

## Lineare Strahldynamik

- Lineare Strahldynamik
  1. Matrizen-Formalismus
  2. Teilchenstrahlen und Phasenraum: Emittanz und Liouville-Theorem
  3. Betatron Funktion und Strahleinhüllende
  4. Weglänge und "Momentum compaction"

Die vollständigen Bewegungsgleichungen haben die Form

$$u'' + K(s)u = c_0(s) + c_1(s)u + c_2(s)u^2 + \dots,$$

sind also nicht-linear!

Hinzu kommt die  $s$ -Abhängigkeit der Koeffizienten  $K(s)$  und  $c_i(s)$  ( $i=0,1, \dots$ ), wenn mehrere Strahlelemente (feldfreie Driftstrecken, Dipole, Quadrupole, etc.) hintereinander aufgestellt werden.

Allgemeine Lösungen zu finden, führt schnell zu unüberwindbaren mathematischen Problemen.

- Konstruktion eines Beschleunigers, sodass  $c_i(s) \ll 1$  v.a. für  $i \geq 1$
- nicht-lineare Terme nur kleine Störungen
- Störungstheoretische Behandlung

## Matrizen-Formalismus

In linearer Näherung, d.h.  $u'' + K(s)u = 0$ , repräsentiert  $K(s)$  die Anordnung der Magnete im Beschleuniger, das so gen. *Magnet-Gitter* (engl.: "magnet lattice" oder kurz "lattice").

Man unterscheidet:

- "separated function lattice" bei getrennten Dipolen und Quadrupolen im Gitter
- "combined function lattice" bei in einem Magneten integrierten Dipolen und Quadrupolen

Zur weiteren Vereinfachung:

- Ablenkung nur in  $x$ -Ebene
- lineare magnetische Felder:  
Dipol (Feldstärke  $B_{0y}$ ), Quadrupol (Gradient  $k$ )

$$\rightarrow \begin{cases} B_x = ky \\ B_y = B_{0y} + kx \end{cases}$$

→ Bewegungsgleichung der *linearen Strahldynamik*:

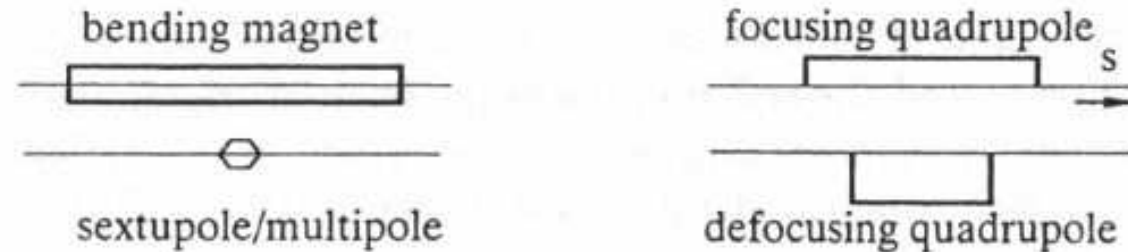
$$\begin{cases} x'' + \left(\frac{1}{\rho_0^2} + k_0\right) x = 0 \\ y'' - k_0 y = 0 \end{cases} \quad (**)$$

- Integration:  $\begin{cases} \int y'' ds = y' - y'_0 \equiv \alpha \\ \int k_0 y ds \approx k_0 y \Delta s \end{cases} \rightarrow$  Brennweiten:  
(Ablenkwinkel  $\alpha$ )

$$\begin{cases} \frac{1}{f_x} = k_0 \Delta s = \frac{e}{cp} \frac{\partial B_y}{\partial x} \Delta s \\ \frac{1}{f_y} = -k_0 \Delta s = -\frac{e}{cp} \frac{\partial B_x}{\partial y} \Delta s \end{cases}$$

**Nomenklatur:**

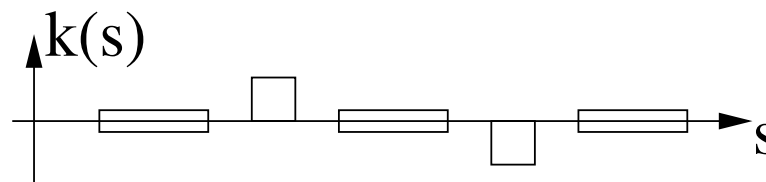
- Magnete repräsentiert durch Rechtecke entlang  $s$ -Achse
- Länge der Rechteck  $\hat{=}$  geom. Länge der Magnete

**Fig. 5.1.** Symbols for magnets in lattice design

- Dipole: Rechteck um  $s$ -Achse zentriert
- horizon. fokus. Quadrupol: positives Rechteck
- horizon. defokus. Quadrupol: negatives Rechteck
- vertikal fokus. Quadrupol: negatives Rechteck
- vertikal defokus. Quadrupol: positives Rechteck

wobei die Höhe der Rechtecke bei den Quadrupolen die (De-)Fokussierungsstärke bezeichnet.

z.B. typisches Magnet-Gitter:



**NB:** Diese Form entspricht dem “*hard edge*”-Modell von Magneten, bei dem Effekte am Rand eines Magneten vernachlässigt werden.

## “Soft edge”-Effekte

Randeffekte realer Magnete, so gen. “soft edge”-Effekte können mit dem “hard edge”-Modell approximiert werden:

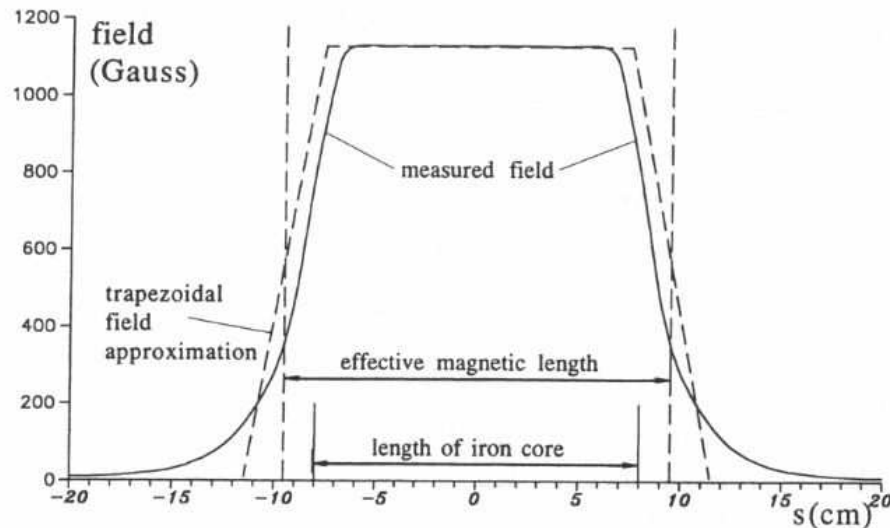


Fig. 5.6. Field profile in a real quadrupole with a bore radius of  $R = 3$  cm and an iron length of  $l_{\text{iron}} = 15.9$  cm

Dabei ist die effektive magnetische Länge  $l_{\text{eff}}$  eines Quadrupols um etwa den Radius  $R$  der Apertur des Eisenkerns größer als die wirkliche Länge des Magnetisens  $l_{\text{Fe}}$ , also

$$l_{\text{eff}} \approx l_{\text{Fe}} + R$$

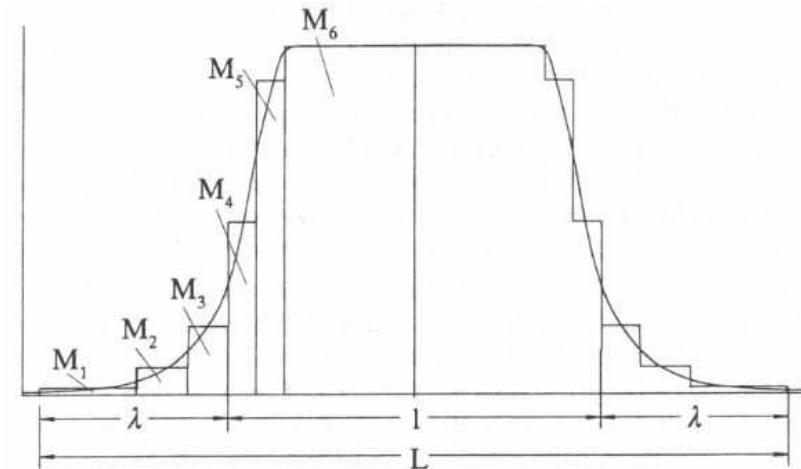


Fig. 5.7. Decomposition of an actual quadrupole field profile into segments of hard edge quadrupoles

Der Randbereich eines realen Quadrupols wird durch viele Quadrupolscheiben mit angepasster Stärke approximiert. Die gesamte Transformationsmatrix ist dann das Produkt aller Einzelmatrizen  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Kleinere Korrekturen aufgrund der Diskretisierung im idealisierten “hard edge”-Modell können erforderlich sein.

**Matrix-Formulierung in lineare Strahl-Dynamik:**

Zur Erinnerung: Die linearen Bewegungs-DGL (\*\*) von 5.2 werden durch Linearkombinationen der "sinus-" ( $S(s) = \sin(\sqrt{K}s)/\sqrt{|K|}$ ) und "cosinus-artigen"-Lösungen ( $C(s) = \cos(\sqrt{K}s)$ ) (s. 4.18) gelöst, die durch  $2 \times 2$ -Matrizen beschrieben wurden:

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_x(s) & S_x(s) \\ C'_x(s) & S'_x(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(s_0) \\ y'(s_0) \end{pmatrix}$$

Fasst man die Komponenten von  $x$ - und  $y$ -Ebene zusammen, kann man  $4 \times 4$ -Matrizen benutzen:

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ y(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_x(s) & S_x(s) & 0 & 0 \\ C'_x(s) & S'_x(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_y(s) & S_y(s) \\ 0 & 0 & C'_y(s) & S'_y(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(s_0) \\ x'(s_0) \\ y(s_0) \\ y'(s_0) \end{pmatrix}$$

Prinzipiell möglich sind auch Kopplungen zwischen  $x$ ,  $x'$  und  $y$ ,  $y'$ , also Kopplungen zwischen Bewegungen in horizontaler und vertikaler Ebene. Solche Kopplungen treten in realen Beschleunigern tatsächlich auf, sollen aber zur Vereinfachung im Folgenden vernachlässigt werden.

**Transportmatrizen** von Strahltransportelementen:

Mit  $\Omega \equiv \sqrt{|K|}s$  und für  $\vec{U} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}$  gilt:

- Feldfreie Driftstrecke  
( $K=0$ )

$$M_{\text{Drift}} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Dipol  
( $K=0, \rho>0$ )

$$M_{\text{Dipol}} = \begin{bmatrix} \cos \frac{s}{\rho} & \rho \sin \frac{s}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} & \cos \frac{s}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- horizontal fokus. Quadrupol  
( $K<0$ )

$$M_{\text{QF}} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sin \Omega & 0 & 0 \\ -\sqrt{|K|} \sin \Omega & \cos \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \Omega & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh \Omega \\ 0 & 0 & \sqrt{|K|} \sinh \Omega & \cosh \Omega \end{bmatrix}$$

- vertikal fokus. Quadrupol  
( $K>0$ )

$$M_{\text{QD}} = \begin{bmatrix} \cosh \Omega & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh \Omega & 0 & 0 \\ \sqrt{|K|} \sinh \Omega & \cosh \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Omega & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sin \Omega \\ 0 & 0 & -\sqrt{|K|} \sin \Omega & \cos \Omega \end{bmatrix}$$

**6 × 6-Repräsentation:**

Die vollständige Beschreibung der Strahldynamik erfordert neben den transversalen Komponenten  $x$  und  $y$  auch die Dispersion. Die Matrix-Formulierung kann leicht dafür erweitert werden:

(NB: Dispersion nur in horizontaler Ebene)

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ y(s) \\ y'(s) \\ s \\ \delta(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_x(s) & S_x(s) & 0 & 0 & 0 & D_x(s) \\ C'_x(s) & S'_x(s) & 0 & 0 & 0 & D'_x(s) \\ 0 & 0 & C_y(s) & S_y(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C'_y(s) & S'_y(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & D_s(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(s_0) \\ x'(s_0) \\ y(s_0) \\ y'(s_0) \\ s_0 \\ \delta(s_0) \end{pmatrix}$$

- Z.B. für feldfreie Driftstrecke der Länge  $L$ :

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ y(s) \\ y'(s) \\ s \\ \delta(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L/\gamma^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(s_0) \\ x'(s_0) \\ y(s_0) \\ y'(s_0) \\ s_0 \\ \delta(s_0) \end{pmatrix}$$

$D_s(s)$  folgt mit  $\Delta v/v_0 = \Delta\beta/\beta = (\partial\beta/\partial p)\Delta p/\beta$  aus:

$$s - s_0 = (v - v_0) \cdot t = (v - v_0) \cdot \frac{L}{v_0} = \frac{\Delta v}{v_0} L = \frac{\Delta p}{\beta \cdot (\partial p/\partial \beta)} L = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\Delta p}{p} L = \frac{L}{\gamma^2} \delta$$

## “Dünne Linsen”-Näherung

- Matrizen-Formalismus ermöglicht einfache Berechnung von Sollorbits

... ist bei komplexen System jedoch mühsam zu berechnen (viele Matrixmultiplikationen)

→ wird daher meist auf Computer ausgeführt

- für grobe analytische Abschätzungen:

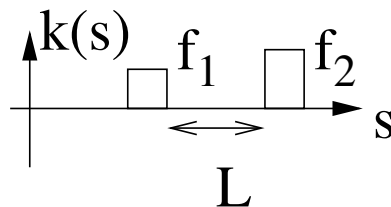
Näherung mit *dünnen Linsen*, d.h. Brennweite  $f \gg \ell$  Länge des Quadrupols:

$$\ell \rightarrow 0, \text{ sodass } f^{-1} = +k_0 \ell = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \Omega = \sqrt{K} s = \sqrt{k_0} \ell \xrightarrow{\ell \rightarrow 0} 0$$

→ Abbildungsmatrix des Quadrupols in fokussierender Ebene:

$$\begin{bmatrix} \cos \Omega & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \Omega \\ -\sqrt{K} \sin \Omega & \cos \Omega \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{wobei } f^{-1} = k_0 \ell \lesseqgtr 0 \text{ in de-/fokussierender Ebene}$$

- Anwendungsbeispiel *Quadrupol-Dublett*: 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - L/f_1 & L \\ -1/f^* & 1 - L/f_2 \end{bmatrix}$$



mit Gesamtbrennweite (vgl. geom. Optik):

$$\frac{1}{f^*} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2}$$



## Symmetrisches und umgekehrtes Magnet-Gitter

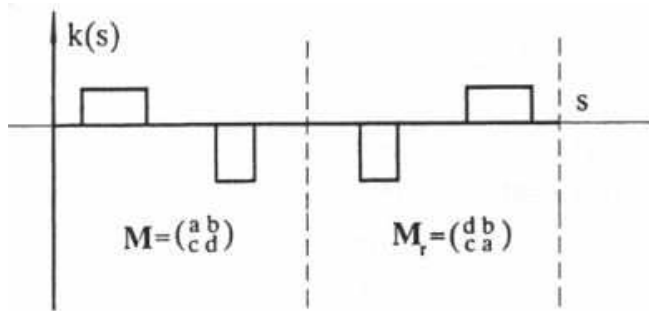


Fig. 5.4. Reversed lattice

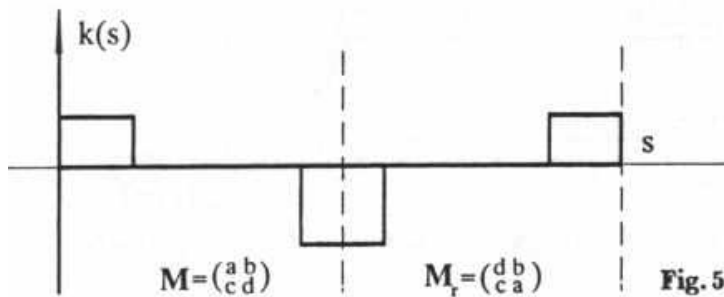


Fig. 5.5. Symmetric quadrupole triplet

- Für fokus.+defokus. Quadrupol-Dublett mit  $f_1 = -f_2 \equiv f$  gilt:

$$\frac{1}{f^*} = +\frac{L}{f^2} > 0!$$

- ▷ Fokussierung in horiz.&vert. Ebene
- ▷ nur in "Dünne Linsen"-Näherung horiz. & vert. Brennweiten gleich (allg. keine Kommutativität der Matrixmultiplikation).
- Für symmetrische Magnet-Gitter (wie abgebildet) findet man einfache Relationen zwischen den Transformationsmatrizen  $M$  und  $M_r$  für die umgekehrte Quadrupol-Anordnung

- Für symmetrische Quadrupol-Triplets (s.o.) ergibt sich mit  $f_1 = -f_2 \equiv f$  die Transformationsmatrix:

$$M_{tr} = M_r \cdot M = \begin{bmatrix} 1 - 2L^2/f^2 & 2L(1 + L/f) \\ -2(1 - L/f)L/f^2 & 1 - 2L^2/f^2 \end{bmatrix}$$

- Solche symmetrische Triplets fokussieren in horiz.&vert. Ebene, falls  $f > L$
- Solche Triplets sind grundlegende Designelemente u.a. in Kreisbeschleunigern (FODO-Zelle)

## Sektormagnet vs. Rechteckmagnet

Dipolmagnete im Kreisbeschleuniger sollten eigentlich so gen. *Sektormagnete* sein.

- Für Sektormagnete (Länge  $\ell$ ) gilt die Abbildungsmatrix:

$$M_{\text{Sektor}} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\ell}{\rho} & \rho \sin \frac{\ell}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \sin \frac{\ell}{\rho} & \cos \frac{\ell}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

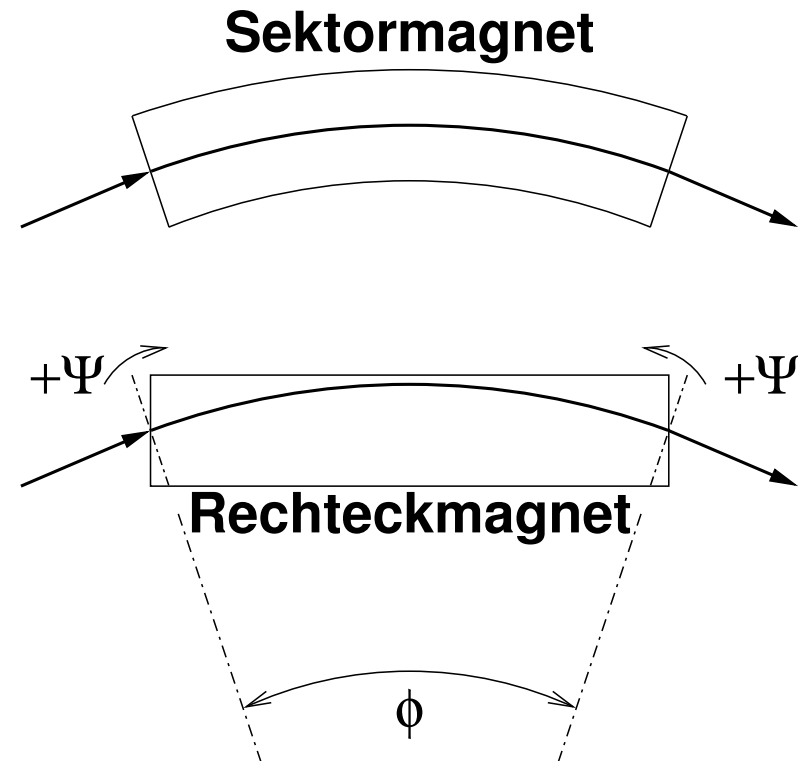
- ▷  $-(1/\rho) \sin(\ell/\rho)$  entspricht einer Brennweite  $-1/f$
- Fokussierung in horizontaler Ebene (geometr. Fokussierung)
- ▷ untere, rechte  $2 \times 2$ -Blockmatrix entspricht einfachem Strahltransport in vertikaler Ebene

- Für Rechteckmagnete gilt die Abbildungsmatrix:

$$M_{\text{Rechteck}} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \sin \frac{\ell}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\ell}{f} & \ell \\ 0 & 0 & \frac{\ell}{f^2} - \frac{2}{f} & 1 - \frac{\ell}{f} \end{bmatrix}$$

mit  $\psi = \phi/2 = \frac{1}{2}(\ell/\rho)$

- ▷  $-1/(\ell/f^2 - 2/f)$  entspricht einer Brennweite
- Fokussierung in vertikaler Ebene
- ▷ obere, linke  $2 \times 2$ -Blockmatrix entspricht einfachem Strahltransport in horizontaler Ebene



## Emittanz und Liouville-Theorem

Jedes Teilchen im Beschleuniger wird durch 6 Größen charakterisiert:

$$(x, p_x, y, p_y, \sigma, E)$$

Mit Sollimpuls  $p_0$  sind:  $p_x \approx x' \cdot p_0$ ,  $p_y \approx y' \cdot p_0$  die transversalen Impulskomponenten,  $\sigma$  die Koordinate entlang der Teilchentrajektorie,  $E$  die Teilchenenergie (alternativ auch Gesamtimpuls oder Abweichung von Sollenergie).

Werden viele Teilchen betrachtet, die ein Ensemble, Teilchenpaket oder Teilchen**bunch** darstellen, wird jedes einzelne der Teilchen durch ein 6-Tupel charakterisiert.

Statt die Bewegung einzelner Teilchen, betrachtet man die Bewegung des Ensembles. Alle Teilchen des Ensembles weisen ungefähr gleiche Werte der Größen im 6-Tupel auf, besetzen also ähnliche Zustände im 6-dimensionalen Phasenraum.

In linearer Strahloptik, mit entkoppelter horizontaler und vertikaler Ebene, genügt es, nur den 2-dimensionalen Phasenraum zu betrachten.

Beschreibung des Ensembles durch statistische Größen: Mittelwert, Streuung (Varianz)

Die Linie konstanter Phasenraumdichte ist eine Ellipse mit minimaler und maximaler Varianz als Halbachsen.

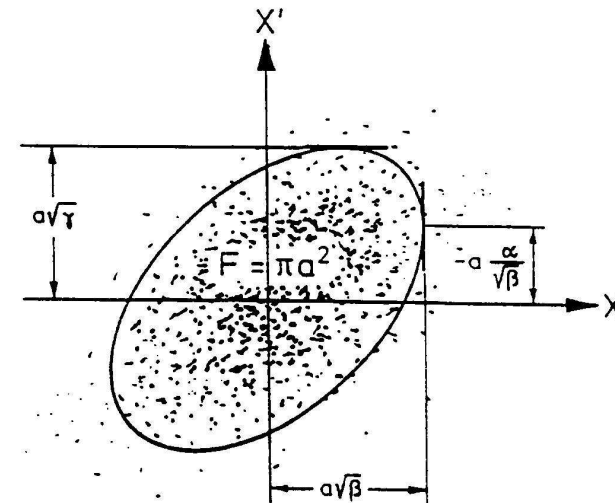
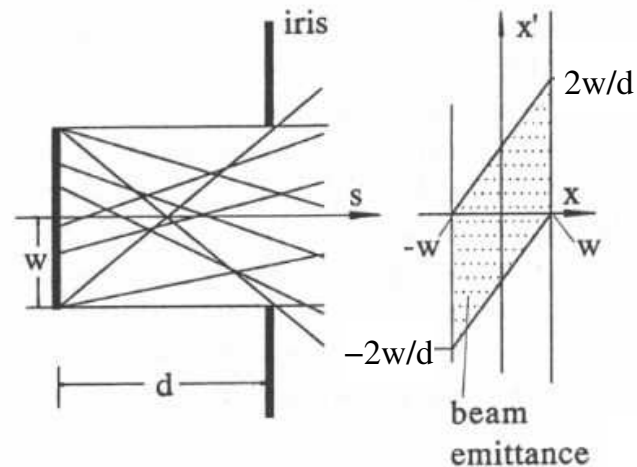
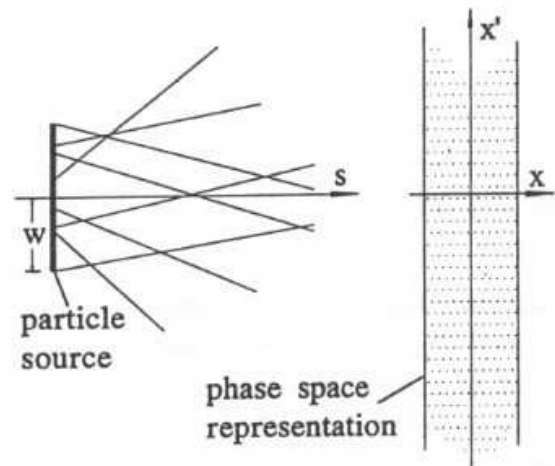


Figure 32: A particle beam is often reasonably well described by a two dimensional Gaussian distribution in phase space. The lines of constant phase-space density are then ellipses. Since the phase-space density decreases only slowly with amplitude, the phase-space area containing *all* particles might be hard to determine (experimentally as well as theoretically). Also, it is not the quantity relevant for most of the applications. Therefore, the emittance is defined as  $1/\pi$  times the phase-space area containing a certain fraction of the particles (e.g. 90 %).

## Bedeutung des Phasenraums und der Emittanz



- Teilchen aus einer diffusen Quelle der Größe  $2w$  besitzen
  - beliebige  $x$  zwischen  $-w$  und  $+w$
  - beliebige  $x'$  zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$ 
    - ▷ Phasenraum: in  $x'$  unendliches Rechteck mit Breite  $2w$
  - alle Teilchen innerhalb des Rechtecks
  - Fläche des erlaubten Phasenraums:  $\infty$
- ... diffuse Quelle mit Blende der Größe  $2w$  besitzen
  - beliebige  $x$  zwischen  $-w$  und  $+w$
  - beliebige  $x'$  zwischen  $-2w/d$  und  $+2w/d$ 
    - ▷ Phasenraum: Parallelogramm
  - alle Teilchen innerhalb des Parallelogramms
  - Fläche des erlaubten Phasenraums:
 
$$2 \cdot \frac{1}{2} (2w \cdot 2\frac{w}{d}) = 4w^2/d$$
  - Fläche im Phasenraum  $\propto$  (Strahl-)Emittanz der Quelle

## Phasenraum-Ellipse, Emittanz und Twiss-Parameter

Teilchenensemble (in einer Ebene) i.A. durch  
2-dimensionale Gaußkurve beschreibbar

$$V(x, x') \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - cor)} \left[ \frac{x^2}{\overline{x^2}} - 2cor \cdot \frac{x \cdot x'}{\sqrt{\overline{x^2}} \sqrt{\overline{x'^2}}} + \frac{x'^2}{\overline{x'^2}} \right] \right\}$$

mit Korrelationskoeffizient  $cor \equiv \overline{xx'}/\sqrt{\overline{x^2} \cdot \overline{x'^2}}$ , wobei  $\overline{x^2} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$  für alle Teilchen  $i$  und  $\overline{x} = 0$ ,  $\overline{x'} = 0$  (d.h. Mittelwerte = 0).

Die Phasenraum-Ellipse ist damit durch die so gen. *Twiss-Parameter*  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  gegeben:

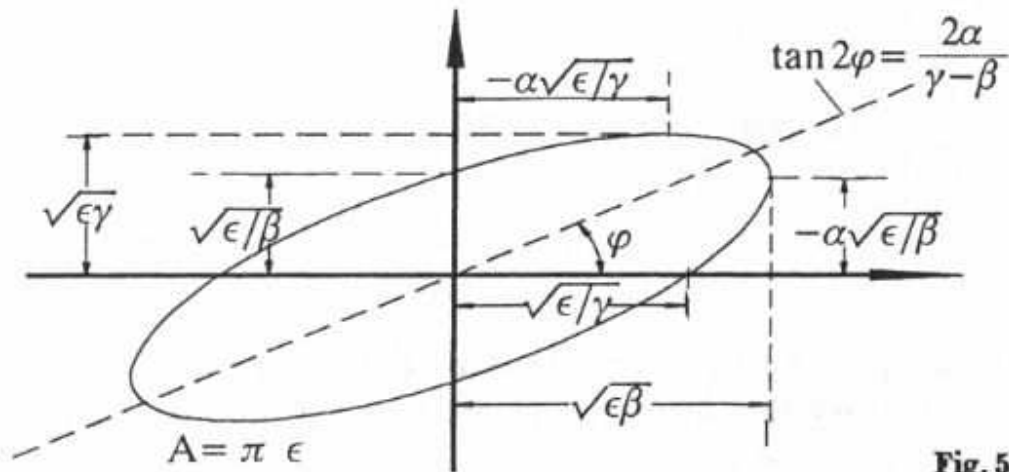


Fig. 5.22.

- $\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2}} \equiv \sqrt{\beta \epsilon}$
- $\sigma_{x'} = \sqrt{\overline{x'^2}} \equiv \sqrt{\gamma \epsilon}$
- $cor \cdot \sigma_x \sigma_{x'} = \overline{xx'} \equiv -\alpha \epsilon$
- $\tan 2\varphi = (2cor \cdot \overline{xx'}) / (\sqrt{\overline{x^2}} - \sqrt{\overline{x'^2}})$
- $\epsilon = \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2$  Emittanz ( $e^-$ -Strahlen!)
- NB: in Literatur häufig Emittanz auch als  $\pi \epsilon$  definiert
- $A = \pi \epsilon$  Ellipsenfläche

- $\sqrt{\beta}$  ist die r.m.s.-Streuung der Strahleinhüllenden (pro Einheit der Emittanz)
- $\sqrt{\gamma}$  ist die r.m.s.-Streuung der Strahldivergenz (pro Einheit der Emittanz)
- $\alpha$  ist proportional zur Korrelation zwischen  $x$  und  $x'$
- Außerdem:  $\beta\gamma - \alpha^2 = 1$ , da neben  $\epsilon$  zwei weitere Parameter zur Beschreibung der Ellipse genügen

Das **Liouville Theorem** besagt:

“Unter Einwirkung konservativer Kräfte bleibt die Teilchendichte im Phasenraum konstant.”

Die Konsequenz ist: Strahlelemente (feldfreie Driftstrecken, Quadrupole, etc.) deformieren zwar die Phasenraum-Ellipse, ändern aber die Fläche der Ellipse nicht.

Insbesondere ist damit  $\varepsilon$  unabhängig von  $s$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 \\ &= \gamma_0 x_0^2 + 2\alpha_0 x_0 x'_0 + \beta_0 x_0'^2 \end{aligned}$$

wobei 
$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{bmatrix}$$

⇒ Transformationsmatrix :

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & -2SC & S^2 \\ -CC' & (S'C + SC') & -SS' \\ C'^2 & -2S'C' & S'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}$$

für Twiss-Parameter  $\alpha, \beta, \gamma$ .

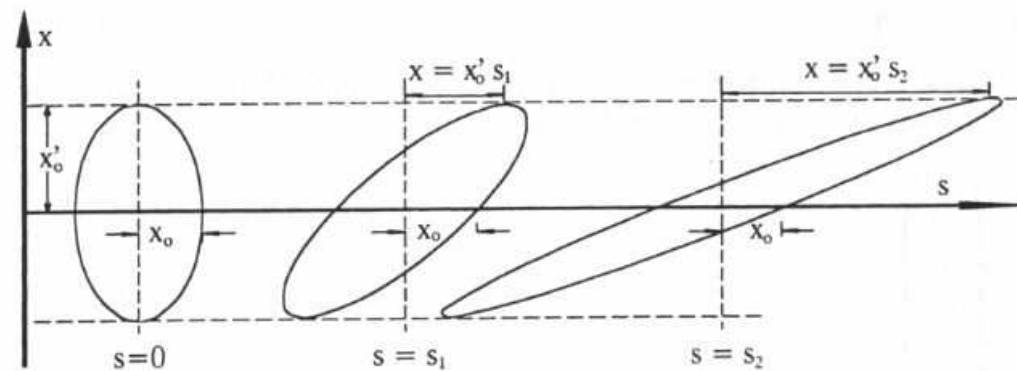


Fig. 5.23. Transformation of a phase space ellipse at different locations along a drift section

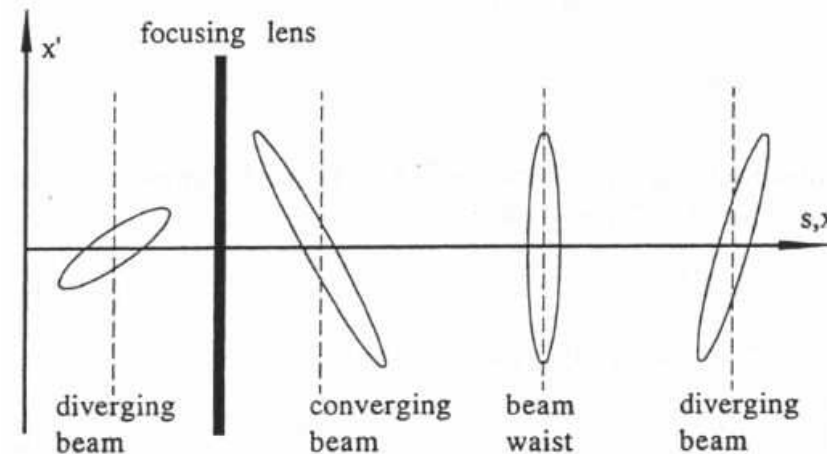


Fig. 5.24. Transformation of a phase ellipse due to a focusing quadrupole. The phase ellipse is shown at different locations along a drift space downstream from the quadrupole.

**“Beam waist”:**

Es gilt allgemein die Twiss-Parameter-Transformationsmatrix für eine Driftstrecke der Länge  $\ell$  (d.h.  $C = 1, C' = 0, S = \ell, S' = 1$ ):

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2\ell & \ell^2 \\ 0 & 1 & -\ell \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}$$

Da  $\alpha$  die Korrelation zwischen  $x$  und  $x'$  angibt, also die Neigung der Phasenraumellipse, folgt als Bedingung für den Ort  $s_w$  der Strahltaile (engl.: “beam waist”):

$$\alpha(s_w) = 0$$

Damit folgt aus obiger Transformationsmatrix die Relation für den Ort der Strahltaile:

$$\ell = s_w - s_0 = \alpha_0 / \gamma_0$$

Für negatives bzw. positives Vorzeichen von  $\alpha_0$  liegt die Strahltaile vor (d.h.  $s_0 < s_w$ ) bzw. hinter  $s_w$

Mit Kenntnis der Transformationen der Phasenraum-Ellipse kann die Emittanz eines Strahls bestimmt werden:

- Strahlquerschnitt  $\sigma_x = \sqrt{x^2}$ : direkter Messung zugänglich (z.B. mit Fluoreszenzschirm)
  - Strahldivergenz  $\sigma_{x'} = \sqrt{x'^2}$ : keiner direkten Messung zugänglich
- Messung des Strahlquerschnitts an drei verschiedenen Stellen und bei unterschiedlicher Fokussierung
- Twiss-Parameter-Transformationsmatrix liefert Relationen für Strahlquerschnitte an allen drei Stellen
- Berechnung der Strahlparameter (Querschnitt  $\sqrt{x^2}$ , Divergenz  $\sqrt{x'^2}$ , Korrelation  $\sqrt{xx'}$ ) am Referenzpunkt
- Berechnung der Strahlemittanz aus ( $\sigma_{xx'}^2 \equiv \text{cor} \cdot \sigma_x \sigma_{x'}$ ):

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xx'}^2 \\ \sigma_{xx'}^2 & \sigma_{x'}^2 \end{bmatrix} = \varepsilon \cdot \det \begin{bmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{bmatrix} = \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_{x'}^2 - \sigma_{xx'}^4}$$

## Betatron-Funktion und Strahleinhülle

Um genauere Einsicht in die charakteristischen Eigenschaften der Teilchentrajektorien zu gewinnen, wird im Folgenden eine analytische Lösung der Bewegungsgleichung

$$u'' + K(s)u = 0$$

diskutiert.  $u$  ist die horizontale ( $x$ ) oder vertikale ( $y$ ) Koordinate,  $K(s)$  die Magnetanordnung im Beschleuniger.

Lösungsansatz:

$$u(s) = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta(s)} \cdot \cos[\psi(s) - \psi_0],$$

wobei  $\varepsilon$  und  $\psi_0$  Integrationskonstanten sind.

Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert zwei Bedingungen, damit die Lösung für alle  $\psi \equiv \psi(s)$  gilt ( $\beta \equiv \beta(s)$ ):

$$\frac{1}{2}(\beta\beta'' - \frac{1}{2}\beta'^2) - \beta^2\psi'^2 + \beta^2K = 0$$

$$\beta'\psi' + \beta\psi'' = (\beta\psi')' = 0.$$

Zweite Bedingung: mit Normierung  $\beta\psi' = 1$  folgt die *Phasenfunktion*:

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{d\tilde{s}}{\beta(\tilde{s})} + \psi_0.$$

Eingesetzt in die erste Bedingungsgleichung folgt:

$$\frac{1}{2}\beta\beta'' - \frac{1}{4}\beta'^2 + \beta^2K = 1$$

und mit  $\alpha \equiv -\frac{1}{2}\beta'$  und  $\gamma \equiv (1 + \alpha^2)/\beta$ :

$$\beta'' + 2K\beta - 2\gamma = 0$$



**Courant-Synder-Invariante:**

Eliminiert man  $\psi - \psi_0$  aus

$$u(s) = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta} \cos(\psi - \psi_0) \quad \text{und} \quad u'(s) = -\sqrt{\varepsilon/\beta} \cdot \alpha \cos(\psi - \psi_0) - \sqrt{\varepsilon/\beta} \cdot \sin(\psi - \psi_0)$$

so ergibt sich die so gen. *Courant-Synder-Invariante*:

$$\gamma u^2 + 2\alpha u u' + \beta u'^2 = \varepsilon$$

oder

$$\frac{1}{\beta} \left( u^2 + (\alpha u + \beta u')^2 \right) = \varepsilon$$

wobei  $\alpha \equiv -\frac{1}{2} \beta'$  und  $\gamma \equiv (1 + \alpha^2)/\beta$ .

Dies ist die Gleichung der Phasenraum-Ellipse, womit die Bedeutung der Parameter  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  und  $\varepsilon$  festgelegt ist.

Man nennt  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  und die Phasenfunktion  $\psi$  auch *Betatron-Funktionen* oder *Gitter-Funktionen*.

Der Term  $\cos[\psi(s) - \psi_0]$  aus dem Lösungsansatz beschreibt (quasi-periodische) Oszillationen (mit veränderlicher Amplitude und Frequenz), die *Betatron-Oszillationen* genannt werden.

NB:

Die Strahlemittanz  $\varepsilon$  taucht im Amplitudenfaktor der Lösung für ein einzelnes Teilchen auf. D.h., ein Teilchen, welches mit Amplitude  $\sqrt{\varepsilon}$  entlang der Ellipse läuft, definiert die Emittanz für den Teil des gesamten Strahls, der von dieser Ellipse umschlossen wird, also für alle Teilchen, deren Trajektorien die Bedingung

$$\gamma u^2 + 2\alpha u u' + \beta u'^2 \leq \varepsilon$$

erfüllen.

**Strahleinhüllende:**

Um den Teilchenstrahl als Ganzes zu beschreiben, wird durch den Amplitudenfaktor in der allg. Lösung die *Strahleinhüllende* definiert:

$$E(s) = \pm \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta(s)}$$

Die Strahleinhüllende gibt die maximale/minimale Amplitude an, die ein Teilchen annehmen kann, welches im Phasenraum auf der Strahlellipse läuft.

Die Strahleinhüllende ist durch Strahlemittanz  $\varepsilon$  und Betatron-Funktion  $\beta(s)$  bestimmt.

Die Strahlemittanz ist eine Konstante der Bewegung (wg. Liouville-Theorem). Man kann sie als transversale “Temperatur” des Strahls auffassen.

Die Betatron-Funktion reflektiert die externen Kräfte durch die fokussierenden Magnete. Durch das Arrangement der Quadrupolmagnete können spezifische Strahleigenschaften, wie geringer oder großer Strahlquerschnitt an bestimmten Punkten, erzielt werden.

### Betatron-Funktion in Driftstrecke:

Experimente in Kollidern stehen typischerweise in geraden Driftstrecken. Genau am Wechselwirkungspunkt im Experiment soll der Strahlquerschnitt am kleinsten werden, also die Strahltaile auftreten.

Mit der Twiss-Parameter-Transformationsmatrix (vgl. Folie 5.15) kann der Verlauf der Betatron-Funktion um den Wechselwirkungspunkt bestimmt werden.

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2\ell & \ell^2 \\ 0 & 1 & -\ell \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}$$

Aus der obigen Transformationsmatrix folgt:

- $\beta(s) = \beta_0 - 2\alpha_0 s + \gamma_0 s^2$
- $\alpha(s) = \alpha_0 - \gamma_0 s$
- Für Strahltaile (beam waist):  $\alpha(s_w) = 0$

$$\rightarrow \beta(s - s_w) = \beta_w + \frac{(s - s_w)^2}{\beta_w}$$

- Optimales  $\beta_{w,opt}$  für Driftstrecke der Länge  $\pm L$ :

$$\bullet \frac{d\beta}{d\beta_w} = 0 \rightarrow \beta_{w,opt} = L = \beta(0)$$

$$\rightarrow \beta(\pm L) = 2\beta_{w,opt} = 2L$$

NB: Üblicherweise bezeichnet man die Betatron-Funktion am Wechselwirkungspunkt eines Experiments mit  $\beta^*$ .

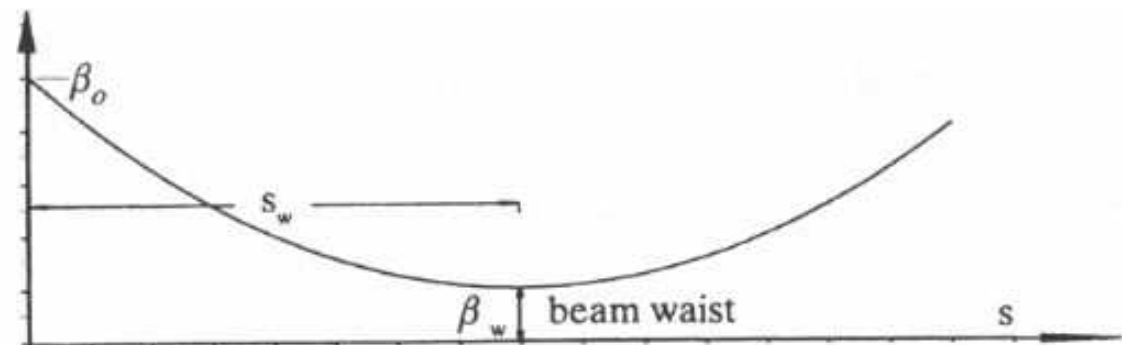


Fig. 5.25. Betatron function in a drift space

## Weglänge und "Momentum compaction"

Die bisherige Betrachtung hat wiederum dispersive Effekte vernachlässigt. Tatsächlich wirkt sich, in linearer Strahldynamik, Dispersion  $D(s)$  auf die Weglänge  $L$  eines Teilchens durch einen Ablenk dipol ( $\kappa = 1/\rho$ ) aus:

$$L = \int (1 + \kappa x) ds.$$

Dabei ist  $x = D(s)\delta$  die horizontale Abweichung von der Sollbahn bei relativer Impulsabweichung  $\delta = \Delta p/p$ .

Die Abweichung  $\Delta L$  von der Soll-Weglänge  $L_0 = \int ds$  ist 
$$\Delta L = \delta \cdot \int \frac{D(s)}{\rho(s)} ds$$

und wird beschrieben durch den "momentum compaction"-Faktor:

$$\alpha_c \equiv \frac{\Delta L/L_0}{\Delta p/p} = \frac{\Delta L/L_0}{\delta} \quad \rightarrow \quad \alpha_c = \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} \frac{D(s)}{\rho(s)} ds = \left\langle \frac{D(s)}{\rho(s)} \right\rangle$$

Die Flugzeit eines Teilchens der Geschwindigkeit  $v$  für die Strecke  $L$  ist:  $\tau = L/v \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta \tau}{\tau} = \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta v}{v}$

Mit  $\Delta L/L = \alpha_c \delta$  und  $p = \gamma m v$

$\rightarrow dv/v = 1/\gamma^2 dp/p$  folgt (NB:  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ):

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} = - \left( \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_c \right) \frac{dp}{p} \equiv -\eta_c \frac{dp}{p},$$

mit "Momentum compaction":

$$\eta_c = \gamma^{-2} - \alpha_c$$

$\rightarrow$  Kreisbeschleuniger: geänderte Umlauffrequenz  $\omega_r$ :

$$\frac{d\omega_r}{\omega_r} = - \frac{d\tau_r}{\tau_r} = \eta_c \frac{dp}{p}$$

und Übergangsenergie bei  $\eta_c = 0$ :

$$\gamma_t = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c}}$$

(engl. transition energy)