Beschleunigung geladener Teilchen

- Beschleunigung geladener Teilchen

  1. Longitudinale Teilchenbewegung und Phasenraum

Longitudinale Teilchenbewegung und Phasenraum

- Geladene Teilchen in einem (Kreis-)Beschleuniger
- Beschleunigt beim wiederholten Durchlaufen eines Hochfrequenz-Resonators (Cavity)

→ Teilchen müssen beschleunigendes Feld zur festen *Synchronphase* $\psi_s = \omega t - ks =$ const. erreichen (Resonator-Kreisfrequenz ω)

→ *Synchronitätsbedingung* $\dot{\psi}_s = \omega - k\beta c = 0$ (Teilchengeschwindigkeit $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \beta c$)

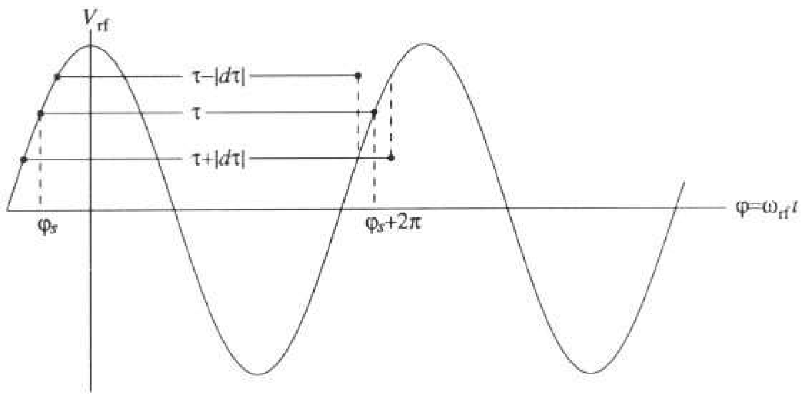


Figure. 9.7 A graphical demonstration of the phase-stability principle in a linac. The effective transition energy is always infinite, since $\eta_{tr} = 1/\gamma^2 > 0$.

→ $\omega_1 = k_1\beta c$ erfüllt Synchronitätsbedingung (erste harmonische)

ebenso $\omega_h = h\omega_1$ und $k_h = hk_1$ mit ganzzahliger *harmonischer Zahl* h

Allgemeiner:

- Viele Teilchen mit ggf. unterschiedlichen Energien → Dispersion → Wellenzahl k nicht für alle Teilchen gleich

→ $$\boxed{\Delta\dot{\psi} = -\Delta(k\beta c) = -ck\Delta\beta - \beta c \frac{\partial k}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t}\Delta t}$$ (#) $\Delta\psi \equiv \psi - \psi_s$, $k = k_h = h\frac{2\pi}{L_0}$, Abstand L_0 zw. Resonatoren, bzw. $k \widehat{=} h \cdot \omega_\mathrm{r}/\beta c$ mit Umlauffreq. ω_r im Kreisbeschleuniger

◇ $$\left.\frac{\partial k}{\partial p}\right|_{s_0} = \left.\frac{\partial k}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial p}\right|_{s_0} = -\left.\frac{k_h}{L_0}\frac{\partial L}{\partial p}\right|_{s_0} = -\frac{k_h}{p_0}\alpha_c$$ und *“Momentum compaction”*-Faktor $\alpha_c \equiv \dfrac{\Delta L/L_0}{\Delta p/p_0}$

(Einschub von Folie 5.20)

Weglänge und "Momentum compaction":

In linearer Betrachtung der transversalen Strahldynamik wirkt sich Dispersion $D(s)$ auf die Weglänge L eines Teilchens (z.B. durch einen Ablenkdipol, $\kappa = 1/\rho$) aus:

(vgl. Folie 4.16) $$\mathrm{d}\sigma \approx (1+\kappa_0 u)\mathrm{d}s \quad \rightarrow \quad L = \int (1+\kappa x)\mathrm{d}s\,.$$

Dabei ist $x = D(s)\delta$ die horizontale Abweichung von der Sollbahn bei relativer Impulsabweichung $\delta = \Delta p/p$.

Die Abweichung ΔL von der Soll-Weglänge $L_0 = \int \mathrm{d}s$ ist $$\Delta L = \delta \cdot \int \frac{D(s)}{\rho(s)}\mathrm{d}s$$

und wird beschrieben durch den "momentum compaction"-Faktor:

$$\boxed{\alpha_c \equiv \frac{\Delta L/L_0}{\Delta p/p} = \frac{\Delta L/L_0}{\delta}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha_c = \frac{1}{L_0}\int_0^{L_0} \frac{D(s)}{\rho(s)}\mathrm{d}s = \left\langle \frac{D(s)}{\rho(s)} \right\rangle}$$

NB: "momentum compaction"-Faktor α_c nimmt nur in Ablenkabschnitten zu, d.h. $\rho \neq 0$ $\rightarrow$ Linearbeschleuniger: $\alpha_c = 0$!

Die Flugzeit eines Teilchens der Geschwindigkeit v für die Strecke L ist: $\tau = L/v$ $\rightarrow$ $$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta v}{v}$$

Mit $\Delta L/L = \alpha_c\delta$ und $p = \gamma m v$
$\rightarrow$ $\mathrm{d}v/v = 1/\gamma^2 \mathrm{d}p/p$ folgt (NB: $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$): $$\left.\right\} \quad \boxed{\frac{\Delta\tau}{\tau} = -\left(\frac{1}{\gamma^2} - \alpha_c\right)\frac{\mathrm{d}p}{p} \equiv -\eta_c\frac{\mathrm{d}p}{p}}\,,$$

mit *"Momentum compaction"*: $\boxed{\eta_c = \gamma^{-2} - \alpha_c}$ $\rightarrow$ Kreisbeschleuniger: geänderte Umlauffreq. $\omega_r = \frac{2\pi}{\tau_r}$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\omega_r}{\omega_r} = -\frac{\mathrm{d}\tau_r}{\tau_r} = \eta_c\frac{\mathrm{d}p}{p}}$$

und Übergangsenergie bei $\eta_c = 0$: $\boxed{\gamma_t = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c}}}$
(engl. transition energy)

Longitudinale Bewegungs-Differentialgleichung

Aus $\Delta\dot{\psi}$ (s. Folie 8.2) folgt
mit $(\partial p/\partial t)\Delta t = \Delta p$ und $mc\gamma^3\Delta\beta = \Delta p$

$$\boxed{\Delta\dot{\psi} = -\beta c k_h \left(\gamma^{-2} - \alpha_c\right) \frac{\Delta pc}{pc} = -\beta c k_h \eta_c \frac{\Delta pc}{pc}}$$

NB: γ^{-2} beschreibt die Energieabhängigkeit der Flugzeit zwischen Beschleunigungsstrukturen; auch in Linearbeschleunigern

Differentiation von $\dot{\psi}$ liefert die longitudinale Bewegungs-DGL im Potential der Hochfrequenzfelder:

$$\boxed{\Delta\ddot{\psi} + \frac{\beta c k_h \eta_c}{p_0 c} \frac{\partial}{\partial t} \Delta pc = 0} \quad ,$$

wobei β, k_h, η_c langsam variieren, daher als konstant betrachtet werden können.

(Langsame $\widehat{=}$ adiabatische Änderung externer Parameter $\rightarrow$ *Ehrenfest-Theorem* erlaubt Bestimmung der Wirkung auf Strahl)

Energiegewinne/-verluste sind z.B. bei einem Umlauf:

$$\boxed{(\Delta E)_{\mathrm{rev}} = e \cdot U(\psi) - W(E) = eU_0 \sin\psi - W(E)} \quad ,$$

wobei $U_0 \sin\psi$ die Beschleunigungsspannung bei Phase ψ und $W(E)$ Strahlungsverluste durch Synchrotron-strahlung (s. Abschnitt 9) bezeichnen.

Nach einem Umlauf ist $\frac{\partial}{\partial t}\Delta pc = \beta \frac{\partial}{\partial t}\Delta E = \beta(\Delta E)_{\text{rev}}/T_0$ mit und $pc = \beta E$, Umlaufzeit T_0
und die longitudinale Bewegungs-DGL um $\Delta\psi = \psi - \psi_s$ lautet:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\Delta\psi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\beta c k_h \eta_c}{E_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Delta E = 0 \quad \xrightarrow{\text{Umlauf}} \quad \frac{\mathrm{d}^2\Delta\psi}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta c k_h \eta_c}{T_0 E_0} \cdot \Big[eU_0 \sin(\psi_s + \Delta\psi) - W(E)\Big] = 0} \quad \binom{\#}{\#}$$

Lösungen der longitudinalen Bewegungs-DGL mit kleiner Amplitude

Im Falle kleiner Oszillationen kann ΔE (s. Folie 8.4) in einer Taylorreihe (mit $\sin\psi \approx \psi$) entwickelt werden

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta E = \frac{\Delta E}{T_0} \approx \frac{1}{T_0}\left\{ eU(\psi_s) + e\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\psi}\right|_{\psi_s} \cdot \Delta\psi - W(E) - \left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}E}\right|_{E_0} \cdot \Delta E \right\},$$

wobei $\Delta E/E_0 = -\dot{\Delta\psi}/\beta c k_h \eta_c$ gilt (vgl. Folie 8.4).

Eingesetzt in die longitudinale Bewegungs-DGL folgt mit der Gleichgewichtsbedingung $eU(\psi_s) = W(E)$:

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}^2\Delta\psi}{\mathrm{d}t^2} + 2\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2T_0}\frac{\mathrm{d}W(E_0)}{\mathrm{d}E}\right)}_{\equiv\,\alpha_S}\cdot\frac{\mathrm{d}\Delta\psi}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\left(\frac{\beta c k_h \eta_c}{T_0 E_0}\cdot eU_0\cos\psi_s\right)}_{\equiv\,\Omega_S^2}\cdot\Delta\psi = 0 \\ \Updownarrow \\ \ddot{\Delta\psi} + 2\alpha_S\dot{\Delta\psi} + \Omega_S^2\Delta\psi = 0 \end{gathered}},$$

wobei α_S eine Dämpfung (z.B. durch Synchrotronstrahlung) beschreibt und Ω_S die *Synchrotron-Frequenz* ist.

- Teilchen führen eine *longitudinale Oszillation* mit Frequenz Ω_S um Sollphase aus.
- Diese Schwingung wird gedämpft $(\alpha_S > 0)$ oder verstärkt $(\alpha_S < 0)$.

Synchrotron-Oszillationen kleiner Amplitude

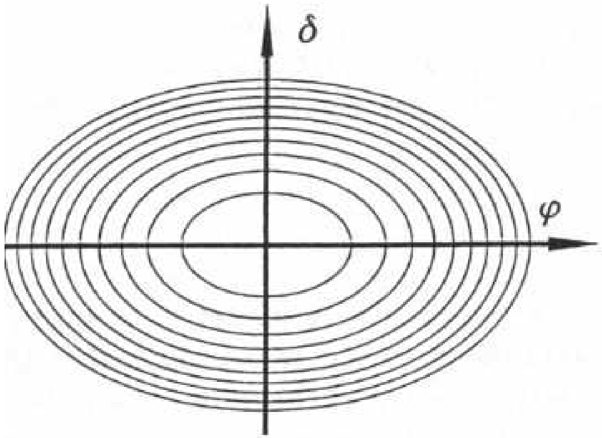


Fig. 8.3. Synchrotron oscillations in phase space for stable motion $\Omega^2 > 0$ and small amplitudes $\hat{\varphi} \ll 1$

Ohne Dämpfung gilt:

(mit $\varphi \equiv \Delta\psi$, $k_h = 2\pi h/L_0 = h\omega_\mathrm{r}/\beta c$, $\omega_\mathrm{r} = 2\pi/T_0$)

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \Omega_S^2 \varphi = 0}$$

mit $\Omega_S^2 = \omega_\mathrm{r}^2 \dfrac{h\eta_c e U_0 \cos\psi_s}{2\pi\beta^2 E_0}$.

$\rightarrow$ *Synchrotron-Tune*

$$\boxed{Q_S \equiv \frac{\Omega_S}{\omega_\mathrm{r}}}$$

(NB: i.A. $Q_S \ll Q_{x,y}$)

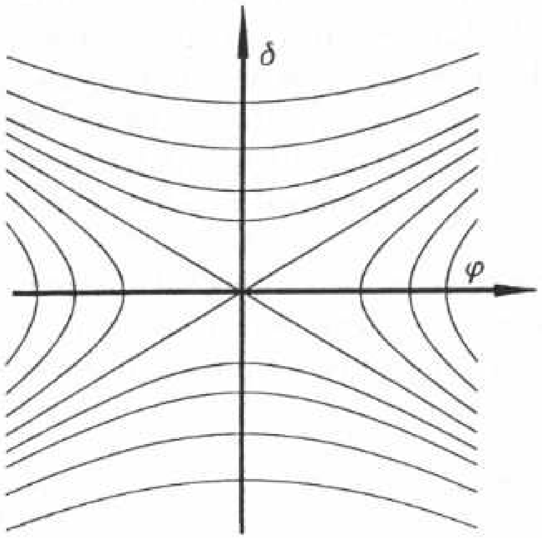


Fig. 8.4. Synchrotron oscillation in phase space for unstable motion $\Omega^2 < 0$

- Schwingung um Sollphase ψ_s:

▷ in Phasenabweichung:

(Startphase χ_i für Teilchen i)

$$\varphi \equiv \Delta\psi = \hat{\varphi}\cos(\Omega_S t + \chi_i)$$

▷ und in Impulsabweichung:

(s. Folie 8.4 mit $\beta c k_h = h\omega_\mathrm{r}$)

$$\delta = \frac{\Delta pc}{p_0 c} = \frac{-\dot{\varphi}}{h\omega_\mathrm{r}\eta_c} \propto \sin(\Omega_S t + \chi_i)$$

$\rightarrow$ Stabile Synchrotron-Oszill. f. $\Omega_S^2 > 0$:
Ellipsen (Fig. 8.3)

$\rightarrow$ Instabile Bewegung für $\Omega_S^2 < 0$:
Hyperbeln (Fig. 8.4)

NB: $\Omega_S^2 \propto \eta_c \cos\psi_s \gtrless 0$, $\eta_c = \gamma^{-2} - \alpha_c$

$\rightarrow$ Übergangsenergie $\gamma_t = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c}}$, vgl. 5.20

- Stabile Oszill.: $\eta_c \cos\psi_s > 0$

▷ $0 < \psi_s < \frac{\pi}{2}$ für $\gamma < \gamma_t$

▷ $\frac{\pi}{2} < \psi_s < \pi$ für $\gamma > \gamma_t$

$\Rightarrow$ *Phasensprung* bei $\gamma = \gamma_t$!

Inkohärente Phasenoszillation um Referenzphase $\rightarrow$ longitudinale Teilchenanhäufung, *Teilchen-Bunch*

Synchrotron-Oszillationen großer Amplitude

Im Falle großer Oszillationsamplituden gilt die Näherung $\sin\psi \approx \psi$ in $\Delta E = eU_0 \sin\psi$ nicht mehr.

Die longitudinale Bewegungs-DGL lautet dann:

(ohne Dämpfungsterm, mit obiger Definition von Ω_S)

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{\Omega_S^2}{\cos\psi_s}\left[\sin(\psi_s+\varphi) - \sin\psi_s\right] = 0}$$

Entspricht der Hamilton-Funktion $\mathcal{H}$:

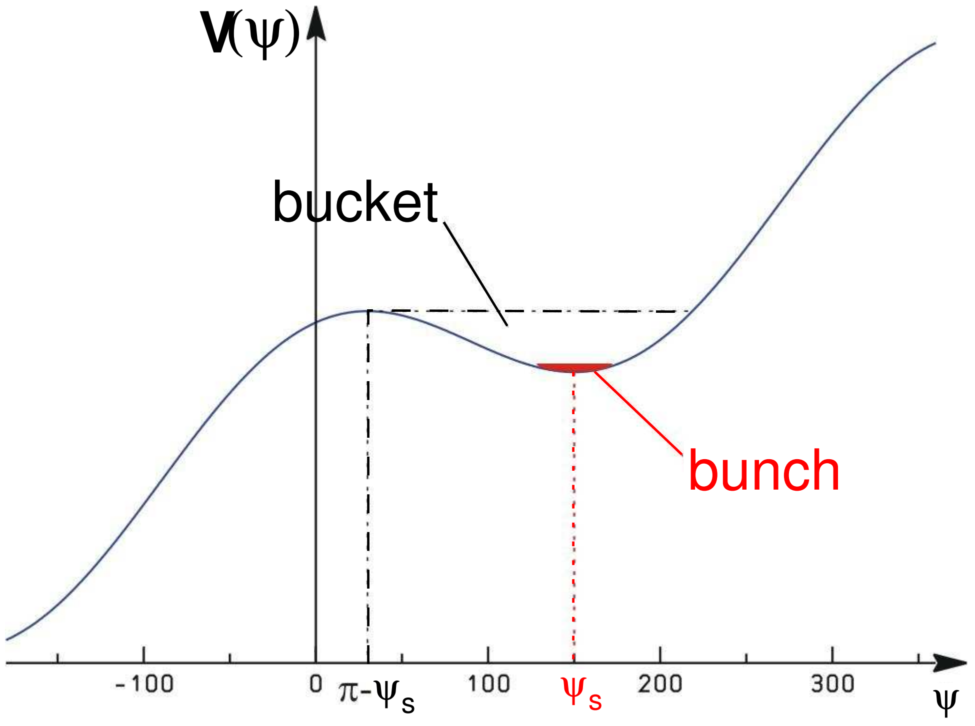
$$\boxed{\mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{\left\{-\frac{\Omega_S^2}{\cos\psi_s}\left[\cos(\psi_s+\varphi) - \cos\psi_s + \varphi\sin\psi_s\right]\right\}}_{\text{potentielle Energie } V}}$$

mit

Beiträge zur potentiellen Energie $V(\psi)$:

$\propto \varphi = \psi - \psi_s$ und $\propto \cos(\psi)$

- Oszillationen nur für Teilchen in Potentialsenke
- maximale Auslenkung bei stabilen Oszillationen:
  $\partial V(\psi)/\partial\psi = 0 \quad \rightarrow \quad \psi^{\text{max}} = \pi - \psi_s$
- die zugehörige Kurve im Phasenraum, die *Separatrix*, trennt stabile und instabile Bereich
- maximaler Bereich stabiler Oszillationen heisst *bucket* oder *RF-bucket* (engl. für Eimer)
- Teilchen im Bucket bilden Teilchen-Bunch



Separatizes

Die Hamilton-Funktion der Teilchenbewegung $\widehat{=}$ harmonischem Pendel. $\Rightarrow$ Struktur der Trajektorien im $\dot{\psi}$-ψ-Phasenraum für $\psi_s = \pi$: (NB: $\dot{\psi} \propto \Delta p/p \equiv \delta$)

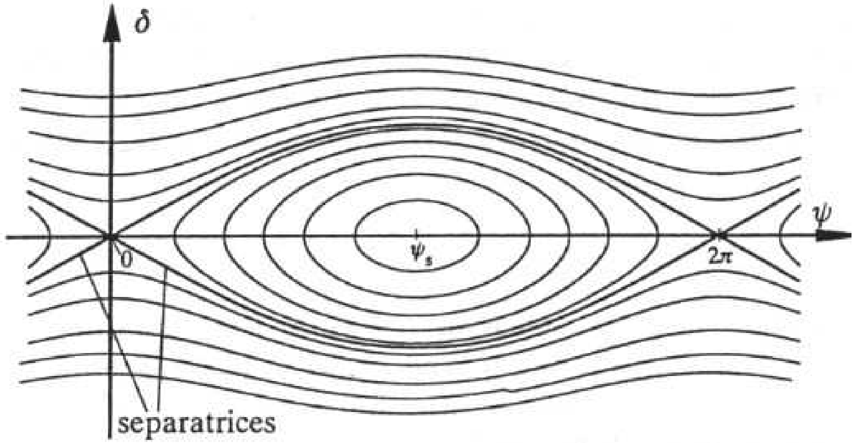
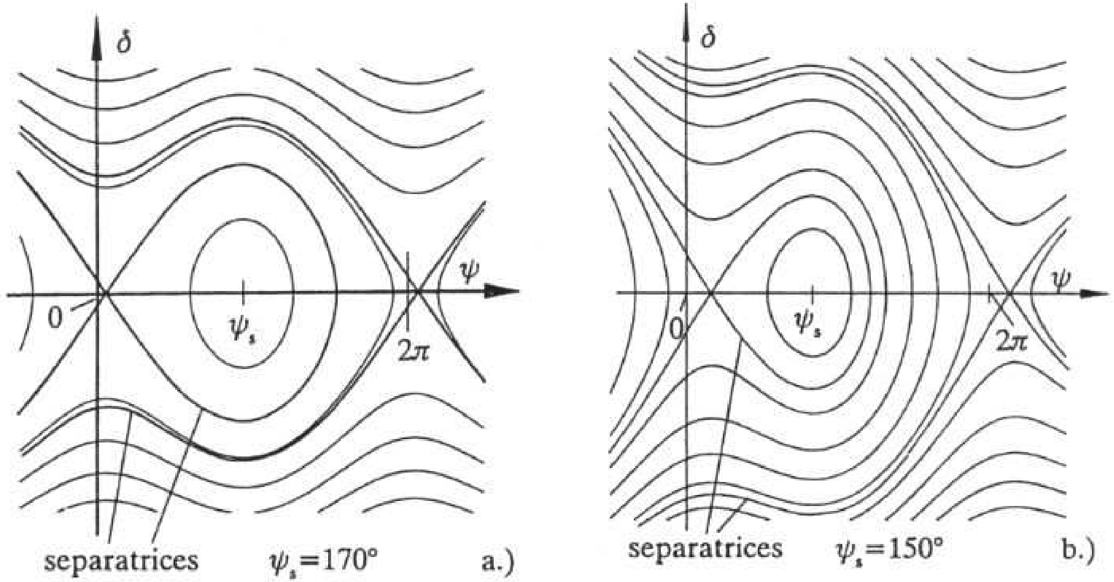


Fig. 8.5. Phase space diagrams for a synchronous phase $\psi_s = \pi$

- $\psi_s = \pi$: $U(\psi) \propto \sin\psi_s = 0 \rightarrow$ keine Beschleunigung.
- $\psi_s < \pi$: geänderte Trajektorien (Fig. 8.7: $\eta_c < 0$, $\gamma > \gamma_t$).
- Insbesondere: kleinere stabile Bereiche für kleinere ψ_s ($\Leftrightarrow$ wachsende Beschleunigung $\Delta E = eU_0 \sin(\psi_s)$).
- Außerhalb Stabilitätsbereiche instabile Trajektorien: kontinuierl. Energieverlust/-gewinn, abhängig von $\eta_c \gtrless 0$.



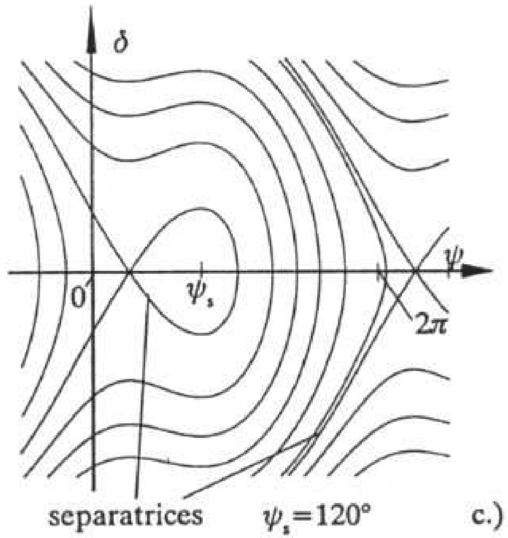


Fig. 8.7. Phase space diagrams for different values of the synchronous phase and above transition energy $\gamma > \gamma_{tr}$

Separatrix (fortgesetzt)

Die Bestimmungsgleichung der Separatrix folgt aus $\mathcal{H}(\psi) = \mathcal{H}(\psi_1^{\text{max}})$ (vgl. Folie 8.7 und mit $\varphi = \psi - \psi_s$):

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{\Omega_S^2}{\cos\psi_s}\left[\cos\psi + (\psi-\psi_s)\sin\psi_s\right] = -\frac{\Omega_S^2}{\cos\psi_s}\left[\cos(\pi-\psi_s) + (\pi - 2\psi_s)\sin\psi_s\right] \quad (^{\#\#}_{\#})$$

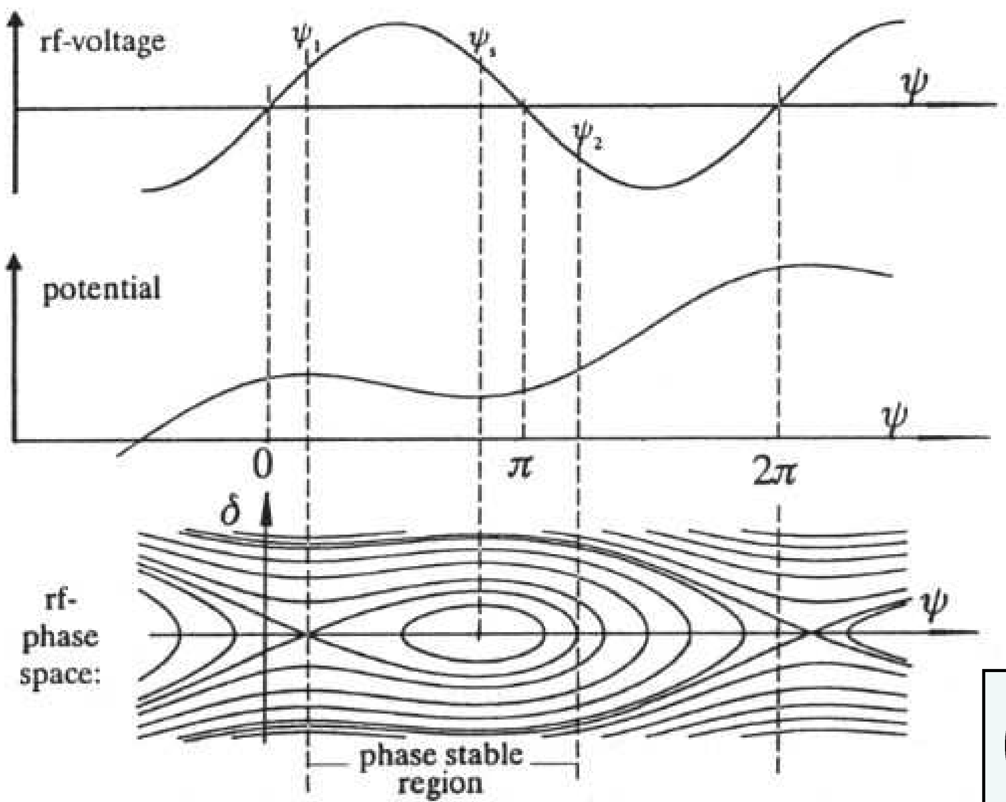


Fig.8.9. Phase space focusing for moving rf bucket displaying the phase relationship of accelerating field, potential, and rf bucket

An beiden Punkte maximaler Auslenkung ist $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$ (da pot. Energie V=max.$\rightarrow$ kinet. Energie=0):

- Punkt 1: $\psi_1^{\text{max}} = \pi - \psi_s$ (vgl. Folie 8.7)
- Punkt 2 folgt aus $(^{\#\#}_{\#})$:
  $$\cos(\psi_2^{\text{max}}) + \psi_2^{\text{max}}\sin\psi_s = \cos(\pi-\psi_s) + (\pi-\psi_s)\sin\psi_s$$
- maximales $\dot{\psi}$ für $\ddot{\psi} = 0$, d.h. bei $\psi = \psi_s$

$(^{\#\#}_{\#}) \rightarrow \quad \dot{\psi}^2_{\text{max}} = 2\Omega_S^2\left[2 - (\pi - 2\psi_s)\cdot\tan\psi_s\right]$

$\rightarrow$ *RF-Akzeptanz* (aus $\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{-\dot{\psi}}{\beta c k_h \eta_c}$, $k_h = h\frac{2\pi}{\beta c T_0}$):

$$\boxed{\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)_{\text{max}} = \pm\sqrt{\frac{eU_0}{\pi h \eta_c E_0}\left[2\cos\psi_s - (\pi - 2\psi_s)\sin\psi_s\right]}}$$

pos. $[\cdots]$: $0 < \psi_s < \frac{\pi}{2}$, $6.064 < \psi_s$, aber auch $\eta_c \lessgtr 0$

NB: $\boxed{\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)_{\text{max}} \propto \frac{1}{\sqrt{\omega_{\text{RF}}}}}$ $\boxed{\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)_{\text{max}} \overset{\gamma\gg 1}{\propto} \frac{1}{\sqrt{\alpha_c}}}$ $\boxed{\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)_{\text{max}} \propto \sqrt{\frac{eU_0\sin\psi_s}{E_0}}}$

Mit $\omega_{\text{RF}} \equiv \omega_h$ und $\omega_h = k_h \beta c$

Separatrix (fortgesetzt)

- Phasen ψ_s und $\pi - \psi_s$ ergeben den gewünschten Energiegewinn (da $\Delta E \propto \sin(\psi_s)$)
- nur eine Phase gibt stabile Phasenoszillationen

$\rightarrow$ stabile Phase aus Forderung: $\Omega_S^2 > 0 \Leftrightarrow \eta_c \cos\psi_s > 0$

▷ Orientierung des RF-Buckets hängt von Wahl für η_c, γ_t und Beschleunigung/Abbremsung ab

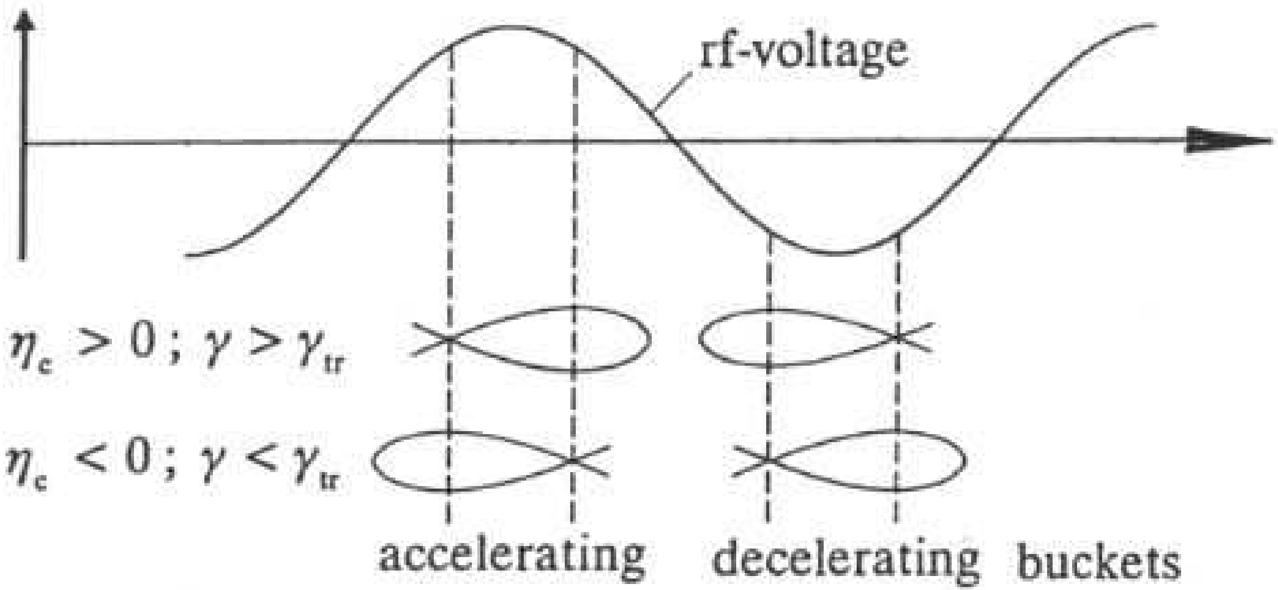


Fig. 8.10. Relationship between rf phase and orientation of moving rf buckets for accelerating as well as decelerating fields