

Tiefinelastische Streuung bei kleinem x

Die gemessenen Strukturfunktionen F_2 für das Proton zeigen einen enorm wachsenden Anteil der Gluondichte bei kleinen Werten von x (genauer Björken- $x : x_{Bj}$). Tatsächlich gibt es einen Ansatz, die Form der Strukturfunktion bei kleinem x durch

$$F_2(x) \sim A \cdot x^{-1+\alpha_P} + B \cdot x^{-1+\alpha_R}$$

zu beschreiben und damit auch den totalen Wirkungsquerschnitt für die tiefinelastische Streuung ($s \equiv [\text{Schwerpunktsenergie}]^2$)

$$\sigma_{\text{total}} = A \cdot s^{-1+\alpha_P} + B \cdot s^{-1+\alpha_R}$$

(für unterschiedliche A und B gilt dieser Ausdruck für pp , pp , πp , $\pi^+ p$, $K^- p$, $K^+ p$ und yp -Streuung!).

Die theoretische Grundlage dafür ist die Regge-Theorie (ca. 1960!), wo die Streuung durch Austausch von Teilchenfamilien mit unterschiedlichem Spin beschrieben werden:

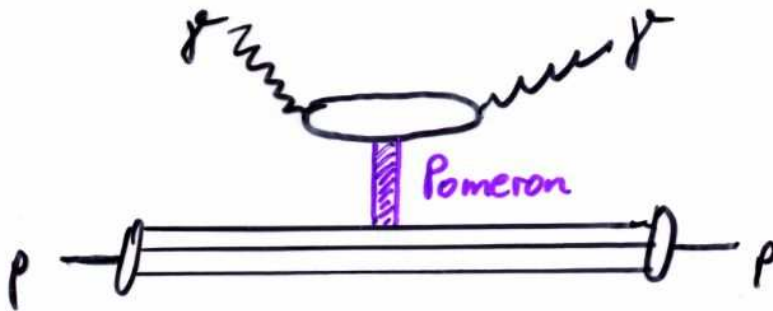
$$\alpha_P \approx 1 \quad \text{Pomeron, Spin 0}$$

$$\alpha_R \approx \frac{1}{2} \quad \rho, \omega, a_2, f_2, \dots \text{-Mesonen, Spin 1}$$

Tiefinelastische Streuung bei kleinem x

Der Graph der Wechselwirkung ist bei Pomeron-Austausch:

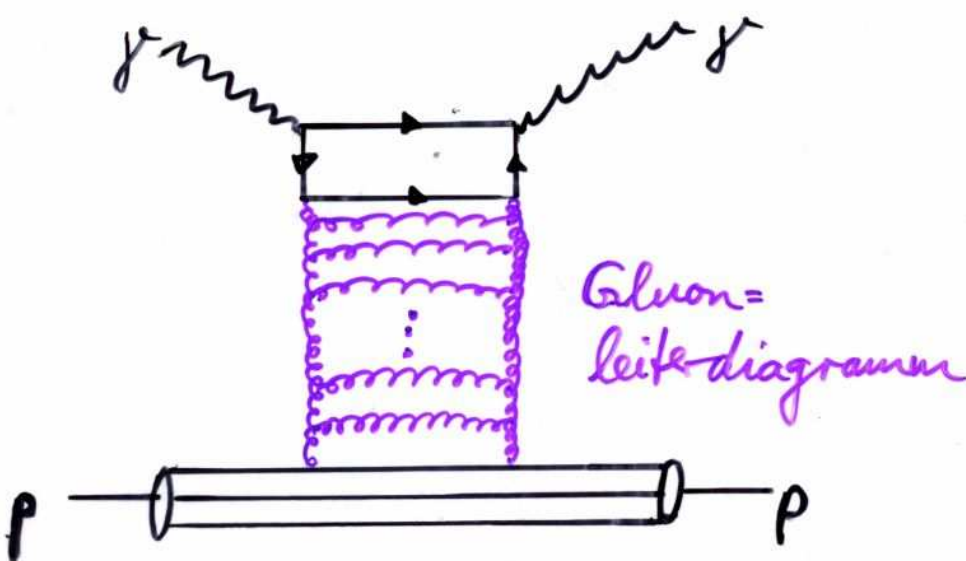
z.B.



Beachte: Das Proton kann bei diesem Streuprozess intakt bleiben. Mit anderen Worten: Das Photon wird am Proton "gebeugt" \rightarrow **Diffraction**

Aber: Regge-Theorie und Pomeron stammen aus einer Zeit vor der Kenntnis von Quarks & Gluonen. Daher ...

modernes Bild:



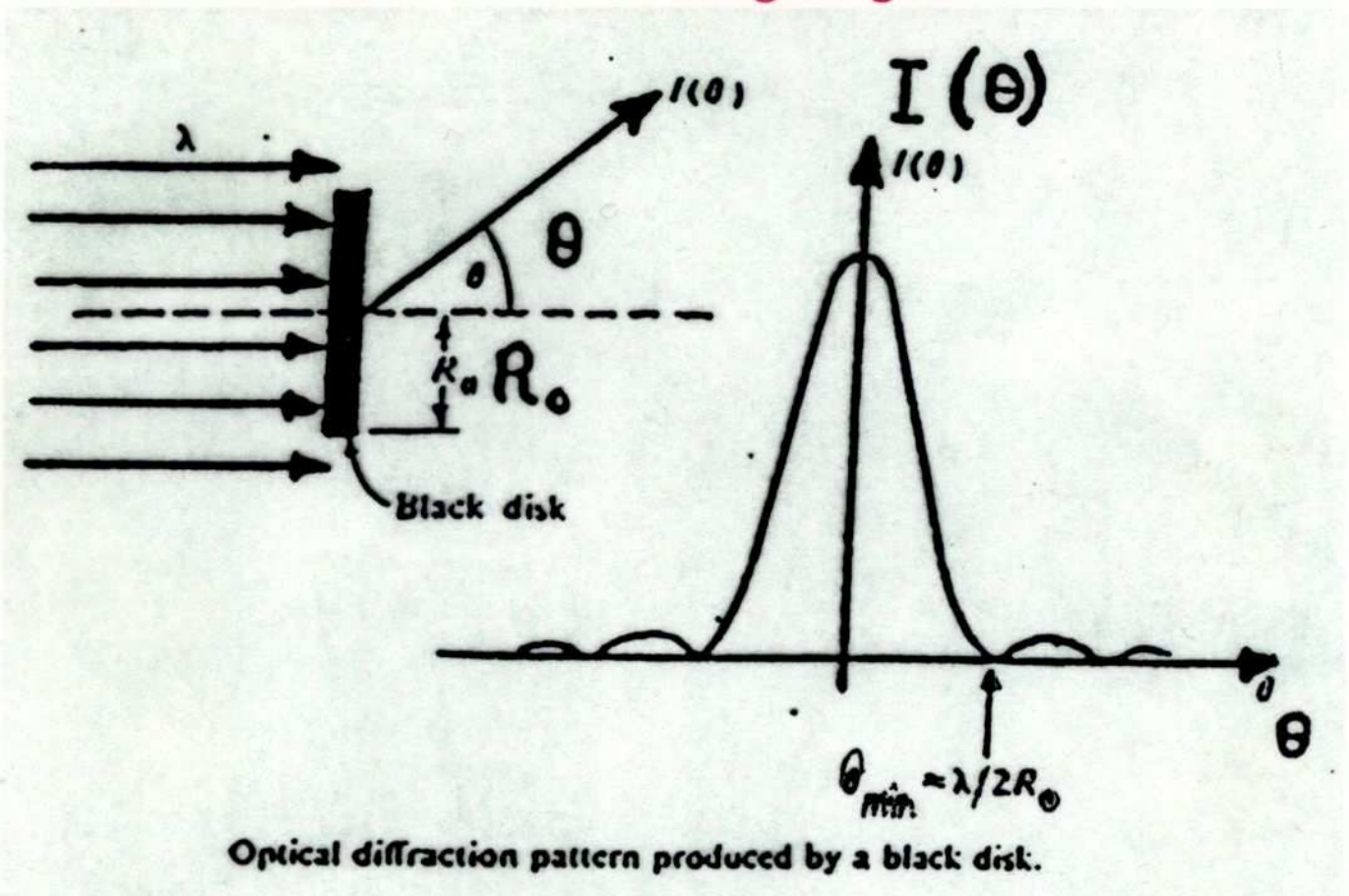
diffraktive Streuung in γp -Prozessen

Diffraction – Optical Case

Consider a beam of light striking an opaque object:

- $\gamma + \text{target} \rightarrow \text{excited target}$ (absorption)
- $\gamma + \text{target} \rightarrow \gamma + \text{target}$ (elastic diffraction)

Wave fronts on an absorbing target:



- Optical diffraction of light from a black disk:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{[2J_1(x)]^2}{x^2} \approx 1 - \frac{R_0^2}{4}(k\theta)^2$$

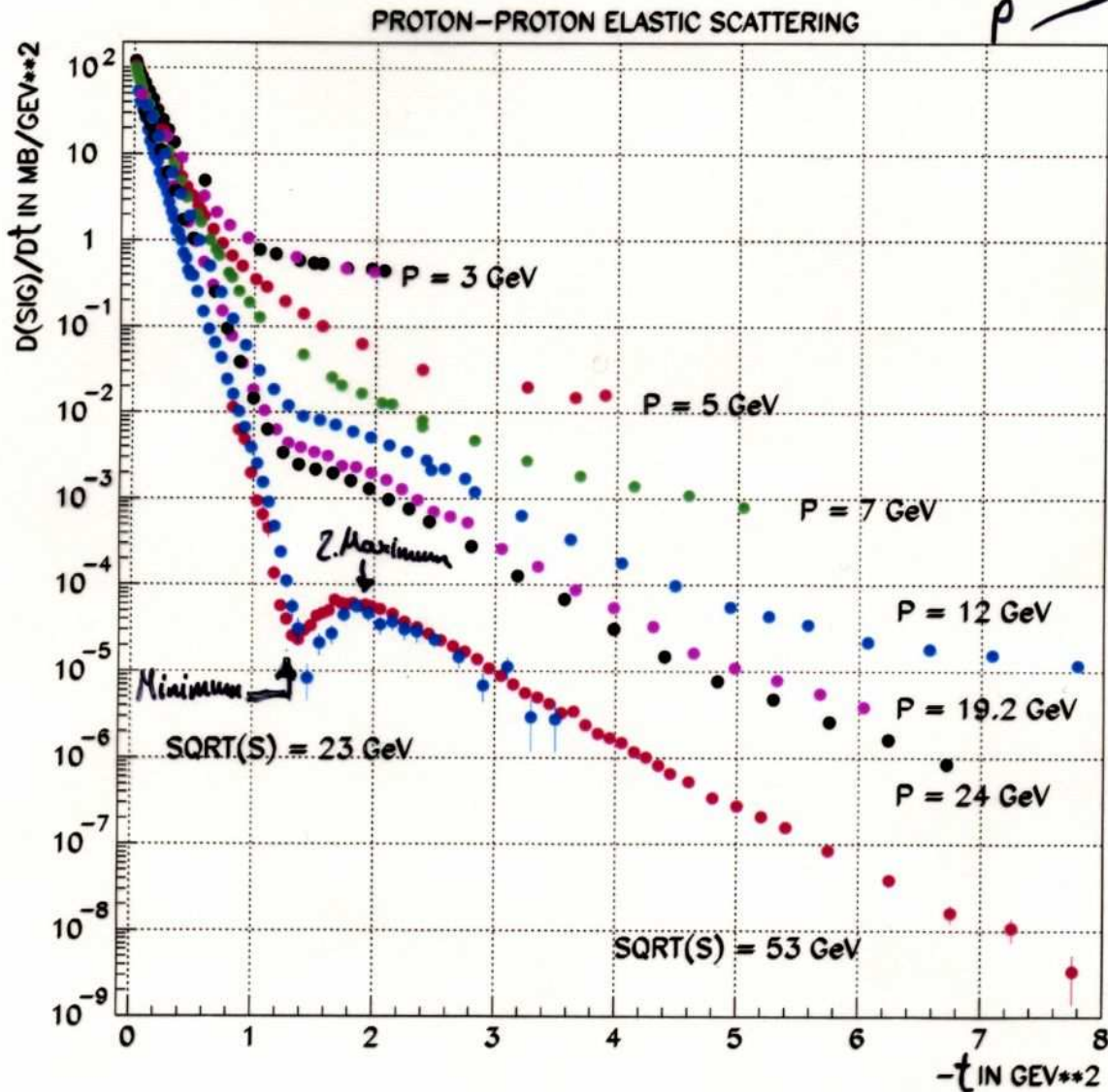
where k = the wave number, and

$$x = R_0 k \sin\theta \approx R_0 k \theta$$

Hadronic Diffraction

Consider proton-proton elastic scattering:

- $p + \text{target} \rightarrow p + \text{target}$ (elastic diffraction)

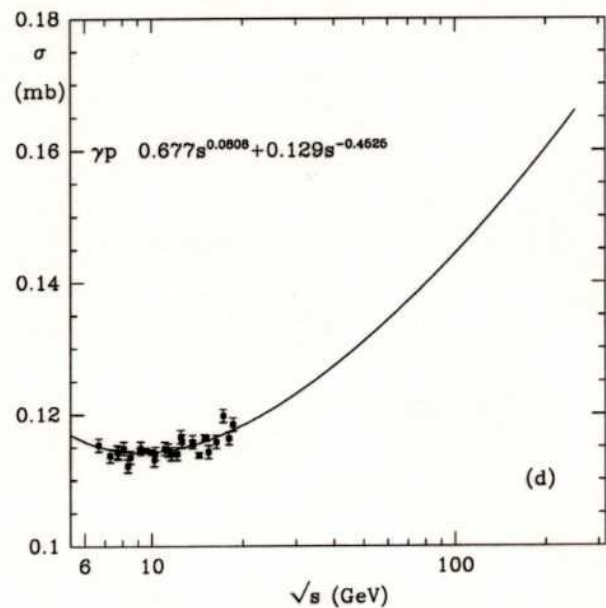
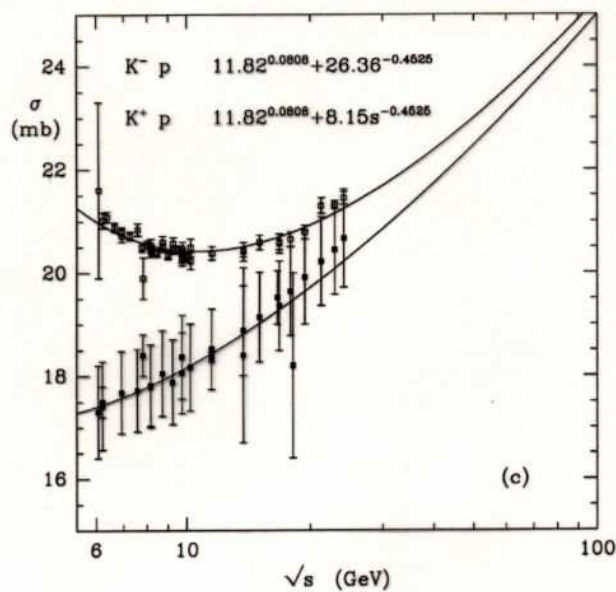
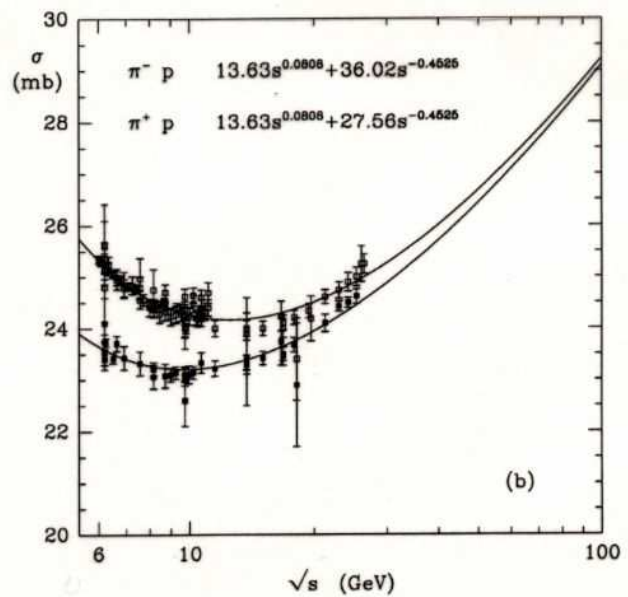
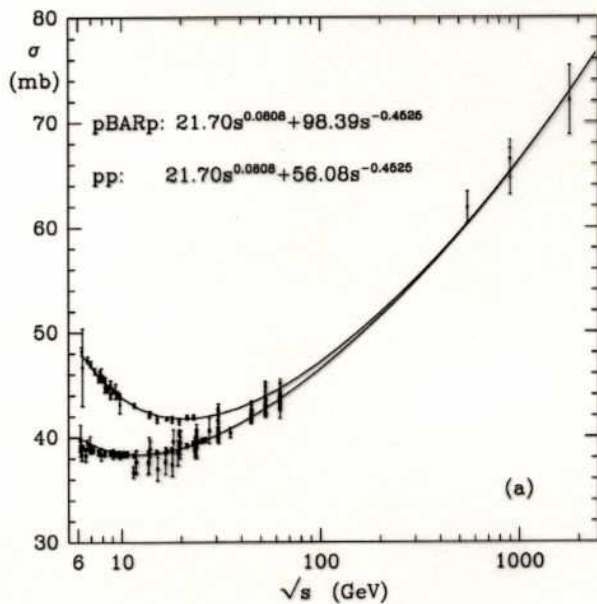


$$\frac{d\sigma/dt}{(d\sigma/dt)_{t=0}} = e^{bt} \approx 1 - b(p\theta)^2$$

where p = the incident proton momentum, and $b = \frac{R_0^2}{4}$

Clear diffraction minimum and secondary maximum as s increases

Energy Dependence of Elastic and Total Cross Sections



The fits to all total 7 cross sections are by Donnachie and Landshoff (D-L), Phys.Lett. B296,227 (1992), to the following function:

$$\sigma_{tot} = A s^{0.0808} + B s^{-0.4525}$$

$$\Rightarrow \alpha_{\mathbb{P}}(0) = 1.0808 \quad \& \quad \alpha_{\mathbb{R}}(0) = 0.5475$$

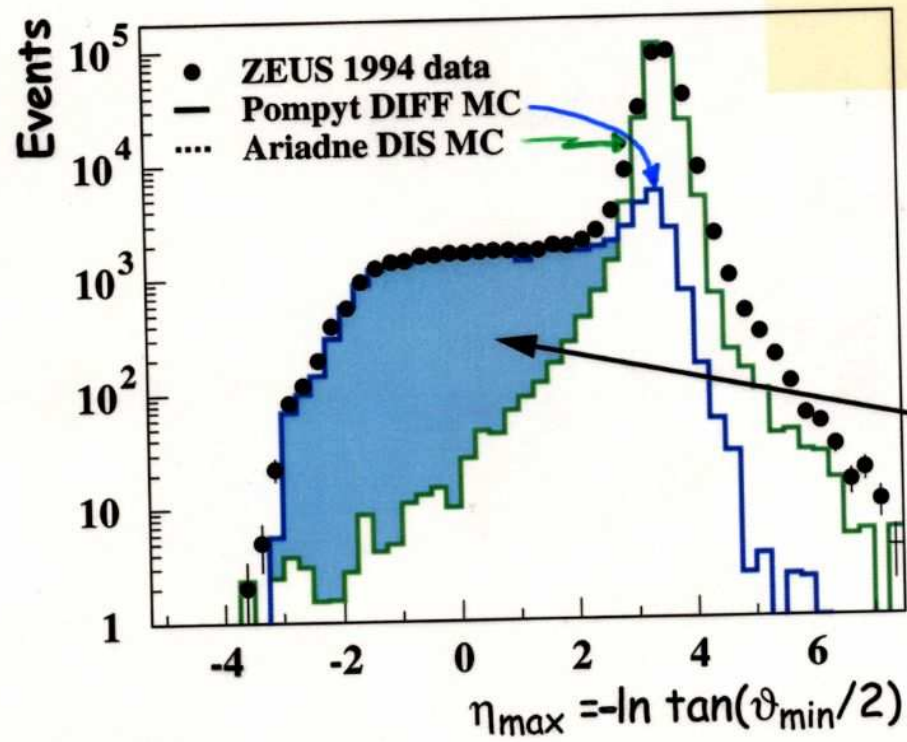
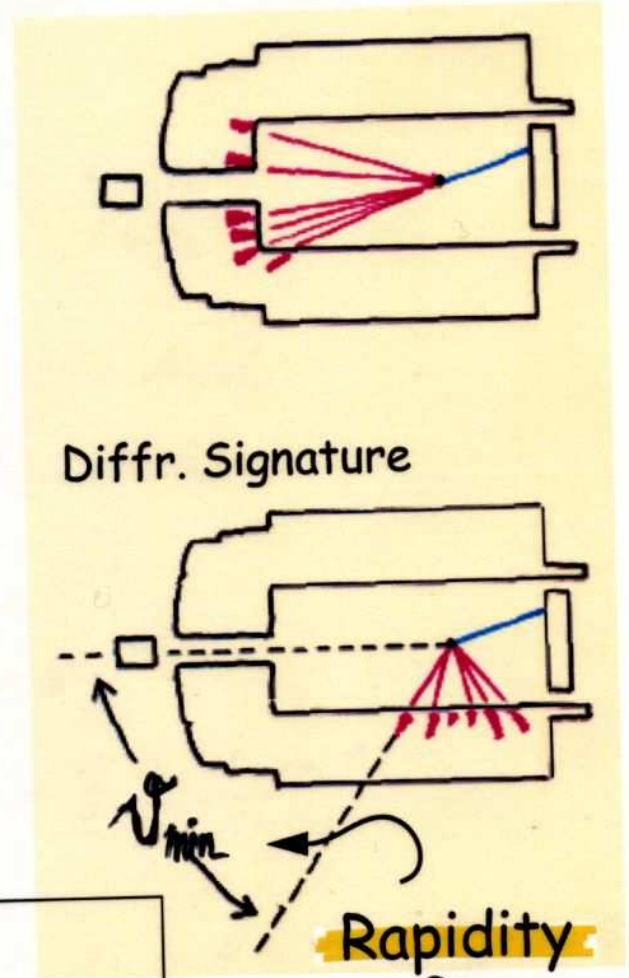
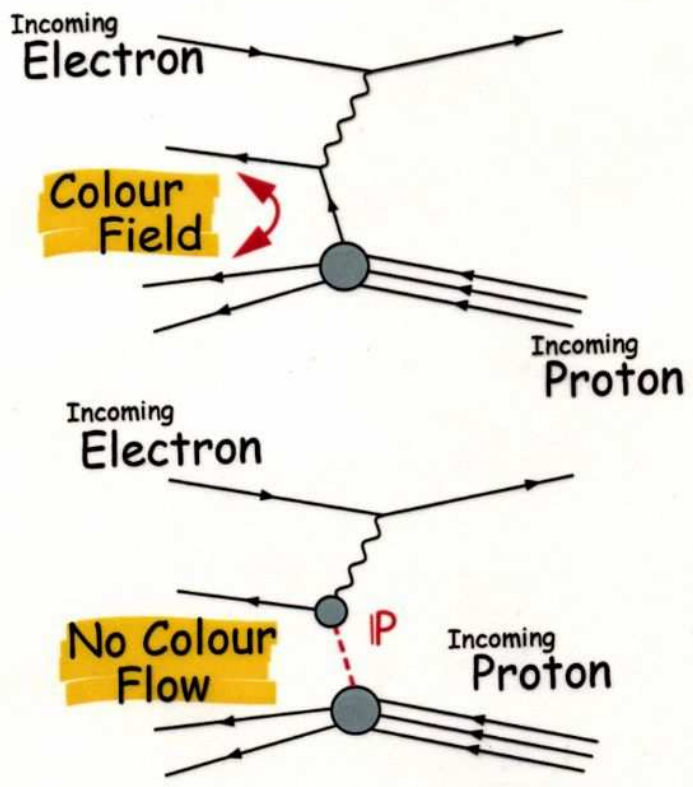
Pomeron

Diffraction in ep-Scattering

DiffRACTIVE Signature

(Deep Inelastic Scattering)

Standard DIS



Diffractive Events

Rapidity Gap

$\eta_{max} = -\ln \tan(\vartheta_{min}/2)$ ist (Pseudo-)Rapidität

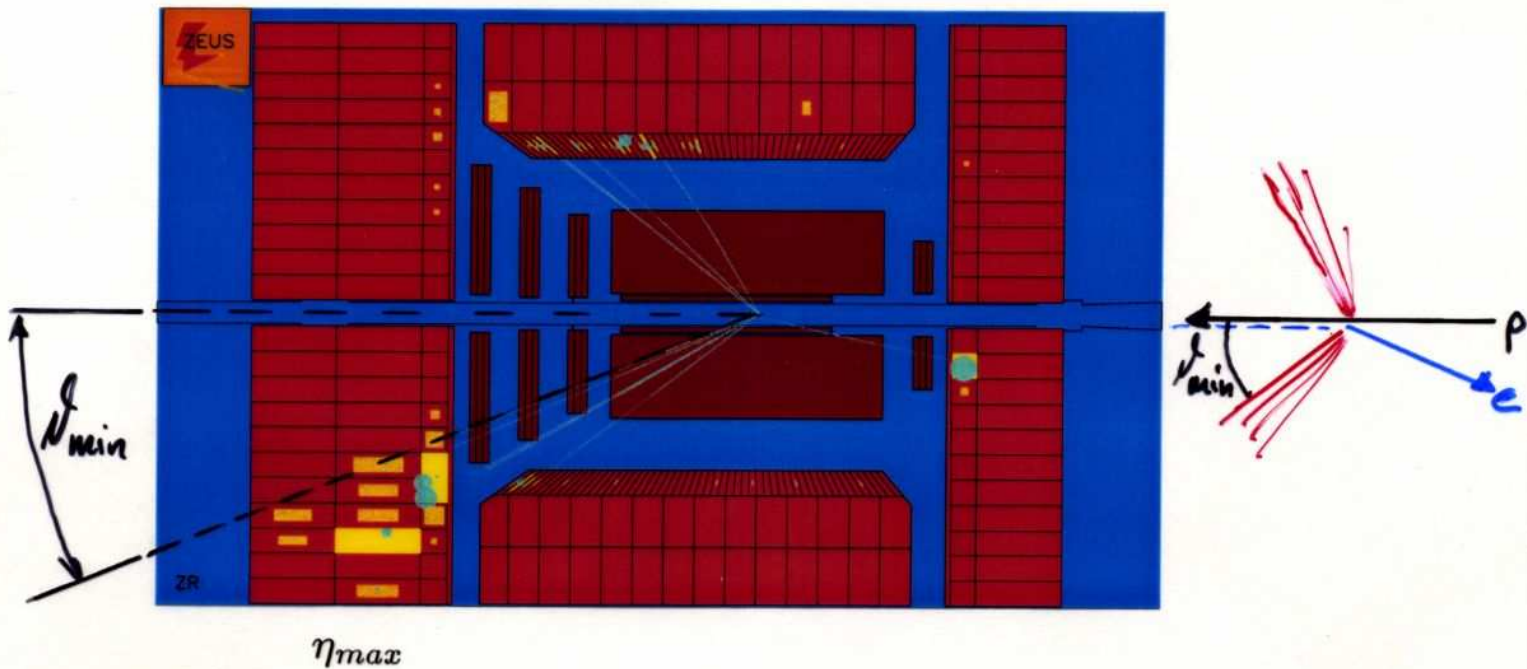
(NB: Rapidität $y := \frac{1}{2} \ln \frac{E+p_z}{E-p_z} \xrightarrow{E \gg m} -\ln \tan \frac{\vartheta}{2}$)

Diffraction in ep-Strreuung

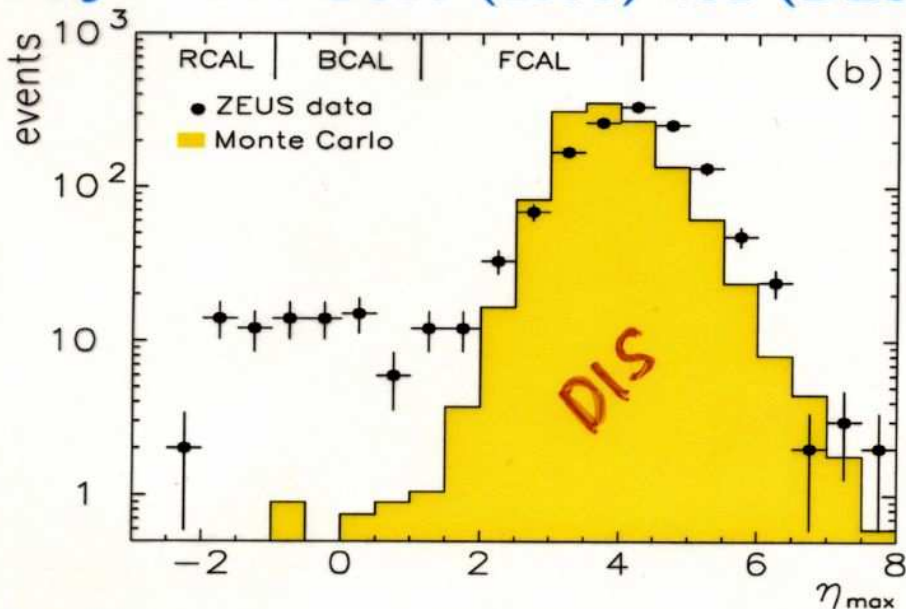
Inclusive diffraction (2): high Q^2

The first observation of inclusive diffraction:

$$\eta = -\ln \tan(\theta/2)$$

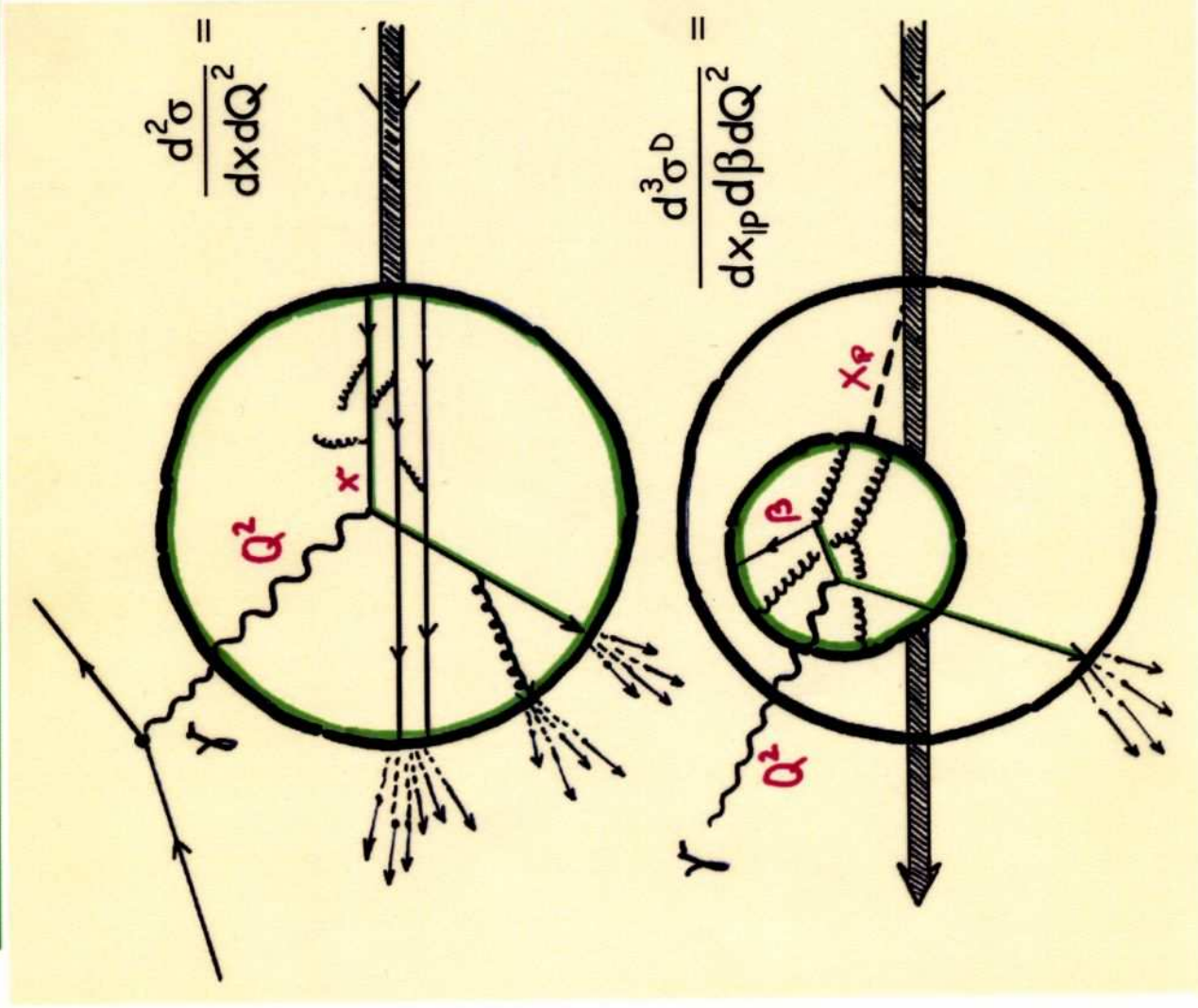


Phys. Lett. B315 (1993) 481 (DESY 93-093):



An excess of events over the DIS Monte Carlo at small η_{max}

Diffractive Cross Section



$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4} \cdot [1 + (1 - \gamma)^2] F_2(x, Q^2)$$

$$F_2(x, Q^2)$$

Structure of the proton

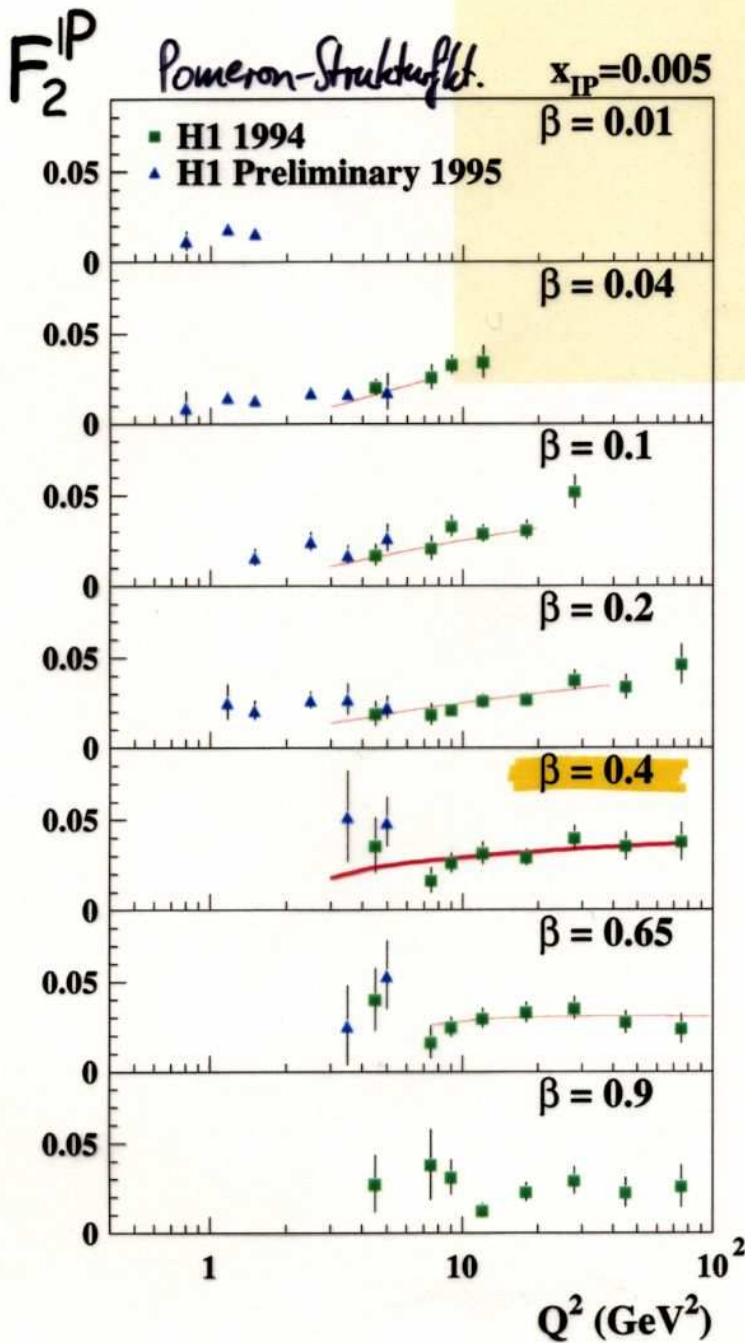
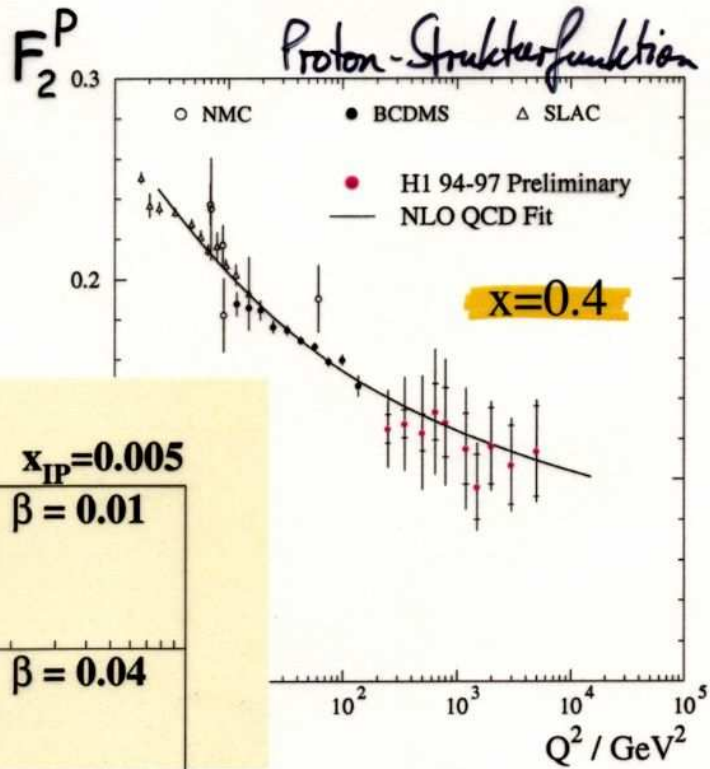
$$\frac{d^3\sigma^D}{dx_{ip} d\beta dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{\beta Q^4} \cdot [1 + (1 - \gamma)^2] F_2^{D(3)}(\beta, Q^2, x_{ip})$$

$$F_2^{D(3)}(\beta, Q^2, x_{ip})$$

Structure of the "Pomeron"

[+ Pomeron flux]

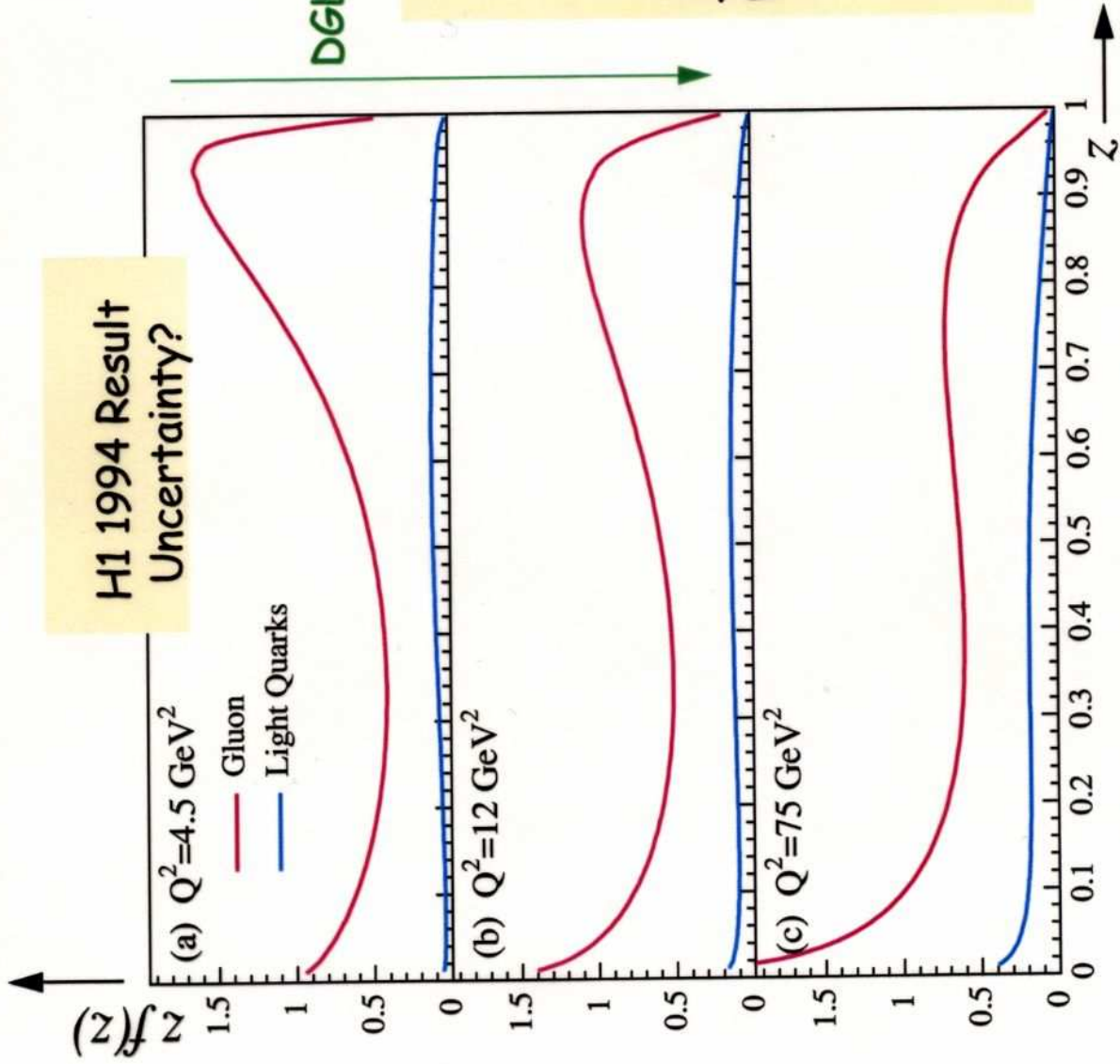
**Partonic
Structure of the
Pomeron**



Different
behaviour
compared to
proton

Rises
also for large
parton momenta

Parton Content of the Pomeron

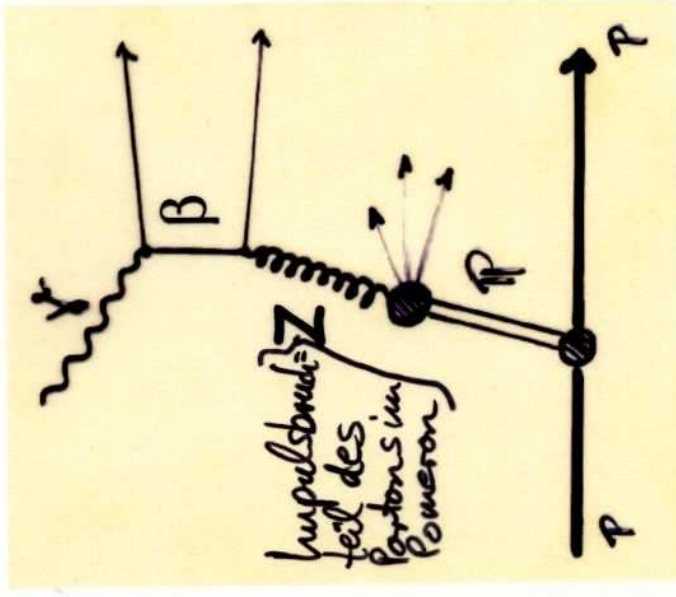


Gluon:

90% @ $Q^2 = 4.5 \text{ GeV}^2$

80% @ $Q^2 = 4.5 \text{ GeV}^2$

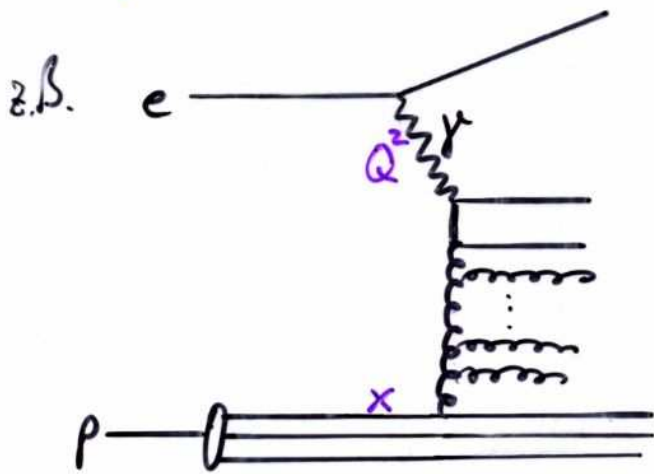
DGLAP



⇒ Gluoninhalt des "Pomeron" dominiert über leichte Quarks (≙ Erwartung für Gluonleitfähigkeitsdiagramm)

Tiefinelastische Streuung bei kleinem x

Streuprozesse werden durch Q^2 und x bestimmt:

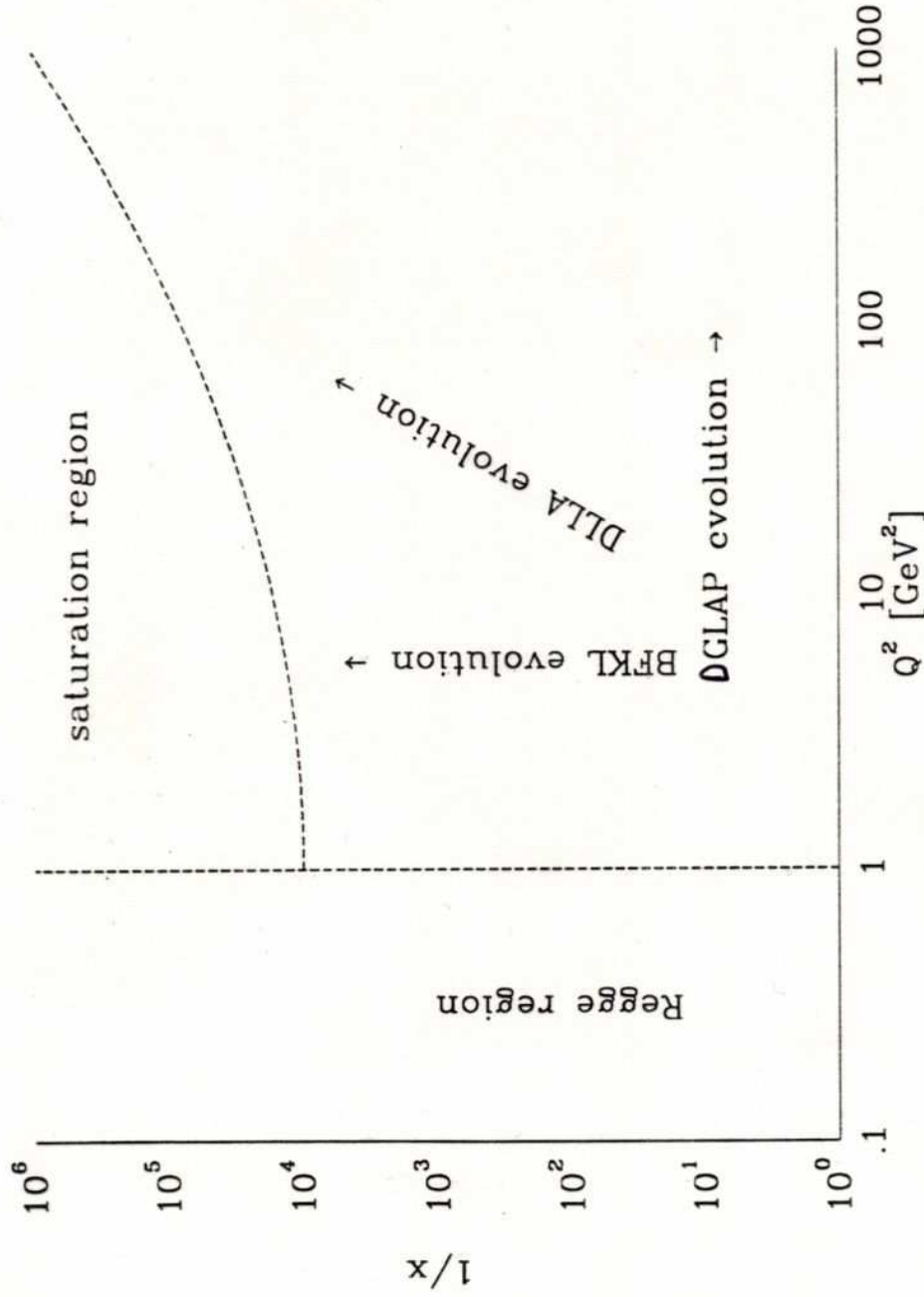


- Der Bereich der Regge-Theorie (und der Pomerons) ist durch extrem kleine Q^2 (typ. $< 1 \text{ GeV}^2$) ausgezeichnet.
- Der Bereich der DGLAP-Evolutionsgleichung sind große Q^2 ($\gg 1 \text{ GeV}^2$) und nicht zu kleine x (≥ 0.1)
- Falls sowohl Q^2 groß als auch x sehr klein sind, ist es möglich, sowohl die großen $\ln Q^2$ als auch $\ln 1/x$ zu resummieren, wenn sie als gemeinsame Potenzen $(\alpha_s \cdot \ln 1/x \cdot \ln Q^2)^n$ in der Entwicklung auftreten \rightarrow DLLA Evolution
- Im Falle kleiner Q^2 oberhalb der Regge-Region, müssen alle großen $\ln 1/x$ -Logarithmen aufsummiert werden \rightarrow BFKL-Gleichung
(Balitsky, Fadin, Kuraev, Lipatov)

Tiefinelastische Streuung

132

4 Deep inelastic scattering



- **DGLAP** $Q^2 \gg 1 \text{ GeV}^2$
 $x \approx 1$
- **DLA** $Q^2 \gg 1 \text{ GeV}^2$
 $x \ll 1$
- **BFKL** $Q^2 \sim 1-10 \text{ GeV}^2$
 $x \ll 1$
- **Sättigung**, wenn Parton =
dichte im Proton
zu groß \rightarrow Resonanz
binarisationseffekte
- **Regge** $Q^2 < 1 \text{ GeV}^2$

Fig. 4.18. The various regions of the $1/x$ vs Q^2 plane discussed in the text.

Tiefinelastische Streuung

Resummationseigenschaften:

- **DGLAP**: $[\alpha_s \cdot \ln Q^2]^n$

zur Vereinfachung nur Gluonen:



Betrachte Gluondichte $G(x, Q^2)$:

$$\frac{dG(x, Q^2)}{d \ln Q^2} \sim \alpha_s \frac{P_{GG}}{\ln Q^2} \otimes G(x, Q^2) \quad (\cong \text{DGLAP-Evolutionsgl.})$$

$$\Rightarrow G(x, Q^2) \sim \int d \ln k_{\perp}^2 \alpha_s P_{GG} \otimes G(x, k_{\perp}^2)$$

iteriere Lösung:

$$\Rightarrow G(x, Q^2) \sim \int \frac{d k_{n\perp}^2}{k_{n\perp}^2} \alpha_s P_{GG} \otimes \dots \int \frac{d k_{1\perp}^2}{k_{1\perp}^2} \alpha_s P_{GG} \otimes G(x, k_{1\perp}^2)$$

- Jedes Integral liefert einen Term $\alpha_s \cdot \ln k_{\perp}^2$, sodass nach Einsetzen der Integrationsgrenzen ein Term $[\alpha_s \cdot \ln Q^2]^n$ erscheint, d.h. Terme der Art $[\alpha_s \ln Q^2]^n$ werden resummiert.

- Die Integration über die einzelnen k_{\perp}^2 macht eine strenge Ordnung der Transversalimpulse ersichtlich:

$$Q^2 \gg k_{n\perp}^2 \gg \dots \gg k_{2\perp}^2 \gg k_{1\perp}^2$$

Tiefinelastische Streuung

- **DLLA**: $[\alpha_s \cdot \ln \frac{1}{x} \cdot \ln Q^2]^n$ zur Vereinfachung nur Gluonen
Im Unterschied zu DGLAP soll hier $x \ll 1$ berücksichtigt werden, d.h. in

$$\frac{dG(x, Q^2)}{d \ln Q^2} \sim \alpha_s \int_x^1 dz P_{GG}(z) \cdot G(z, Q^2) \quad (\equiv \text{DGLAP!})$$

muss nun auch auch

$$P_{GG}(z) = 2C_A \frac{[1 - z(1-z)]^2}{z(1-z)} \stackrel{z \rightarrow 0}{\approx} \frac{2C_A}{z}$$

berücksichtigt werden. Damit wird

$$\frac{dG(x, Q^2)}{d \ln Q^2} \sim \alpha_s \int_x^1 \frac{dz}{z} \cdot G(z, Q^2)$$

$$\Rightarrow G(x, Q^2) \sim \int \frac{dk_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} \int_x^1 \frac{dz}{z} \cdot \alpha_s G(z, k_{\perp}^2)$$

Iteration der Lösung ergibt

$$G(x, Q^2) \sim \int \frac{dk_{\perp 1}^2}{k_{\perp 1}^2} \int_x^1 \frac{dz_n}{z_n} \alpha_s \dots \int \frac{dk_{\perp n}^2}{k_{\perp n}^2} \int_{z_2}^1 \frac{dz_1}{z_1} \alpha_s G(z_1, k_{\perp 1}^2)$$

- Jedes Integral über $\int \frac{dk_{\perp}^2}{k_{\perp}^2}$ ergibt wieder $\ln Q^2$
- Jedes Integral über $\int_x^1 \frac{dz}{z}$ ergibt einen Term $\ln \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \text{Resummation der Terme} \quad [\alpha_s \ln \frac{1}{x} \ln Q^2]^n$$

BFKL - Gleichung

Ziel ist die Resummation aller Terme $\sim \alpha_s \cdot \ln \frac{1}{x}$, wobei die vollständige Q^2 -Abhängigkeit erhalten bleiben soll.

(Bei DGLAP & DLA wird nur die führende Ordnung in $\ln Q^2$ bzw. $\ln \frac{1}{x} \ln Q^2$ berücksichtigt; die Ordnung $\ln \frac{1}{x}$ fehlt!).

Dies leistet die **BFKL-Gleichung** (Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov)

Dazu betrachtet man die "unintegrierte Gluonverteilung" \mathcal{G}

$$\mathcal{G}(x, Q^2) := x \frac{dG(x, Q^2)}{dQ^2}$$

(Mit anderen Worten: $\mathcal{G}(x, Q^2) \hat{=} x \int d \ln Q^2 \left(\frac{dG(x, Q^2)}{d \ln Q^2} \right)$, vgl. DGLAP-Gl.)

Damit lautet die BFKL-Gleichung:

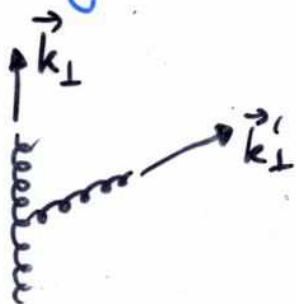
$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \ln \frac{1}{x}} = \int d^2 k_{\perp} K(\vec{k}_{\perp}, \vec{k}'_{\perp}) \cdot \mathcal{G}(x, k'^2_{\perp})$$

wobei

$$K(\vec{k}_{\perp}, \vec{k}'_{\perp}) = C_A \frac{\alpha_s}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{|\vec{k}_{\perp} - \vec{k}'_{\perp}|^2} - \delta(k_{\perp}^2 - k'^2_{\perp}) \int \frac{d^2 q}{\pi q^2} \right)$$

der so genannte Kernel der BFKL-Gl. darstellt, der die Gluonabstrahlung inkl. der kollinearen Divergenz beschreibt.

i.W.:



BFKL-Gleichung

Mit gewissen vereinfachenden Annahmen kann die BFKL-Gleichung gelöst werden. Für die inklusive Gluonverteilung ergibt sich:

$$g(x, k_{\perp}^2) \sim \frac{1}{\sqrt{k_{\perp}^2}} \cdot x^{-\lambda}$$

wobei

$$\lambda = 4C_A \ln 2 \cdot \frac{\alpha_s}{\pi} \approx 0.5 \quad \text{für } \alpha_s = 0.2$$

Da im Bereich kleiner x die Gluonverteilung die Protonstruktur dominiert, bedeutet die BFKL-Erwartung

$$F_2(x, Q^2) \stackrel{x \ll 1}{=} c(Q^2) \cdot x^{-\lambda(Q^2)} \sim \frac{1}{\sqrt{Q^2}} \cdot x^{-\lambda}$$

dabei werden die unbekannte Funktion $c(Q^2)$ wie auch $\lambda(Q^2)$ verallgemeinert als von Q^2 abhängige Funktionen angenommen.

Zum Test dieser Vorhersage bestimme experimentell

$$\left(\frac{\partial \ln F_2(x, Q^2)}{\partial \ln x} \right)_{Q^2} \equiv -\lambda(x, Q^2)$$

z.B. aus den mit HERA gemessenen Protonstrukturfunktionen bei kleiner x und Q^2 .

Kinematischer Bereich von HERA

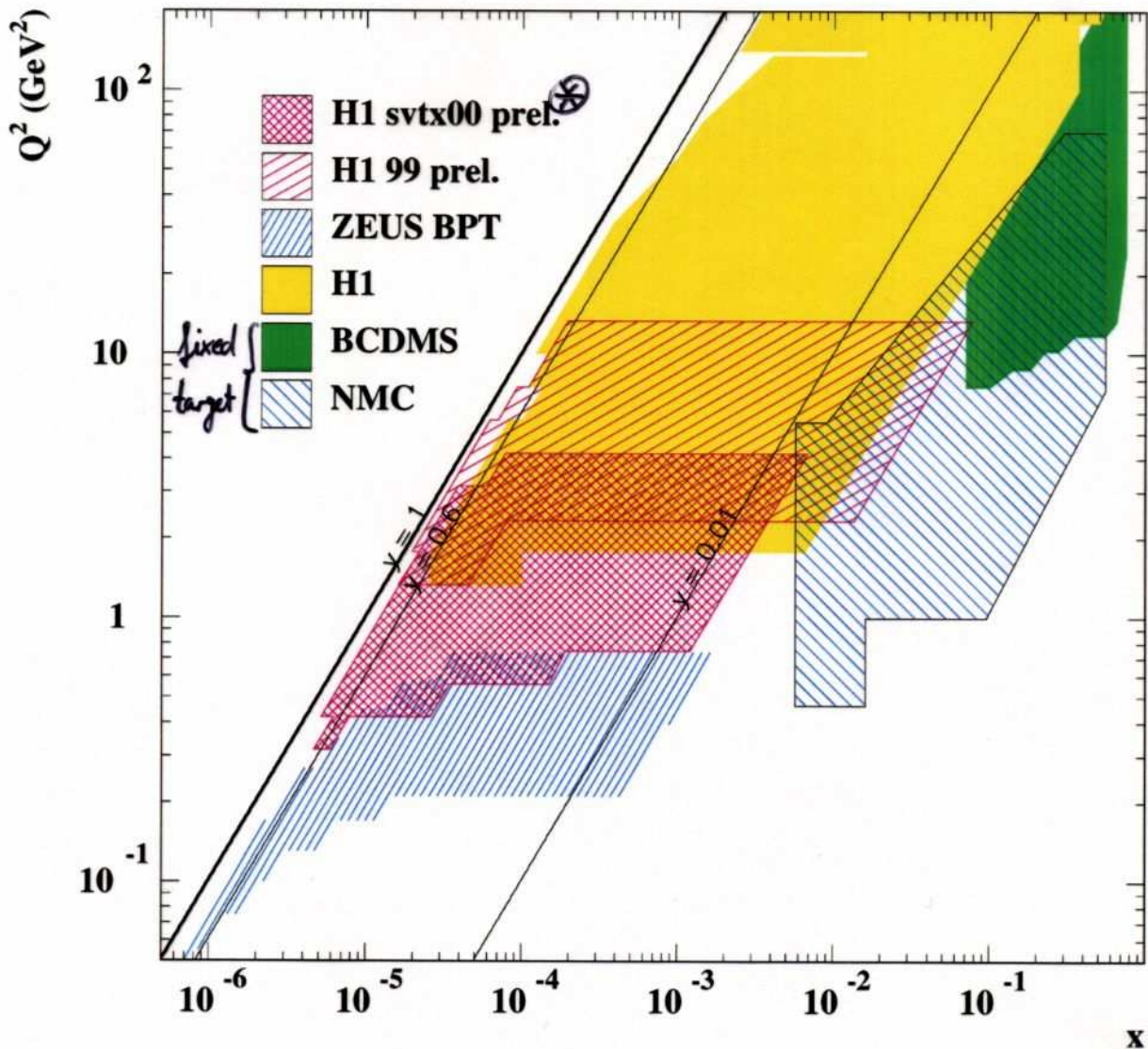


Figure 1: Kinematic region covered by the preliminary H1 measurements at 920 GeV proton beam energy [3] (H1 svtx00 prel. and H1 99 prel.), by the recently published H1 data at 820 GeV [4], by the ZEUS Backward Pipe Detector (BPT) [11] and by the muon-proton scattering experiments NMC [15] and BCDMS [20]. The lines of constant y correspond to this analysis, i.e. $E_e = 27.5$ GeV and $E_p = 920$ GeV.

⊗ svtx00 (= shifted vertex in 2000) war eine spezielle Messperiode des H1-Experiments am HERA-Beschleuniger, bei der der Kollisionsort von Elektron & Proton um ca. 70 cm verschoben war (in Richtung des Protonstrahls), um den Bereich hin zu kleineren Q^2 und x experimentell zugänglich zu machen.

Strukturfunktion $F_2(x, Q^2)$ für $x \ll 1$ und $Q^2 \rightarrow 0$

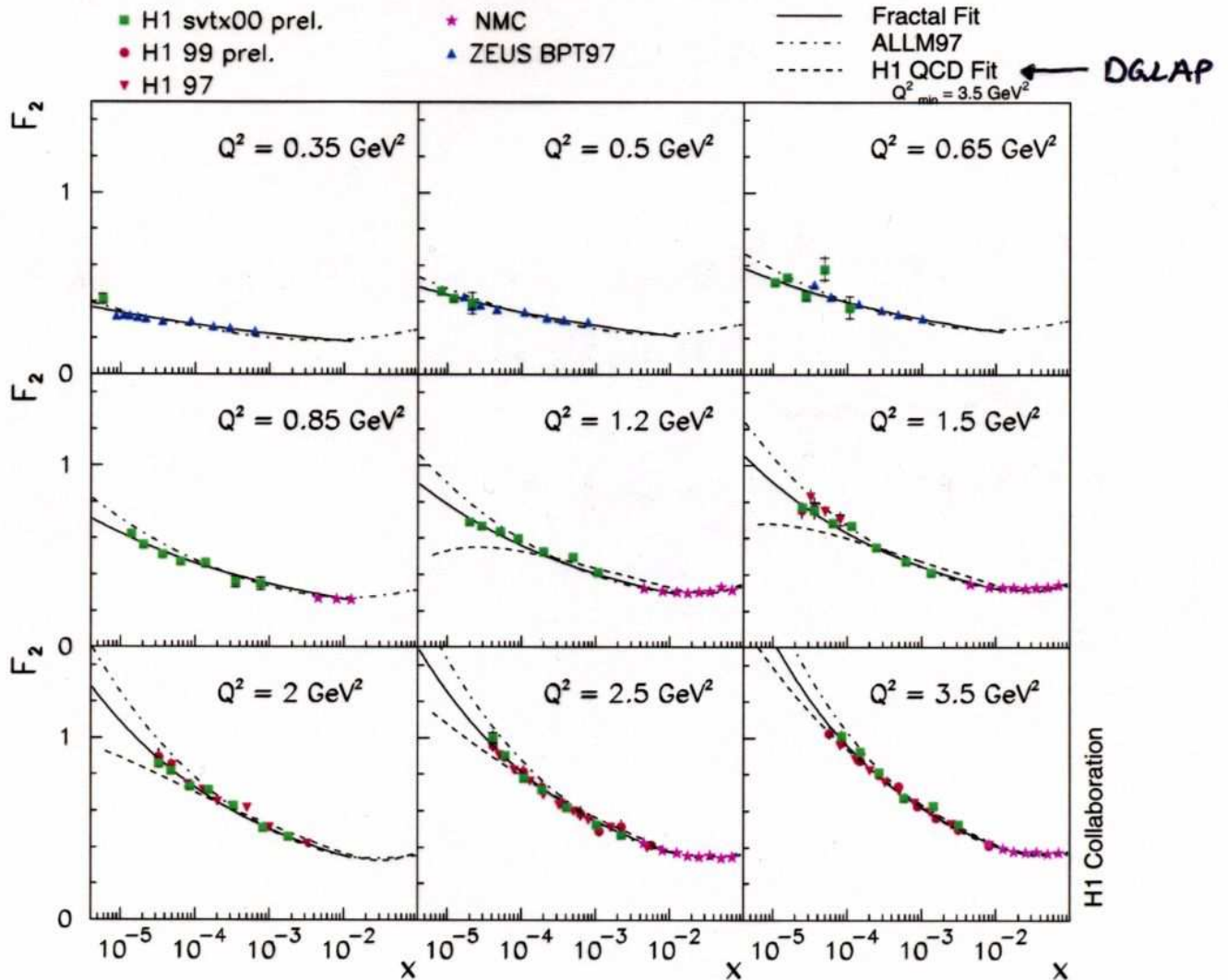


Figure 4: Measurements of the structure function $F_2(x, Q^2)$ - H1 shifted vertex data 2000, this analysis (green squares), H1 99 and 97 nominal vertex data (red points and triangles), compared to larger x data from ZEUS (BPT97 blue triangles) and from NMC (purple stars). Solid curves: phenomenological parameterisation of $F_2(x, Q^2)$ based on the fractal proton structure concept; Dashed curves: NLO QCD fit to the H1 96/97 data which was performed to data for $Q^2 \geq 3.5 \text{ GeV}^2$, i.e. it is extrapolated here into the lower Q^2 region. Dashed-dotted curves: ALLM97.

Anstieg der Protonstrukturfunktion bei kleinen x

$$F_2(x, Q^2) \approx c(Q^2) \cdot x^{-\lambda(Q^2)}$$

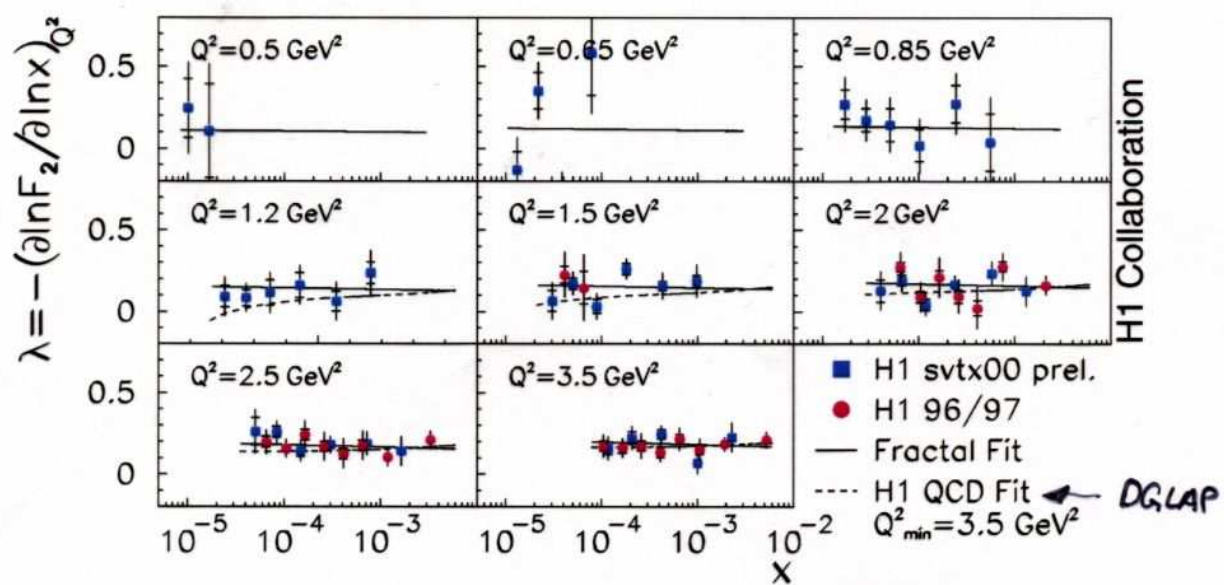
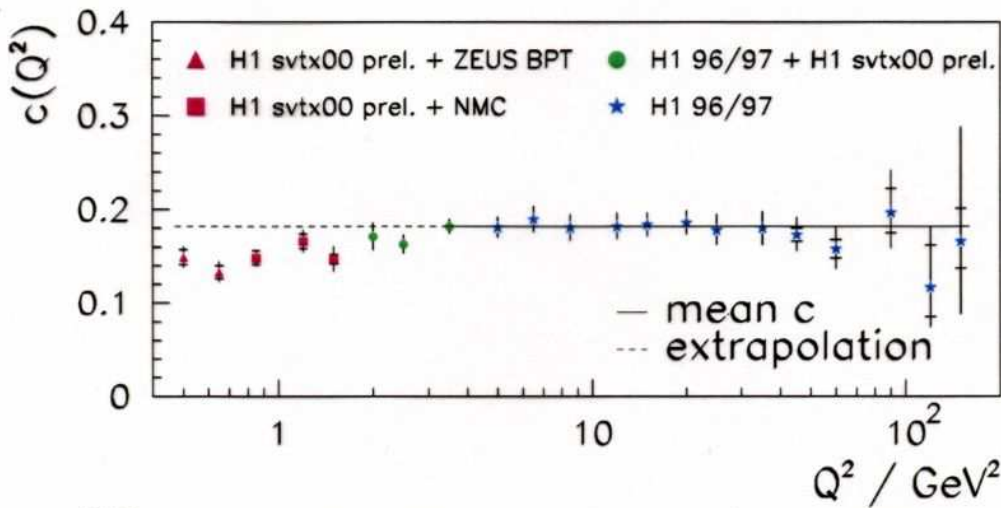


Figure 6: Measurement of the derivative function $\lambda(x, Q^2)$ with the present shifted vertex data (blue squares) and the nominal vertex data [19] (red points): the inner error bars represent the statistical uncertainty; the full error bars include the systematic uncertainty added in quadrature; the solid curves represent the fractal fit to the ZEUS BPT and published H1 data [4]; the dashed curves represent the extrapolation of the H1 NLO QCD fit [4] below the minimum Q^2 of 3.5 GeV^2 .

→ Exponent $\lambda \approx \text{const.}(x)$
 und $\lambda = \lambda(Q^2) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow 0} 0$

Protonstrukturfunktion bei kleinen x

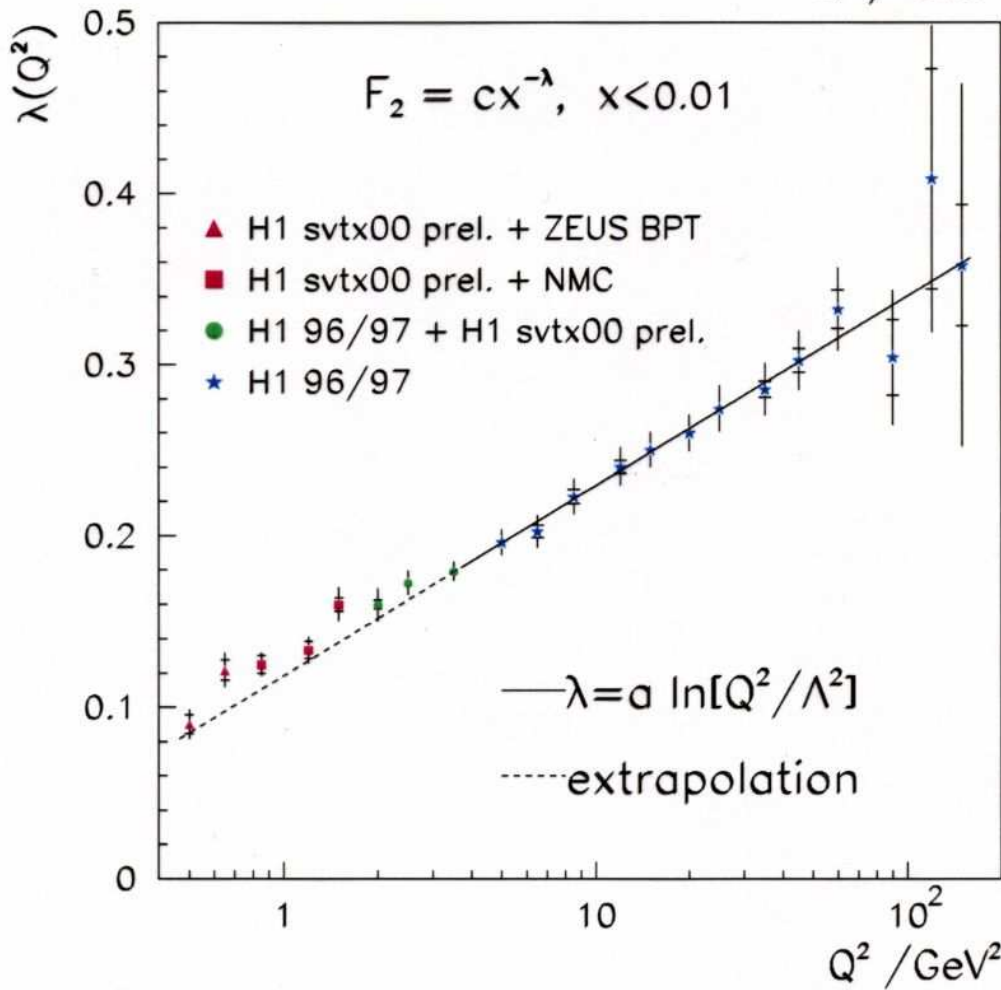


$$F_2(x, Q^2) = c(Q^2) x^{-\lambda(Q^2)}$$

H1 Collaboration

$$\Rightarrow c \approx \text{const}(Q^2)$$

$$\text{BFKL: } c \sim \frac{1}{\sqrt{Q^2}}$$



$$\Rightarrow \lambda \sim \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}$$

$$\text{BFKL: } \lambda \sim \alpha_s \sim \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} \quad (\lambda \approx 0.5)$$

H1 Collaboration



Daten nicht in Übereinstimmung mit BFKL

Figure 8: Determination of the coefficients $c(Q^2)$ (upper plot) and of the exponents $\lambda(Q^2)$ (lower plot) from fits of the form $F_2(x, Q^2) = c(Q^2)x^{-\lambda(Q^2)}$ for $x \leq 0.01$: blue stars - previous H1 F_2 data [4]; green points - present data combined with the H1 data [4]; red squares - present data combined with NMC data; red triangles - present data combined with low Q^2 ZEUS BPT data [11]. The inner error bars illustrate the statistical uncertainties, the full error bars represent the statistical and systematic uncertainties added in quadrature. The straight lines represent the mean coefficient c (upper plot) and a fit of the form $a \ln[Q^2/\Lambda^2]$ (lower plot), respectively, using data for $Q^2 \geq 3.5 \text{ GeV}^2$.

BFKL - Gleichung

Im Gültigkeitsbereich der BFKL-Gl. sollte die DGLAP-Gl. versagen. Also sollte z.B. HERA bei kleinen Q^2 und kleinsten x eine Abweichung von Datenpunkten und DGLAP-Vorhersage beobachten können, sobald das Regime der BFKL-Gl. erreicht wird.

Tatsächlich sind die Daten aber immer noch verträglich mit der DGLAP-Evolution. Die erwarteten Abweichungen wurden bisher bei HERA nicht gesehen. Allerdings wird man die BFKL-Region sicher bei den p - p -Kollisionen am LHC erreichen und kann dort die Gültigkeit von BFKL-Vorhersage prüfen.

NB: Bei $p\bar{p}$ -Kollisionen am Tevatron-Beschleuniger hat man im Verhältnis der Wirkungsquerschnitte bei $\sqrt{s} = 1800$ und $\sqrt{s} = 630$ GeV für den Fall von 2-Jetreaktionen mit großer Pseudorapiditätsdifferenz $\Delta\eta$ einen Effekt beobachtet, der zwar der Erwartung von BFKL entspricht, aber erheblich größer ist. Vermutung: höhere logarithmische Korrekturen für BFKL erforderlich.