

# A: Detektoren für Teilchenstrahlung

(Prof. Dr. O. Biebel)

geplante Themen der Vorlesung:

## 1. Einleitung, Motivation

- (a) Quellen: Radioaktivität, Beschleuniger, kosmische (solare, galaktische, extragalaktische) Quellen von Teilchenstrahlung
- (b) Aufgaben: Nachweis von Strahlung, Dosismessung, Orts-, Zeit-, Energie- und Impulsmessung, Teilchenidentifikation
- (c) Methoden: Teilchenphysik, Elektrodynamik, Optik, Atomphysik, Festkörper- und Halbleiterphysik, Transporttheorie, analoge und digitale Elektronik, anorganische und organische Chemie
- (d) Einsatzgebiete: Medizin, Werkstoffkunde, Geophysik, Teilchenphysik, ...

## 2. Wechselwirkung zwischen Teilchen und Materie:

- (a) Elementarteilchen, Wechselwirkungen & typ. Wechselwirkungsstärken
- (b) (schwere) geladene Teilchen: Energieverlust durch inelast. Streuung, Ionisation, Bethe-Bloch-Formel, Čerenkov-Effekt, Übergangsstrahlung, Landau-Verteilung,  $\delta$ -Elektronen
- (c) Elektronen, Positronen: Bremsstrahlung, Strahlungslänge
- (d) Photonen: Photoeffekt, Compton-Effekt, Paarbildung, Strahlungslänge
- (e) Neutronen: Kerneinfang, Kernreaktionen, elastische & inelastische Streuung, Moderation
- (f) Neutrinos: elastische Streuung, NC- & CC-Reaktionen
- (g) Vielfachstreuung geladener Teilchen: Coulomb-Streuung

# Wechselwirkung zw. Teilchen & Materie

Grundvoraussetzung des Teilchen nachweises ist die Wechselwirkung zwischen Teilchen und Materie.

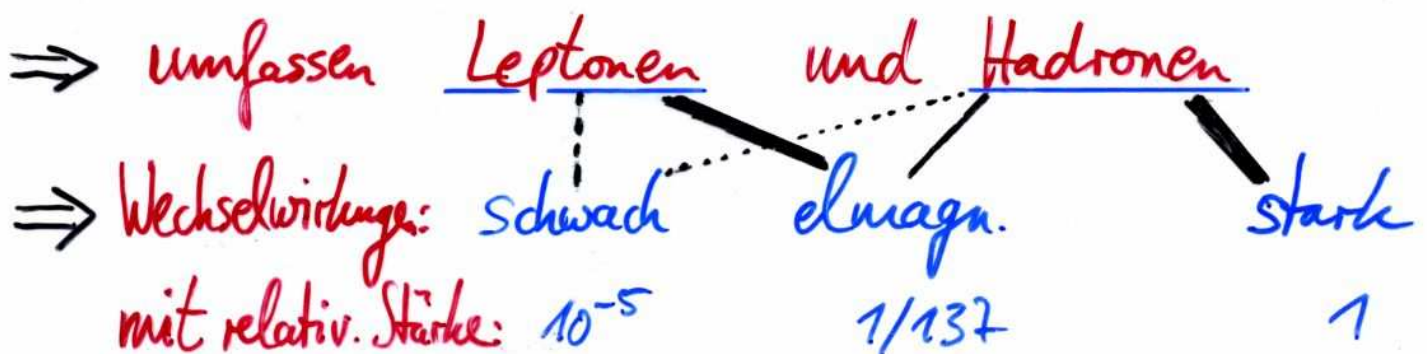
Ein nachzuweisendes Teilchen muss letztlich Energie an das Material des Teilchendetektors abgeben, das diese Energieabgabe registrieren und vermessen kann.

Die Arten der Wechselwirkung hängen sowohl vom Teilchentyp als auch vom Detektormaterial ab: (→ Teilchen und Wechselwirkungen im Standardmodell)

## ● relevante Teilchentypen bei Ww. mit Materie:

▷ stabile Teilchen: Proton, Antiproton, Elektron, Positron, Photon, Atomkerne, Neutrinos, ...

▷ langlebige Teilchen: Neutron, Myon, Pion<sup>±</sup>, Kaon<sup>±</sup>, ...  
(müssen Wegstrecke zw. Erzeugungsort und Detektor überleben)





# Quarks und Leptonen

Standard-Modell besitzt Familienstruktur mit drei Generationen:

	1. Generation	2.	3.	el. Ladung [e]	schwache Ladung	starke Ladung
Leptonen	$\begin{bmatrix} \nu_e \\ e^- \\ u \\ d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \\ c \\ s \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \\ t \\ b \end{bmatrix}$	0	ja	0
Quarks				-1	ja	0
				$+\frac{2}{3}$	ja	$1^*$
				$-\frac{1}{3}$	ja	$1^*$

(wenn  $\neq 0$  oder "ja", dann Teilnahme an zugehöriger W.)

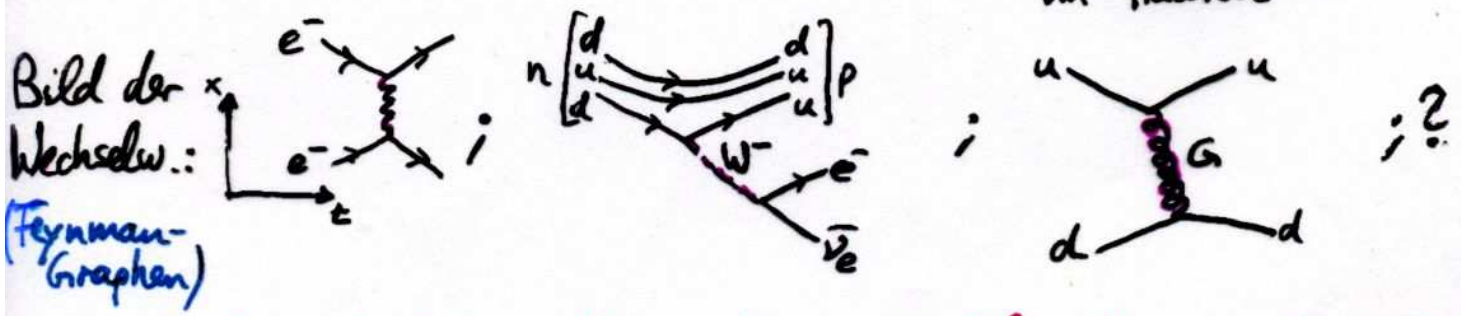
\* Situation kompliziert für starke Ladung als für elektr.; (folgt später)

- Spin der "Materie"-Teilchen ist  $\frac{1}{2} \hbar$
- Teilchen unterliegen Fermi-Dirac-Statistik, d.h. Wellenfkt ist ungerade (→ Pauli Ausschlussprinzip)
- Bezeichnung: Fermion
- Aus Quarks werden "Hadronen" aufgebaut: Mesonen  $q\bar{q}$  ( $\pi^+ \equiv u\bar{d}$ ), Baryonen  $qqq$  ( $p \equiv uud$ )

# Wechselwirkungen

	<u>el. magn.</u>	schwach	stark	gravitativ
rel. Stärke	$\frac{1}{137}$	$10^{-5}$	1	$10^{-40}$
gegeben durch	$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$	$G_{Fermi} = 1.166 \cdot 10^{-5} \frac{(\hbar c)^3}{GeV^2}$	$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi \hbar c}$	$\frac{G_N \cdot m_{Proton}^2}{4\pi \hbar c}$
Träger der Kraft:	Photon	Weakonen	Gluon	Graviton?
el. Ladung:	$\gamma$	$W^+, W^-, Z^0$	G	
starke ":	0e	$+e, -e, 0e$	0e	0e
schwache ":	0	<u>ja</u>	2x starke Ladung	0
Masse:	0	$80 GeV/c^2$ $91 GeV/c^2$	0	0
Reichweite:	$\infty$	$\sim 10^{-18} m$	$10^{-15} m$	$\infty$

(da selbst Träger der starken Ladung)  
 $\rightarrow$  sog. Confinement der Quarks & Gluonen im Hadron



Spin der "Kraft"-Teilchen ist ganzzahlig (=1h bis auf Graviton)  
 $\rightarrow$  unterliegen Einstein-Bose-Statistik (Wellenfkt gerade)  $\rightarrow$  Bosonen

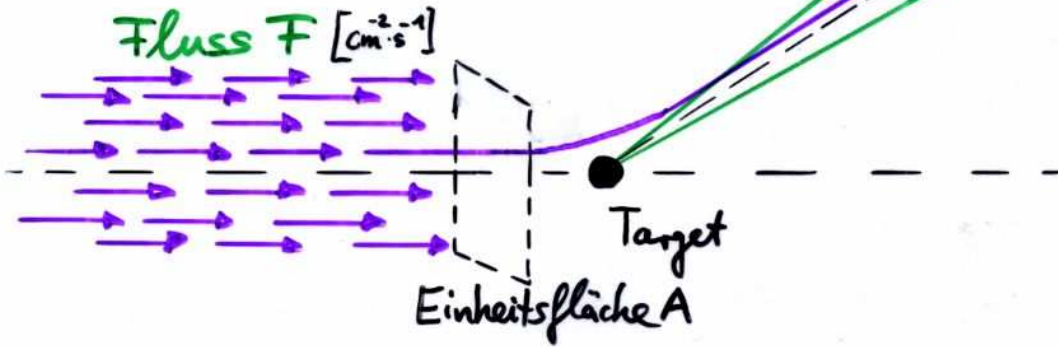


# Wechselwirkung zw. Teilchen & Materie

... wird beschrieben durch Wirkungsquerschnitt  $\sigma$ :

$$\frac{d\sigma(E, \Omega)}{d\Omega} = \frac{1}{\text{Fluss } F} \cdot \frac{d\dot{N}_s}{d\Omega}$$

$d\dot{N}_s$ : Zahl der in  $d\Omega$  gestreuten Teilchen pro Zeitintervall



⇒ Wirkungsquerschnitt  $\sigma(E) = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$

Praktischer Fall:  $N$  Targets/Volumen in Dicke  $\delta x$ ;  $N$ :



⇒  $d\dot{N}_s(\Omega) = F \cdot A \cdot N \cdot \delta x \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$

⇒  $\dot{N}_{\text{total}} = F \cdot A \cdot N \cdot \delta x \cdot \sigma$

Daraus folgt die mittlere freie Weglänge eines Teilchens

im Medium:  $\lambda = \frac{1}{N \cdot \sigma}$

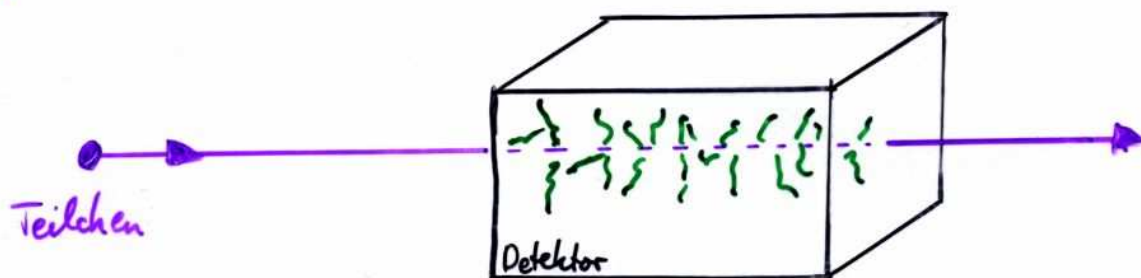
da die Wahrscheinlichkeit  $P$  einer Ww. in  $\delta x$  ist

$$P(\delta x) = N \sigma \delta x = \frac{1}{\lambda} \cdot \delta x$$

□  $P(x + dx) = P(x) \cdot (1 - \frac{1}{\lambda} dx) \Rightarrow P(x) = \exp(-x/\lambda)$ , dass keine Ww. stattfindet;  $P_{\text{int}}(x) = 1 - \exp(-x/\lambda) \approx \delta x / \lambda$ , dass Ww. stattfindet; Vergleich mit Gesamtzahl gestreuter Teilchen pro Fluss  $F$  und Einheitsfläche  $A$ , also der Ww.-Wahrscheinlichkeit, ergibt  $\lambda = \frac{1}{N \sigma}$ .

# Wechselwirkung zw. Teilchen & Materie

Nicht alle bekannten Wechselwirkungen sind für den Teilchennachweis (gleichermaßen) relevant. Kriterien hierfür folgen anschaulich aus dem Prinzip des Teilchennachweises:



- ▶ **Stärke der Wechselwirkung** (z.B.: Gravitation  $\hat{=}$  verschwindend gering)
- ▶ **Reichweite der Wechselwirkung** (z.B.: starke Ww nur  $\approx 1 \text{ fm}$ )

⇒ ● relevante Wechselwirkungen beim Teilchennachweis:

- ▷ elektromagnetische Wechselwirkung  
( $\infty$  Reichweite für geladenes Teilchen, Stärke  $\sim 1/137$ )
- ▷ starke Wechselwirkung  
( $1 \text{ fm}$  - Reichweite durch große Stärke etwas kompensiert)
- ▷ schwache Wechselwirkung  
(nur für Neutrinos!, die keine electromagn. oder starke Ww. haben)



# Wechselwirkung zw. Teilchen & Materie

Klassifikation für die relevanten Teilchen:

Teilchen	dominierende Ww	Nachweis:
Elektron, Proton, Myon, $\alpha$ und andere el. geladene	elektromagnet. Ww	leicht
Photon*	elektromagnet. Ww	leicht für sehr hohe Energie
Neutron, $K_L^0$	starke Ww	Schwierig
Neutrinos	schwache Ww.	sehr aufwändig (d.h. sehr massive Detektoren)

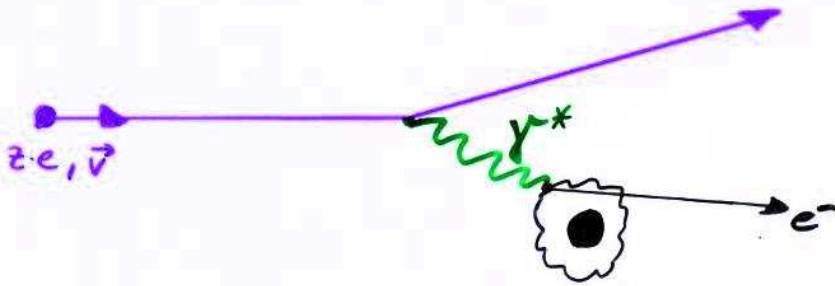
\* für Röntgen-Photonen von einigen wenigen keV Energie ist der Nachweis schwierig, weil Materialien vielfach transparent für solche Photonen sind

→ Zunächst Betrachtung der elektromagnetischen Wechselwirkung von schweren geladenen Teilchen

(Elektronen, Positronen, Photonen folgen später, da dafür andere Mechanismen der Ww. hinzukommen)

# Wechselwirkung zw. Teilchen & Materie

Die Ww. zwischen geladenen (schweren) Teilchen und Materie ist elektromagnet. Natur, wobei (virtuelle) Photonen die Wechselwirkung vermitteln:



- ▷ Ionisation
- ▷ Atom-Anregung (i.A. Hülle, seltener Kern)
- ▷ Polarisation ( $\leadsto$  Čerenkov-Effekt, falls  $|\vec{v}| > c_n = \frac{c}{n}$ )
- ▷ Übergangsstrahlung (in inhomogenen Medien)

Čerenkov-Effekt:

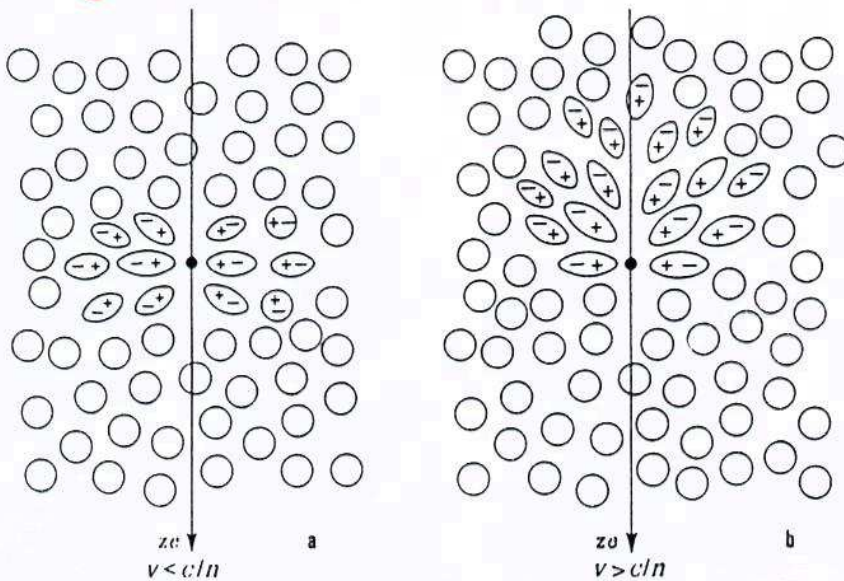
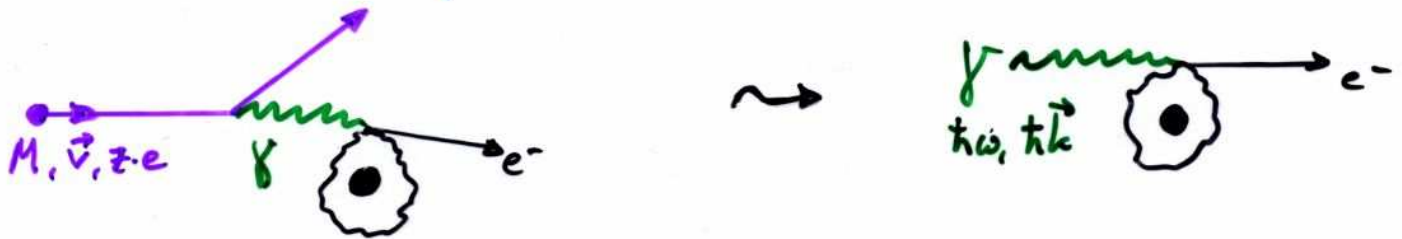


Fig. 2.6: Zur Veranschaulichung des Čerenkov-Effektes



# Wechselwirkung zw. Teilchen & Materie ...

... kann auf die Wechselwirkung des Photons mit Materie vereinfacht werden:

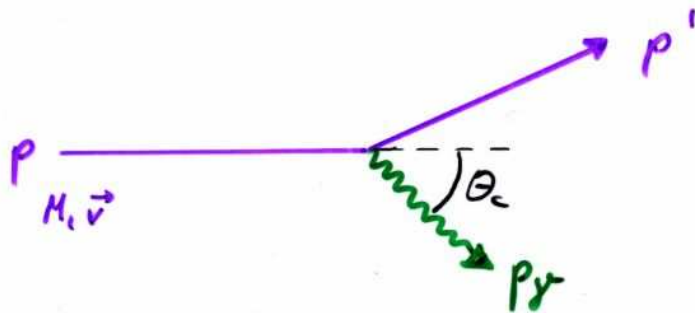


## ⇒ Photo - Absorption - Ionisation - Modell

, d.h. man betrachtet anstelle der electromagn. Ww. des z-fach geladenen Teilchens der Masse  $M$  und Geschwindigkeit  $\vec{v} = \vec{\beta} \cdot c$  die electromagn. Ww. eines Photons mit Energie  $h\omega$  und Impuls  $h\vec{k}$  mit einem Medium, das einen Brechungsindex  $n$  bzw. eine (komplexwertige) Dielektrizitätskonstante  $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$  mit  $n^2 = \epsilon_1$  hat. (NB: Das Photon muß nicht notwendigerweise reell sein, d.h.  $h\omega = c|h\vec{k}|$  bzw. im Medium  $\omega = c \cdot |h\vec{k}| / n$ )

# Wechselwirkung zw. Photon-Materie

Zur Klassifikation der Photon-Materie-WW betrachte:



( $p, p', p_\gamma$ : Viererimpulse)

Energie-Impulserhaltung:  $p' = p - p_\gamma$

mit  $p = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma M c \\ \gamma M \vec{v} \end{pmatrix}$  und  $p_\gamma = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ \vec{p}_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar \omega/c \\ \hbar \vec{k} \end{pmatrix}$

folgt:  $M^2 c^2 = p'^2 = (p - p_\gamma)^2 = M^2 c^2 - 2 p p_\gamma + E_\gamma^2/c^2 - \vec{p}_\gamma^2$

wobei  $p \cdot p_\gamma = \frac{E}{c} \cdot \frac{E_\gamma}{c} - \vec{p} \cdot \vec{p}_\gamma = \gamma M (\hbar \omega/c^2 - \hbar v \cdot k \cdot \cos \theta_c)$

$$\Rightarrow \hbar \omega \left( 1 - \frac{\hbar \omega}{2 \gamma M c^2} \right) = \hbar v \cdot k \cdot \cos \theta_c - \frac{\hbar^2 k^2}{2 \gamma M}$$

Mit den Näherungen: geringe Photonenergie & -impuls  
 $\hbar \omega \ll \gamma M c^2$  &  $\hbar k \ll \gamma M v$

$$\Rightarrow \omega \approx v \cdot |\vec{k}| \cdot \cos \theta_c = \vec{k} \cdot \vec{v} \quad \text{⊗}$$

Für (reelle) Photonen im Medium gilt die Dispersionsgleichung:

$$\omega^2 = \vec{k}^2 c^2 / \epsilon \quad \text{⊗⊗}$$

Aus beiden ⊗⊗ folgt die Schwelle für Čerenkov-Abstrahlung

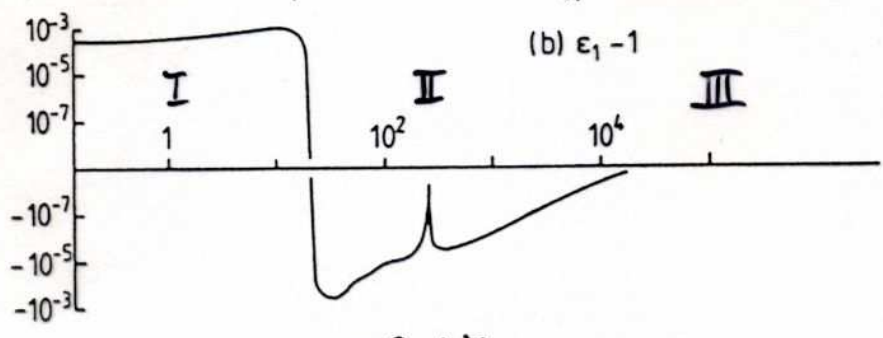
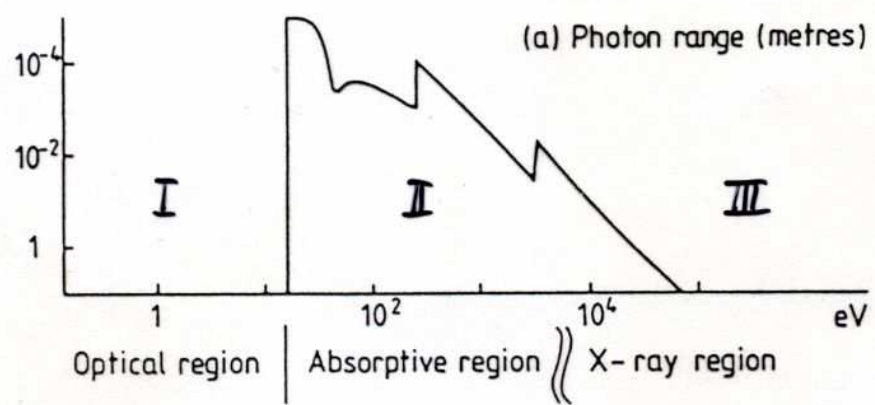
$$\sqrt{\epsilon} \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos \theta_c = 1 \quad \text{bzw.} \quad n \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos \theta_c = 1$$



# Wechselwirkung Photon-Materie

Abhängig von der Photonenergie verhält sich die Wechselwirkung:

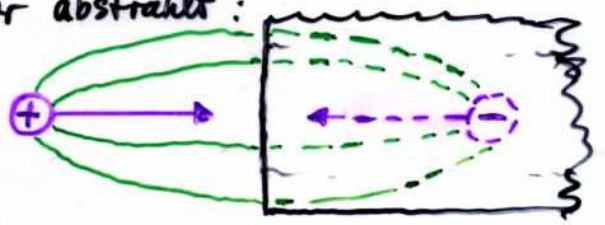
- (I)  $E_\gamma \approx \text{einige eV}$   $\rightarrow \epsilon \text{ reell}, \epsilon_2 \text{ reell} \rightarrow \text{reelle } \gamma$  (Čerenkov)
- (II)  $E_\gamma = \text{einige eV bis einige keV}$   $\rightarrow \epsilon \text{ komplex}, \begin{cases} \epsilon_1 < 1 \\ \epsilon_2 > 0 \end{cases} \rightarrow \text{Absorption Ionisation}$
- (III)  $E_\gamma > \text{einige keV}$   $\rightarrow \epsilon \text{ komplex}, \begin{cases} \epsilon_1 < 1 \\ \epsilon_2 \ll 1 \end{cases} \rightarrow \text{Transparent}$  (aber: Übergangsstrahlung in inhomogenen Medien)



The dependence of  $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$  for argon at normal density on photon energy,

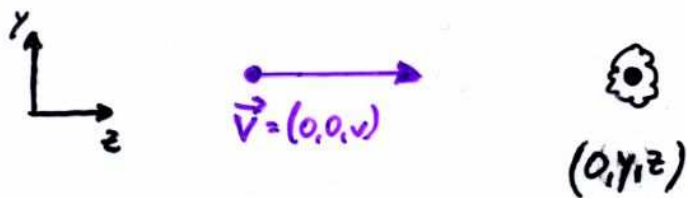
- a) imaginary part  $\epsilon_2$  expressed as a range and
- b) real part  $\epsilon_1 - 1$  on a split log scale.

Die Ursache des Auftretens von Übergangsstrahlung in inhomogenen Medien kann durch eine Wechselwirkung zwischen Ladung und Spiegelladung an einer Grenzfläche verstanden werden. Beide zusammen bilden einen Dipol, der abstrahlt:



# Wechselwirkung Photon-Materie

Einige Charakteristika der Teilchen-Materie-Ww. können anhand eines vereinfachten 2-dim. Modells aufgezeigt werden:



$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = \vec{k} \cdot \vec{v} = k_z \cdot v \leadsto k_z = \omega/v \\ \omega^2 = \vec{k}^2 c^2 / \epsilon \leadsto \vec{k}^2 = k_y^2 + k_z^2 = \epsilon \cdot \omega^2 / c^2 \end{cases}$$

$$\} \rightarrow k_y^2 + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = \epsilon \omega^2 / c^2 \leadsto k_y = \frac{\omega}{v} \cdot \sqrt{\frac{v^2 \epsilon}{c^2} - 1}$$

Definiere Lichtgeschwindigkeit im Medium:  $c_m := c/n \equiv c/\sqrt{\epsilon}$

und weiterhin:  $\beta' := v/c_m$  ;  $\gamma' := 1/\sqrt{1-\beta'^2}$  ,

dann folgt:

$$k_y = \frac{\omega}{v} \sqrt{\beta'^2 - 1}$$

$$\underline{\beta' \geq 1}$$

$k_y, k_z$  reellwertig



Photon beschrieben durch

$$e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

(ebene) Welle

$$\underline{\beta' < 1}$$

$k_y$  imaginär,  $k_z$  reell



$$e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = e^{i\frac{\omega}{v}(z-vt)} \cdot e^{-\gamma'/y_0}$$

mit Dämpfungskonstante

$$y_0 = \frac{v}{\omega \sqrt{1-\beta'^2}} = \frac{\beta' \gamma'}{k}$$



# Wechselwirkung Photon-Materie

Zusammenfassung der verschiedenen Fälle (1. Teil)

- $\beta' \equiv \frac{v}{c_m} \equiv \frac{v}{c/n} > 1$  reelle Welle  $e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$

$\leadsto$  Čerenkov-Licht

- $\beta' < 1$

gedämpfte Welle  $e^{i\frac{\omega}{v}(z-vt)} \cdot e^{-\gamma/y_0}$

mit Reichweite  $y_0 = \frac{\beta' y'}{k} \sim \beta' y'$

linear mit  $\beta' y'$  ansteigend

Mit  $\beta' = \frac{v}{c} \cdot \sqrt{\epsilon} \equiv \beta \cdot \sqrt{\epsilon}$  und  $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$  folgt:

$$y_0 = \frac{\beta/k_0}{\sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + (1-\epsilon)\beta^2}} = \frac{\beta/k_0}{\sqrt{1-\epsilon\beta^2}} \quad (k_0 := \frac{\omega}{c})$$

$\epsilon \geq 1$

- optischer Bereich (I)
- unterhalb Anregungsenergie des Mediums
- Reichweite  $y_0$  nimmt zu bis zur Čerenkov-Schwelle  $\beta'=1$   
 $\leadsto y_0 \rightarrow \infty$

$\epsilon < 1$

- Absorptions-Anregungs-Ionisationsbereich (II)
- Reichweite wächst bis zum maximalen Wert ( $\beta \rightarrow 1$ )  
 $y_0^{\max} = 1/k_0 \sqrt{1-\epsilon}$
- Plateau/Sättigung im Energieverlust durch Ionisation

# Wechselwirkung Photon-Materie

Zusammenfassung der verschiedenen Fälle

- $\beta' \equiv \beta \cdot \sqrt{\epsilon} > 1$  : Čerenkov-Licht
- $\beta' < 1$  : transversale Reichweite  $\gamma_0$  begrenzt  
 $\gamma_0 \sim \beta' \gamma'$
- $\epsilon \geq 1$  : optischer Bereich,  $\gamma_0 \sim \beta' \gamma' \rightarrow \infty$   
(so genannter relativistischer Anstieg)
- $\epsilon < 1$  : Ionisationsbereich mit maximaler  
transversaler Reichweite

$$\gamma_0^{\max} = 1 / k_0 \sqrt{1 - \epsilon}$$

Übergang zwischen  $\gamma_0 \sim \beta' \gamma'$  und Sättigung  $\gamma_0 \rightarrow \gamma_0^{\max}$  findet statt, wenn in

$$\gamma_0 = \frac{\beta / k_0}{\sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + (1 - \epsilon) \beta^2}}$$

$\frac{1}{\gamma^2} \approx (1 - \epsilon) \beta^2$  wird, also für

$$\beta \gamma \sim \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon}} \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

wobei  $\rho$  die Dichte des Mediums ist.

⇒ [dichte Medien → schnelles Erreichen des Plateaus  
dünnere Medien → hohes Plateau



# Wechselwirkung Photon-Materie

Der relativistische Anstieg und das Erreichen eines Plateaus haben direkte Bedeutung bei der Identifizierung hoch-relativistischer Teilchen:

- $\beta\gamma = p/Mc \rightarrow$  Impulsmessung ( $p$ ) und Messung des spezifischen Energieverlustes ( $\frac{dE}{dx} \sim \beta\gamma, s.u.$ ) erlaubt Bestimmung von  $M$
- langer relativist. Anstieg & hohes Plateau bedeutsam für gute / zuverlässige Identifizierung
- Plateau setzt ein bei  $\beta\gamma \sim \frac{1}{\sqrt{s}}$

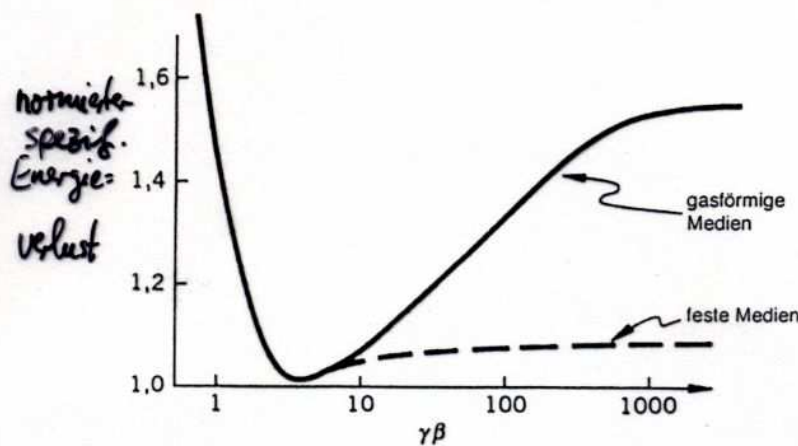


Abb. 6.1 Die Bremsfähigkeit für Teilchen relativ zu ihrem Minimalwert als Funktion von  $p/Mc$  oder  $\gamma\beta$

$\Rightarrow$  gasförmige Medien ( $s$  klein) haben bessere Identifizierungseigenschaften für hochrelativist. Teilchen als feste/flüssige Medien (Dichte  $s$  groß)



## Wechselwirkung Photon-Materie

Die bisherige Betrachtung war rein qualitativ mit **Čerenkov-Licht**, **relativistischer Anstieg**, **Plateau**. Die quantitative Berechnung des Energieverlustes erfordert den Wirkungsquerschnitt  $\frac{d^2\sigma}{dE dp}$  für die Streuung/Absorption eines Photons mit  $E = \hbar\omega$  und  $p = \hbar k$  an einem Elektron. Allerdings hängt  $\frac{d^2\sigma}{dE dp}$  explizit von der Dielektrizitätskonst.  $\epsilon$  ab, für die empirische Werte zusammen mit Approximationen eingesetzt werden müssen, um den gesamten Bereich der Frequenzen  $\omega = E/\hbar$  abzudecken. Die Details sind zu kompliziert, um hier diskutiert zu werden (können bei W.W.H. Allison, J.H. Cobb nachgelesen werden: *Ann. Rev. Nucl. Sci.* 30 (1980) 253)

Letztlich gelingt es, die Integration von  $\frac{d^2\sigma}{dE dp}$  über  $p$  analytisch auszuführen, sodass  $\frac{d\sigma}{dE}$  verbleibt, welches im Folgenden diskutiert wird. Vorweg schon dies: Aus  $\frac{d\sigma}{dE}$  ergibt sich der mittlere Energieverlust  $dE$  eines geladenen Teilchens pro Wegstrecke  $dx$  gemäß:

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \sim - \int E \cdot \frac{d\sigma}{dE} dE$$

(Die Integrationsgrenzen werden später besprochen)



# Wechselwirkung Photon-Materie

Trotzdem die Formel für  $\frac{d\sigma}{dE}$  kompliziert ist, wird sie hier wiedergegeben, weil einige relevante Konsequenzen aus ihr abgelesen bzw. hergeleitet werden können. Im Photo-Absorptions-Ionisations-Modell von Allison et al. lautet der diff. Wirkungsquerschnitt pro Elektron und pro Energieverlust eines schweren geladenen Teilchens:

$$\otimes \frac{d\sigma}{dE} = \frac{\alpha}{\beta^2 \pi} \frac{\sigma_{\gamma}(E)}{E \cdot Z} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2 \epsilon_1)^2 + \beta^4 \epsilon_2^2}}$$

$$+ \frac{\alpha}{\beta^2 \pi} \frac{\sigma_{\gamma}(E)}{E \cdot Z} \cdot \ln \frac{2mc^2 \beta^2}{E}$$

$$+ \frac{\alpha}{\beta^2 \pi} \frac{1}{E^2} \int_0^E \frac{\sigma_{\gamma}(E')}{Z} dE'$$

$$+ \frac{\alpha}{\beta^2 \pi} \frac{1}{Z N h c} \left( \beta^2 - \frac{\epsilon_1}{|E|^2} \right) \cdot \theta$$

Ionisation

$\delta$ -Elektronen oder knock-on-Elektronen  
Erzeugung energiereicher Elektronen in Ww.

Čerenkov-Licht

Ein Bereich I  $\rightarrow \sigma_{\gamma}(E) = 0$

wobei  $\alpha \equiv e^2 / 4\pi\epsilon_0 h c \approx 1/137$

$$\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$$

$$\theta : \text{Phase von } 1 - \epsilon_1 \beta^2 + i\epsilon_2 \beta^2$$

$\sigma_{\gamma}$ : WQ f. Photon-Absorption durch Atome des Mediums

E: Photonenergie

$N = N_0 \cdot S/A$   
Atomdichte

Z: Ladungszahl der Atome d. Mediums



# Bethe-Bloch-Formel

Aus den ~~ersten beiden~~ Termen von  $\otimes$  kann nun näherungsweise der differentielle Energieverlust  $dE/dx$  berechnet werden:

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \sim - \int_I^{T_{\max}} E \cdot \frac{d\sigma}{dE} dE$$

Die Integrationsgrenzen ergeben sich:

- mittleres Ionisationspotential  $I$  des Atoms als Mindestenergie für die Ionisation
- maximale kinetische Energie  $T_{\max}$ , die ein ruhendes Elektron durch einen zentralen Stoß erhalten kann (NB: relativist.)

$$T_{\max} = \frac{2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma \frac{m_e}{M} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2} \stackrel{M \gg m_e \gamma}{\approx} 2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$$

( $M$ : Masse des stoßenden Teilchens,  $\beta$ : seine Geschwindigkeit,  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ )

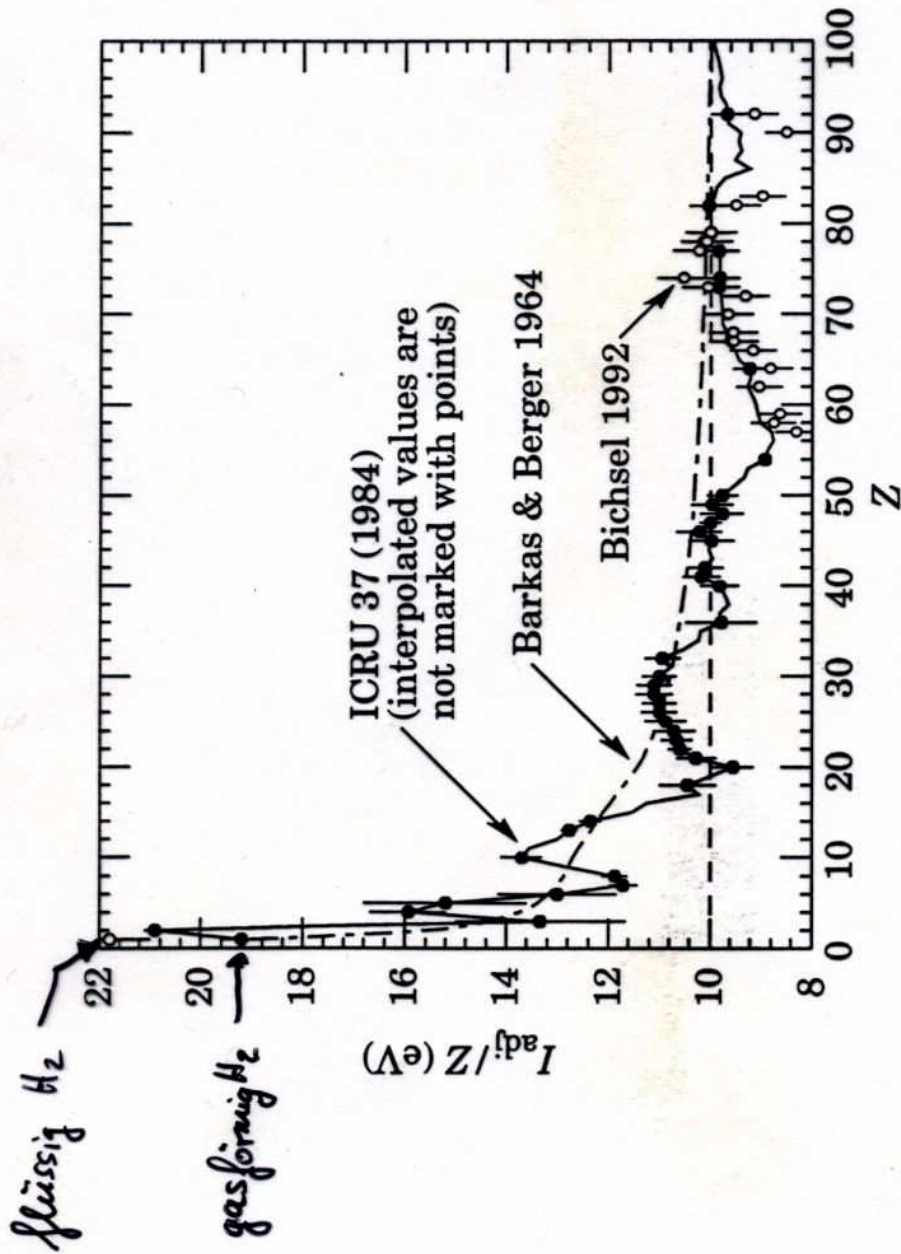
Für das mittlere Ionisationspotential existiert eine empirische Formel, die als Näherung durchaus brauchbar ist

$$\frac{I}{Z} = \begin{cases} (12 + \frac{7}{Z}) \text{ eV} & Z < 13 \\ (9.76 + 58.8 \cdot Z^{-1.19}) \text{ eV} & Z \geq 13 \end{cases}$$

Details, wie Abschluß gewisser Atomshalen, bleiben dabei unberücksichtigt und können zu größeren Abweichungen führen



# Ionisationspotentiale



Barkas & Berger  $\approx$

$$\frac{I}{Z} = \begin{cases} (12 + \frac{3}{2}) \text{ eV} & Z < 13 \\ (9.76 + 58.8 \cdot Z^{-1.19}) \text{ eV} & Z \geq 13 \end{cases}$$

**Figure 26.5:** Mean excitation energies (divided by  $Z$ ) as adopted by the ICRU [9]. Those based on experimental measurements are shown by symbols with error flags; the interpolated values are simply joined. The grey point is for liquid  $H_2$ ; the black point at 19.2 eV is for  $H_2$  gas. The open circles show more recent determinations by Bichsel [11]. The dotted curve is from the approximate formula of Barkas [12]

# Bethe-Bloch-Formel

Als Ergebnis der Integration erhält man:

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = 4\pi r_e^2 \cdot m_e c^2 \cdot \rho \cdot \frac{N_0 Z z^2}{A \cdot \beta^2} \cdot \left[ \ln \frac{2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 \right]$$

oder äquivalent dazu (falls  $\gamma m_e \ll M$ :  $T_{\max} \approx 2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$ ):

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = 2\pi r_e^2 \cdot m_e c^2 \cdot \rho \cdot \frac{N_0 Z z^2}{A \cdot \beta^2} \cdot \left[ \ln \frac{2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 \cdot T_{\max}}{I^2} - 2\beta^2 \right]$$

darin sind:

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_e c^2} \approx 2.82 \text{ fm}$$

klass. Elektronenradius

$$m_e c^2 \approx 0.511 \text{ MeV}$$

Elektronenmasse  $\times c^2$

$$N_0 = 6.022 \cdot 10^{23} / \text{mol}$$

Avogadrozahl

$Z, A$

Atomzahl, Atomgewicht und

$\rho$

Dichte des Mediums  
(häufig in  $dE/dx$  absorbiert:  $\text{keV/cm}$   $\approx$   $\text{MeV}\cdot\text{cm}^2/\text{g}$ )

$z$

Ladungszahl des Teilchens

$M$

Masse des Teilchens

$$\beta = \frac{v}{c} \equiv \frac{pc}{E}$$

Geschwindigkeit d. Teilchens

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \frac{E}{m_e c^2}$$

Lorentzfaktor d. Teilchens

$E, p$

Energie, Impuls d. Teilchens



# Bethe-Bloch-Formel

Für die praktische Anwendung werden zwei weitere Korrekturterme der einfachen Bethe-Bloch-Formel hinzugefügt,

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = 2\pi r_e^2 \cdot m_e c^2 \cdot \frac{N_0 Z z^2}{A \cdot \beta^2} \cdot \left[ \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z} \right]$$

wobei

$\delta$  : Dichtekorrektur (beschränkte Reichweite  $\gamma_{\max}$  der Photonwelle)

$C$  : Atomskalengkorrektur (wenn  $\beta \cdot c \approx$  Geschwindigkeit der Elektronen im Orbital)

bezeichnen.

Für beide Korrekturen existieren empirische Näherungen, die materialabhängig sind. Ohne weitere Details ( $\hat{=}$  längliche Approximationsformeln) sind dies für

$\delta$  : Sternheimer-Peierls-Parametrisierung

(R.M. Sternheimer, R.F. Peierls in Phys. Rev. 63 (1971) 3681)  
(R.M. Sternheimer in Phys. Rev. 88 (1952) 851)

$$\delta \sim \log_{10}(\beta\gamma)$$

$C$  : Barkas-(Berger-) Parametrisierung (auch: Barkas-Effekt)

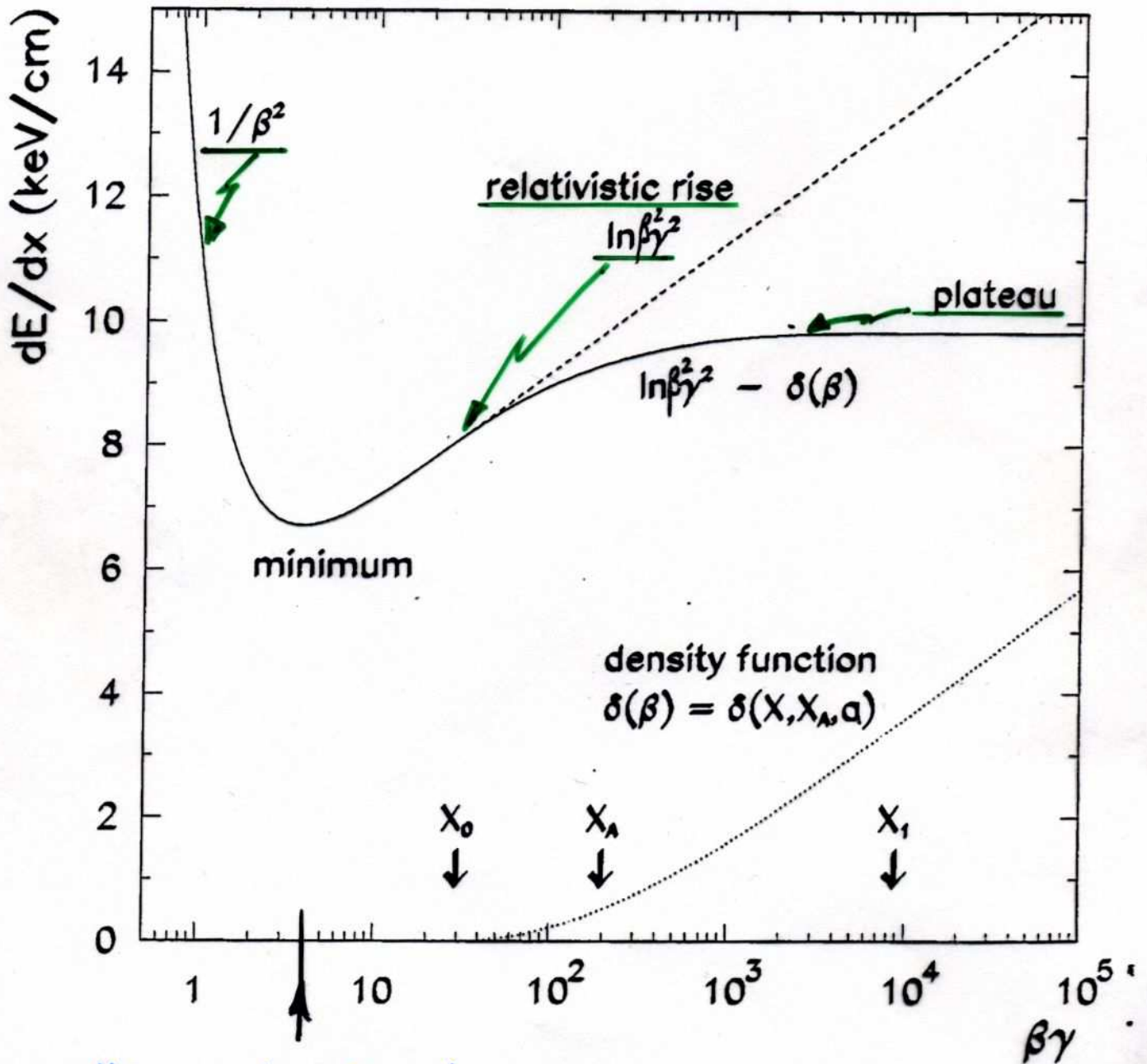
(W.H. Barkas, M.J. Berger in Nucl. Science Series Report 39 (1964))

$$C \sim I^2 / \beta^2 \gamma^2$$

i.A. vernachlässigbar gering

# Bethe - Bloch - Formel

Beispiel für ein Gasgemisch (ca. 80:20 Ar:CH<sub>4</sub>, 4bar Druck, mittlerem Ionisationspotential  $I \approx 152.3 \text{ eV}$ ) zeigt die typische Größenordnung des Energieverlustes ( $\sim \text{keV/cm}$ ):



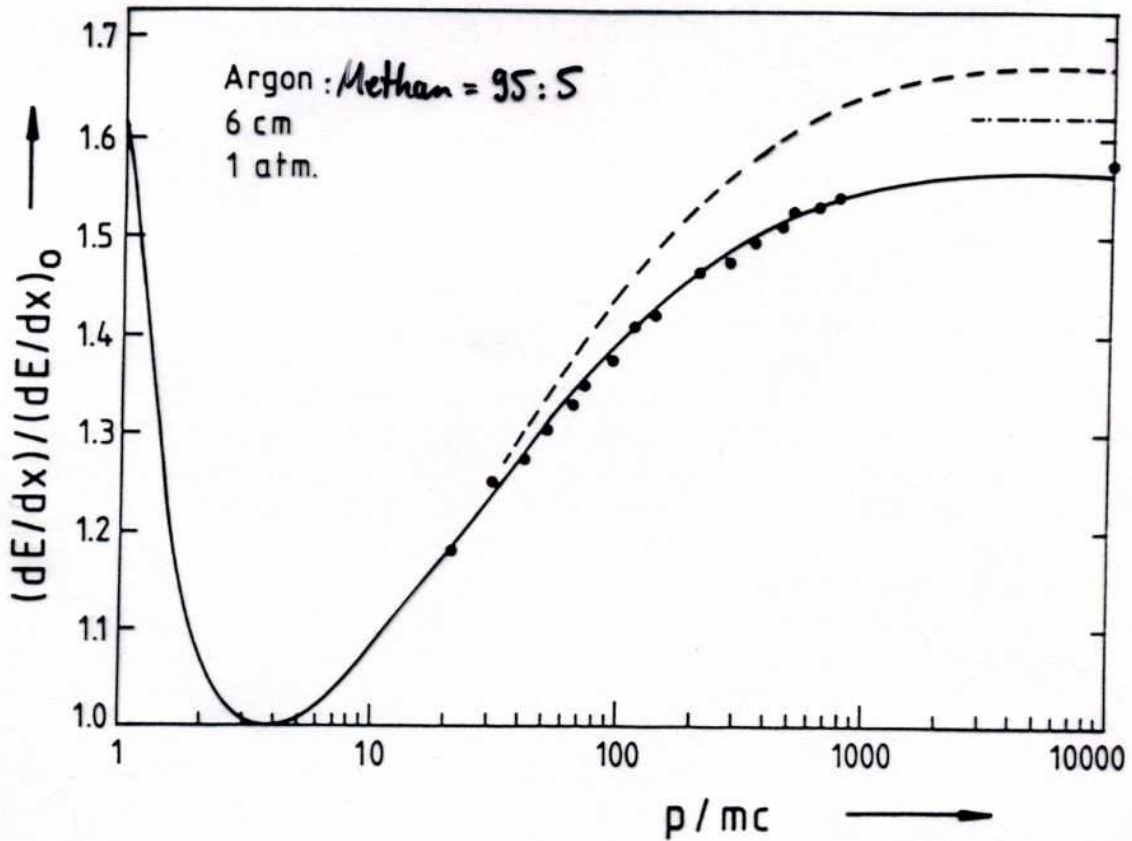
Minimum bei  $\beta\gamma \approx 4$

Fig. 10



# Bethe-Bloch-Formel

Die Berechnung im Photo-Ionisations-Absorptions-Modell erlaubt recht genaue qualitative Aussagen zum Energieverlust



gemessener  
Fig. 1.1: Energieverlust durch Ionisation, normiert auf den minimalen Wert  $(dE/dx)_0$  bei  $\beta\gamma = 4$ , für ein Argon-Methan (5%)-Gemisch. Meßpunkte nach [LE 78a]; gestrichelte Linie: Rechnung nach [ST 52]; strichpunktierte Linie: [ER 77]; durchgezogene Linie: Photo-Absorptions-Modell für Ionisation [CO 75, CO 76, AL 80].

**Tabelle 4**

Eigenschaften von Gasen: Dichte  $\rho$ , minimale Energie für Anregung  $E_{ex}$ , minimale Energie für Ionisation  $E_i$ , mittleres effektives Ionisationspotential pro Hüllen-Elektron  $I_0 = I/Z$ , Energieverlust  $W_i$  pro produziertes Ionenpaar, minimaler Energieverlust  $(dE/dx)$ , Gesamtzahl von Ionenpaaren  $n_T$  und Zahl der primären Ionen  $n_p$  pro cm Wegstrecke für minimal ionisierende Teilchen. [SA 77]

Gas	Z	A	$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	$E_{ex}$	$E_i$	$I_0$	$W_i$	(MeV/g cm <sup>-2</sup> )	(dE/dx) (keV/cm)	$n_p$ (I.P./cm)	$n_T = \frac{(dE/dx)}{W_i}$ (I.P./cm)
H <sub>2</sub>	2	2	8.38x10 <sup>-5</sup>	10.8	15.9	15.4	37	4.03	0.34	5.2	9.2
He	2	4	1.66x10 <sup>-4</sup>	19.8	24.5	24.6	41	1.94	0.32	5.9	7.8
N <sub>2</sub>	14	28	1.17x10 <sup>-3</sup>	8.1	16.7	15.5	35	1.68	1.96	(10)	56
O <sub>2</sub>	16	32	1.33x10 <sup>-3</sup>	7.9	12.8	12.2	31	1.69	2.26	22	73
Ne	10	20.2	8.39x10 <sup>-4</sup>	16.6	21.5	21.6	36	1.68	1.41	12	39
Ar	18	39.9	1.66x10 <sup>-3</sup>	11.6	15.7	15.8	26	1.47	2.44	29.4	94
Kr	36	83.8	3.49x10 <sup>-3</sup>	10.0	13.9	14.0	24	1.32	4.60	(22)	192
Xe	54	131.3	5.49x10 <sup>-3</sup>	8.4	12.1	12.1	22	1.23	6.76	44	307
CO <sub>2</sub>	22	44	1.86x10 <sup>-3</sup>	5.2	13.7	13.7	33	1.62	3.01	(34)	91
CH <sub>4</sub>	10	16	6.70x10 <sup>-4</sup>		15.2	13.1	28	2.21	1.48	16	53
C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	34	58	2.42x10 <sup>-3</sup>		10.6	10.8	23	1.86	4.50	(46)	195

häufig  
als  
Komponente  
von  
Gasgemischen  
eingesetzt



# Bethe-Bloch-Formel

Bei Mischungen von Absorbermedien oder chem. Verbindungen kann der Energieverlust approximiert werden (Bragg Additivität)

$$\otimes \quad \frac{1}{S} \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \frac{w_1}{S_1} \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_1 + \frac{w_2}{S_2} \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_2 + \dots$$

dabei sind  $w_1, w_2, \dots$  die Gewichte der Elemente in der Mischung/Verbindung. Konkret für eine Verbindung aus  $a_i$  Atomen mit Atomgewicht  $A_i$  ist ( $i=1 \dots n$  verschiedene Atomsorten)

$$w_i := \frac{a_i \cdot A_i}{A_m} \quad \text{und} \quad A_m := \sum_{i=1}^n a_i \cdot A_i$$

Wird dies in  $\otimes$  eingesetzt und die Terme umgruppiert, so ergeben sich effektive Werte für

$$Z_{\text{eff}} \equiv \sum a_i Z_i$$

$$A_{\text{eff}} \equiv A_m = \sum a_i A_i$$

$$\ln I_{\text{eff}} \equiv \sum \frac{a_i Z_i \ln I_i}{Z_{\text{eff}}}$$

$$S_{\text{eff}} \equiv \sum \frac{a_i Z_i \delta_i}{Z_{\text{eff}}}$$

$$C_{\text{eff}} \equiv \sum a_i C_i$$

, die direkt in die Bethe-Bloch-Formel eingesetzt werden können.

NB1: Hier ist es nützlich mit der "mass stopping power"  $\frac{1}{S} \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle$  zu arbeiten

NB2:  $X := S \cdot x$  wird als Massenbelegung bezeichnet:  $\frac{1}{S} \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \equiv \left\langle \frac{dE}{dX} \right\rangle$

# Bethe-Bloch-Formel

hat folgende Charakteristika:

- $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \sim 1/\beta^2$  für  $\beta \approx 0.1 \dots 0.9$   
( $\beta\gamma \approx 0.1 \dots 2$ )
- $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \sim \ln \beta\gamma^2$  für  $\beta\gamma = 5 \dots 100$
- $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \approx \text{const.}$ , Plateau für  $\beta\gamma \approx 500 \dots 1000$
- $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \rightarrow \text{minimal}$  für  $\beta\gamma \approx 4$
- $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \sim \rho \cdot \frac{z}{A} \rightsquigarrow$  größerer Energieverlust bei höherer Dichte  $\rho$  oder größerem  $\frac{z}{A}$
- $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \rightarrow \text{Plateau} \rightsquigarrow$  Höhe des Plateaus  $\sim \ln(1/\sqrt{s})$
- $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \sim z^2 \rightsquigarrow$  größerer Energieverlust für mehrfach geladene Teilchen

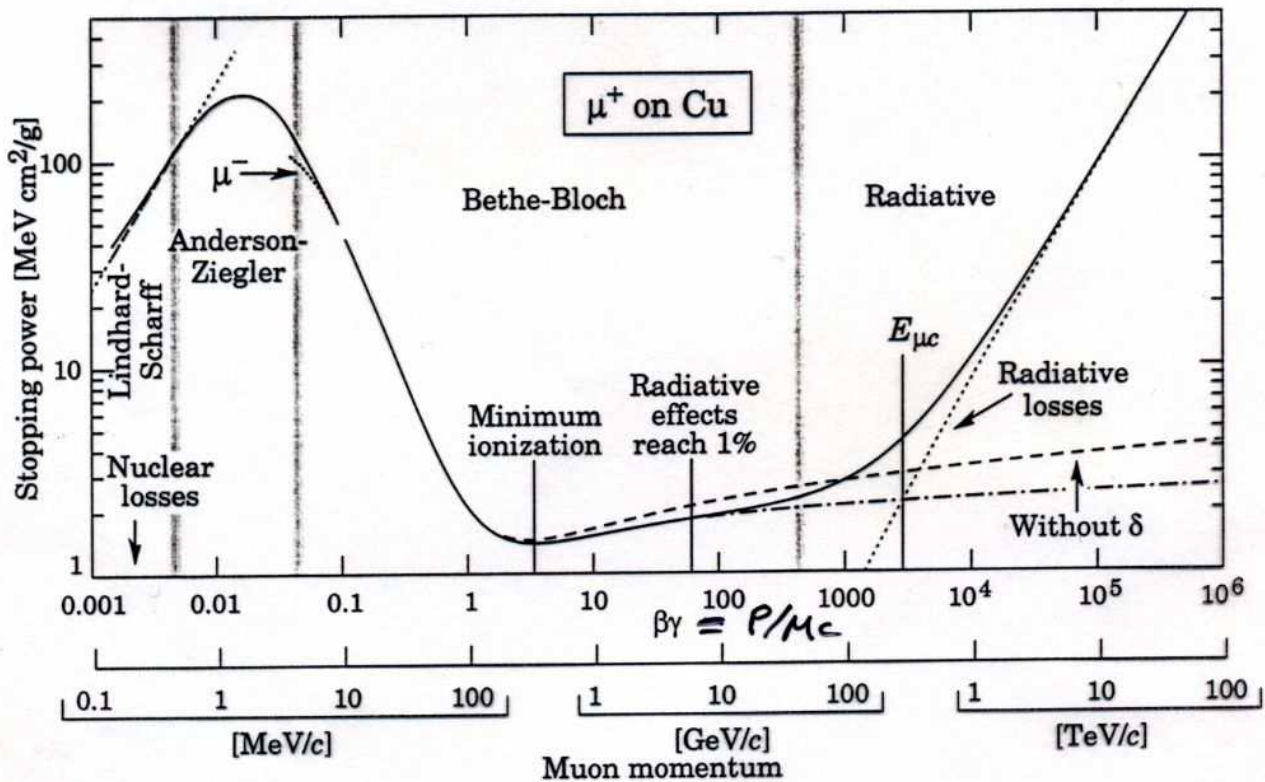
Bethe-Bloch-Formel erhält weitere Korrekturen für:

- $\beta\gamma \leq 0.1$  : höhere Ordnungen der Photon-Matrix-WW  
(NB. für  $0.01 < \beta < 0.05$  keine befriedigende Theorie)
- $\beta\gamma \geq 1000$  : Bremsstrahlung (folgt später)



# Bethe-Bloch-Formel

... mit den zuvor genannten (plus weiteren, kleineren) Korrekturen:



**Fig. 26.1:** Stopping power ( $= \langle -dE/dx \rangle$ ) for positive muons in copper as a function of  $\beta\gamma = p/Mc$  over nine orders of magnitude in momentum (12 orders of magnitude in kinetic energy). Solid curves indicate the total stopping power. Data below the break at  $\beta\gamma \approx 0.1$  are taken from ICRU 49 [2], and data at higher energies are from Ref. 1. Vertical bands indicate boundaries between different approximations discussed in the text. The short dotted lines labeled " $\mu^-$ " illustrate the "Barkas effect," the dependence of stopping power on projectile charge at very low energies [6].

June 18, 2002 13:57

NB: Ausführliche Tabellen zu den atomaren & nuklearen Eigenschaften vieler Elemente und Verbindungen gibt es unter:

<http://pdg.lbl.gov/AtomicNuclearProperties/>

# Bethe-Bloch-Formel

Energieverlust  $\langle \frac{dE}{dx} \rangle$  hängt ab von

- Absorbermedium ( $\rho \cdot \frac{Z}{A}, I$ )
- Teilchen ( $z^2, \beta\gamma$ )

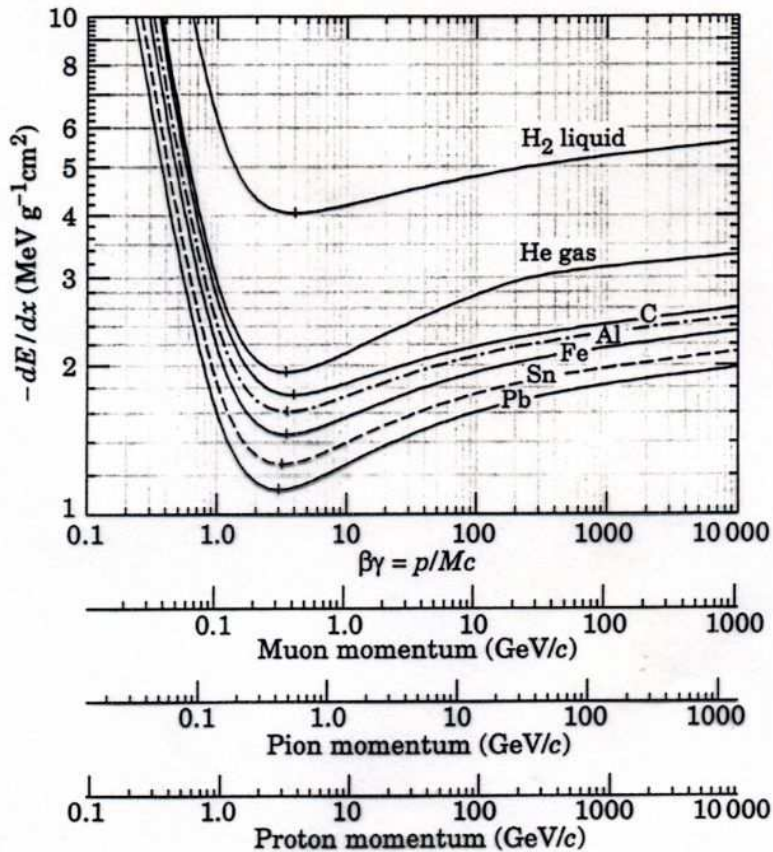


Figure 26.3: Mean energy loss rate in liquid (bubble chamber) hydrogen, gaseous helium, carbon, aluminum, iron, tin, and lead. Radiative effects, relevant for muons and pions, are not included. These become significant for muons in iron for  $\beta\gamma \gtrsim 1000$ , and at lower momenta for muons in higher- $Z$  absorbers. See Fig. 26.20.

$$\beta\gamma \equiv \frac{p}{Mc}$$

→ größere Masse  $M$  bei festem  $p \rightarrow$  kleineres  $\beta\gamma$

→  $\frac{dE}{dx}$  - Kurven für verschiedene Teilchen sind

horizontal verschoben um  $\ln \frac{M_2}{M_1}$

→ Teilchenidentifikation (festes  $p \rightarrow$  unterschiedl.  $\frac{dE}{dx}$ )



# Bethe-Bloch-Formel

... ermöglicht Teilchenidentifikation durch Messung von:

- spezifischer Energieverlust  $\langle dE/dx \rangle$
- Teilchenimpuls

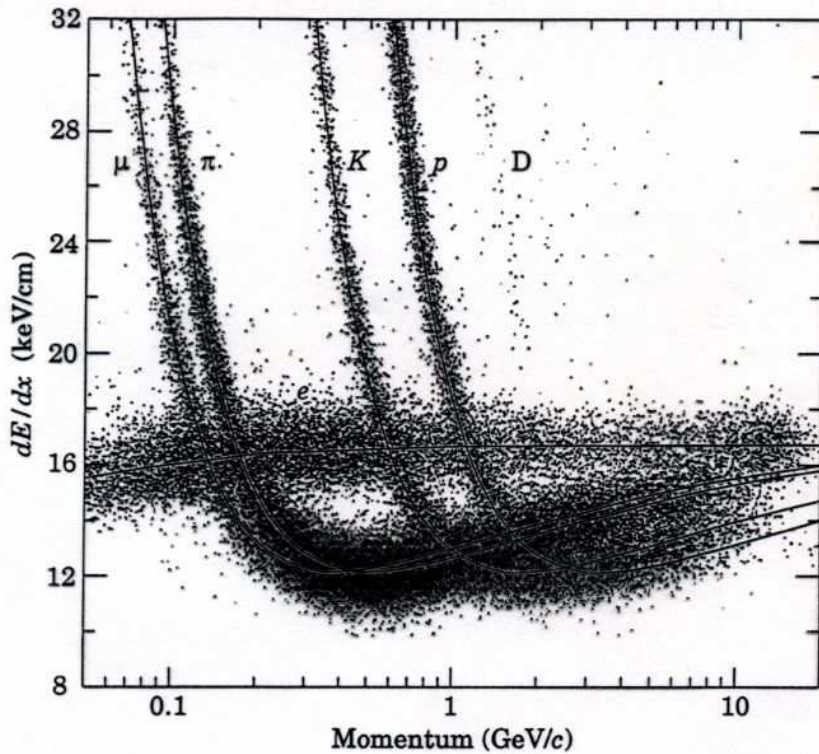


Figure 27.5: PEP4/9-TPC  $dE/dx$  measurements (185 samples @8.5 atm Ar-CH<sub>4</sub> 80-20%) in multihadron events. The electrons reach a Fermi plateau value of 1.4 times minimum. Muons from pion decays are separated from pions at low momenta;  $\pi/K$  are separated over all momenta except in the cross-over region. (Low-momentum protons and deuterons originate from hadron-nucleus collisions in inner materials such as the beam pipe.)

NB: Üblicherweise wird zur Messung von  $\langle \frac{dE}{dx} \rangle$  nur ein beschränkter Energieverlustbereich benutzt, um Beiträge von  $\delta$ -Elektronen zu minimieren, aber auch, um eine  $\approx$  gaussische Energieverlustverteilung ( $\leadsto$  Landau-Verteilung) zu erhalten:

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{T < T_{cut}} = 2\pi r_e^2 \cdot m_e c^2 \cdot S \cdot \frac{N_0 Z^2 z^2}{A \cdot \beta^2} \cdot \left[ \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{cut}}{I^2} - \beta^2 \left( 1 + \frac{T_{cut}}{T_{max}} \right) + \delta \right]$$

# Bethe-Bloch-Formel

Von praktischer Relevanz ist die **Reichweite** eines Teilchens im Absorbermaterial. Dieses folgt aus der Bethe-Bloch-Formel:

$$R = \int_0^R dx = \int_0^{T_0} \frac{dE}{\langle \frac{dE}{dx} \rangle}$$

für ein Teilchen mit kinetischer Energie  $T_0 = \frac{p^2}{m(\gamma+1)}$ .

Aufgrund der Charakteristika der Bethe-Bloch-Formel nimmt der Energieverlust zum Ende der Teilchentrajektorie zu.

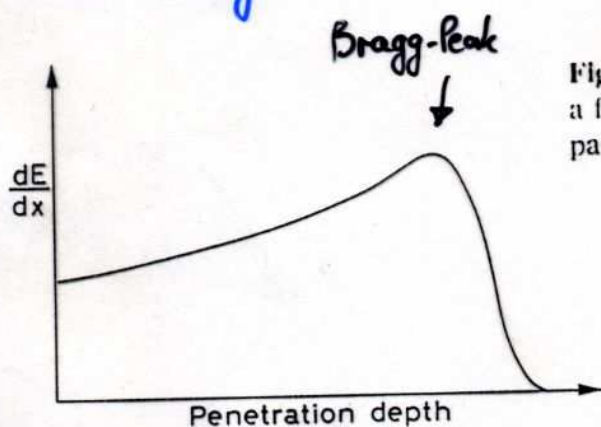


Fig. 2.5. A typical Bragg curve showing the variation of  $dE/dx$  as a function of the penetration depth of the particle in matter. The particle is more ionizing towards the end of its path

Dies gibt die Bragg-Kurve mit einem Maximum bei der größten Reichweite wieder (so genannter Bragg-Peak).

$$\left[ \text{Bragg-Kurve folgt aus } T(r) = T_0 - \int_0^r \langle \frac{dE}{dx} \rangle dx \equiv E(r) - M = \sqrt{p^2(r) + M^2} - M \right]$$

$$\Rightarrow T(r) = M \cdot \left[ \sqrt{1 + (\beta\gamma)^2} - 1 \right]$$

$$\Rightarrow (\beta\gamma)(r) = \frac{T(r)}{M} \cdot \sqrt{1 + 2M/T(r)}$$

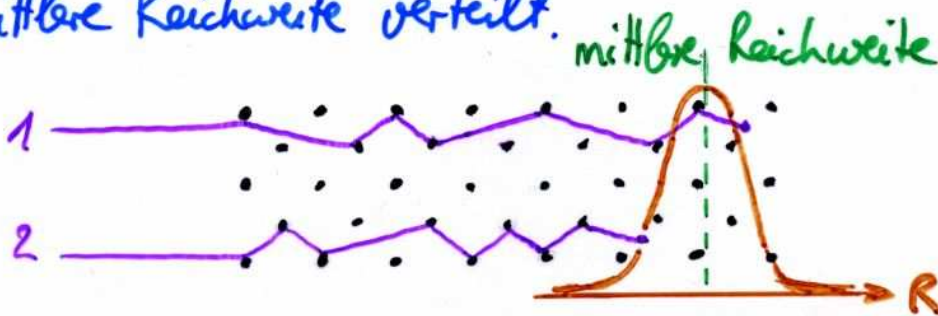
$$\Rightarrow \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle (r) = f((\beta\gamma)(r))$$



# Bethe-Bloch-Formel

Bei der Berechnung der Reichweite müssen noch beachtet werden:

- **Reichweitenstreuung** (range straggling), da zwei Teilchen mit gleicher Anfangsenergie i.A. unterschiedlich viele Stöße auf ihrem Weg erfahren  $\rightarrow$  Reichweite  $\propto$  gaussisch um mittlere Reichweite verteilt.



- **Approximationen in Bethe-Bloch-Formel** insbesondere bei geringen  $\beta\gamma$  und durch Vielfachstreuung (Zick-Zack-Verlauf der Teilchen in Materie  $\rightarrow$  unterschiedl. Weglängen)  $\rightarrow$  empirische Formel:

$$R(T_0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{empirisch}}}{R(T_{\min})} + \int_{T_{\min}}^{T_0} \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle^{-1} dE$$

Bethe-Bloch-Formel

- **Faustformel**, weil  $1/\beta^2$ -Term bei Energieverlust

dominiert:  $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \sim \frac{1}{\beta^2} \sim \frac{1}{T}$

$$\Rightarrow R \sim T^2$$

genauer aus Daten:  $R \sim T^{1.75}$



## Bethe-Bloch-Formel & Landau-Verteilung

Die Darstellung des Energieverlustes gemäß der Bethe-Bloch-Formel beschreibt nur den **mittleren Energieverlust**. Tatsächlich treten aber erhebliche Fluktuationen beim Energieverlust auf, denn  $\frac{d\Delta}{dE}$  ist eine Funktion von  $E$ . Die Auswirkungen solcher Fluktuationen zeigten sich schon in der Reichweitenstreuung (Streuung in  $dx$  bei festem  $dE$ ). Hier soll nun die Energienstreuung (energy straggeling: Streuung in  $dE$  bei festem  $dx$ ) betrachtet werden.

Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- **dicke Absorber:**

Aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes (die Summe von  $N$  Zufallsvariablen, die der gleichen statistischen Verteilung unterliegen, nähert sich einer Gauß-Kurve für  $N \rightarrow \infty$ ) folgt in diesem Fall eine Gauß-Kurve als Verteilung der einzelnen Energieverluste  $\Delta E$ , die mit Breite  $\sigma$  um  $\overline{\Delta E}$  liegt:

$$\frac{dE}{dx} \rightarrow \exp\left[-\frac{(\Delta E - \overline{\Delta E})^2}{2\sigma^2}\right]$$

wobei  $\sigma_0^2 = 4\pi r_e^2 \cdot (m_e c^2)^2 \cdot N_0 \cdot S \cdot \frac{Z}{A} \cdot x$  für nicht-relativist.

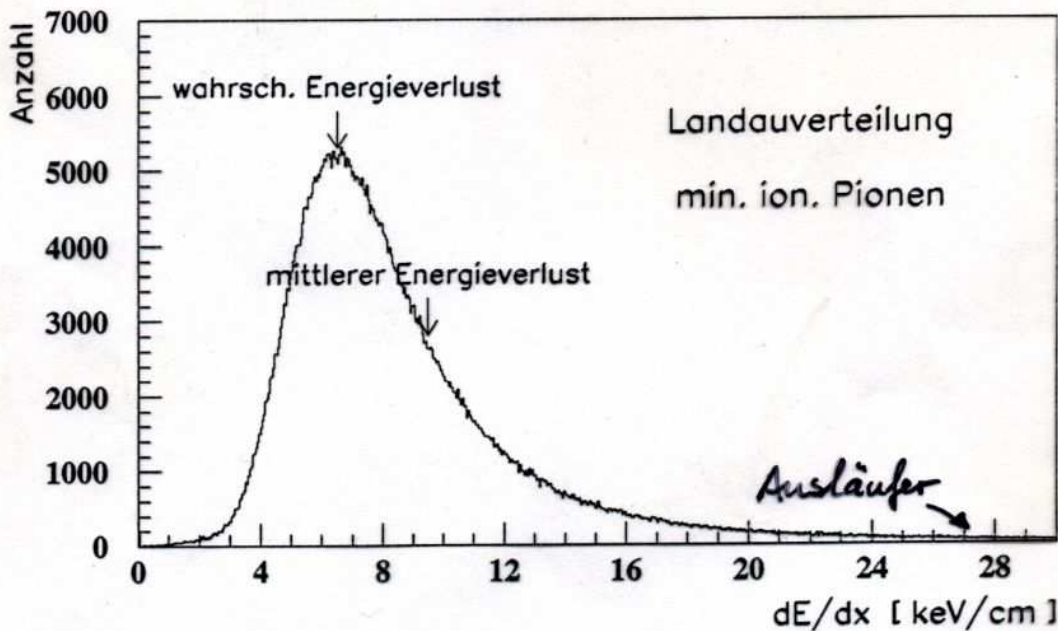
und  $\sigma^2 = \frac{(1 - \beta^2/2)^2}{1 - \beta^2} \sigma_0^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2/2) \cdot \sigma_0^2$  für relativist.

Teilchen gilt.



# Landau-Verteilung

Eine mehrfache Messung des Energieverlustes von minimal ionisierenden (d.h.  $\beta\gamma \approx 4$ ) Pionen in einem Ar: CH<sub>4</sub>  $\approx$  80:20 Gasgemisch bei 4 bar Druck:



- **mittlerer Energieverlust** :  $\langle \frac{dE}{dx} \rangle$  aus Bethe-Bloch-Formel
- **wahrscheinlichster** " : relevant für Teilchenidentifikation, da Ausläufer zu hohen  $dE/dx$ -Werten zu ...
- **$\delta$ -Elektronen** : führt, die exp. schwierig zu messen sind, die aber für einen korrekten mittleren Energieverlust berücksichtigt werden müssen!

# Landau-Verteilung

Der zweite Fall sind

- dünne Absorber,

wofür ein Parameter betrachtet wird

$$\kappa := \frac{\overline{\Delta E}}{T_{\max}}$$

$\overline{\Delta E}$ : mittlerer Energieverlust

$T_{\max}$ : max. Energieübertrag

, mit denen verschiedene theoretische Beschreibungen unterschieden werden können. Dazu sei zur Vereinfachung nur der Vorfaktor ( $\frac{1}{\beta^2}$ -Term) der Bethe-Bloch-Formel betrachtet:

$$\overline{\Delta E} = 2\pi r_e^2 \cdot m_e c^2 \cdot N_0 S \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \cdot \kappa =: \xi$$

Für:  $\triangleright \kappa < 10$  spricht man von dünnen Absorbern

$\triangleright \kappa < 0.01$  : Landau-Theorie (J. Landau in: J. Phys. (USSR) 8 (1944) 2)

$\triangleright \kappa = 0.01 \dots 10$  : Symon-Theorie, Vavilov-Theorie (s.: S.H. Seltzer, H.J. Berger in: Nucl. Science Series Report, 39 (1964))

$\triangleright \kappa > 10$  ist der Bereich dicker Absorber, wo der zentrale Grenzwertsatz anwendbar ist.

Allen Theorien ist gemeinsam, dass sie komplizierte Ausdrücke liefern, die eine asymmetrische Energieverlustverteilung mit langen Ausläufern zu hohen Energieverlustwerten beschreiben



# Vavilov- und Symon-Verteilungen

beschreiben die experimentellen Daten zufriedenstellend!

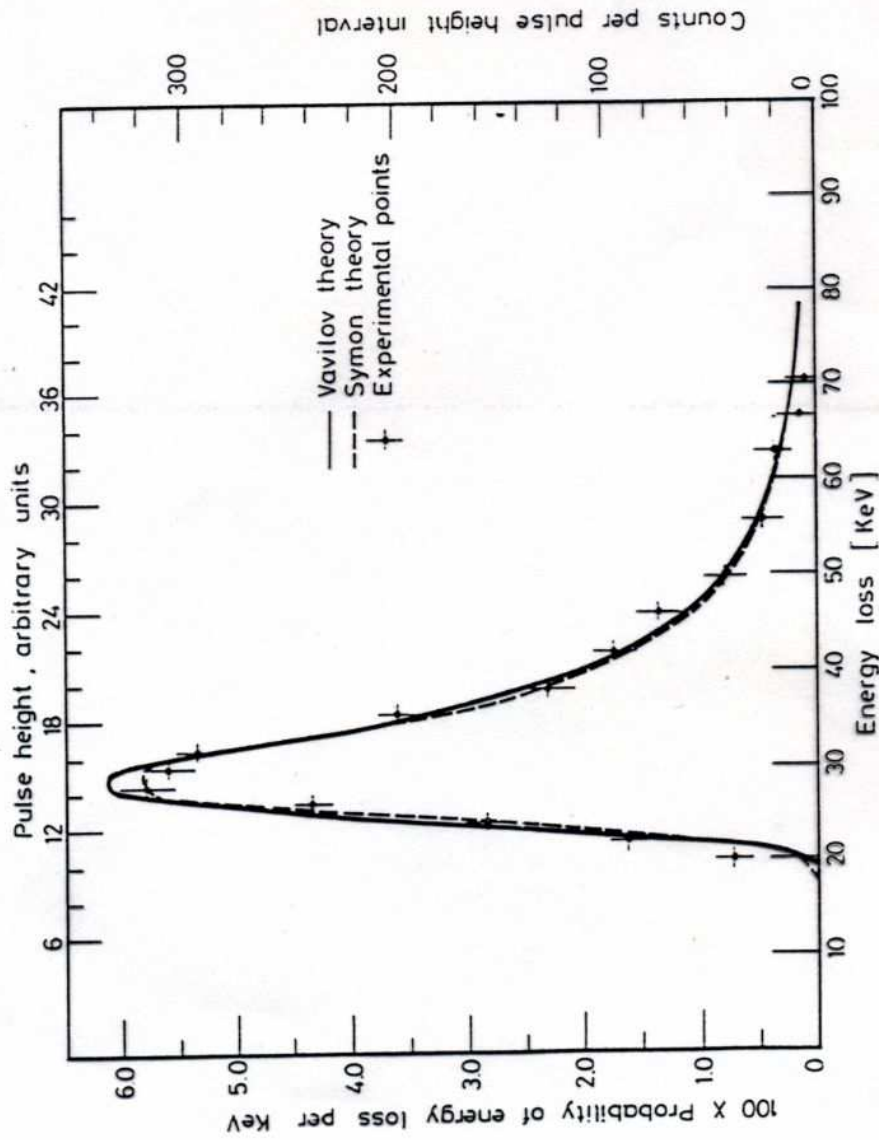


Fig. 2.20. Comparison of Vavilov's and Symon's theories with experiment (from Seltzer and Berger [2.29])

Alternativ zu den genannten Theorien kann auch im Photo-Absorptions-Ionisations-Modell die Häufigkeitsverteilung per Monte-Carlo-Integration berechnet werden → Energieverlust-Verteilung

## $\delta$ -Elektronen

Die maximale kinetische Energie, die auf ein Elektron im Absorbermaterial übertragen werden kann, ist

$$T_{\max} = \frac{2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma \left(\frac{m_e}{M}\right) + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2} \stackrel{\gamma m_e \ll M}{\approx} 2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$$

und kann für große  $\beta\gamma$  erheblich werden (z.B.  $M = M_{\text{Proton}}$ )

$\beta\gamma \approx \gamma \approx 100 \rightarrow \gamma m_e \approx 100 m_e \ll M_{\text{Proton}} \approx 1800 m_e$  und

$$T_{\max} \approx 2 \cdot m_e \cdot (100)^2 \approx 20000 \cdot m_e c^2 \approx 10 \text{ GeV !}$$

Solche  $\delta$ -Elektron (oder "knock-on"-Elektronen) können

als Teilchen in einem Spurdetektor beobachtet werden.

Tatsächlich ist die Häufigkeit solcher sehr harten

Stöße gering (i.W. sogar vernachlässigbar):

$$\frac{d^2 N}{dT dx} \sim \frac{z^2}{\beta^2} \cdot \frac{1}{T^2} \quad \text{für } T \geq 2I$$

Für die Teilchenidentifikation mittels  $\frac{dE}{dx}$ -Messung sind

$\delta$ -Elektronen problematisch, weil sie a priori nicht von Teil-

chen der Hauptwechselwirkung zu unterscheiden sind.

Daher nutzt die Teilchenidentifikation häufig eine Energie-

verlustformel mit  $T_{\text{cut}} < T_{\max}$ , d.h.  $\delta$ -Elektronen

werden verworfen (außerdem: Energieverlustverteilung  $\approx$  gaußsich).



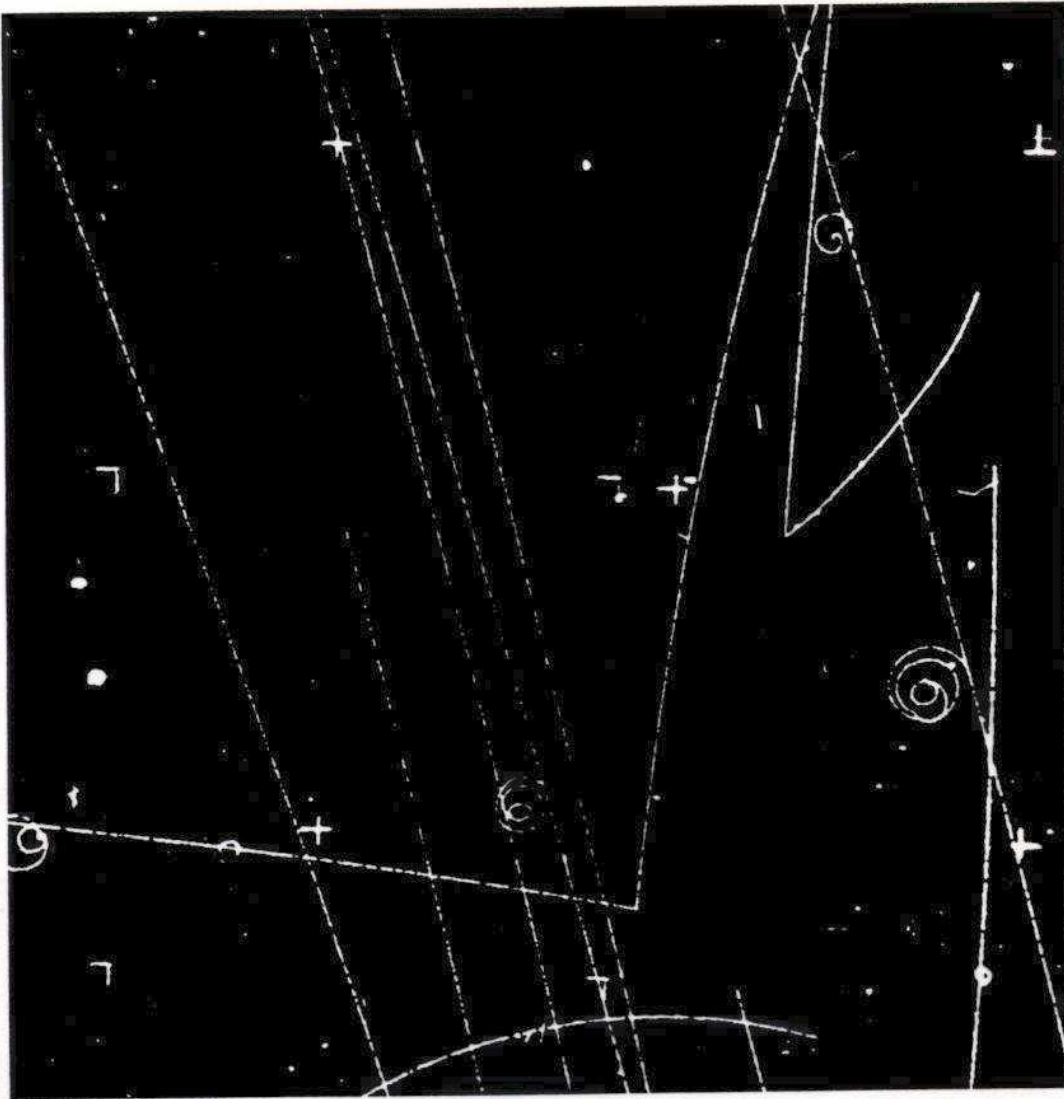


Abb. 7.15. Blasenkammeraufnahme der Reaktion  $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$ , die beim Eintritt eines  $\pi^-$ -Strahls in die wasserstoffgefüllte Kammer auftrat. Die Pionbahnen sind die schräg durch die Aufnahme gehenden parallelen Geraden. Die  $\Lambda^0$ - und  $K^0$ -Bahnen sind nicht sichtbar, da diese Teilchen elektrisch neutral sind; sie werden aber durch ihre Zerfallsprodukte identifiziert (s. Abb. 7.16). (Mit freundlicher Genehmigung des Lawrence Berkeley Laboratory, The University of California, Berkeley, California)

Spiralisierende Spuren stammen  
von  $\delta$ -Elektronen

# Čerenkov-Effekt & Übergangsstrahlung

Der diff. Wirkungsquerschnitt  $\frac{d\sigma}{dE}$  enthält:

- ▶ 3 Terme, die von  $\sigma_y(E)$  abhängen, und
- ▶ 1 Term, der unabhängig von  $\sigma_y(E)$  ist:

$$\left. \frac{d\sigma}{dE} \right|_y = \frac{\alpha}{\beta^2 \pi} \cdot \frac{1}{2Nhc} \left( \beta^2 - \frac{\epsilon_1}{|\epsilon|^2} \right) \cdot \theta$$

wobei

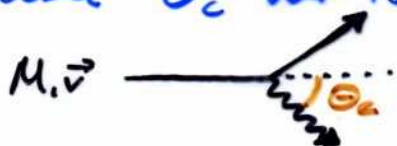
$$\tan \theta = \frac{\epsilon_2 \beta^2}{1 - \epsilon_1 \beta^2} \quad \text{mit} \quad \epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$$

ist. Für Energieverluste  $E < I$ , also unterhalb der Ionisationsschwelle, verschwindet  $\sigma_y(E) \xrightarrow{E < I} 0$ , sodass nur noch der obige Term zum Energieverlust beitragen kann. Dabei handelt es sich um den Energieverlust durch Čerenkov-Licht.

Da  $E < I$  ist, die Wechselwirkung also im "optischen Bereich" (I) liegt, ist hier  $\epsilon_2 = 0$  und die Phase  $\theta = \pi$ . Damit gilt in diesem Bereich:

$$\left. \frac{d\sigma}{dE} \right|_y = \frac{\alpha}{2Nhc} \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon} \right) = \frac{\alpha}{2Nhc} \sin^2 \theta_c,$$

wobei  $\theta_c$  der Abstrahlwinkel des Čerenkov-Lichtes ist:



$$\cos \theta_c := \frac{1}{\beta \sqrt{\epsilon}} = \frac{c/n}{v} = \frac{c_m}{v} \leq \frac{1}{n}$$



## Čerenkov-Effekt

Aus  $\frac{dN}{dE} \Big|_c$  lässt sich der Fluss der Čerenkov-Photonen berechnen, wenn mit der Anzahldichte der Elektronen im Absorbermaterial, d.h.  $N \cdot Z$ , multipliziert wird:

$$\frac{d^2 N_c}{dE dx} = \frac{\alpha \cdot z^2}{\hbar c} \cdot \sin^2 \theta_c = \frac{d^2 z^2}{r_e \cdot m_e c^2} \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(E)} \right)$$

für ein Teilchen der Ladung  $z \cdot e$  ( $r_e = \alpha \cdot \hbar^2 / m_e c^2$ ). Wird der konst. Vorfaktor ausgewertet ( $r_e \approx 2.82 \text{ fm}$ ,  $\alpha = 1/137$ ,  $m_e c^2 \approx 511 \text{ keV}$ ), gilt:  $\frac{d^2 N_c}{dE dx} \approx 370 \cdot \sin^2 \theta_c / \text{eV} \cdot \text{cm}$  Č-Photonen, d.h.

je eV Energieverlust werden in 1cm Absorber maximal 370 Č-Photonen abgestrahlt, falls  $\sin^2 \theta_c = 1$ . Doch  $\sin^2 \theta_c$  ist maximal  $1 - \frac{1}{n^2}$ . Daher erzeugen (opt.) dichte

Materialien mehr Čerenkov-Photonen als (opt.) dünne.

Bei Gasen, d.h.  $n \approx 1$ , treten nur sehr wenige Č-Photonen auf.

Interessant ist noch das Spektrum der Č-Photonen. Mit  $E = \frac{\hbar c}{\lambda} z \alpha$

$$\text{folgt: } \frac{d^2 N_c}{dx d\lambda} = - \frac{2\pi \alpha z^2}{\lambda^2} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\lambda)} \right)$$

⇒ Čerenkov-Licht ist durch kurzwellige Strahlung dominiert, erscheint also bläulich!

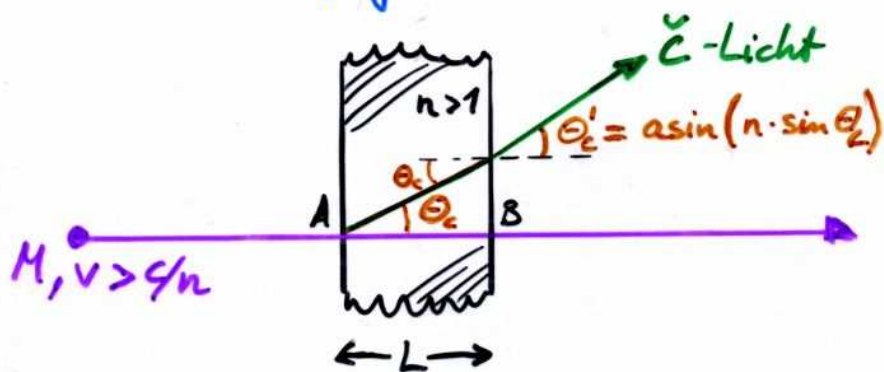


## Übergangsstrahlung

Die Integration von  $d^2N_c/dx d\lambda$  liefert für große Absorberlängen ( $\int_0^L dx, L \gg \lambda$ ) die Anzahl der Čerenkov-Photonen.

Bei kurzen Radiatoren kann die Anzahl der Photonen aus der Übergangsstrahlung (transition radiation) berechnet werden.

Dazu sei folgender Fall betrachtet:



wobei die Interferenz (d.h. der Phasenunterschied) zwischen den Č-Photonen vom Punkt A und Punkt B relevant ist. Dieser Phasenunterschied ist:

$$\phi(\theta) = \frac{2\pi L}{\lambda} \left( \cos \theta_c - \frac{1}{\beta n} \right)$$

Zudem vergrößert die Beugung den Čerenkov-Winkel, sodass Č-Strahlung auftreten kann, obwohl  $v < \frac{c}{n}$ , wenn der Radiator sehr dünn ist ( $L \approx \lambda$ ), also selbst wenn der Č-Winkel  $\theta_c$  unphysikalisch ( $\hat{=}$  komplex) ist. Dieser Fall wird insbesondere im Röntgenbereich für große  $\gamma$  und bei sehr kleinen Winkeln  $\sim 1/\gamma$  relevant.



## Übergangsstrahlung

Für den Röntgenbereich ist  $\epsilon \approx 1$  (und  $\epsilon_2 \approx 0$ ) und kann durch  $n^2 \equiv \epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$  mit der Plasmafrequenz

$$\omega_p = \sqrt{Z N e^2 / \epsilon_0 \cdot m_e}$$

approximiert werden. Die Rechnung für die Interferenz ergibt in der Näherung  $\beta \approx 1$  und kleiner Winkel  $\Theta_c$  bzw.  $\Theta_c'$  den differentiellen Fluss von Übergangsstrahlungsphotonen:

$$\frac{d^2 N_{TR}}{d\omega d\Omega} = \frac{\alpha Z^2}{\pi^2 \omega} \cdot \Theta_c'^2 \cdot 4 \sin^2 \left[ \frac{\omega L}{4c} \left( \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \Theta_c'^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right) \right] *$$

$$* \left( \frac{1}{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \Theta_c'^2} - \frac{1}{\frac{1}{\gamma^2} + \Theta_c'^2} \right)^2$$

Dieser hat ein Maximum im Bereich  $\Theta_c' \sim 1/\gamma$  und nimmt ab für hohe Frequenzen  $\omega$  ( $\approx$  Röntgenstrahlung).

Wird nur eine Grenzfläche betrachtet und der Interferenzeffekt ( $4 \cdot \sin^2[\dots]$ -Term) vernachlässigt, ergibt sich für den Fluss nach Integration über  $d\Omega \approx 2\pi \Theta_c' d\Theta_c'$ .

$$\frac{dN_{TR}}{d\omega} \approx \frac{2\alpha Z^2}{\pi \omega} \ln \frac{\gamma \omega_p}{\omega} \quad \text{und} \quad E_{TR} \approx \frac{\alpha Z^2}{3} \cdot \gamma \hbar \omega_p \quad \text{für die abgestrahlte Energie}$$

# Übergangsstrahlung

Für praktische Anwendungen muss der Interferenzterm natürlich berücksichtigt werden. Dies hat zur Folge, dass der Energiefluss nicht  $\sim y$  ansteigt, sondern sättigt: der so genannte "Formationszonen-Effekt". Die Größe der Formationszone ist

$$F_z := \frac{\lambda \sqrt{\pi}}{\frac{1}{y^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \theta_c'^2} \approx \frac{\lambda y^2}{3\pi} \quad \left( \begin{array}{l} \theta_c' \sim 1/y \\ \omega \sim y\omega_p \end{array} \right)$$

Mit  $F_z$  wird das Argument des Interferenz-Terms zu

$$4 \sin^2[\dots] \rightsquigarrow 4 \sin^2\left[\frac{L}{F_z}\right]$$

somit tritt negative Interferenz generell für  $L \lesssim F_z$  auf.

Aufgrund dessen saturiert der Fluss der TR-Photonen bei

$$y \approx \sqrt{\frac{3\pi L}{\lambda}}$$

Anders betrachtet erhält man eine Mindestdicke  $L$  für den Radiator, um die Sättigung für ein vorgegebenes  $y$  zu vermeiden.



# Čerenkov-Effekt & Übergangsstrahlung

werden beide häufig genutzt zur Teilchenidentifikation:

## • Čerenkov-Effekt:

▷ Abstrahlwinkel  $\theta_c$ :  $\cos \theta_c = \frac{1}{\beta n} \Rightarrow \beta = \frac{1}{n \cos \theta_c}$

mit separater Impulsmessung  $p$ :  $\Rightarrow m = \frac{p^2}{E^2} \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 1}$

▷ Schwelleneffekt zur Trennung von Teilchensorten bei gleichem Impuls  $p$ :  $\beta_i = \frac{p}{\sqrt{p^2 + (m_i c)^2}}$

und der Čerenkov-Schwelle:  $\beta_i \geq \beta_c \equiv \frac{1}{n}$

## • Übergangsstrahlung:

▷ i.W. Trennung leichte/schwere Teilchen:  $E_{TR} \sim \gamma$

und:

$$\gamma = \frac{E}{mc^2}$$

Insbesondere für Elektronen wird  $\gamma$  sehr groß und damit sowohl die Energie der Übergangsstrahlungsphotonen

$E_{TR}$  als auch deren Anzahl im Röntgenbereich

$$\frac{dN_{TR}}{d\omega} \sim \frac{1}{\omega} \ln \frac{\gamma \omega_p}{\omega}$$

, wobei die typ. TR-Photonenergie beträgt,

$$E_\gamma \approx \frac{1}{4} \gamma \omega_p$$



## Energieverlust von Elektronen & Positronen

Die bisherige Betrachtung ging von schweren geladenen Teilchen aus, welche das Absorbermaterial ionisieren. Wenn man Elektronen/Positronen als stoßende Teilchen hat, ergeben sich einige Korrekturen an der Bethe-Bloch-Formel, weil:

- Masse beider Stoppartner gleich groß
- Ununterscheidbarkeit zwischen Stoppartnern bei Elektronen
- Annikulationsprozess bei Positronen  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$
- Bremsstrahlungsprozesse bei hohen Energien zusätzlich zu Ionisationsprozessen

Für Elektron & Positron ergeben sich Unterschiede in  $\langle \frac{dE}{dx} \rangle$  vor allem im Bereich kleiner  $\beta\gamma$  (ca. 6% bei  $\beta\gamma \approx 0.5$ ), während bei großen  $\beta\gamma$  sehr kleine Effekte vorliegen (ca. 1.3% bei  $\beta\gamma \approx 3000$ ).

Von größerer Bedeutung sind die Unterschiede in  $\langle \frac{dE}{dx} \rangle$  zwischen Elektronen/Positronen und schweren Teilchen, die teilweise mehr als 20% betragen.



# Energieverlust von Elektronen & Positronen

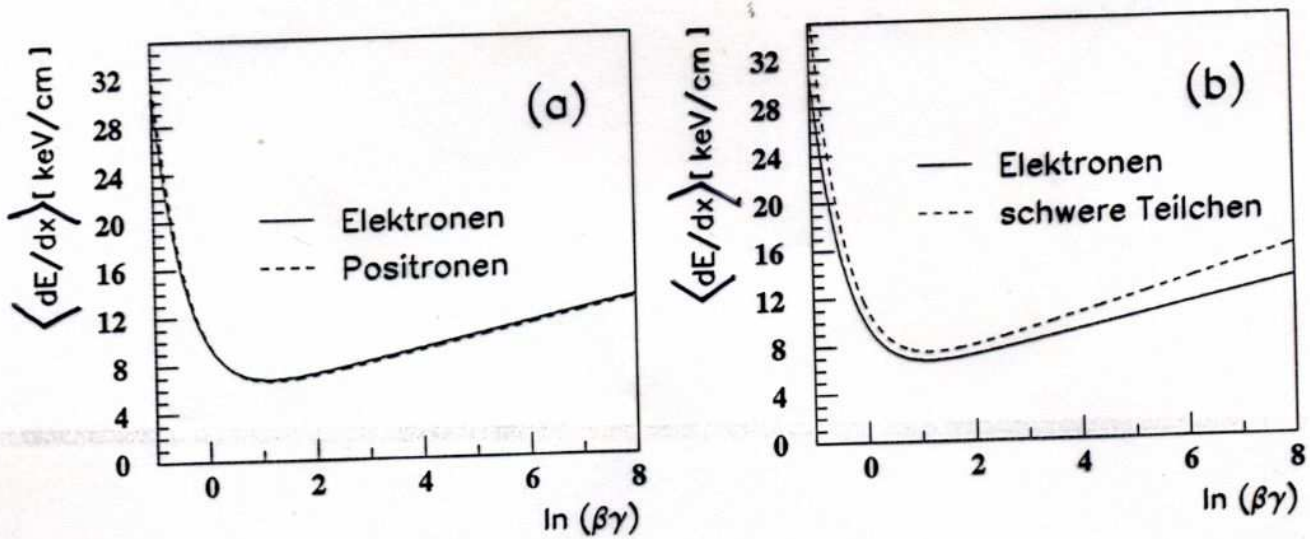


Abbildung A.3: Unterschied des mittleren Energieverlustes durch Ionisation ohne Dichtekorrektur und ohne Bremsstrahlung für Elektronen und Positronen (a) und Elektronen und schwere Teilchen (b).

Im ultrarelativistischen Fall können die Energieverluste folgendermaßen genähert werden (ohne Dichtekorrektur):

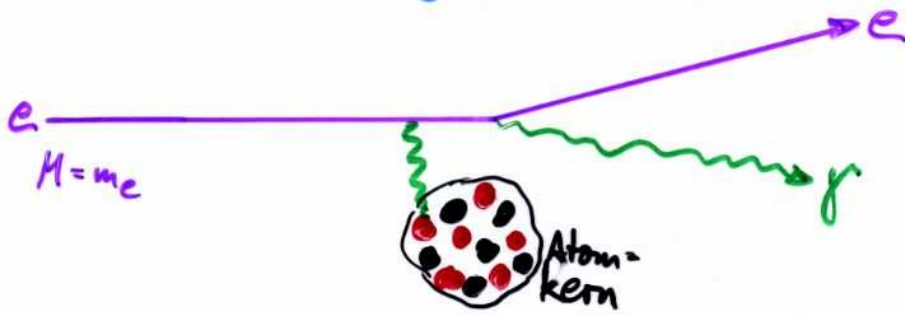
$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{Elektron}} = 2\pi r_e^2 \cdot m_e c^2 \cdot \rho \frac{N_0 Z}{A \cdot \beta^2} \left[ 2 \ln \frac{2mc^2}{I} + 3 \ln \gamma - \ln 8 + \frac{1}{2} \right]$$

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{schw. Teilch.}} = 2\pi r_e^2 \cdot m_e c^2 \cdot \rho \frac{N_0 Z}{A \cdot \beta^2} \left[ 2 \ln \frac{2mc^2}{I} + 4 \ln \gamma - 2 \right]$$

Vor allem aufgrund der unterschiedlichen  $\ln \gamma$ -Abhängigkeit resultieren wachsende Differenzen bei zunehmendem  $\beta\gamma$ .

# Bremsstrahlung

Bei sehr hohen Elektron/Positron-Energien ( $E \gtrsim 10 \text{ MeV}$ ) stellt Bremsstrahlung den dominanten Prozess dar, durch den  $e^-/e^+$  Energie an die Materie abgeben:



Der Wirkungsquerschnitt für diesen Prozess ist:

$$\sigma \sim \frac{1}{M^2}$$

Daher ist Bremsstrahlung vor allem für Elektron & Positron relevant, denn für Myonen (dem nächst leichtesten Teilchen) mit  $m_\mu \approx 207 \cdot m_e$  ist Bremsstrahlung rund 40000-fach geringer als für Elektronen. Erst bei extrem hohen Energien kann Bremsstrahlung von Myonen bedeutend werden ( $E_\mu \gtrsim 1 \text{ TeV}$ ), da der Energieverlust proportional zur Teilchenenergie ist.



# Bremsstrahlung

Bei sehr hohen Elektron/Positron-Energien  $E$  ist der Wirkungsquerschnitt der Bremsstrahlung eines Photons der Energie  $h\nu$  näherungsweise ( $E \gg m_e c^2 / Z^{1/3} \cdot \alpha$ )

$$d\sigma \approx 4Z^2 r_e^2 \alpha \frac{d\nu}{\nu} \cdot \ln(183 \cdot Z^{-1/3})$$

Damit ist also der mittlere Energieverlust durch Bremsstrahlung unabhängig von  $\nu$

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{rad}} \approx \int_0^{E/h} \frac{N_0}{A} \cdot h\nu \cdot \frac{d\sigma(E, \nu)}{d\nu} d\nu$$

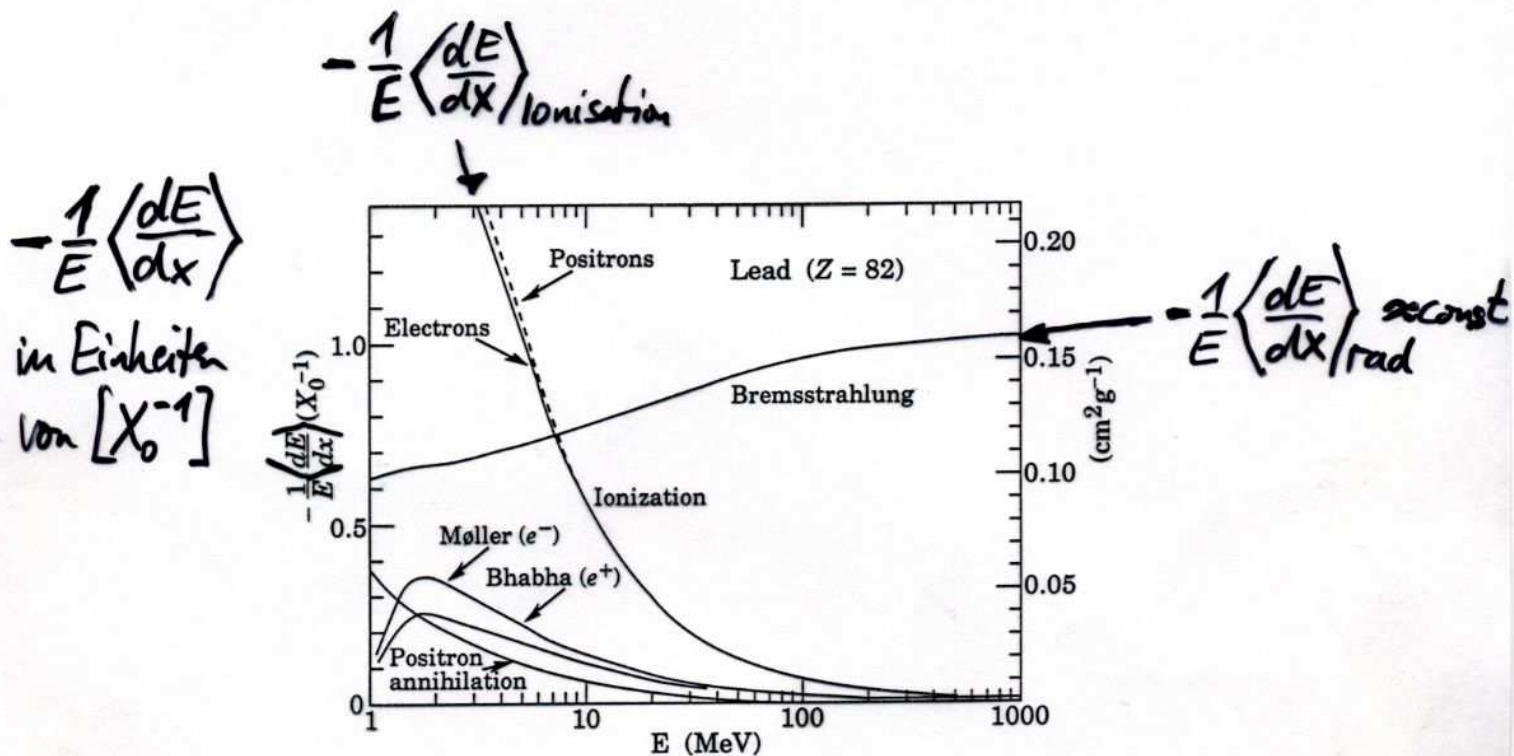
$$\Rightarrow -\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{rad}} \approx 4 r_e^2 \alpha \cdot \int_0^{E/h} \frac{N_0}{A} \cdot Z^2 \cdot E \cdot \ln(183/Z^{1/3})$$

Man beachte:

- $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{rad}} \sim E$
- $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{rad}} \sim Z^2 \cdot \ln(183/Z^{1/3})$
- $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{rad}} \sim r_e^2 \sim 1/m_e^2$

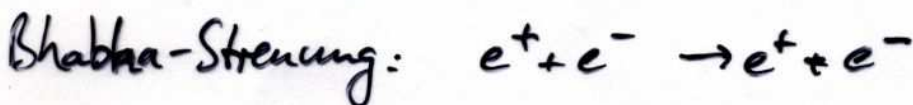
Da die Abhängigkeit von  $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{rad}}$  von  $E$  eine einfache Proportionalität ist, bilden alle anderen (materialabhängigen) Konstanten eine reziproke Länge: **Strahlungslänge**

# Energieverlust von Elektronen & Positronen



**Figure 26.9:** Fractional energy loss per radiation length in lead as a function of electron or positron energy. Electron (positron) scattering is considered as ionization when the energy loss per collision is below 0.255 MeV, and as Møller (Bhabha) scattering when it is above. Adapted from Fig. 3.2 from Messel and Crawford, *Electron-Photon Shower Distribution Function Tables for Lead, Copper, and Air Absorbers*, Pergamon Press, 1970. Messel and Crawford use  $X_0(\text{Pb}) = 5.82 \text{ g/cm}^2$ , but we have modified the figures to reflect the value given in the Table of Atomic and Nuclear Properties of Materials ( $X_0(\text{Pb}) = 6.37 \text{ g/cm}^2$ ).

$\hookrightarrow \cong 0.56 \text{ cm}$





# Bremsstrahlung von Myonen

Trotz der  $\approx 200$ -fach größeren Myon-Masse tritt bei sehr hohen Myon-Energien Bremsstrahlung auf ( $E_\mu \gtrsim 1\text{TeV}$ ):

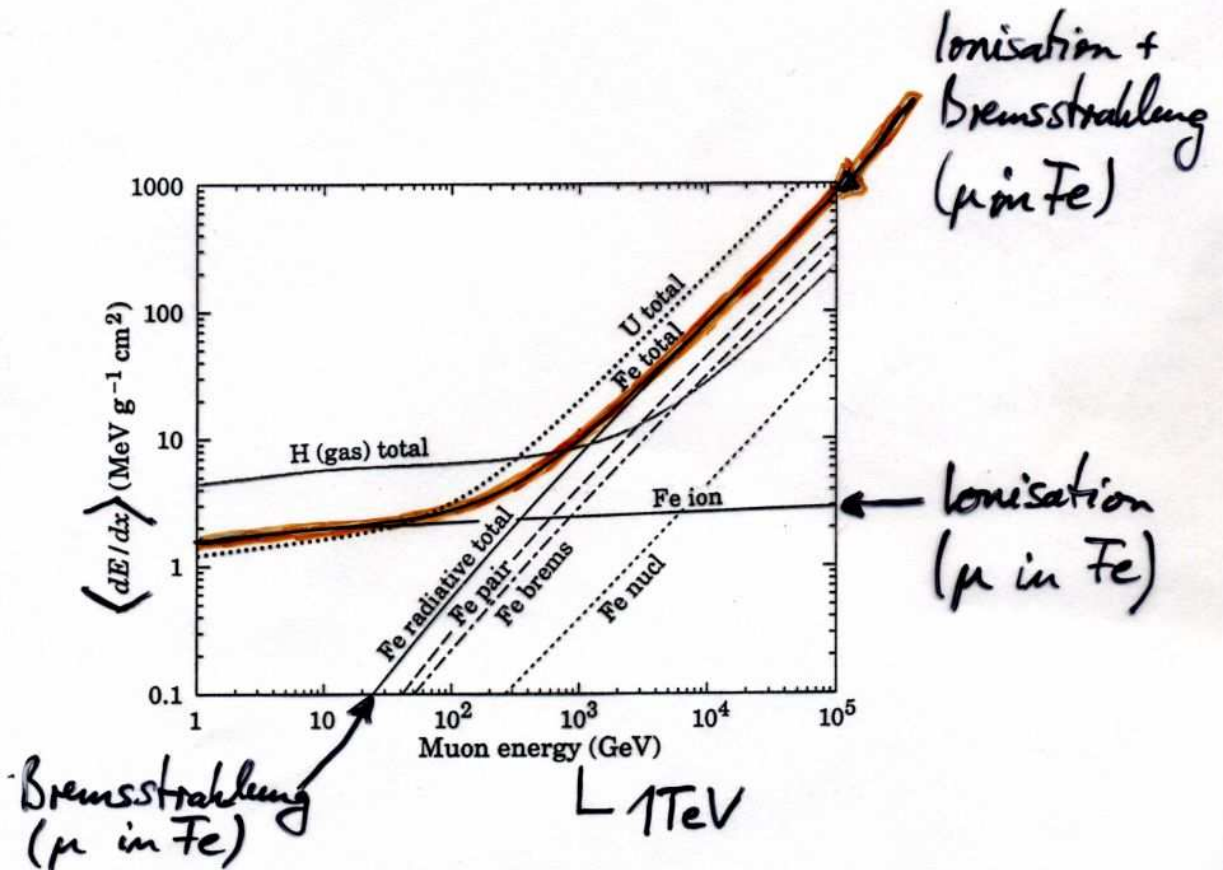


Figure 26.20: The average energy loss of a muon in hydrogen, iron, and uranium as a function of muon energy.

## Strahlungslänge $X_0$

... gibt ein praktisches Maß für die Absorption der Teilchenenergie in Materie. Wird wie folgt umgestellt:

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{rad}} \sim E \rightsquigarrow -\frac{dE}{E} \sim dx$$

So. folgt für die Energie des Teilchens beim Durchqueren des Absorbers:

$$E(x) = E_0 \cdot \exp(-x/X_0)$$

Also ist nach der Strecke  $X_0$  die anfängliche Energie auf  $\% \approx 37\%$  abgesunken. Der Vergleich mit  $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{rad}}$  ergibt für die Strahlungslänge

$$\frac{1}{X_0} \approx 4r_e^2 \alpha \cdot \rho \frac{N_0}{A} \cdot Z^2 \ln(183/Z^{1/3})$$

Einige typische Strahlungslängen:

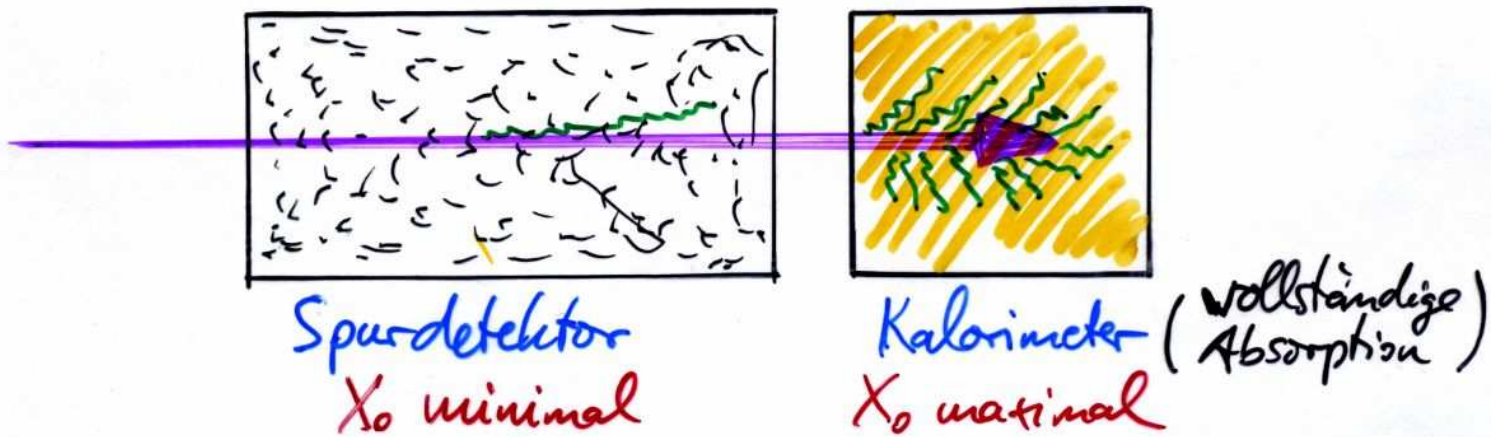
Luft	$X_0 = 30050 \text{ cm}$
H <sub>2</sub> O	36.1 cm
NaJ	2.59 cm
Pb	0.56 cm
Cu	1.43 cm
Al	8.9 cm
Fe	1.76 cm

(NB: Häufig wird die Dichte  $\rho$  in  $X_0$  absorbiert, dann ist  $[X_0] = \text{g/cm}^2$ )



## Strahlungslänge $X_0$

- Die große praktische Bedeutung von  $X_0$  liegt bei der Dimensionierung von Detektoren, einerseits hinsichtlich
- vollständiger Energieabsorption und andererseits
  - Minimierung von Material, welches durch Bremsstrahlung zu systematische Energiefehlmessungen führen könnte.



- Für Mischungen oder chem. Verbindungen kann die Strahlungslänge durch

$$\frac{1}{X_0} = \sum_j \frac{w_j}{X_{0j}}$$

approximiert werden, wobei  $w_j$  und  $X_{0j}$  die Gewichtsanteile und Strahlungslängen für die Komponente  $j$  sind.

( $w_j := \frac{a_j A_j}{\sum_i a_i A_i}$  mit  $a_j = \text{Anzahl der Atome vom Typ } j$ )



## Bremsstrahlung vs. Ionisation

Bremsstrahlung überwiegt als Energieverlustmechanismus bei sehr hohen Energien über Ionisation. Bedeutsam ist insbesondere die stärkere Materialabhängigkeit

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{rad}} \sim Z^2$$

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{ion}} \sim Z$$

Um eine approximative Beschreibung des Energieverlustes zu erhalten, wird für jedes Material eine **kritische Energie**  $E_c$  definiert, wo

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{rad}} = \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{ion}} \quad \text{für } E = E_c$$

Für  $E < E_c$  dominiert Ionisation, für  $E > E_c$  Bremsstrahlung.

Die kritische Energie kann näherungsweise durch die Bethe-Heitler-Formel berechnet werden

$$E_c \approx \frac{1600 \cdot m_e c^2}{Z} \approx \frac{580 \text{ MeV}}{Z}$$

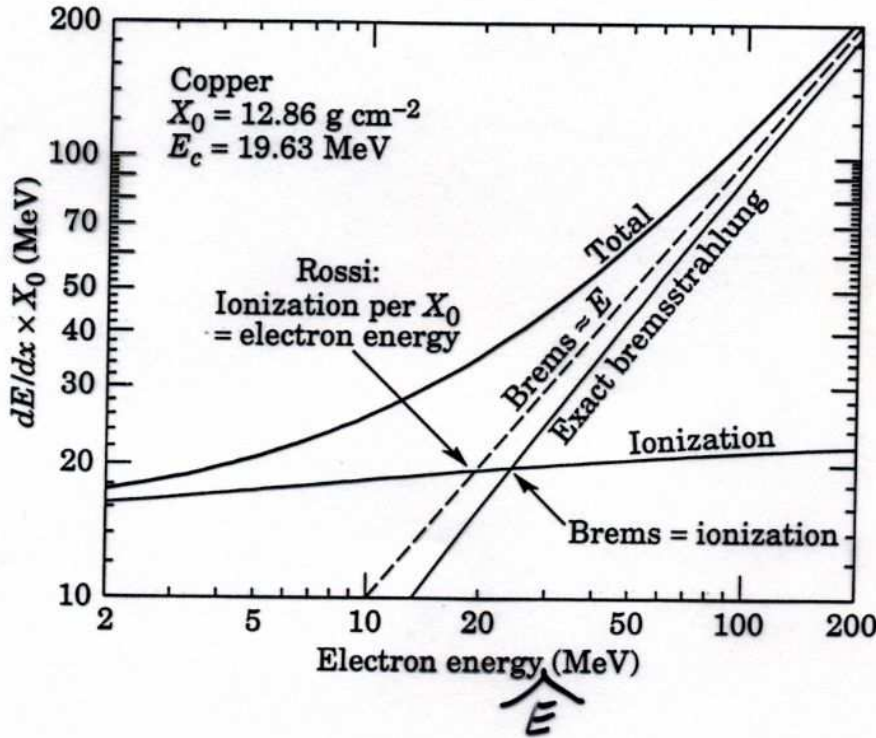
Bessere Approximationen können für eine geringfügig andere Definition (B. Rossi) von  $E_c$  gegeben werden (s. Abb. 26.11, 26.12), wo  $E_c$  die Energie bezeichnet, bei der gilt:

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{rad}} \cdot X_0 = E$$

mit  $E$  als Energie des einlaufenden Elektrons.



# Kritische Energie $E_c$



$$E_c : \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{rad}} \stackrel{!}{=} \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{ion}}$$

Rossi's  $E_c$ :

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{rad}} \cdot X_0 = E$$

Figure 26.11: Two definitions of the critical energy  $E_c$ .

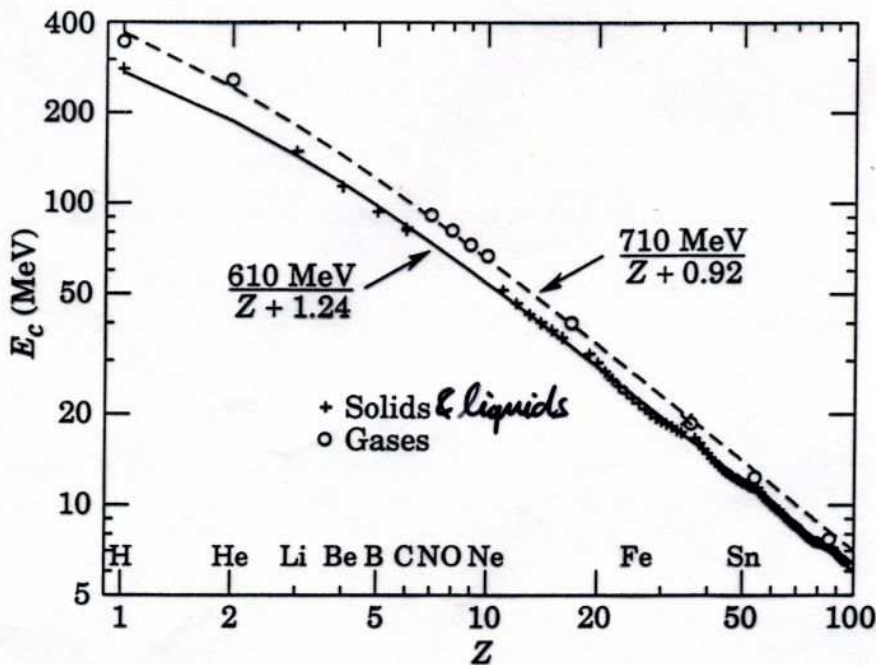


Figure 26.12: Electron critical energy for the chemical elements, using Rossi's definition [3]. The fits shown are for solids and liquids (solid line) and gases (dashed line). The rms deviation is 2.2% for the solids and 4.0% for the gases.

## Nachweis von Photonen

Die Intensität eines Photonenstrahls nach dem Durchgehen einer Materialschicht der Dicke  $x$  ist

$$I(x) = I_0 \cdot \exp(-\mu \cdot x)$$

mit Massenabsorptionskoeffizient  $\mu$ , welcher vom Wirkungsquerschnitt der Photon-Absorption  $\sigma$  gemäß

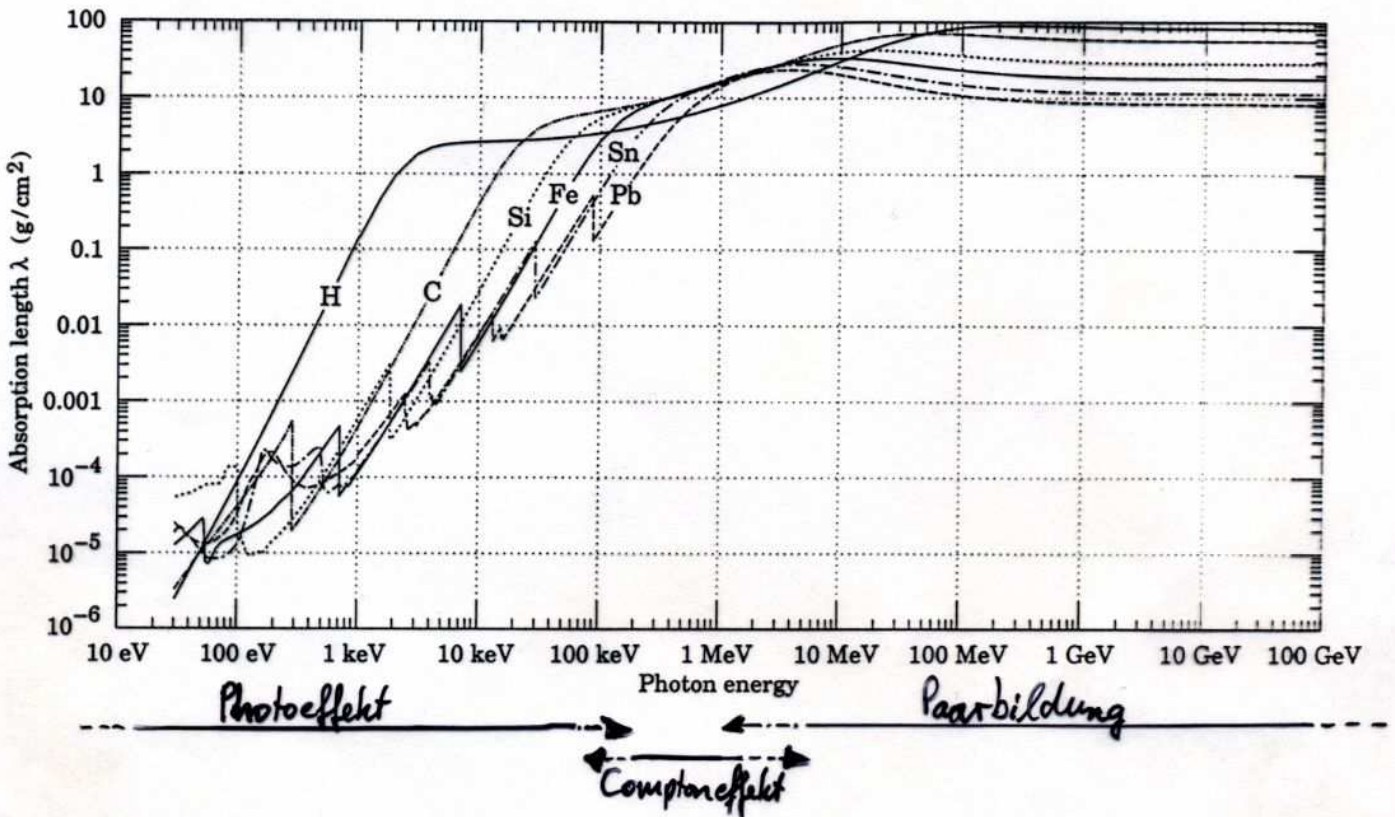
$$\mu = \sigma \cdot \rho \cdot \frac{N_0}{A}$$

abhängt. Insgesamt tragen drei Prozesse zur Photon-Absorption bei:

- Photoeffekt für  $E_\gamma \lesssim \text{einige } 100 \text{ keV}$
- Comptoneffekt für  $E_\gamma \approx 1 \text{ MeV}$
- Paarbildung für  $E_\gamma \gtrsim 2 \text{ MeV}$



# Massenabsorptionskoeffizient



**Fig. 26.15:** The photon mass attenuation length (or mean free path)  $\lambda = 1/(\mu/\rho)$  for various elemental absorbers as a function of photon energy. The mass attenuation coefficient is  $\mu/\rho$ , where  $\rho$  is the density. The intensity  $I$  remaining after traversal of thickness  $t$  (in mass/unit area) is given by  $I = I_0 \exp(-t/\lambda)$ . The accuracy is a few percent. For a chemical compound or mixture,  $1/\lambda_{\text{eff}} \approx \sum_{\text{elements}} w_Z/\lambda_Z$ , where  $w_Z$  is the proportion by weight of the element with atomic number  $Z$ . The processes responsible for attenuation are given in ~~Fig. 26.15~~ Fig. 26.15. Since coherent processes\*\* are included, not all these processes result in energy deposition. The data for  $30 \text{ eV} < E < 1 \text{ keV}$  are obtained from [http://www-cxro.lbl.gov/optical\\_constants](http://www-cxro.lbl.gov/optical_constants) (courtesy of Eric M. Gullikson, LBNL). The data for  $1 \text{ keV} < E < 100 \text{ GeV}$  are from <http://physics.nist.gov/PhysRefData>, through the courtesy of John H. Hubbell (NIST).

\*  $w_{Z_i} := \frac{a_i A_i}{\sum_j a_j A_j}$  ;  $a_i$ : Atome mit Kernladung  $Z_i$  und Atomgewicht  $A_i$

\*\* Kohärente Prozesse: z.B. Rayleigh-Streuung

# Nachweis von Photonen

- Photoeffekt:  $\mu \sim 1/E_\gamma^3$
- Comptoneffekt:  $\mu \sim 1/E_\gamma$
- Paarbildung:  $\mu \sim \text{const.} \cdot (E_\gamma)$

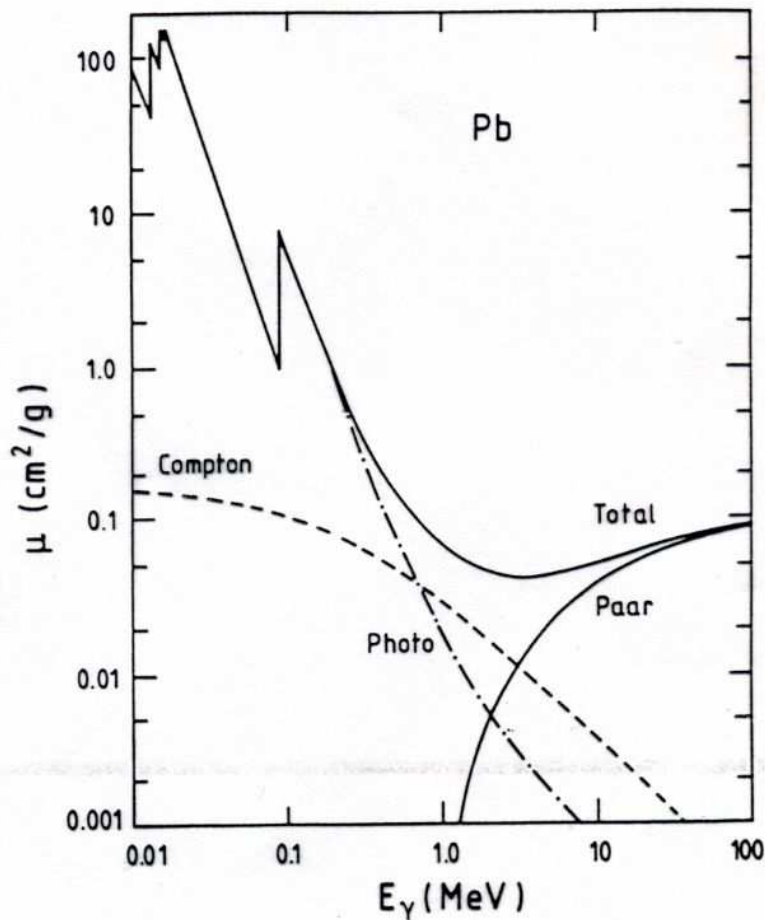


Fig. 1.3: Massenabsorptionskoeffizient für Photonen in Blei [EV 58].



# Photoeffekt

Dabei spielen die Bindungsenergien der Elektronen eine wichtige Rolle. Durch die Komplexität der Wellenfunktion von Hüllenelektronen ist eine rigorose theoretische Berechnung des Photoeffekts schwierig. Falls die Photonenenergie  $E_\gamma$  aber oberhalb der K-Schalen-Bindungsenergien  $E_K$  liegt, spielen fast nur noch K-Schalen-Elektronen eine Rolle. In niedrigster Ordnung (Born-Näherung) ergibt sich der Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{\text{Photo}} \approx \frac{32\pi}{3} \sqrt{2} \cdot Z^5 a^4 \cdot r_e^2 \cdot \left(\frac{m_e c^2}{E_\gamma}\right)^{7/2}, \quad E_K < E_\gamma < m_e c^2$$

und

$$\sigma_{\text{Photo}} \approx 4\pi r_e^2 \cdot Z^5 a^4 \cdot \left(\frac{m_e c^2}{E_\gamma}\right), \quad E_\gamma > m_e c^2$$

Bei Energien  $E_\gamma \approx E_K$  sind weitere Korrekturen zu berücksichtigen. In diesem Bereich gilt näherungsweise:

$$\sigma_{\text{Photo}} \approx \frac{6.3 \cdot 10^{-18} \text{ cm}^2}{Z^2} \left(\frac{E_K}{E_\gamma}\right)^{8/3}$$

Von praktischer Bedeutung ist dabei, dass

$$\sigma_{\text{Photo}} \sim Z^5 a^4 / E_\gamma^{7/2}$$

im interessanten Energiebereich  $E_K < E_\gamma < m_e c^2$  gilt.

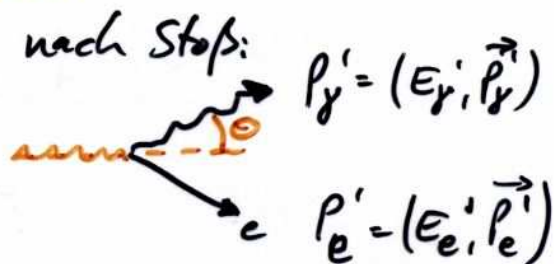
# Compton-Effekt

... ist die inkohärente Streuung eines Photons an einem Elektron (kohärente Streuung ist Rayleigh-Effekt; dabei wird das Atom weder ionisiert noch angeregt). Die Energie des gestreuten Photons kann leicht berechnet werden:

vor Stoß:

$$p_\gamma = (0, \vec{p}_\gamma) \quad p_e = (m_e c^2, \vec{0})$$

nach Stoß:



$$p_\gamma' = (E_\gamma', \vec{p}_\gamma')$$

$$p_e' = (E_e', \vec{p}_e')$$

Mit Viererimpuls erhaltung  $p_\gamma + p_e = p_\gamma' + p_e'$  folgt:

$$E_\gamma' = \frac{E_\gamma}{1 + (E_\gamma/m_e c^2) \cdot (1 - \cos\theta)}$$

Dabei erhält das Elektron die Energiedifferenz  $E_\gamma - E_\gamma'$  als kinetische Energie:

$$T_e' = \frac{E_\gamma^2}{m_e c^2} \frac{1 - \cos\theta}{1 + (E_\gamma/m_e c^2) \cdot (1 - \cos\theta)}$$

- Vorwärtsstreuung  $\theta \approx 0$ :  $E_\gamma' \approx E_\gamma, T_e' \approx 0$
  - Rückwärtsstreuung  $\theta \approx \pi$ :  $E_{\gamma', \min} = \frac{E_\gamma}{1 + 2(E_\gamma/m_e c^2)} \xrightarrow{E_\gamma \gg m_e c^2} \frac{m_e c^2}{2}$
- und:  $T_{e', \max} = E_\gamma \frac{2E_\gamma/m_e c^2}{1 + 2(E_\gamma/m_e c^2)} \rightarrow E_\gamma \left(1 - \frac{1}{2 \frac{E_\gamma}{m_e c^2}}\right)$

diese max. Elektronenenergie bezeichnet im Energiespektrum der Compton-Elektronen die sogenannte Compton-Kante



# Compton-Effekt

Der diff. Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung wurde mit QED berechnet und ist als Klein-Nishina-Formel bekannt:

$$\frac{d\sigma_{\text{Compton}}}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \frac{1}{[1 + \varepsilon(1 - \cos\theta)]^2} \left( 1 + \cos^2\theta + \frac{\varepsilon^2(1 - \cos\theta)^2}{1 + \varepsilon(1 - \cos\theta)} \right)$$

mit  $\varepsilon := E_\gamma/m_e c^2$ . Dieser WQ hat ein Maximum bei Vorwärtsstreuung ( $\theta \approx 0$ ). Im nicht-relativistischen Fall  $\varepsilon \ll 1$  wird die Winkelverteilung symmetrisch ( $\frac{d\sigma_{\text{Compton}}}{d\Omega} \approx \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2\theta)$ ).

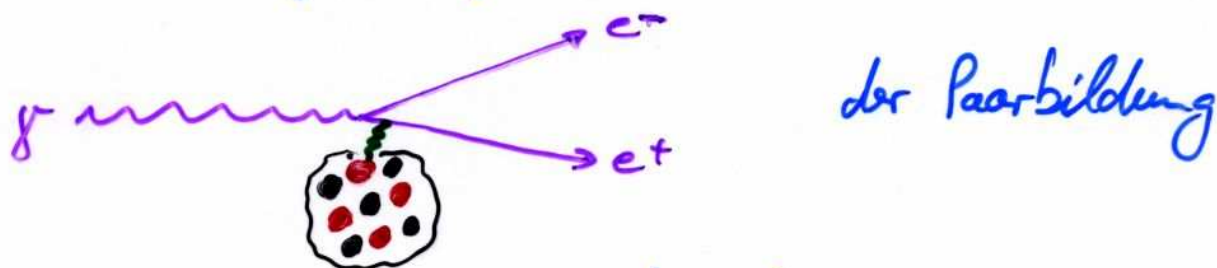
Durch explizite Integration über  $d\Omega$  erhält man den totalen Compton-WQ und damit die Wahrscheinlichkeit für Compton-Streuung. Statt der vollständigen (und länglichen) Formel seien hier nur zwei Grenzfälle betrachtet:

- $\varepsilon \ll 1$  :  $\sigma_{\text{Compton}} \approx \sigma_{\text{Thomson}} \cdot (1 - 2\varepsilon) \sim E_\gamma$
- $\varepsilon \gg 1$  :  $\sigma_{\text{Compton}} \approx \frac{3}{8} \sigma_{\text{Thomson}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left( \frac{1}{2} + \ln 2\varepsilon \right) \sim \frac{1}{E_\gamma}$

wobei  $\sigma_{\text{Thomson}} = \frac{8\pi}{3} \cdot r_e^2 \approx 0.665$  barn der totale Streuquerschnitt von Photonen an freien Elektronen bei geringen Energien ist.

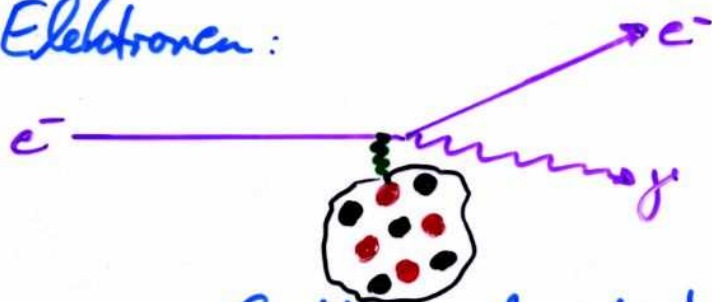
# Paarbildung

Ab einer Photonenergie  $E_\gamma = 2m_e c^2$  kann der Prozess:



stattfinden, wobei zur Energie- & Impulserhaltung eine Wechselwirkung mit einem Atomkern stattfinden muss.

Man beachte hierbei die Analogie zur Bremsstrahlung von Elektronen:



die eine vergleichbare Beschreibung der Paarbildung (hinsichtlich der Materialabhängigkeiten) erwarten lässt,

Tatsächlich ergibt sich für  $E_\gamma \gg m_e c^2 / Z^{1/3}$  & :

$$\otimes \quad d\sigma \approx 4Z^2 r_e^2 d \frac{dE_+}{E_\gamma^3} \cdot \left[ E_+^2 + E_-^2 + \frac{2}{3} E_+ E_- \right] \cdot \ln(183 \cdot Z^{-1/3})$$

wobei  $E_+, E_-$  die Energien von Positron, Elektron sind

Zum Vergleich bei Bremsstrahlung:

$$d\sigma_{\text{Brem}} \approx 4Z^2 r_e^2 d \frac{dE_\gamma}{E_\gamma} \cdot \ln(183 \cdot Z^{-1/3})$$



## Paarbildung

Die Integration von  $d\sigma$  in  $\otimes$  (vorherige Folie) über  $E_+$  ergibt den totalen Wirkungsquerschnitt für Paarbildung bei relativistischen Energien  $E_\gamma \gg m_e c^2 / Z^{1/3} \alpha \approx 68.5 \text{ MeV} / Z^{1/3}$ .

$$\sigma_{\text{Paar}} \approx 4 Z^2 r_e^2 \alpha \cdot \frac{7}{9} \cdot \ln(183 \cdot Z^{-1/3}) = \text{const}(E_\gamma)$$

Damit ergibt sich die mittlere freie Weglänge bei Paarbildung zu (Massenabsorptionskoeff.  $\mu_{\text{Paar}}$ ):

$$\mu_{\text{Paar}} \equiv 1/\lambda_{\text{Paar}} = S \cdot \frac{N_0}{A} \cdot \sigma_{\text{Paar}} \approx 4 r_e^2 \alpha \cdot S \frac{N_0}{A} \cdot Z^2 \cdot \frac{7}{9} \ln \frac{183}{Z^{1/3}}$$

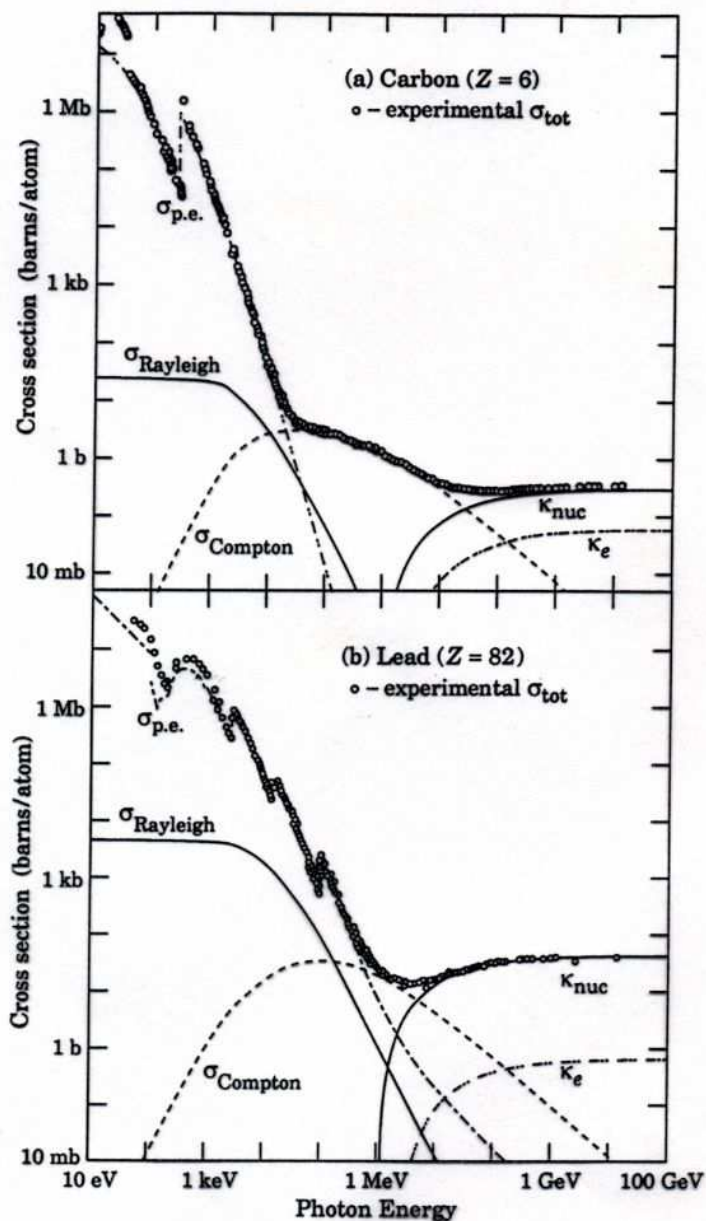
Dies entspricht, bis auf den Faktor  $\frac{7}{9}$ , welcher durch die Kinematik der  $e^+e^-$  Zustände kommt, genau der Strahlungslänge im Falle der Bremsstrahlung von Elektronen:

$$\lambda_{\text{Paar}}^{-1} \equiv \mu_{\text{Paar}} \approx \frac{7}{9} \frac{1}{X_0}$$

Ein hochenergetisches Photon erleidet in einer Strahlungslänge  $X_0$  einen Paarbildungsprozess mit der Wahrscheinlichkeit

$$P_{\text{Paar}} = 1 - \exp\left[-\frac{7}{9}\right] \approx 54\%$$

# Photonen-Nachweis



**Figure 26.13:** Photon total cross sections as a function of energy in carbon and lead, showing the contributions of different processes:

$\sigma_{\text{p.e.}}$  = Atomic photoelectric effect (electron ejection, photon absorption)

$\sigma_{\text{Rayleigh}}$  = Coherent scattering (Rayleigh scattering—atom neither ionized nor excited)

$\sigma_{\text{Compton}}$  = Incoherent scattering (Compton scattering off an electron)

$\kappa_{\text{nuc}}$  = Pair production, nuclear field

$\kappa_e$  = Pair production, electron field

Data from Hubbell, Gimm, and Øverbø, *J. Phys. Chem. Ref. Data* **9**, 1023 (1980). Curves for these and other elements, compounds, and mixtures may be obtained from

<http://physics.nist.gov/PhysRefData>. The photon total cross section is approximately flat for at least two decades beyond the energy range shown.



## Nachweis von Neutronen

Wie das Photon ist auch das Neutron elektrisch neutral und kann daher nicht durch Coulomb-WW beobachtet werden. Als aus Quarks aufgebautes Hadron unterliegt das Neutron der starken Wechselwirkung. Doch Confinement sorgt für Reichweite der starken WW. von typ.  $10^{-15}$  m um einen Atomkern. Daher sind Neutronen i.A. sehr durchdringende Teilchen.

Folgende WW. sind abhängig von der Neutronenenergie  $E_n$  möglich:

- **Elastische Streuung**:  $A(n, n)A$ , dominant im MeV-Bereich
- **Inelastische Streuung**:  $A(n, n')A^*$  oder  $A(n, 2n')B$   
dabei emittieren  $A^*, B$  z.B.  $\gamma$ -Strahlung; typ.  $\sim 1 \text{ MeV } E_n$
- **Radiativer n-Einfang**:  $n + (Z, A) \rightarrow \gamma + (Z, A+1)$   
Wirkungsquerschnitt  $\sim 1/v_n \rightarrow$  dominant bei geringen  $E_n$
- **Kernreaktionen**: z.B.  $(n, p), (n, d), (n, \alpha), (n, t), (n, \alpha p)$   
Wirkungsquerschnitt  $\sim 1/v_n \rightarrow$  typ.  $E_n = \text{eV} \dots \text{keV}$
- **Kernspaltung**:  $(n, f)$ , typ. bei thermischen  $E_n \approx \text{meV}$
- **Hadronenschauer**: nur für sehr hochenerget. Neutronen  
 $E_n \gg 100 \text{ MeV}$  (folgt später)

NB:  $v_n$  ist Neutronen-Geschwindigkeit

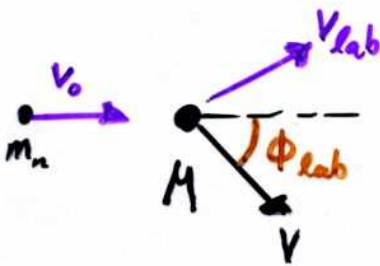


## Nachweis von Neutronen

Da die Kernreaktionen, die von Neutronen induziert werden, für geringe  $E_n$  höhere Wirkungsquerschnitte aufweisen, ist die Moderation von Neutronen (d.h. das Abbremsen)

von Bedeutung.

Labor system:



Die Berechnung der auf den Kern übertragenen kinet. Energie ergibt im nicht-relativistischen Fall

$$E_{\text{kin}} \equiv \frac{1}{2} M v^2 = E_0 \cdot \frac{4 M m_n}{(m_n + M)^2} \cos^2 \phi_{\text{lab}}$$

und damit einen maximalen Energieübertrag im zentralen

Stoß von ( $E_0 \equiv \frac{1}{2} m_n v_0^2$ ):

$$E_{\text{kin, max}} = E_0 \frac{4 M m_n}{(m_n + M)^2}$$

Der Energieübertrag ist umso größer, je kleiner  $M$  ist, also am größten für Stöße mit Wasserstoff  $M = m_p \approx m_n$ .

Daher moderieren Stoffe mit hohem Wasserstoffanteil

(z.B. Wasser, Kohlenwasserstoffe wie Paraffin) Neutronen besonders

effektiv.



## Nachweis von Neutronen

Einige Beispiele für Kernreaktionen:

- $n + p \rightarrow d + \gamma (2.2 \text{ MeV})$
- $n + d \rightarrow t + \gamma (6.25 \text{ MeV})$
- $n + {}^3\text{He} \rightarrow p + t$
- $n + {}^{35}\text{Cl} \rightarrow {}^{36}\text{Cl}^* \rightarrow {}^{36}\text{Cl} + n + \gamma (28.6 \text{ MeV})$
- $n + {}^6\text{Li} \rightarrow t + \alpha (4.76 \text{ MeV})$
- $n + {}^6\text{Li} \rightarrow {}^4\text{He} + d + n (-1.53 \text{ MeV})$
- $n + {}^{10}\text{B} \rightarrow {}^7\text{Li} + \alpha (2.78 \text{ MeV})$

und für Kernspaltung, typ.  $n + K \rightarrow K_1 + K_2 + \sim 200 \text{ MeV}$

${}^{238}\text{U}$ ,  ${}^{235}\text{U}$ ,  ${}^{232}\text{Th}$

# Nachweis von Neutronen

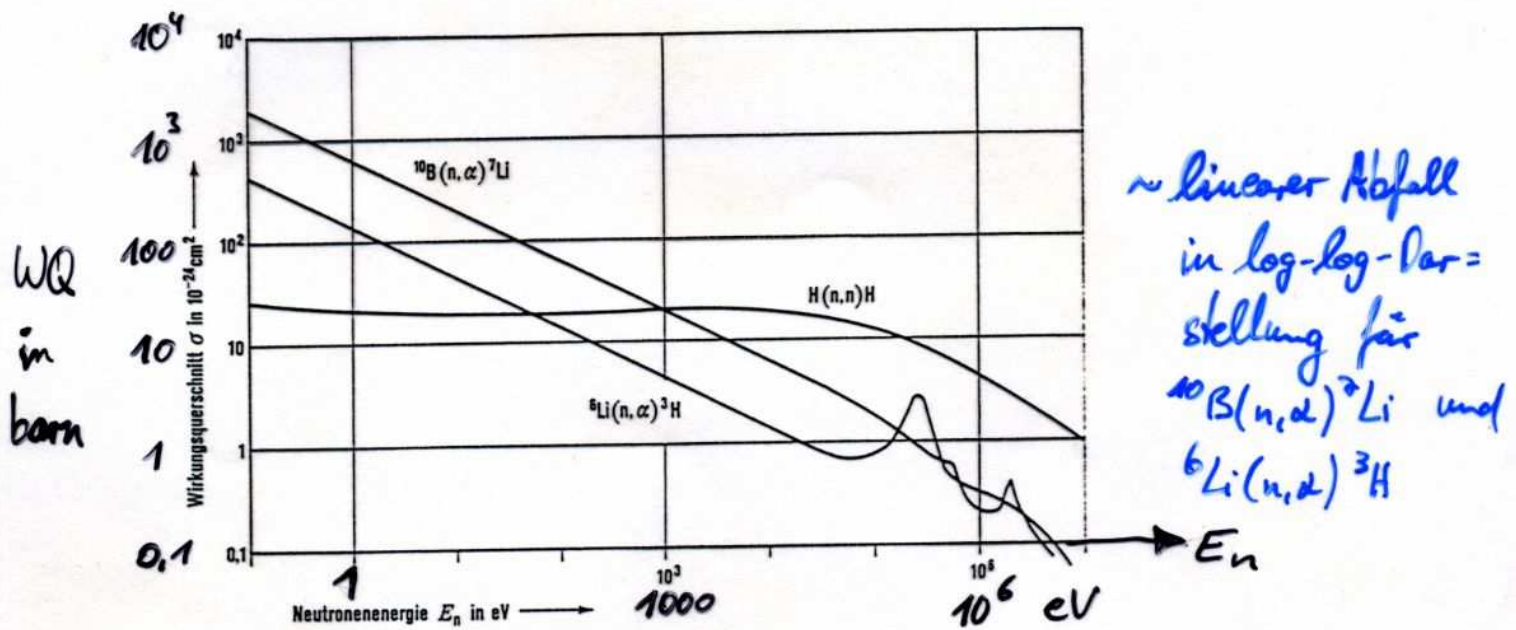
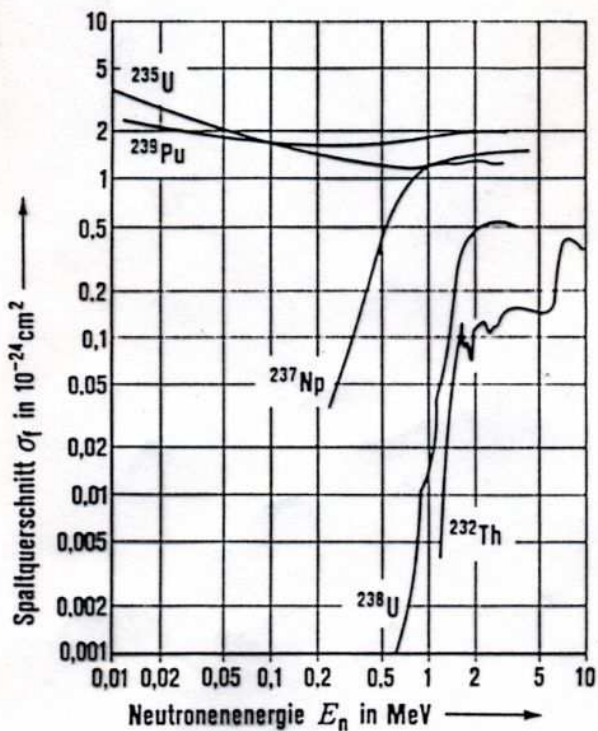


Fig. 2.21: Verlauf der Wirkungsquerschnitte einiger Kernreaktionen



$^{238}\text{U}$  - Spaltung durch  
energetische Neutronen ( $\sim$  MeV)

Fig. 2.23: Verlauf von Wirkungsquerschnitten für Spaltung



# Nachweis von Neutrinos

typ. Reaktion:  $\bar{\nu} + N \rightarrow \ell^+ + X$  (CC: charged current)

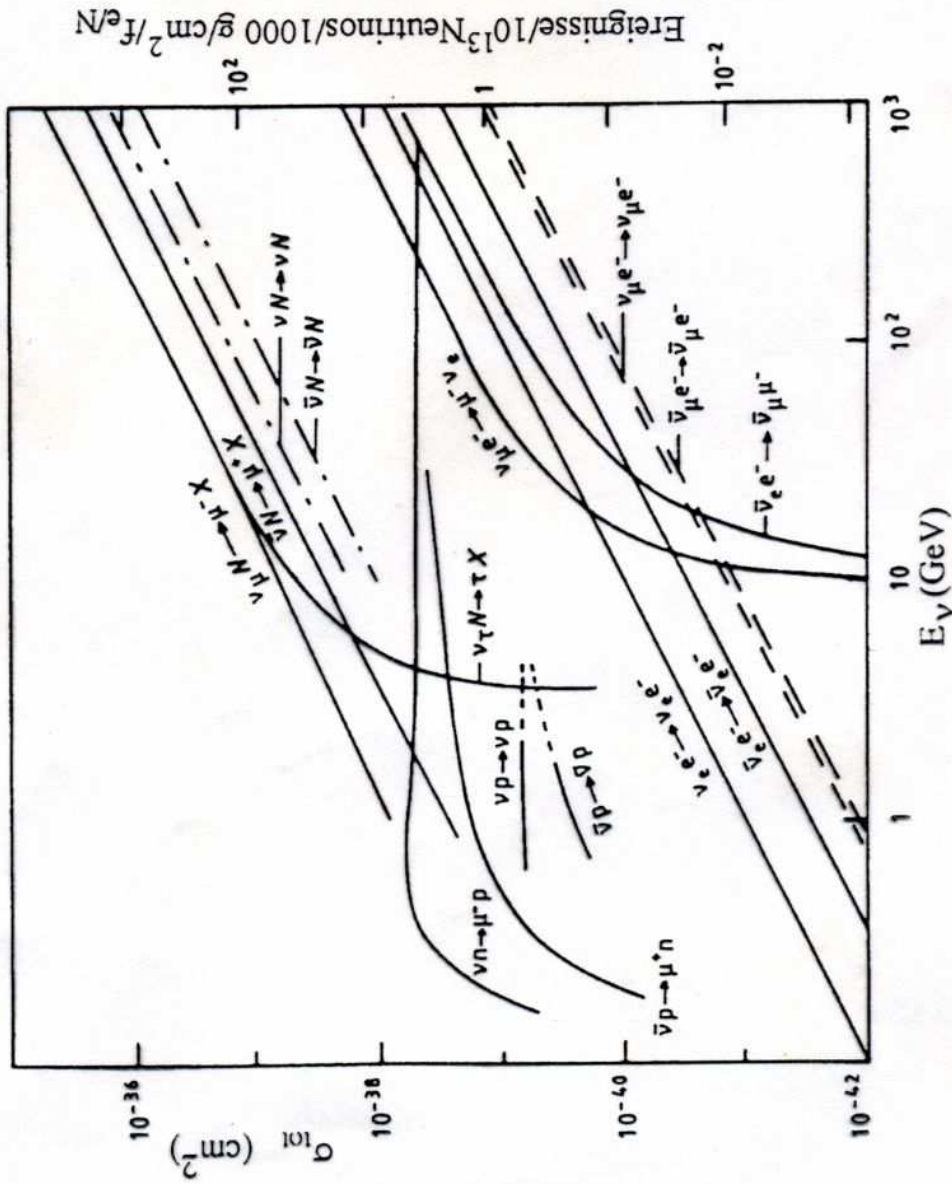


Abb. 3.2 Wirkungsquerschnitte und Ereignisraten für verschiedene Neutrinoaktionen in Abhängigkeit von der Neutrinoenergie;  $J_{e/N} = 1$  für Reaktionen an Nucleonen;  $J_{e/N} = A/Z$  für Reaktionen an Elektronen. Nach [Eis86].

- $\sigma_{tot}(\bar{\nu}e) \sim E_{\nu}/GeV$
  - $\sigma_0(\nu e)/E_{\nu} \approx 5.74 \cdot 10^{-42} \text{ cm}^2/GeV$   
 $\approx 5.74 \text{ ab/GeV}$
  - Schwelleneffekte bei Erzeugung massiver Leptonen, z.B.  $\mu$
  - $\sigma_{tot}(\bar{\nu}N)/E_{\nu} > \sigma_{tot}(\bar{\nu}e)/E_{\nu}$
- ⇓
- massive Absorber erforderlich
  - Nachweis einfacher bei hohen  $E_{\nu}$
  - große Nucleonen-Anzahldichte im Absorber

# Neutrino-Nukleon-Streuung

- $\sigma_{tot}(\nu N) \approx 0.68 \cdot 10^{-38} \text{ cm}^2 \cdot E_\nu / \text{GeV}$
- $\sigma_{tot}(\bar{\nu} N) \approx 0.34 \cdot 10^{-38} \text{ cm}^2 \cdot E_\nu / \text{GeV}$

$$\Rightarrow \sigma_{tot}(\nu N) \approx 2 \cdot \sigma_{tot}(\bar{\nu} N)$$

Auch Unterschiede zwischen

$\nu$ -Proton (udd) und  $\nu$ -Neutron (udd):

- $\sigma_{tot}(\nu p) \approx 2 \cdot \sigma_{tot}(\nu p) \approx 0.84 \cdot 10^{-38} \text{ cm}^2 \cdot \frac{E_\nu}{\text{GeV}}$

- $\sigma_{tot}(\bar{\nu} p) \approx 2 \cdot \sigma_{tot}(\bar{\nu} N) \approx 0.50 \cdot 10^{-38} \text{ cm}^2 \cdot \frac{E_\nu}{\text{GeV}}$

$\Rightarrow$  Anzahl von Protonen & Neutronen

im Targetkern relevant

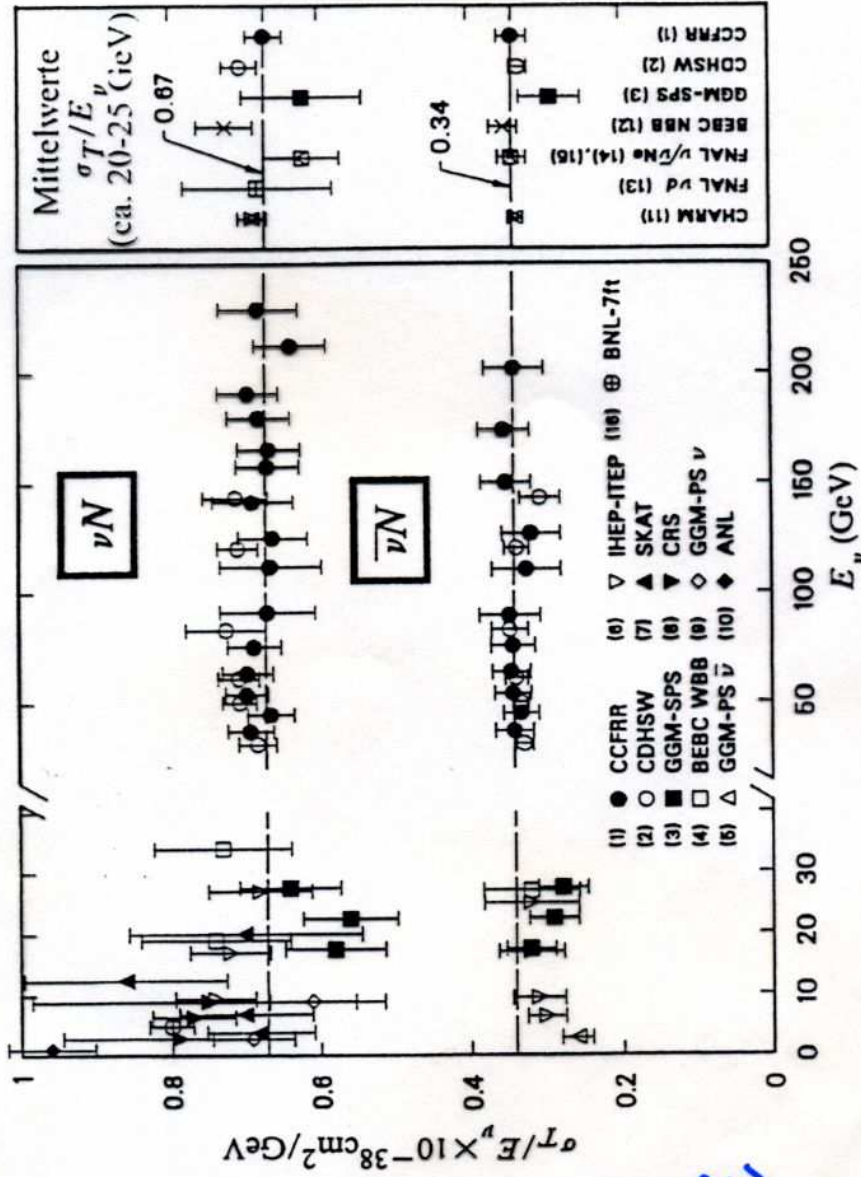
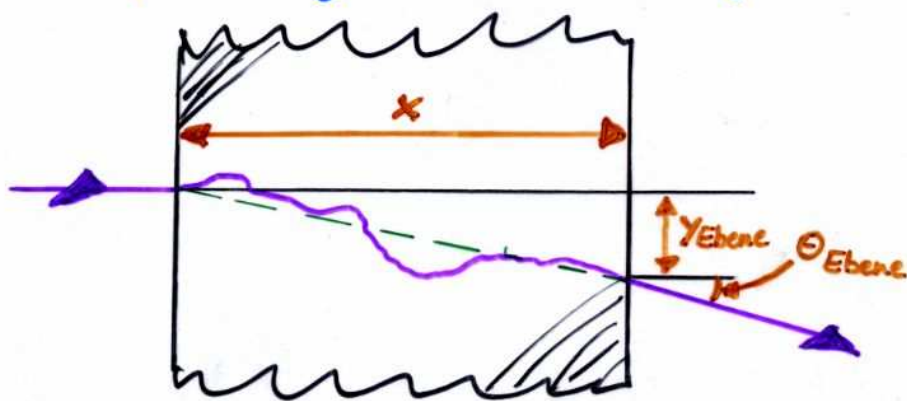


Abb. 5.3 Kompilation von Meßwerten  $\sigma(E_\nu)/E_\nu$  für  $\nu N$  und  $\bar{\nu} N$ -Streuung aus verschiedenen Experimenten in Abhängigkeit von  $E_\nu$ . Der rechte Teil der Abbildung gibt Mittelwerte über größere Energiebereiche (ca. 10 bis 200 GeV) mit  $\langle E_\nu \rangle \sim 22$  GeV an. Die gestrichelten Linien sind Mittelwerte von CCFRR [Mac84]. Nach [PDG92].



## Vielfachstreuung geladener Teilchen

In der bisherigen Betrachtung spielte die Rückwirkung des Absorbers auf das Teilchen keine Rolle, was nur für hochenergetische Teilchen zutreffend ist. Bei niederenergetischen Teilchen kann jede <sup>Coulomb-</sup>Ww. mit dem Absorber zu Änderungen in der Flugrichtung des Teilchens führen:



Für kleine  $\Theta_{\text{Ebene}}$  ist die Verteilung der Streuwinkel ungefähr gaußförmig (Theorie von Molière, s. z. B. W.T. Scott in Rev. Mod. Phys. 35 (1963) 231)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Theta_0} \cdot \exp\left(-\frac{\Theta_{\text{Ebene}}^2}{2\Theta_0^2}\right) d\Theta_{\text{Ebene}}$$

wobei die rms-Breite der Gauß-Verteilung

$$\Theta_0 \approx \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta c p} \cdot z \cdot \sqrt{\frac{x}{X_0}} \cdot \left(1 + 0.038 \cdot \ln \frac{x}{X_0}\right)$$

ist ( $\beta c$ : Teilchengeschwindigkeit,  $p$ : Impuls,  $z$ : Ladungszahl)

Für größere Streuwinkel  $\Theta_{\text{Ebene}}$  wird die Verteilung der Rutherford-Streuung ähnlich, hat also weitere Ausläufer als die Gauß-Kurve.



## Vielfachstreuung geladener Teilchen

l.A. ist Vielfachstreuung störend. z.B. verändert sich der gemessene Krümmungsradius eines geladenen Teilchens aufgrund von Vielfachstreuung und damit der rekonstruierte Impuls ( $p = e \cdot B \cdot R$ ). Ohne Berücksichtigung weiterer Messfehler ist (Ablenkwinkel  $\Theta$  im Magnetfeld  $|\vec{B}| = B$ )

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 = \left(\frac{\Delta \Theta}{\Theta}\right)^2 \approx \frac{\Theta_0^2}{\Theta^2}$$

der Impulsmessfehler also proportional zur Breite der Vielfachstreuungs-Gaußverteilung  $\Theta_0$ .

Andererseits kann die Impulsabhängigkeit der Vielfachstreuung auch zur (sehr groben) Impulsbestimmung <sup>ohne B-Feld</sup> genutzt werden:

$$\Theta_0 \sim \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad \exp\left(-\frac{\Theta}{2\Theta_0^2}\right) d\Theta$$

Für einen gemessenen Vielfachstreuwinkel  $\Theta$  hat das Teilchen mit 68% Wahrscheinlichkeit einen Impuls

$$p > \frac{13.6 \text{ MeV/c}}{\Theta} \cdot z \cdot \sqrt{\frac{x}{X_0}} \cdot \left(1 + 0.038 \ln \frac{x}{X_0}\right)$$

da mit dieser Wahrscheinlichkeit ein Streuwinkel

$$\Theta < \Theta_0$$

auftritt.