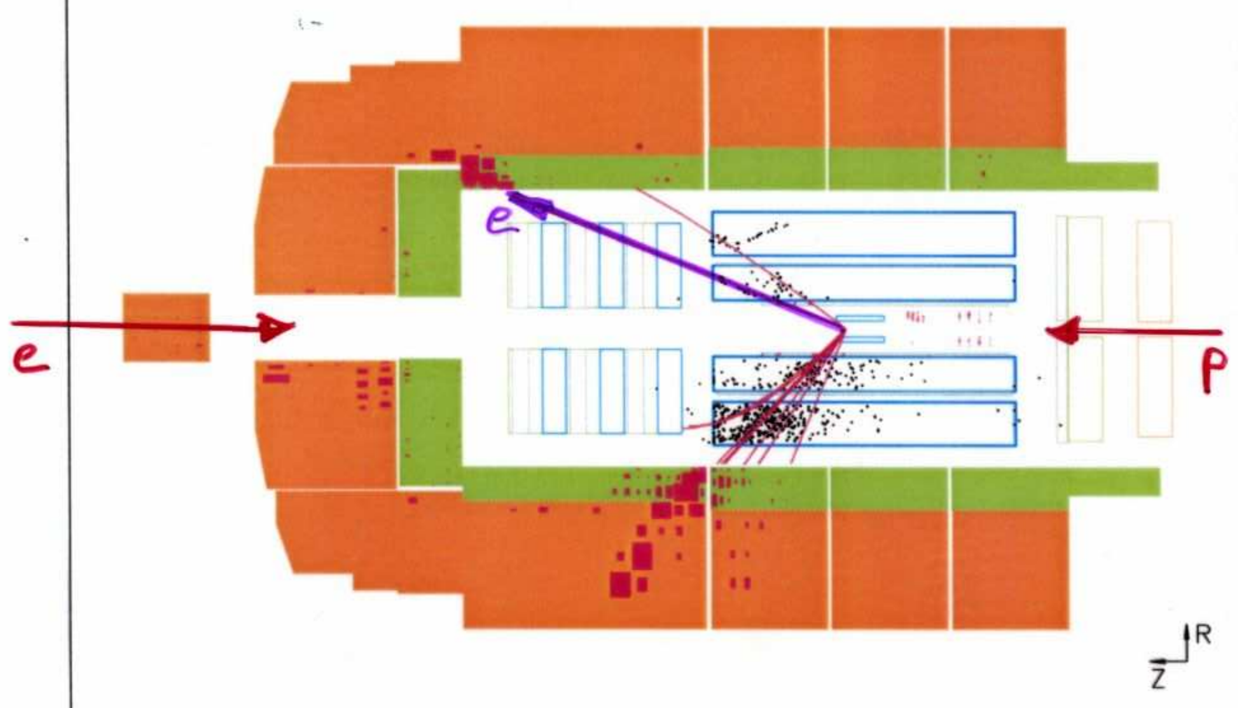

HERA
HERA
p
e-
N
NW
NO
p
p
HERA
Halle WEST
Kälte-Technik
Halle
Magnet-
Test-Halle
Positronen-
Linac
W
O
PIA
p
DESY II
e-
DESY III
e+
e-
Elektronen-Linac
H--Linac
e-
p
HERA
SW
SO
Protonen-Bypass
HEINZ PR 94
360 m
Experimentierhalle
NORD/H1
779 m
Volkspark-Stadion
Elektronen
Protonen
Experimentierhalle
Ost
Experimentierhalle
West
PETRA II
HERA
Experimentierhalle
SÜD/ZEUS

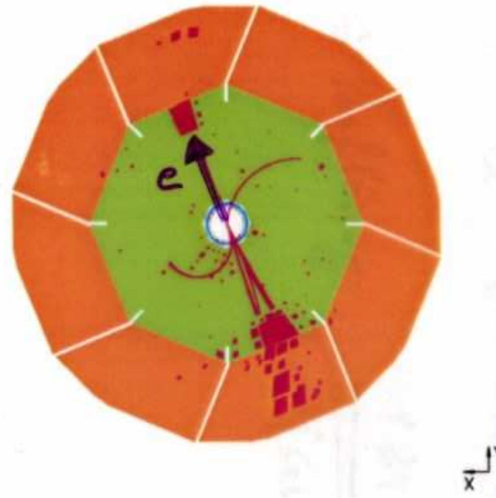
H1 - Detektor

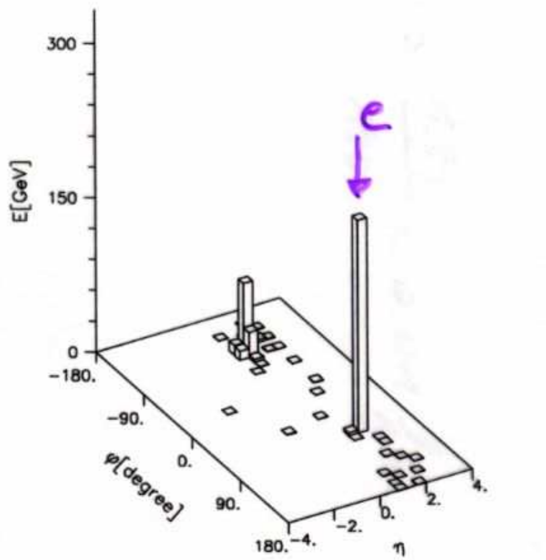


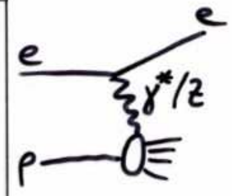
Run 224588 Event 9004 Class: 26 Date 19/10/1998

Q**2 = 22068 GeV**2 , y = 0.74

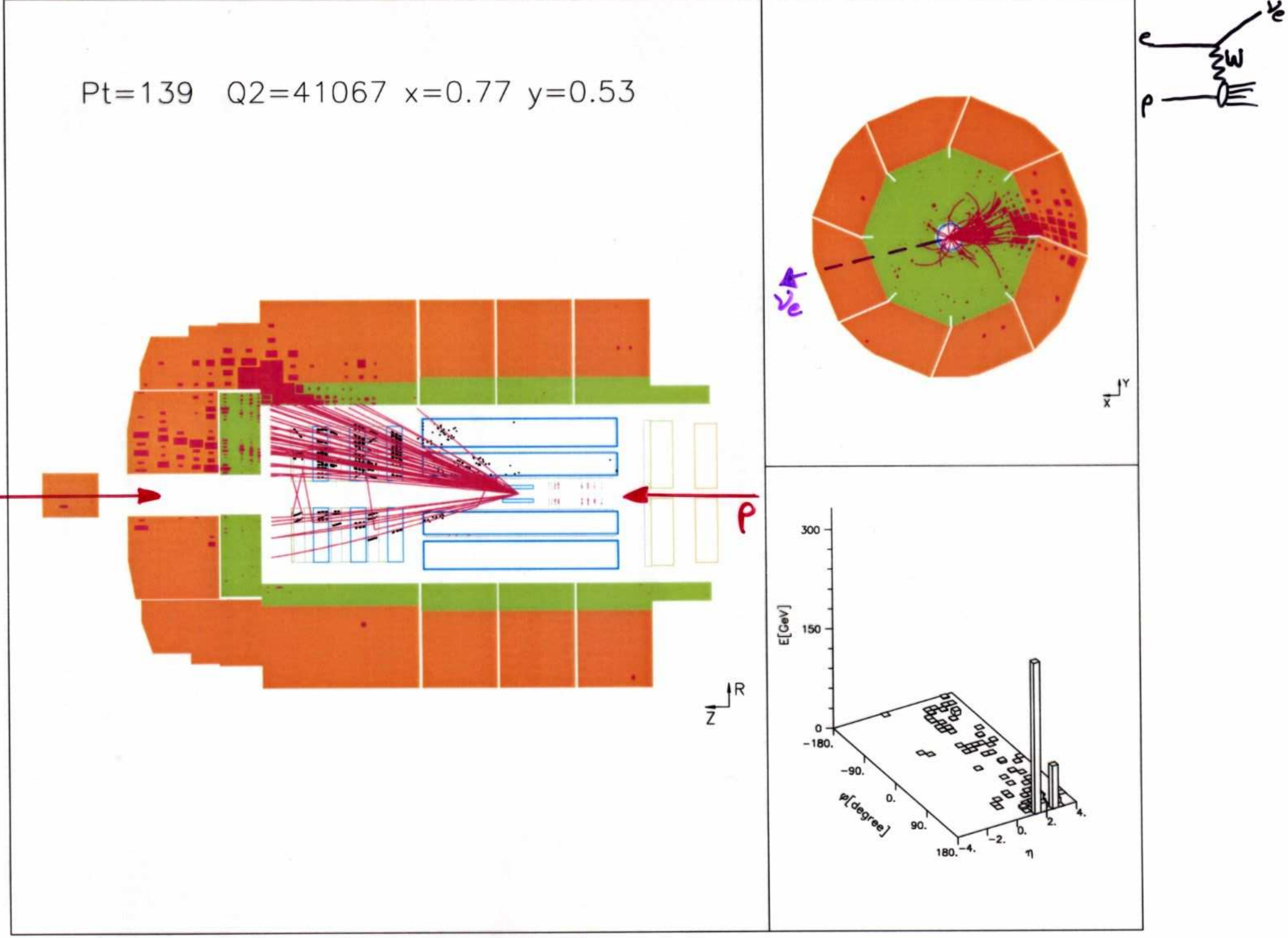




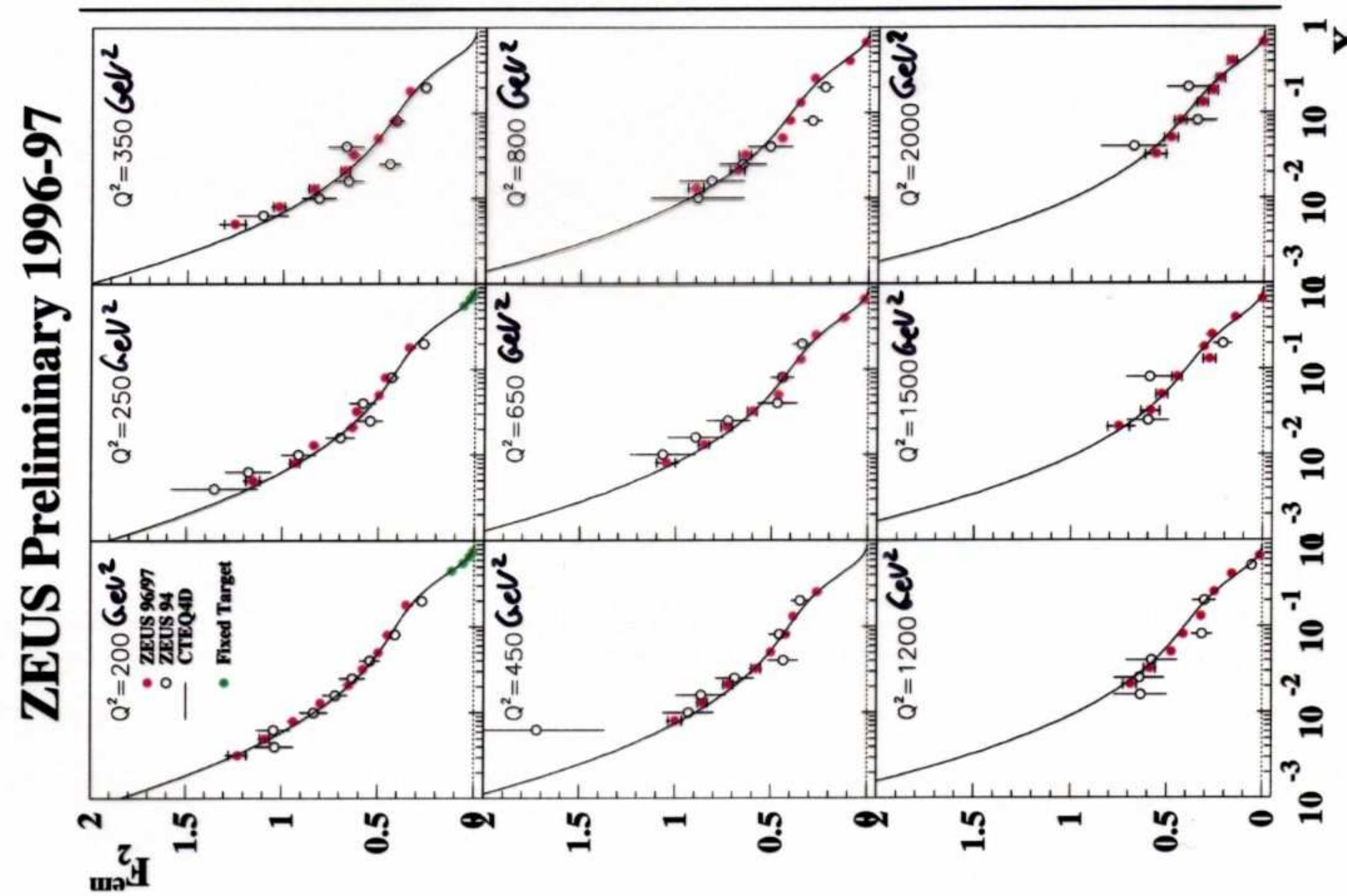


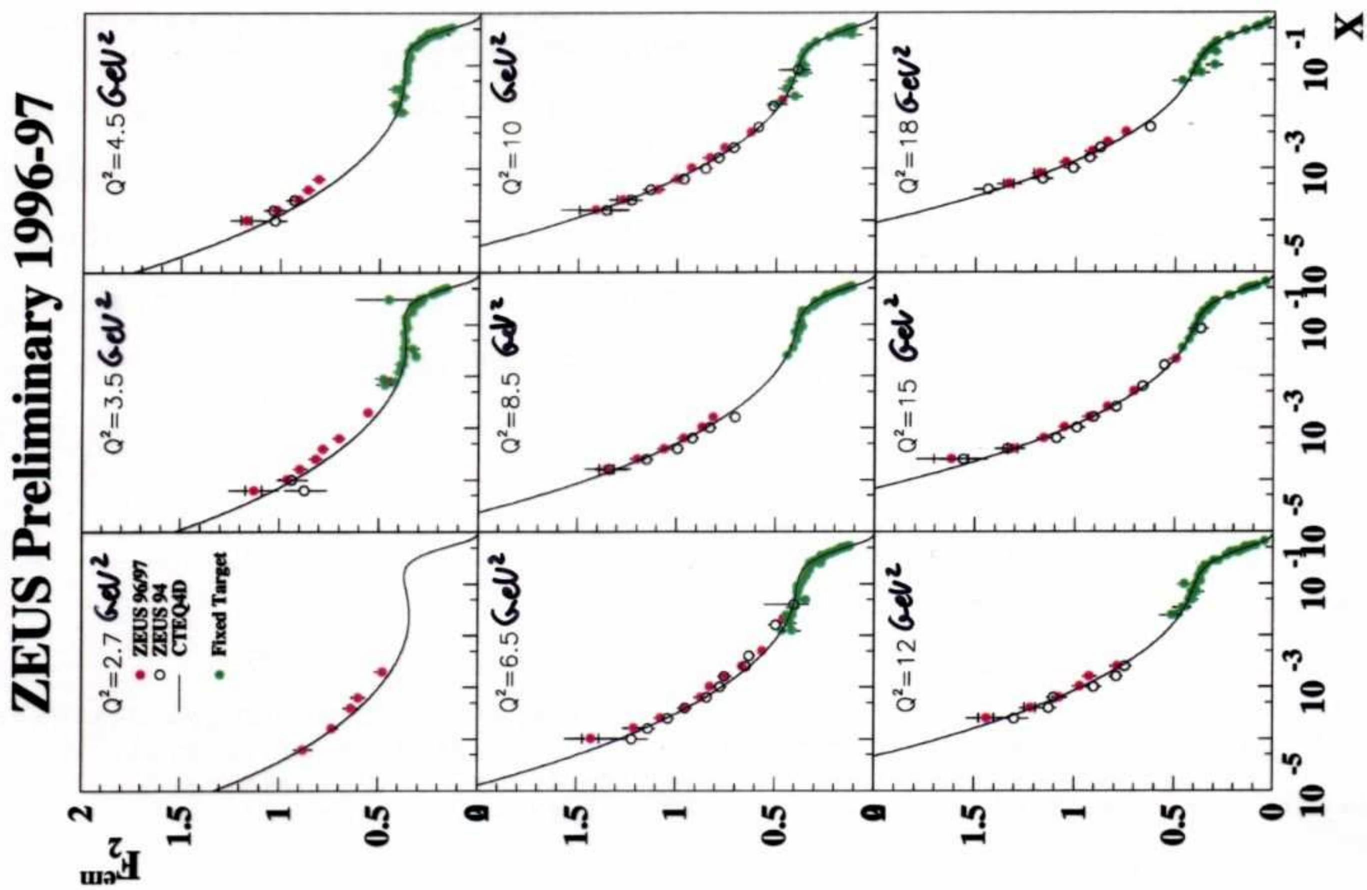


Run 238837 Event 8595 Class: 4 5 6 7 11 19 25 26 28 run date 290399



Proton structure

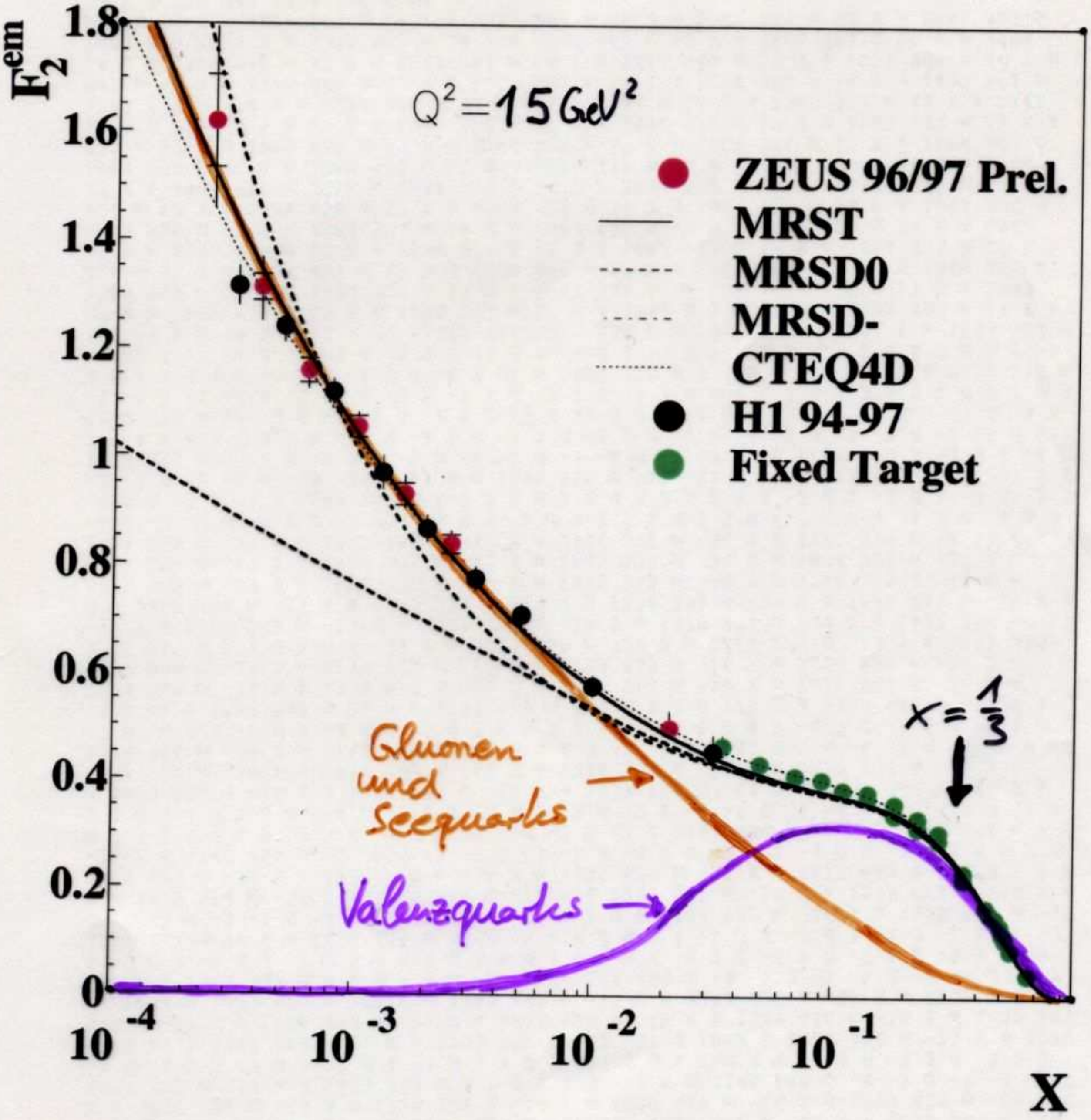




- The proton structure function F_2:

$$\left[F_2^{NC} = x\sum A_q\left(q(x)+\bar{q}(x)\right)\right] \leftarrow$$ (wenn anstatt Photon ein Z°-Boson ausgetauscht wird)

$$F_2^{em} = x\sum e_q^2\left(q(x)+\bar{q}(x)\right)$$ ($q(x)$, $\bar{q}(x)$ entsprechen $f_i(x)$ für $i = q$ bzw. $\bar{q}$)



- **HERA: Low x: Rapid rise of F_2 - $F_2 \sim x^{-\lambda}$**

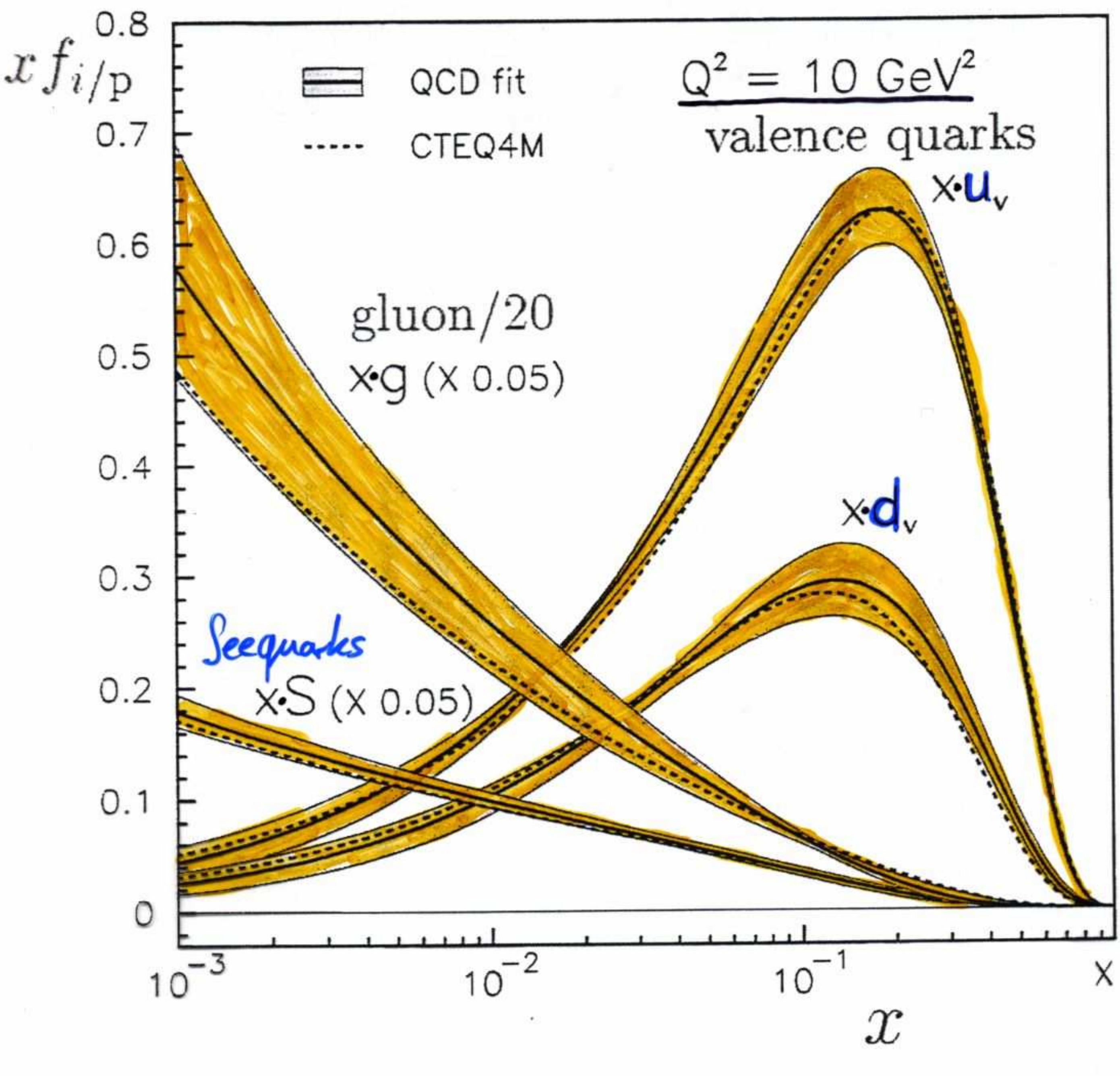
Partondichte im Proton

- Quarkdichten folgen aus:

$$F_2(x) = \sum_{\substack{i=u,d,s,c,\ldots \\ \bar{u},\bar{d},\bar{s},\bar{c}}} e_i^2 \cdot x \cdot f_i(x)$$

- Gluondichte ist schwieriger zu messen (nutzt $G \to c\bar{c}$ und Messung der charm Quarks

M. Botje, hep-ph/9912439



Gluondichte im Proton

... nimmt zu mit steigender Auflösung $\left(\frac{1.24\,\text{fm}}{\sqrt{Q^2[\text{GeV}^2]}}\right)$

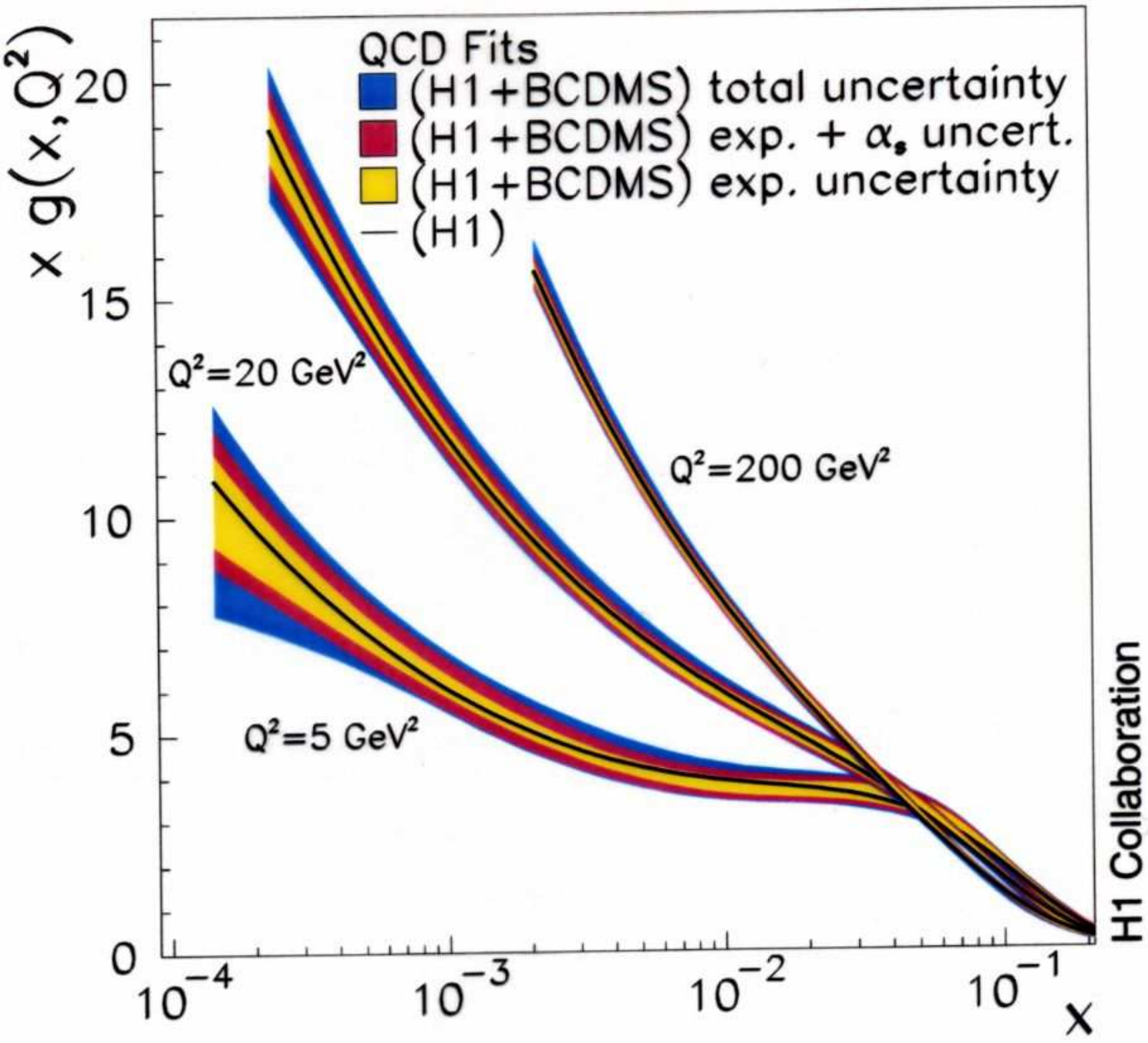


Figure 23: *Gluon distribution resulting from the NLO DGLAP QCD fit to H1 ep and BCDMS μp cross section data in the massive heavy flavour scheme. The innermost error bands represent the experimental error for fixed $\alpha_s(M_Z^2)$ =0.1150. The middle error bands include in addition the contribution due to the simultaneous fit of α_s. The outer error bands also include the uncertainties related to the QCD model and data range. The solid lines inside the error band represent the gluon distribution obtained in the fit to the H1 data alone.*

Konsequenzen aus Partondichten

- $\int dx \, x \cdot \left(u_v(x) + d_v(x) \right) \simeq 0.59$

- $\int dx \, x \cdot g(x) \simeq 0.41$

$\Rightarrow$

- Die Quarks tragen ca. 60% des Proton-Impulses & -Energie

- Die Gluonen tragen ca. 40% von Proton-Impuls & Energie

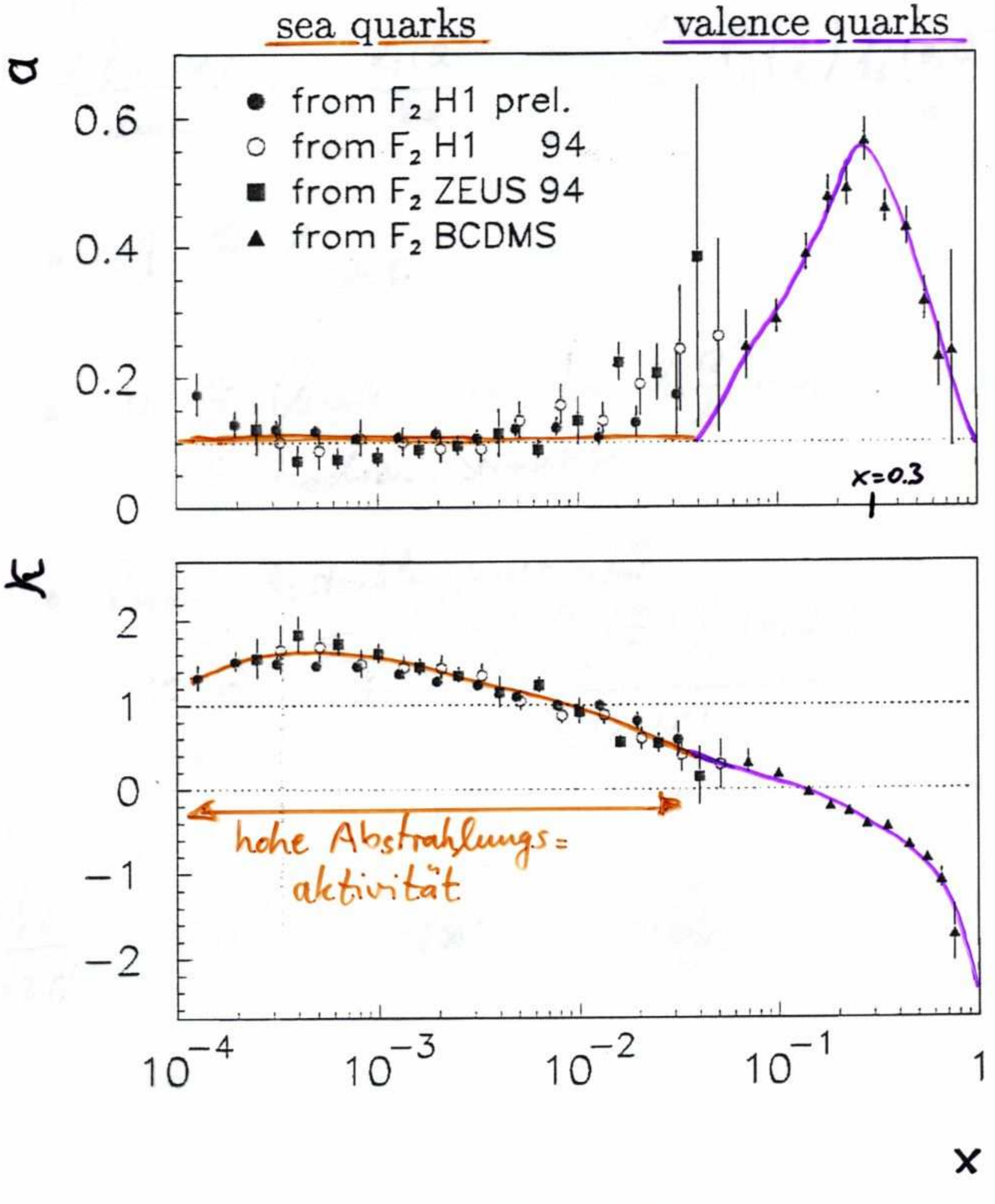
Interpretation der Strukturfunktion

Parametrisierung: $$F_2(x,Q^2) = \underbrace{a(x)}_{\text{hadronische Struktur}} \cdot \underbrace{\left[\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}\right]}_{\sim 1/\alpha_s(Q^2)}^{\varkappa(x)}$$

$\varkappa(x)$ Strahlungsaktivität

zur Lösung der DGLAP-Evolutionsgleichung:

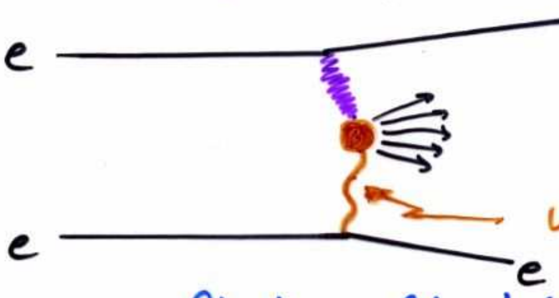
$$\frac{\partial F_2(x,Q^2)}{\partial \ln Q^2} \simeq \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi}\, P\left(\frac{x}{\xi}\right) \cdot F_2(\xi,Q^2)$$



Photonstruktur

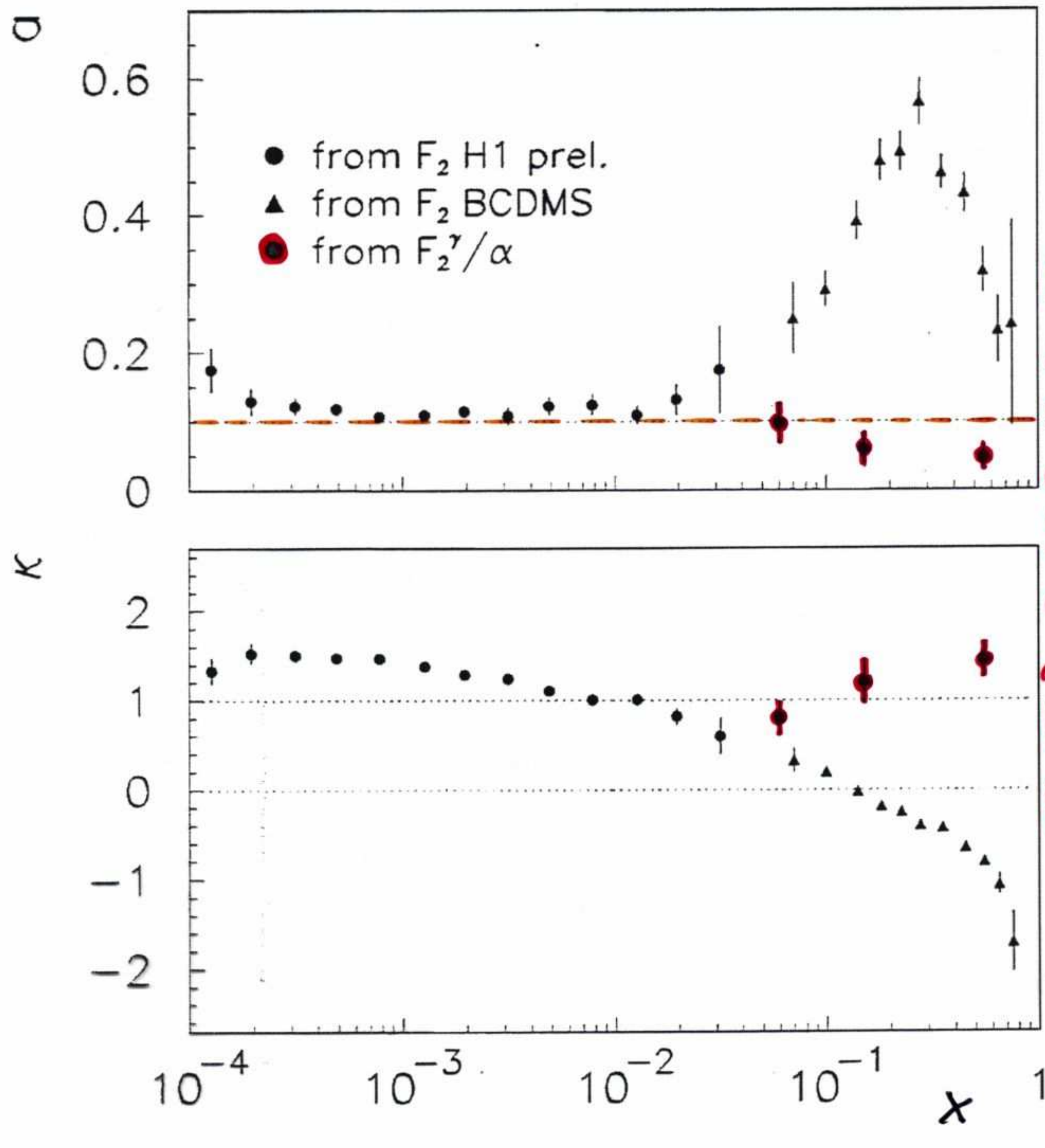
Photon: 

wird z.B. in e^+e^--Streuung untersucht:



untersuchtes Photon mit Struktur in

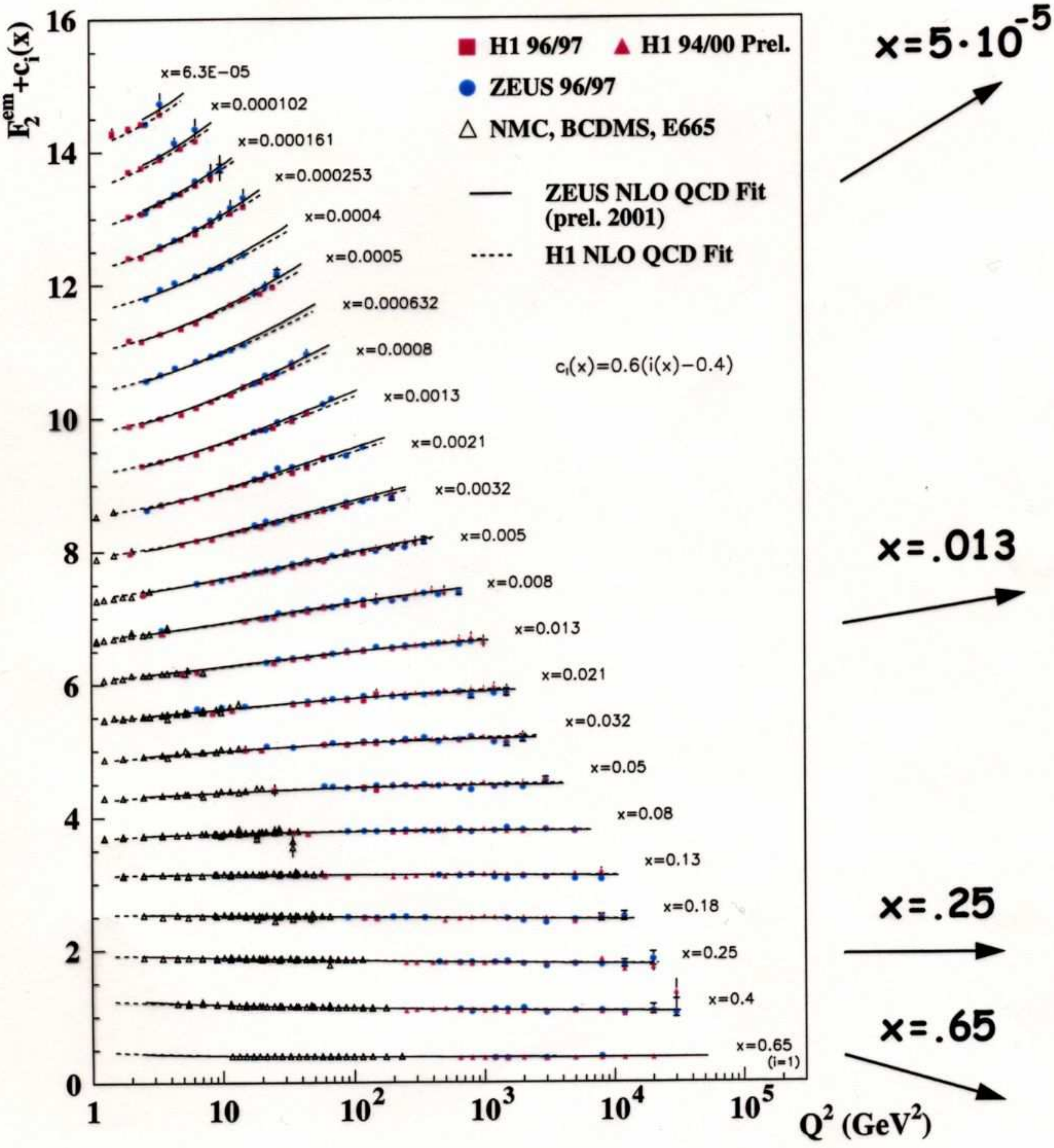
$\longrightarrow$ Photon-Strukturfunktion: $F_2^\gamma(x, Q^2) = a(x) \left[\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}\right]^{\kappa(x)}$



Photon-struktur stammt aus der Strahlungs-aktivität, d.h. keine Valenz-quark-beiträge!

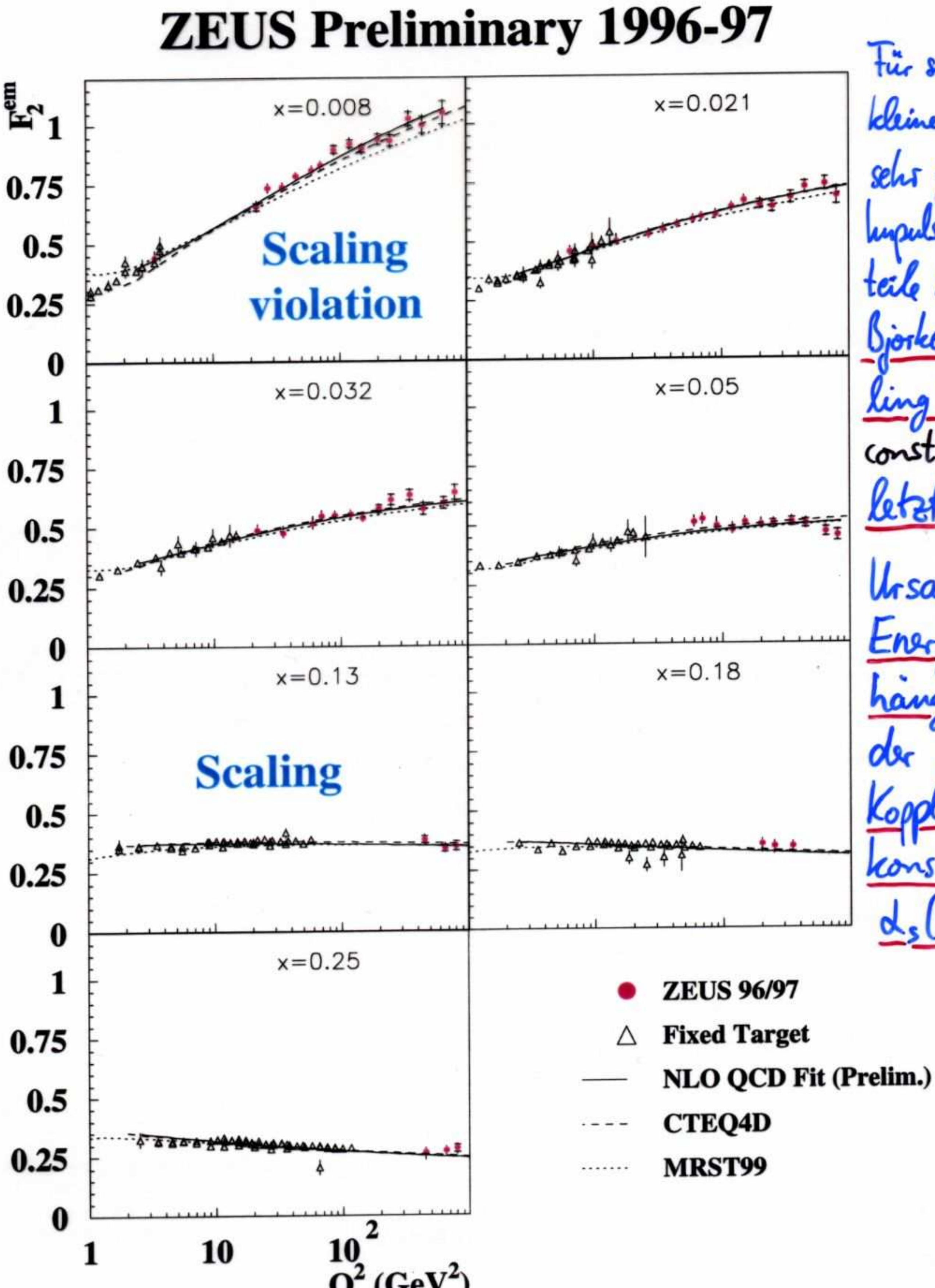
$F_2(x,Q^2)$: Present Status

$$F_2(x,Q^2) = x \sum e_q^2\, q(x,Q^2)$$



Verletzung des Bjorken Scalings

Proton structure



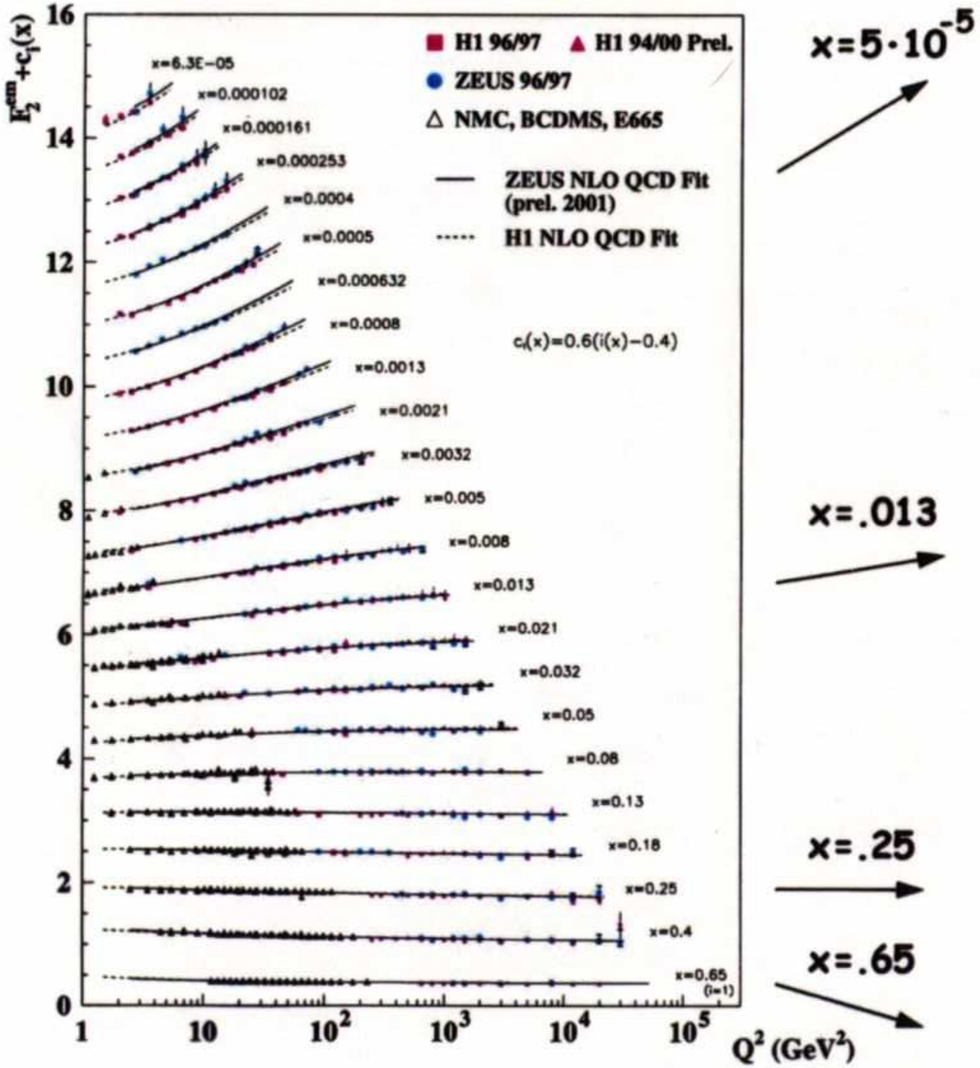
Für sehr kleine und sehr große Impulsbruchteile x ist Bjorken Scaling (F_2 = const.) verletzt.

Ursache: Energieabhängigkeit der starken Kopplungskonstanten $\alpha_s(Q^2)$

Zur Bedeutung der Proton-Strukturfunktion

Protron-Strukturfunktion

$$F_2(x,Q^2) = x \sum e_q^2 \, q(x,Q^2)$$



Impulsanteile der Partonen im Protron $(t = Q^2)$

$$\boxed{\int_0^1 \mathrm{d}x \, x \cdot f_i(x,Q^2)}$$

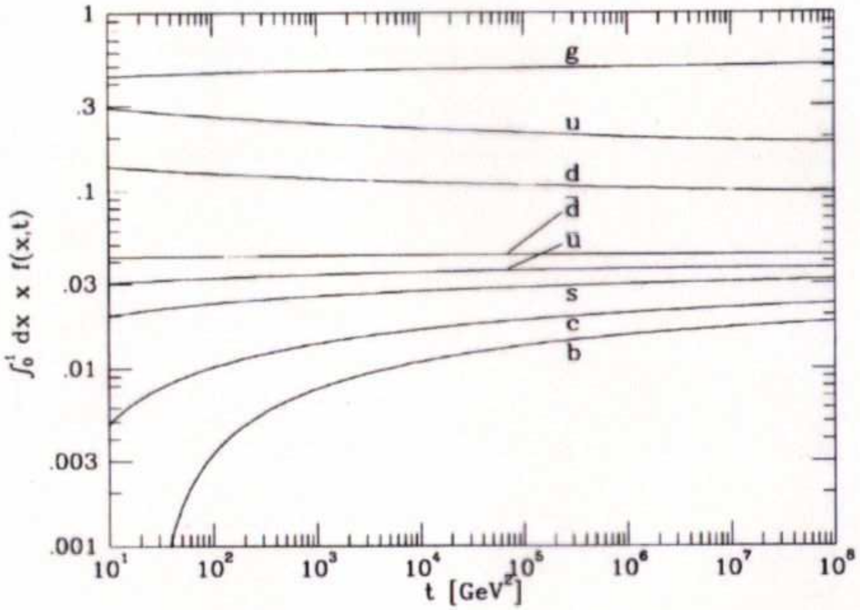


Fig. 4.14. Momentum fractions carried by the quarks and gluons as functions of the scale.

Impulsbruchteile:
- Gluonen: 40-50% !
- Valenzquarks: nur je 10-30%
- Seequarks: $\sim$ 5%

NB: Q^2-Evolution der F_2-Funktionen mittels DGLAP-Evolutionsgleichung

Zur Bedeutung der Proton-Strukturfunktion

Faktorisierung: Partondichtefunktion $\otimes$ 2→2-Prozess

In Proton-(Anti-)Proton-Collidern:

◇ inelastischer Stoß zwischen Proton-(Anti-)Proton

≙ harter Stoß zwischen zwei Partonen

(Parton=Quark, Antiquark oder Gluon)

◇ Partonen stammen aus Proton/(Anti-)Proton

→ Partondichtefunktion $f_i(x)$ (Protonstrukturfkt. $F_2(Q^2, x)$)

Wahrscheinlichkeit: Parton mit x in (Anti-)Proton

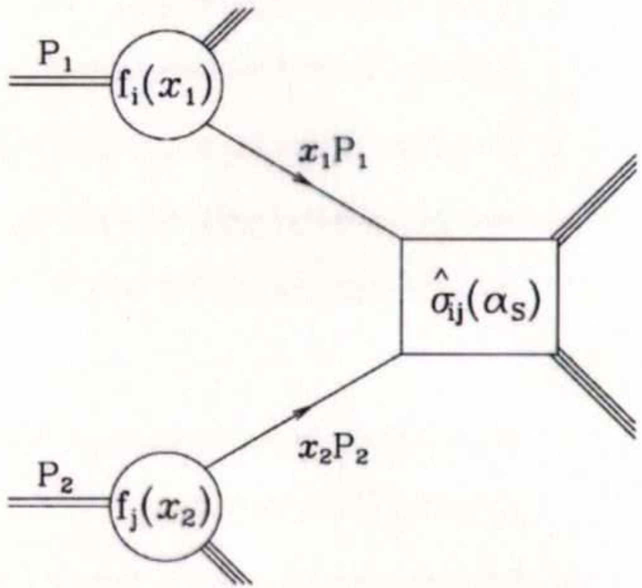


Fig. 7.1. The parton model description of a hard scattering process.

- *Faktorisierung*: Partondichte/Protonstruktur $\otimes$ harter Stoß separate Beschreibung

▷ Partonen mit Impulsbruchteil x_1, x_2 aus Proton/(Anti-)Proton

(Faktorisierungs-Energieskala $\mu_F^2 \ll Q^2$)

▷ harter Stoß zwischen diesen Partonen mittels QCD: $2 \rightarrow 2$

(Energieskala des Stoßes $\mu^2 = Q^2$)

Protonstrukturfunktion $F_2(x, Q^2) \longrightarrow$ Partondichtefunktion $f_i(x) \longrightarrow$ Luminosität von Partonen für harten Stoß

Zur Bedeutung der Proton-Strukturfunktion

Parton-Luminositäten:

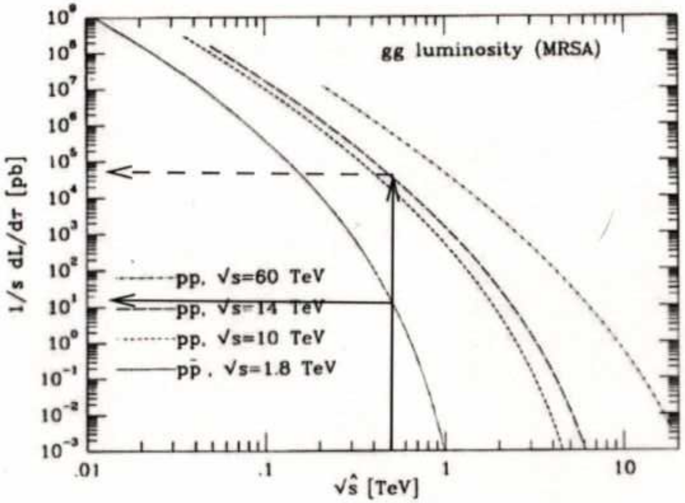


Fig. 7.2. Luminosity plot for gluon-gluon induced processes.

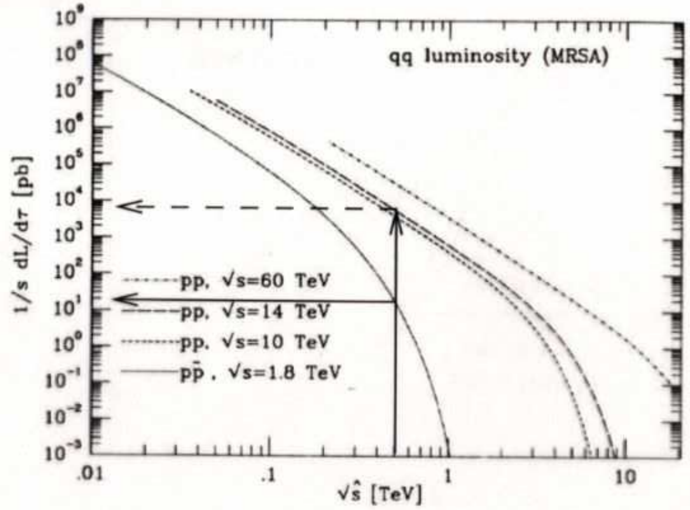


Fig. 7.4. Luminosity plot for quark-quark induced processes.

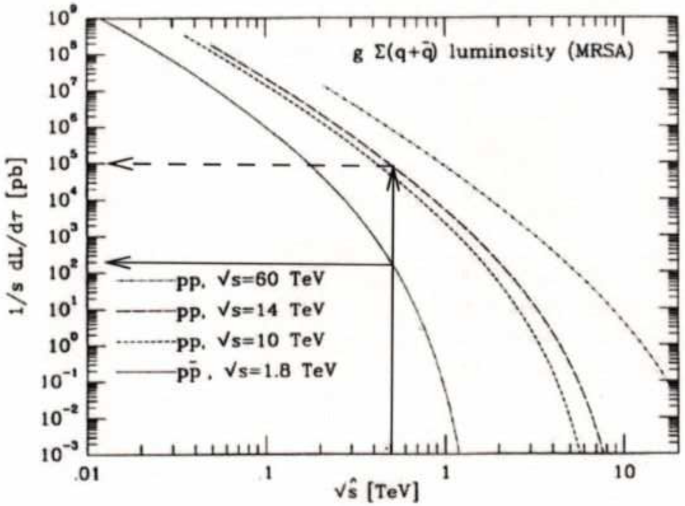


Fig. 7.3. Luminosity plot for gluon-quark induced processes.

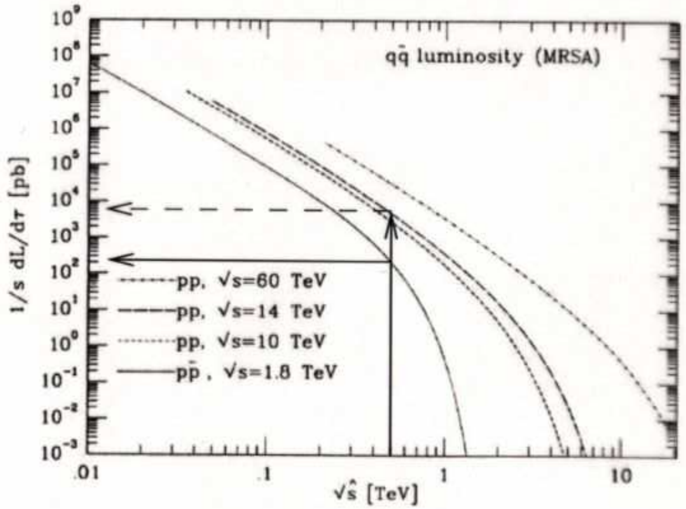


Fig. 7.5. Luminosity plot for quark-antiquark induced processes.

→ Quark-Antiquark- & Gluon-(Anti-)Quark-Prozesse bei Tevatron, Gluon-Gluon- & Gluon-Quark-Prozesse bei LHC dominant

$$\tau(\mathrm{d}L_{ij}/\mathrm{d}\tau) \propto \int_0^1 \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ \left[(x_1 f_i(x_1,\mu_F^2)\cdot x_2 f_j(x_2,\mu_F^2)) + (1\leftrightarrow 2)\right]\delta(\tau - x_1 x_2)$$

Zur Bedeutung der Proton-Strukturfunktion

Harte 2→2-Prozesse:

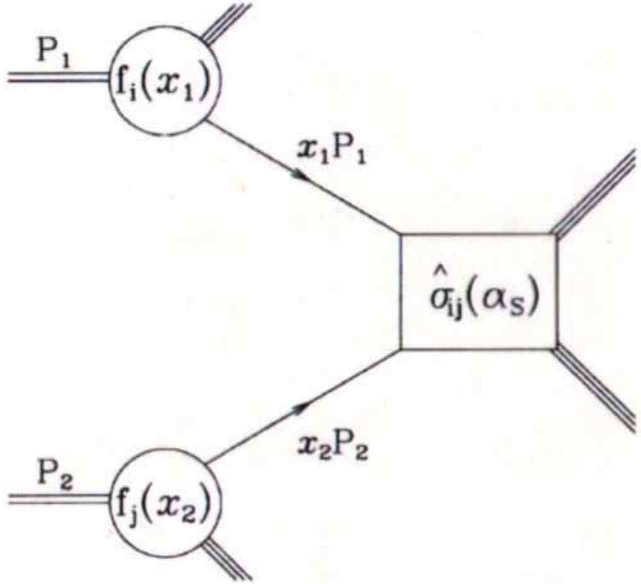
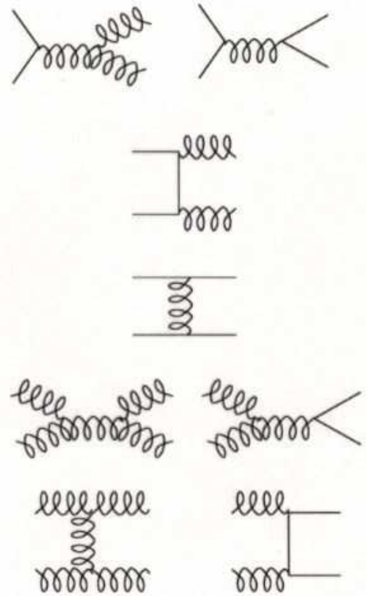


Fig. 7.1. The parton model description of a hard scattering process.

$\Longrightarrow$

- $q\bar{q}$ (s-Kanal)
- $q\bar{q}$ (t-Kanal)
- qq' (t-Kanal)
- gg (s-Kanal)
- gg (t-Kanal)



$\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow$ abnehmender Beitrag

Wirkungsquerschnitt:

$$\boxed{\sigma(s) = \sum_{\{ij\}} \int_{\tau_0}^{1} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \left[\frac{\mathrm{d}L_{ij}(\mu_F^2)}{\mathrm{d}\tau}\right] \cdot \left[\hat{s} \cdot \hat{\sigma}_{ij}\big(\alpha_S(\mu^2)\big)\right]}$$

mit effektiver Schwerpunktsenergie: $\boxed{\hat{s} = \tau s = x_1 x_2 s}$

(z.B.: $\sqrt{s} = 1.96$ TeV für Tevatron,
$\sqrt{s} = 14$ TeV für LHC)

Struktur des Protons

... ist überaus reichhaltiger und komplizierter als vom statischen Quarkmodell erwartet:

- Quarks tragen ~60% des Protonimpulses
- Gluonen tragen ~40%
- Das Proton ist mit sehr, sehr vielen niederenergetischen Gluonen aufgefüllt
- auch niederenergetische See-Quarks tragen zur Protonstruktur bei

Aber noch ist die Protonstruktur nicht restlos verstanden. Z.B. ist das Zustandekommen des Protonspins noch unklar: Valenzquarks tragen mit ca. 40% bei, See-Quarks gar nicht, der Gluonbeitrag ist noch ungewiss. Auch eine kollektive Rotation der Valenzquarks könnte einen Beitrag zum Protonspin leisten.