

13. Ansätze allumfassender Theorien

- Notwendigkeit für allumfassende Theorie
 - ▷ kosmolog. Konstante und ihre Probleme
 - ▷ Extrapolation der Kopplungskonstanten
- Probleme der Quantengravitation
- Stringtheorien und M-Theorie
 - ▷ Ursprung der Stringtheorie
 - ▷ Struktur der Stringtheorien
 - ▷ Dualität von Theorien
- Große Extra-Dimensionen
 - ▷ Abweichungen von Newtons Gravitationsgesetz
 - ▷ Suche an Beschleunigern
 - ▷ Grenzen aus astrophys. Beobachtungen

Theory of Everything (allumfassende Theorie)

Eine vollständige Theorie der Natur muß alle Kräfte beinhalten, insbesondere die Gravitation, die relevant wird, wenn der Schwarzschild-Radius

$$R \equiv \frac{2 G_N \cdot m}{c^2}$$

vergleichbar der Compton-Wellenlänge

$$\lambda \equiv \frac{\hbar}{mc}$$

wird. Dies geschieht für Massen (oder Energien) ab der Planck-Masse

$$m_{pl} \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} \approx 1.2 \cdot 10^{19} \text{ GeV}/c^2$$

wobei die zugehörige (Wellen) Länge und Zeit sind:

$$l_{pl} \equiv \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}} \approx 1.6 \cdot 10^{-33} \text{ cm}$$

$$t_{pl} \equiv \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^5}} \approx 5.4 \cdot 10^{-44} \text{ s}$$

Eine solche Theorie muß also auch für Längenskalen unterhalb von l_{pl} anwendbar sein. Darüber hinaus sollte sie frei von Unendlichkeiten sein, wie sie in der üblichen Quantenfeldtheorie für punktförmige Teilchen auftreten (aus Selbstwechselwirkung & Vakuum polarisation).

Probleme mit der kosmolog. Konstanten

- $\Omega_\Lambda = 0.7$ aus astrophysikalischen Beobachtungen bedeutet eine Vakuumenergiedichte von

$$\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda \cdot \rho_c \approx 0.7 \cdot 5.99 \frac{\text{GeV}}{\text{m}^3} \approx 4.2 \frac{\text{GeV}}{\text{m}^3}$$

- Quantenfluktuationen verursachen eine Vakuumenergiedichte von

$$\rho_V \approx \frac{1}{64 (\hbar c)^3} (m_{\text{pl}} \cdot c^2)^4 \approx 4.5 \cdot 10^{121} \frac{\text{GeV}}{\text{m}^3}$$

⇒ Eine allumfassende Theorie müßte diese Diskrepanz aufklären können. Z.B. könnte eine (ungebrochene) Supersymmetrie die Vakuumenergiedichte der Quantenfluktuationen eliminieren, da



durch



kompensiert wird. (Fermionschleife der e und Schleife der skalaren \tilde{e} haben gleichen Absolutwert aber unterschiedliche Vorzeichen, da Fermion- bzw. Bose-Statistik anzuwenden ist.)

- Experiment: Supersymmetrie gebrochen $m_e \ll m_{\tilde{e}} = \mathcal{O}(1 \text{TeV})$

$$\Rightarrow \rho_{V+\text{susy}} \approx \rho_V \cdot \left(\frac{1 \text{TeV}}{m_{\text{pl}} c^2} \right)^4 \approx 2.2 \cdot 10^{57} \frac{\text{GeV}}{\text{m}^3}$$

Extrapolation der Kopplungskonstanten

... beschrieben durch Lösungen der Renormierungsgruppen-gleichungen (hier für 1 Schleife):

$$\alpha_i^{-1}(\mu) = \alpha_i^{-1}(\Lambda) - \frac{b_i}{4\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right), \quad i=1,2,3$$

mit:

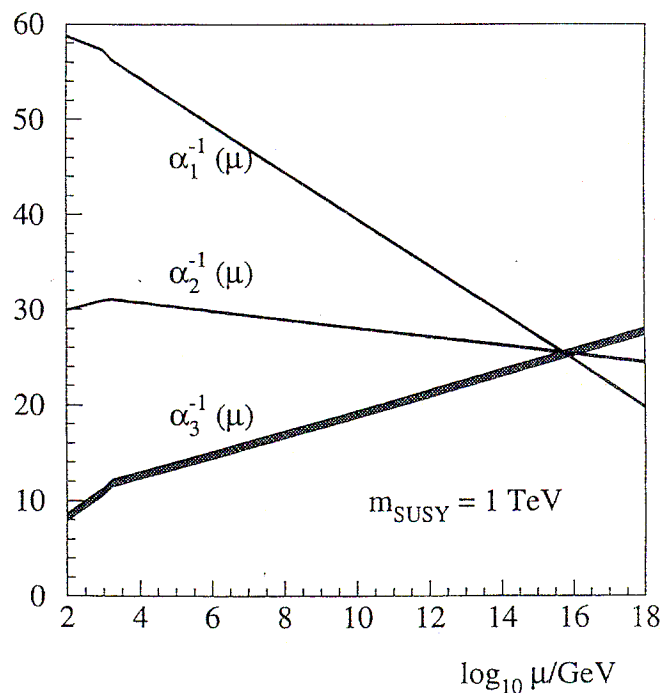
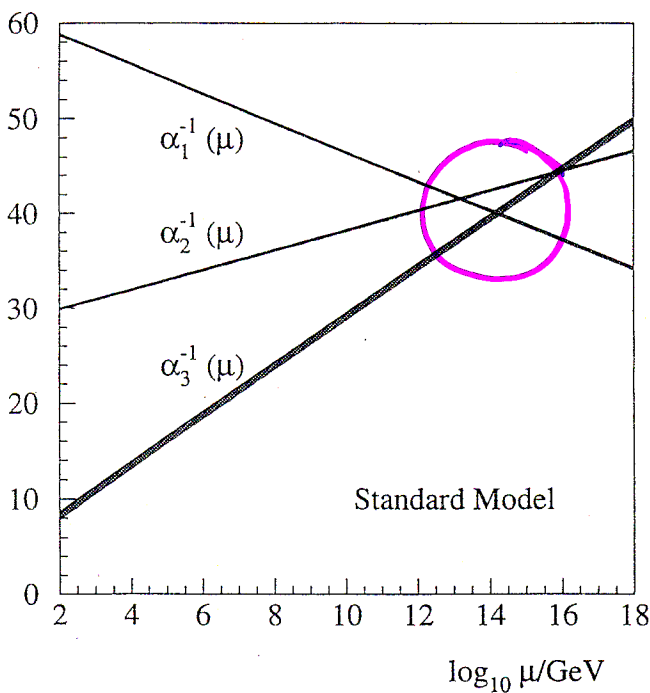
$\mu \hat{=}$ Energieskala

$\Lambda \hat{=}$ fester Renormierungsskala

$\alpha_i = g_i^2/4\pi$ verallg. Kopplungskonstanten der Standard-Modell-Gruppen $U(1), SU(2), SU(3)$

$b_i \hat{=}$ Koeffizienten der Renormierungsgruppe, hängen von Materiebeiträgen (Quarks, Leptonen, SUSY-Teilchen...) ab

J. March/Physics Reports 271 (1996) 181-266



\Rightarrow Kopplungen \approx gleich bei $\mu \approx 10^{14} \text{ GeV}$, nahe $m_{\text{pl}} = 10^{19} \text{ GeV}$, ohne daß dafür - a priori - ein Grund bestünde
 \rightarrow Hinweis auf Vereinigung der Kräfte bei hohen Energien

Probleme der Quantengravitation

Vereinigung von electrom., schwacher und starker Wechselwirkung mit Gravitationswechselwirkung erfordert Quantisierung der Gravitation

- Eines der **Schlüsselprobleme**:

Kausalität



Unschärferelation

$$v \leq c !$$

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar \Rightarrow v \leq c ?$$

$$E = mc^2 !$$

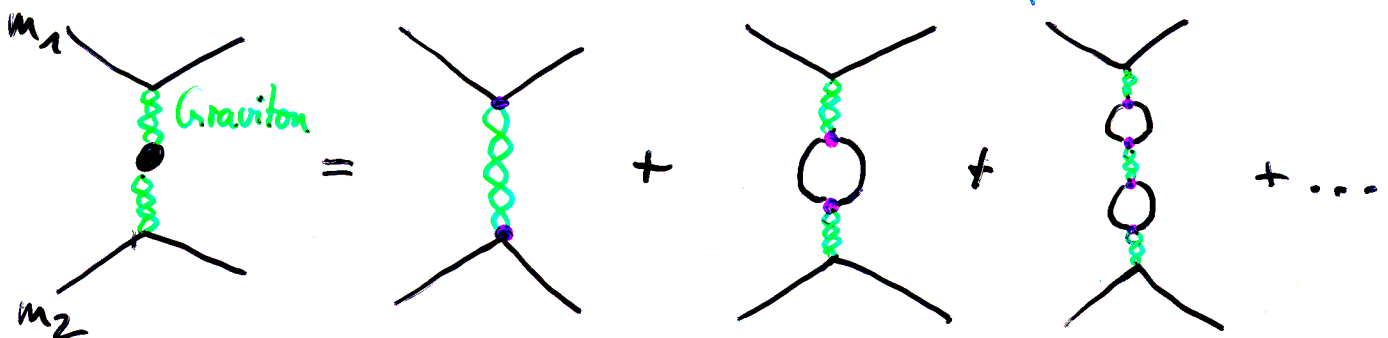
$$\Delta E \text{ beliebig groß für } \Delta t \leq \frac{\hbar}{\Delta E} ?$$

mit anderen Worten:


- ▷ Bedeutet die Unschärferelation in einer Quantengravitation, daß Raum und Zeit "unscharf" sind?
- ▷ Wie kann die Kausalität von Ursache und Wirkung bei unscharfem Raum und Zeit sichergestellt werden?

Probleme der Quantengravitation

● Nicht-Renormierbarkeit der Vakuumdarstellung



Kopplungskonstante in  ist $\alpha_G \sim \frac{G_N}{\hbar c} \hat{=} \frac{1}{m_{pl}^2}$

ist dimensionsbehaftet! Jede weitere Schleife  erzeugt höhere Potenzen von α_G und damit höhere Potenzen in $1/m_{pl}^2$ \rightarrow nicht durch Umnormierung der "Ladungen" m absorbierbar

NB. Die schwache Wechselwirkung hatte ein ähnliches Problem durch die dimensionsbehaftete Fermi-Konstante G_F . Dies wurde durch Einführung von (massiven) W^\pm und Z -Teilchen gelöst, so daß die schwache Wechselwirkung renormierbar wurde.

Dieser Trick ist im Fall der Gravitation nicht möglich. Die allgemeine Koordinateninvarianz und die Symmetrien der allg. Relativitätstheorie machen es extrem schwierig, sinnvolle Modifikation zur Eliminierung der Unendlichkeiten zu finden.

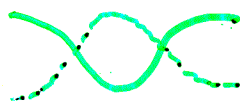
Stringtheorien

... bieten Lösungsansätze für die genannten technischen (Renormierbarkeit), konzeptionellen (Informationsverlust in schw. Löchern) und prinzipiellen (Kausalität & Unschärfe) Probleme einer Quantengravitation.

- Ursprung der Stringtheorien war ~ 1960 die empirische Beobachtung einer Relation zw. Hadronmassen und Hadronspins (sog. Regge-Trajektorie). Man stellte sich die verschiedenen Hadronen als unterschiedliche Anregungen einer Saite (engl. String) vor, z.B. für eine nicht-ingespannte Saite



Grundschwingung.



1. Anregung



2. Anregung

Einfachste Bewegung einer solchen Saite (Länge L):

Rotation um Zentrum und Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{c}{2\pi L}$. Bei

Stringschwingung T_0 ist Energie

$$E = \pi \cdot T_0 \cdot L$$

und Drehimpuls

$$J = \frac{\pi T_0}{2c} \cdot L^2$$

Ursprung der Stringtheorie

Quantisierung des Drehimpulses

$$J_n = n \cdot \hbar \text{ liefert}$$

quantisierte Energien

$$E_n = \sqrt{2\pi\hbar c T_0 \cdot n}$$

und quantisierte Massen(-quadrate)

$$M_n^2 = E_n^2 / c^4 = \frac{2\pi\hbar T_0}{c^3} \cdot n$$

Mit $\alpha' \equiv \hbar / E\hbar = 1 / 2\pi T_0 (\hbar c)$ folgt dann die Relation (eine Konstante α_0 wird von Hand eingefügt):

$$J = \alpha_0 + \alpha' \cdot M^2$$

Regge-Trajektorie

exp.
Meßer-
gebnisse:

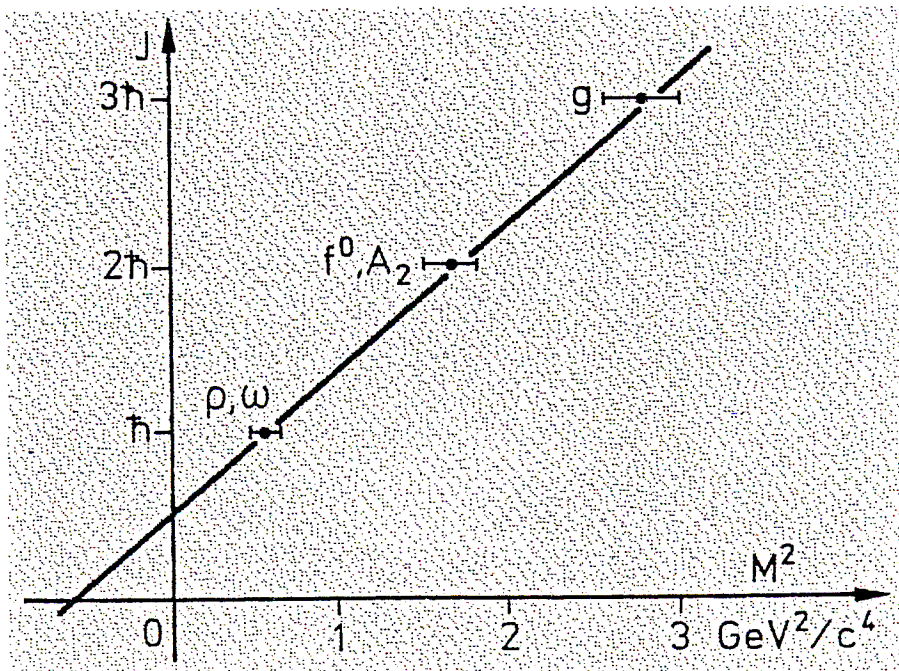




Fig. 3: Example of linear Regge trajectories.

Die Größe α' wird experimentell zu ca. 1 GeV^{-2} bestimmt, d.h. die Stringspannung $T_0 \approx 0.81 \frac{\text{GeV}}{\text{fm}}$

NB. Mit der Entdeckung der Partonstruktur von Hadronen wurde das Quarkmodell populärer, da das Stringmodell keine punktförmigen Konstituenten in Hadronen beschreibt.

Struktur der Stringtheorien

Das Konzept der Strings wurde von Hadronen übernommen und auf ≥ 4 Raumzeit-Dimensionen verallgemeinert. Man unterscheidet zusätzlich:

offene  und geschlossene Strings 

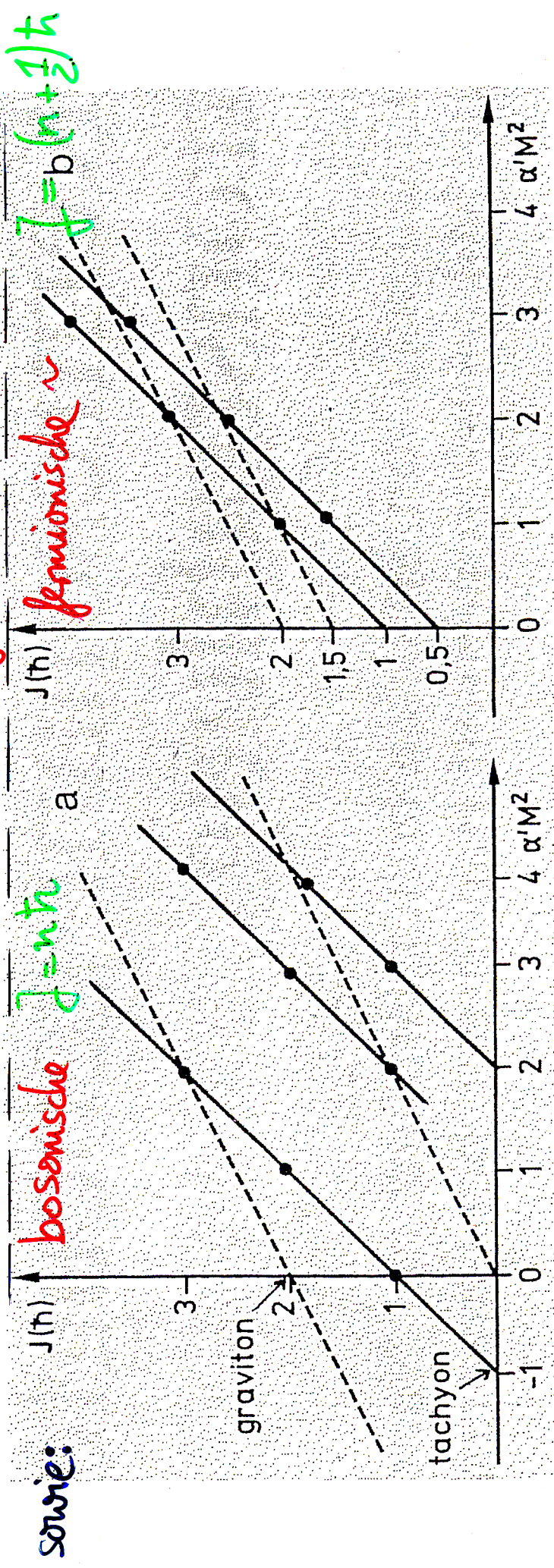
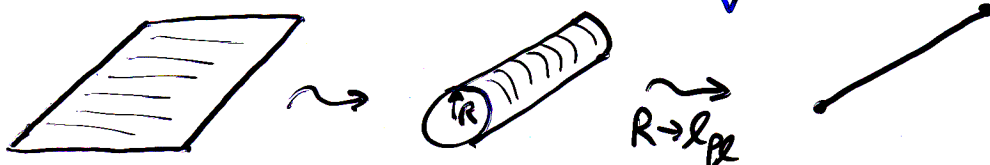


Fig. 6: a) Spectrum of open (solid lines) and closed (dotted lines) bosonic strings; b) Spectrum of open and closed fermionic strings.

Das masselose Teilchen mit $J = 2h$ wurde als Graviton interpretiert. Da die Interpretation des Tachyons ($\alpha' M^2 < 0$) problematisch ist, wurde bosonische Stringth. fallen gelassen.

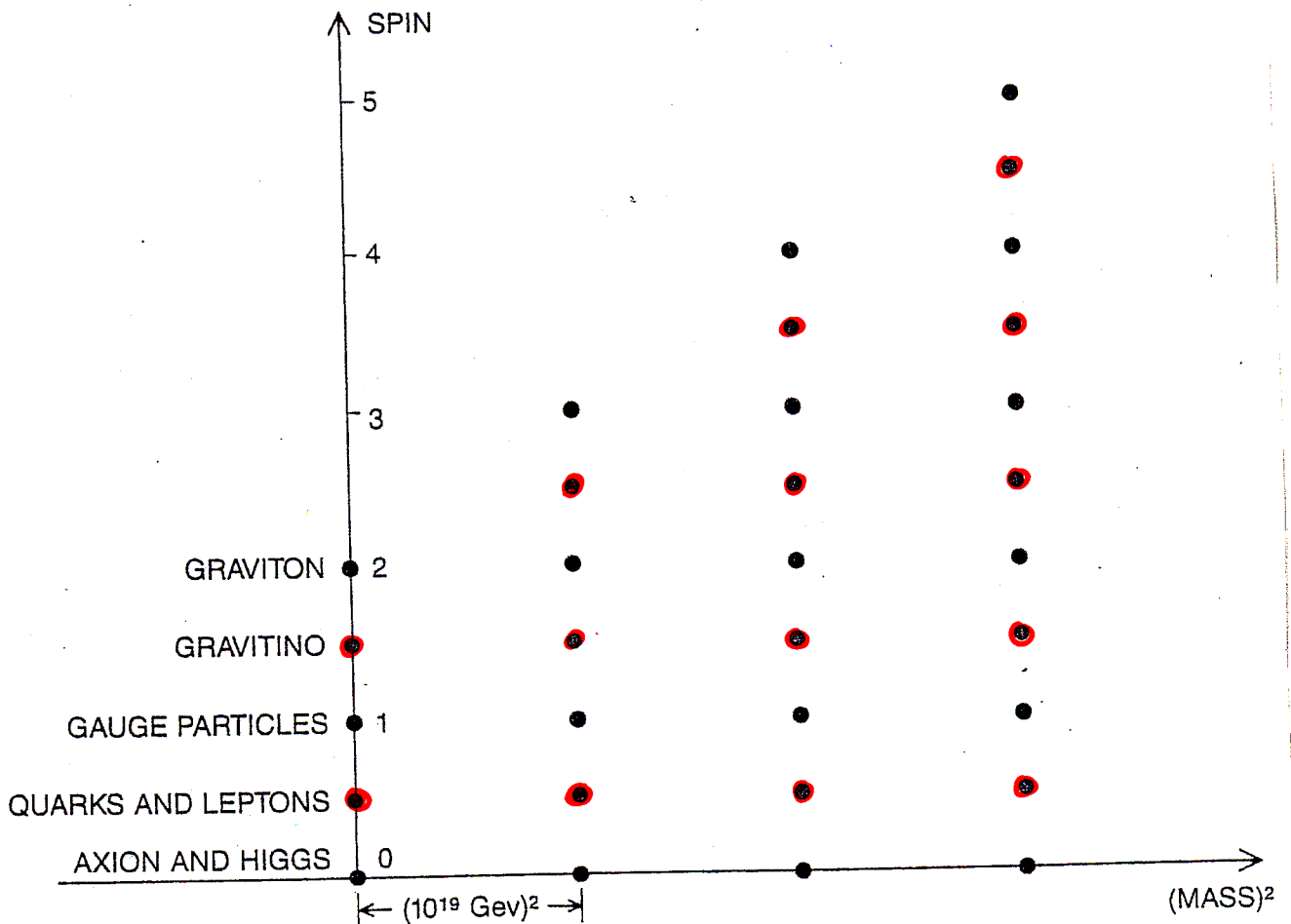
Struktur der Stringtheorien

- Konsistente Stringtheorien gibt es nur in Raumzeiten mit mehr als 4 Dimensionen. Bosonische Stringtheorien benötigen z.B. 26 Dimensionen, sind aber durch das Auftreten eines Tachyons nicht favorisiert. Außerdem gibt es keine Fermionen (= Materie) in solchen Stringtheorien.
- **Fermionische Stringtheorien** leben in 10 Dimensionen und beinhalten dabei auch Supersymmetrie zwischen Fermionen und Bosonen als integralen Bestandteil. Daher bezeichnet man solche Stringtheorien auch als **Superstringtheorien**.
- Die zusätzlichen Raum-Dimensionen sind gemäß einem von Kaluza und Klein um 1920 eingeführten Schema "kompaktifiziert" durch "Aufrollen", d.h. Einführen einer periodischen Struktur, wobei der Radius dieser Rolle $l_{pl} \approx 10^{-33}$ cm beträgt.



Struktur der Stringtheorien

In Superstringtheorien sind alle Teilchen (Quarks, Leptonen, Eichbosonen, Gravitonen und ihre supersym. Partner) aus elementaren Strings aufgebaut.

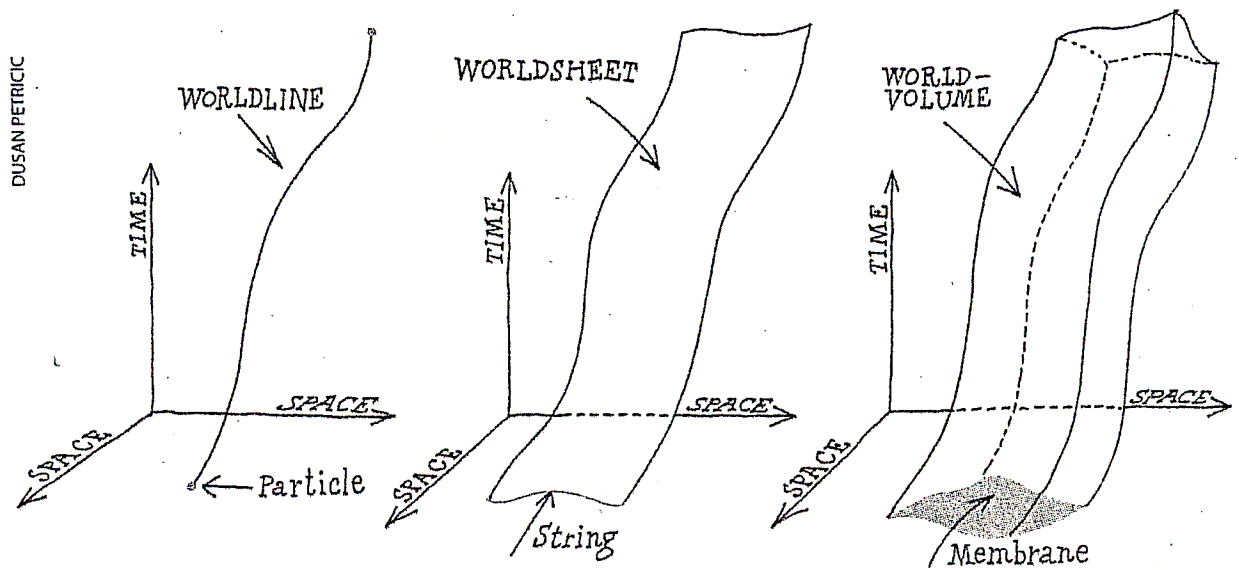


SPECTRUM OF STRING STATES is plotted for the heterotic string theory in which the extra six dimensions of spacetime have been curled up. Each black dot represents a set of bosons and each colored dot represents a set of fermions. All string states that correspond to known particles are massless states; the states with nonzero mass form an infinite series whose masses are a whole number times the square of the Planck mass, which is 10^{19} GeV . For each mass the number of fermion states is equal to the number of boson states. If each possible spin direction is counted as a different state, there are 8,064 massless states, and 18,883,584 states at the first mass level; the number increases exponentially thereafter.

Ein Massenspektrum ergibt sich aus den Eigenschwingungen des Strings, die einzelnen Moden liegen aber $\sim \frac{1}{l_{pl}} \hat{=} m_{pl} \approx 10^{19} \text{ GeV}$ auseinander.

Struktur der Stringtheorien

Ein relativistischer String ist ein idealisiertes eindimensionales Objekt. Eine Membran wäre eine weitere Möglichkeit für die elementare Baueinheit von Teilchen. Sie ist auch die maximale mit Supersymmetrie



TRAJECTORY of a particle in space-time traces a worldline. Similarly, that of a string or a membrane sweeps out a worldsheet or worldvolume, respectively.

noch verträgliche Dimension. Trotzdem spricht man in Superstringtheorien von **p -dimensionalen Membranen**, kurz **p -branes** (oder auch 0 -branes), auf denen Strings (oder 1 -branes) enden können, ohne daß sie Schleifen bilden. So wurde beispielsweise durch Unwickeln eines 6 dim Torus mit geladenen, massiven p -branes ein Objekt erzeugt, das einem schwarzen Loch vergleichbar ist.

Wechselwirkung zw. Teilchen im String-Bild

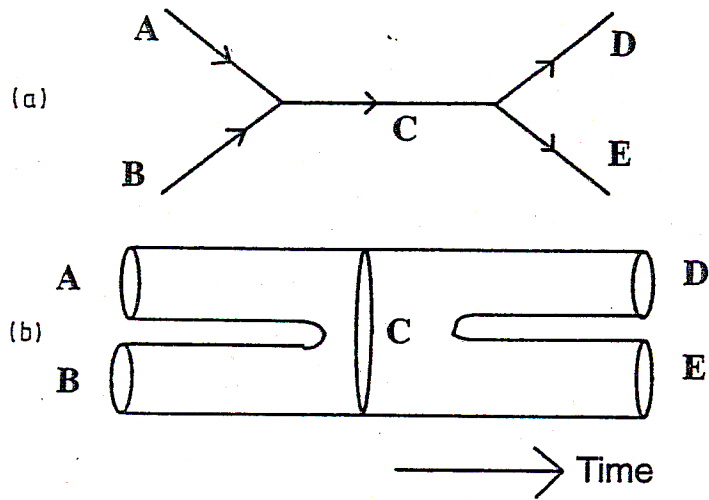


Figure 2.30. Space-time diagram of a string interaction with two strings, (A and B) (b), in comparison with a particle interaction (a). The space-time point of the string interaction (C) is ambiguous and depends on the Lorentz frame; the end products are D and E (from [Gro93]).

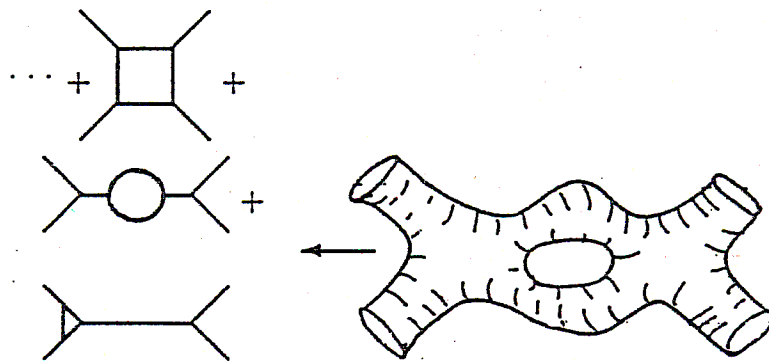










Figure 2.31. First order corrections to the Feynman diagrams reveal themselves in string theories by holes in world sheets. The number of holes (also called the genus) describes the order of perturbation theory (see e.g. [Wit96]).

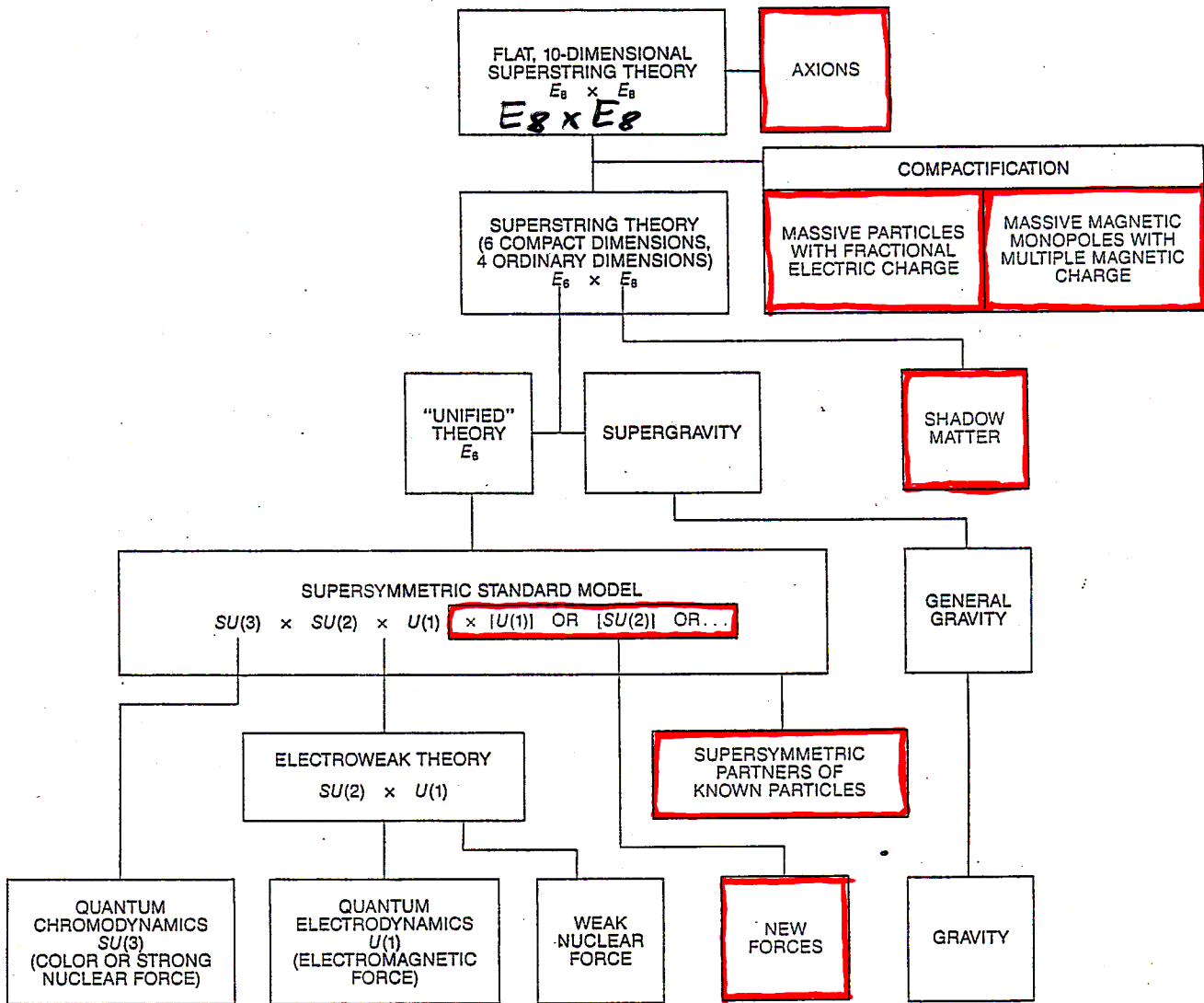
Struktur der Stringtheorien

Typ	Raumzeit-Dimensionen	Details
bosonisch	26	nur Bosonen, keine Fermionen \rightarrow nur Kräfte, keine Materie; \exists Tachyon offene und geschlossene Strings,
I	10	Supersymmetrie,  und  (Sym. gruppe $SO(32)$)
IIA	10	SUSY, nur  , masselose Fermionen mit beiden Händigkeiten (nicht-chiral \rightarrow \nexists Paritätsverletzung)
IIB	10	SUSY, nur  , masselose Fermionen mit Händigkeit (chiral \rightarrow \exists Paritätsverletzung)
HO	10	SUSY, nur  , heterotisch Strings, d.h.  \neq  (Sym. gruppe $SO(32)$)
HE	10	SUSY, nur  , heterotische Strings (Sym. gruppe $E_8 \times E_8$)

\Rightarrow **Fünf**, scheinbar unvereinbare Stringtheorien...

Theory of Everything

Struktur einer Theory of Everything, die auf einer 10-dimensionalen Superstringtheorie beruht, welche u.U. neue Teilchen & Kräfte erfordert (→ ...)
(basierend auf einer HE-Typ Stringtheorie):



SUPERSTRING THEORY that is based on the huge symmetry group $E_8 \times E_8$ might make contact with observed physical phenomena by way of the connections shown in the logical diagram. When the effects of curvature in the six curled-up dimensions are considered, the theory resembles a supersymmetric grand-unified theory

linked to supergravity, whose symmetry is associated with the group $E_6 \times E_6$. That symmetry can break down to give the standard model of elementary particles and forces, which accounts for the three nongravitational forces. New particles and forces that may be required by certain interpretations of the theory are shown in color.

S-Dualität

- Beispiel: Dualität von Elektrizität & Magnetismus

Maxwell Gleichungen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho_E & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \dot{\vec{E}} &= \vec{j}_E\end{aligned}$$

Würde man die beiden 0 durch entsprechende magnet. Größen ρ_M, \vec{j}_M ersetzen, so wären die Maxwell-Gl. völlig symmetrisch unter der Vertauschung:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{B}, \quad \vec{B} \rightarrow -\vec{E}$$

Elektr. & magnet. Felder wären dann einander dual.

Die Kopplungsstärke für elektr. Ladungen ist

$$\alpha_E = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx 1/137$$

die für magnet. Ladungen ist (von P. Dirac berechnet):

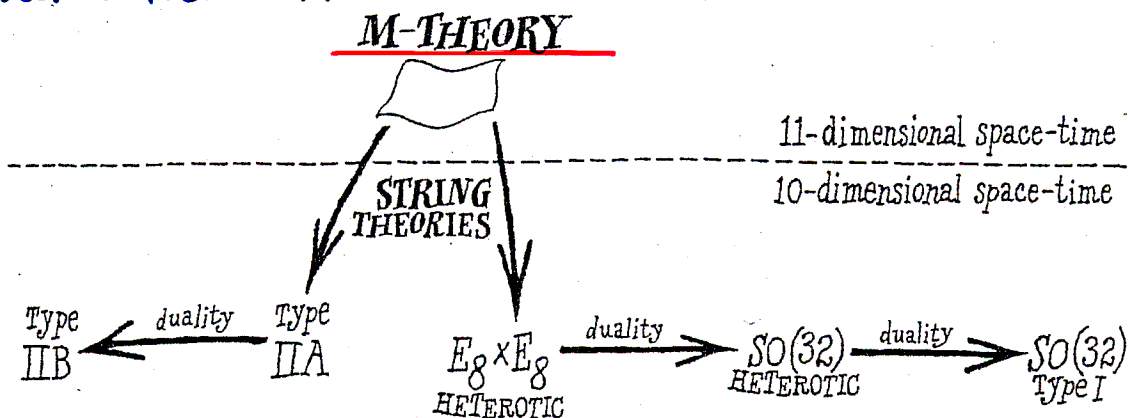
$$\alpha_M = \frac{4\pi\hbar c}{e^2} \approx 137$$

Beachte: $\alpha_E = 1/\alpha_M$

⇒ Eine geringe elektr. Wechselwirkungsstärke bedeutet eine extrem starke magnet. Ww.stärke: S-Dualität

Dualität von Theorien: M-Theorie

Vor wenigen Jahren wurde entdeckt, daß die fünf Stringtheorien offenbar Grenzfälle einer allgemeineren Theorie sind:



M-THEORY in 11 dimensions gives rise to the five string theories in 10 dimensions. When the extra dimension curls into a circle, M-theory yields the Type IIA superstring, which is further related by duality to the Type IIB string. If, however, the extra dimension shrinks to a line segment, M-theory becomes the physically plausible $E_8 \times E_8$ heterotic string. The latter is connected to the $SO(32)$ string theories by dualities.

DUSAN PETRICIC

Die **M-Theorie**, deren genaue Struktur noch gänzlich unbekannt ist, existiert in 11 Dimensionen.

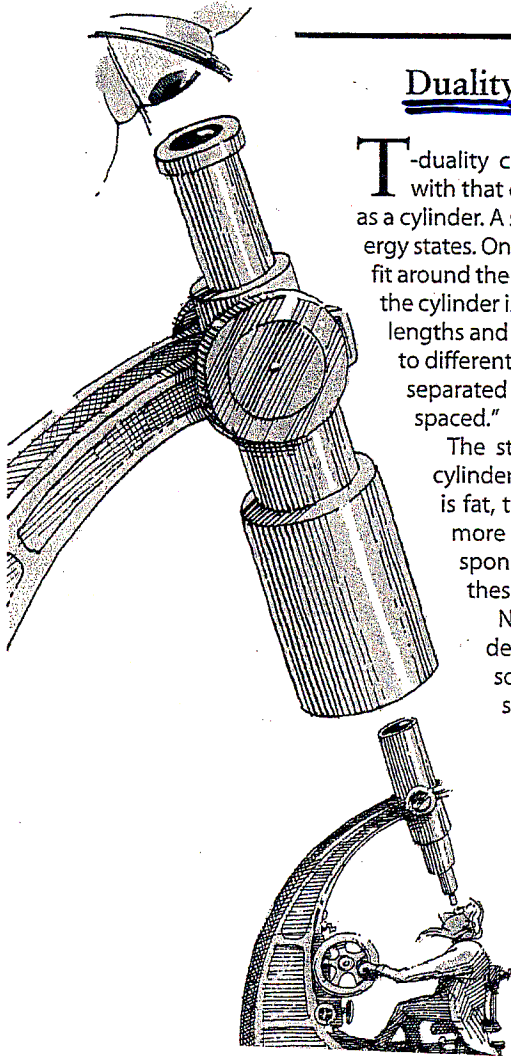
Die Stringtheorien sind weiterhin untereinander durch Dualitäten miteinander verknüpft.

Es gibt dabei:

S-Dualität zw. Theorien mit reziproken Kopplgs.stärken

T-Dualität zw. Teilchen der Theorien (Windungszahl eines Strings um eine kompaktifizierte Dimension \leftrightarrow mögliche Vibrationsmodi des Strings)

T-Dualität



Duality between Large and Small

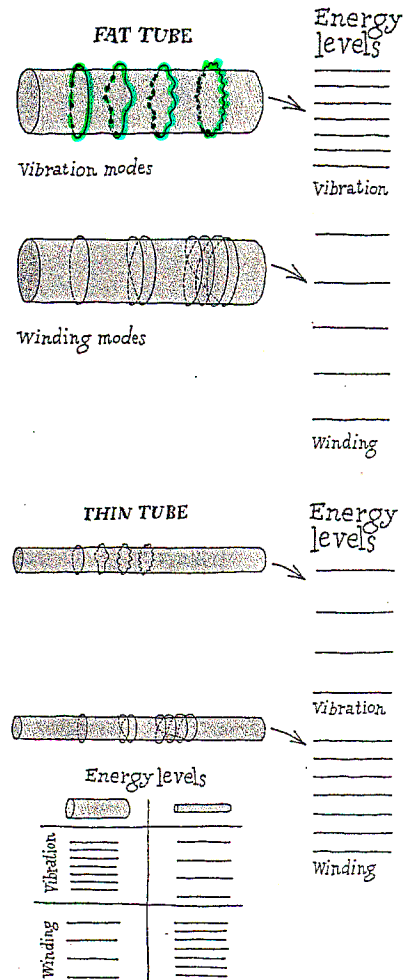
T-duality connects the physics of large space-times with that of small ones. Visualize a curled space-time as a cylinder. A string looped around it has two kinds of energy states. One set arises from the waves in the string that fit around the cylinder; call these the "vibration" modes. If the cylinder is fat, the vibrations tend to have long wavelengths and less energy. So the energies corresponding to different numbers of waves around the cylinder are separated by small amounts—that is, they are "closely spaced."

The string can, however, also loop around the cylinder like a stretched rubber band. If the cylinder is fat, the string needs to stretch more, requiring more energy. So the energies of the states corresponding to different numbers of loops—call these the "winding" modes—are widely spaced.

Now look at the energy levels for a thin cylinder. The waves fitting around it are small and so have high energy. As a result, the vibration states are widely spaced. But the loops require less energy, and so the winding modes are closely spaced.

To an outside observer, however, the different physical origins of the vibration and winding states are not apparent.

Both the thin and the fat tube yield ultimately the same energy levels, which physicists interpret as particles. Thus, the minute scales of the thin space-time may yield exactly the same physics as the large scales of our universe. —M.J.D.



... ist eine Dualität zw. Teilchen und deren Energieniveaus.

Hier am Beispiel von Windungszahl und Vibrationsmodi von Strings um eine mehr oder weniger stark

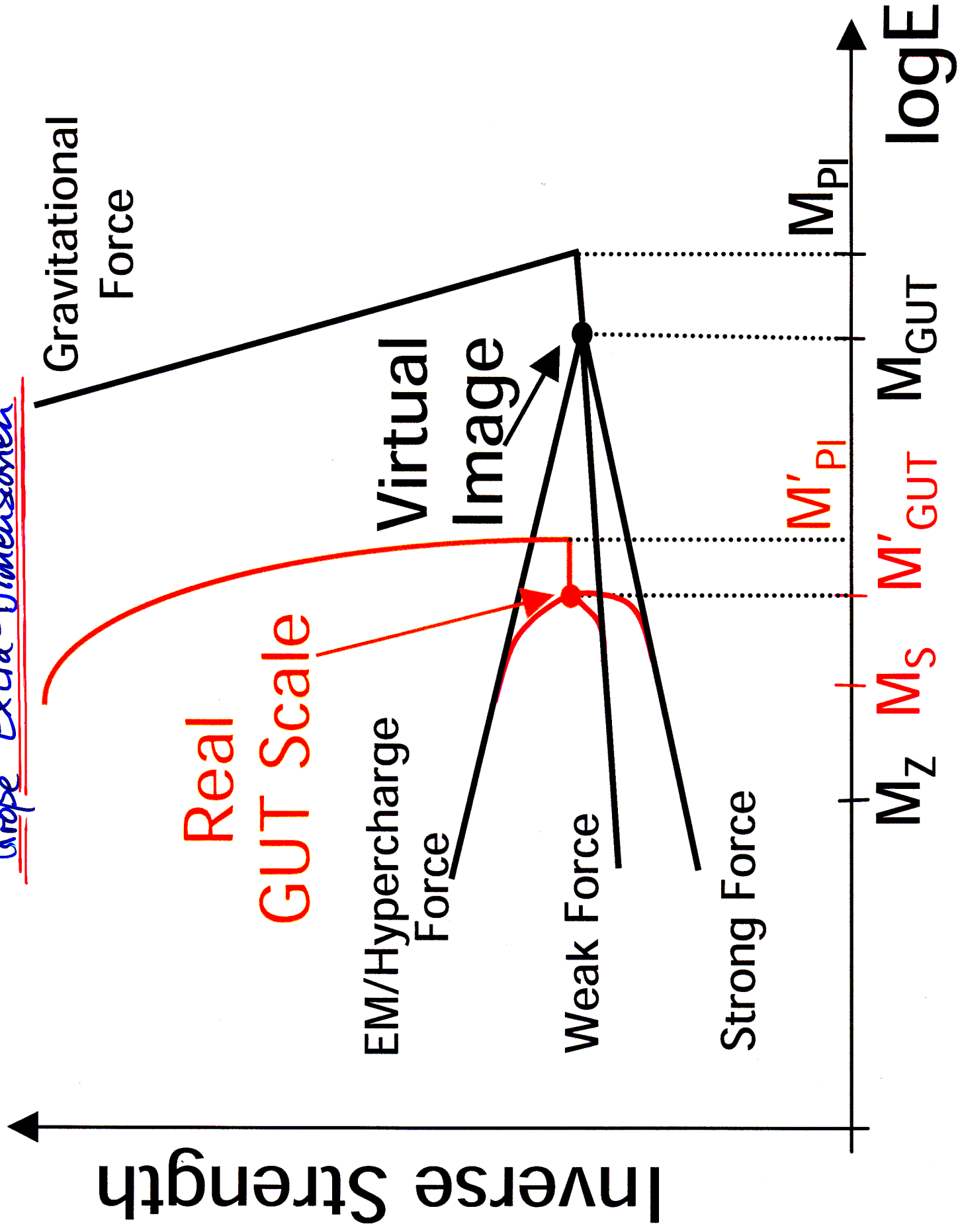
kompaktifizierte Dimension: **gering** | **stark kompakt.**

sind zueinander <u>dual</u>	←	Vibrationen		
		Windungen		

Stringtheorien und die wirkliche Welt

- markanteste Effekte treten erst bei Energien von $\sim 10^{19}$ GeV auf, wenn die kompaktifizierten Dimensionen "sichtbar" bzw. "aufgerollt" werden
→ weit weg von heute technologisch Machbarem
- Extrapolation der Kopplungsstärken gibt Hinweis auf Vereinigung der Wechselwirkungen. Unklar ist, ob in M-Theorie auch Gravitation bei Vereinigung dabei ist
- Vor wenigen Jahren wurden Große Extra-Dimensionen als mögliche "Niederenergie"-Realisierung von Stringtheorien vorgeschlagen. Damit würde eine effektive Planck-Skala von ~ 1 TeV möglich, an der die Vereinigung aller vier Wechselwirkungen erfolgt.

Große Extra-Dimensionen



Große Extra-Dimensionen

- n zusätzl. Dimensionen verändern Newtons Gravitationsgesetz:

$$V(r) = \frac{1}{m_{pl}^2} \frac{m_1 m_2}{r} \rightarrow \frac{1}{(M_{eff})^{n+2}} \cdot \frac{m_1 m_2}{r^{n+1}}$$

▷ bereits ausgeschlossen für sehr große Extra-Dimensionen, da keine Abweichung von Gravitationsgesetz auf großen Skalen beobachtet

- n Extra-Dimensionen kompaktifiziert auf Radius R

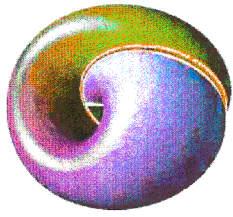
$$V(r) \sim \frac{1}{M_s^{n+2}} \cdot \frac{m_1 m_2}{R^n \cdot r} \quad , \quad r \gg R$$

▷ effektive Gravit.konst. : $G'_n \sim 1/m_s^2$

▷ Skala für M_s durch G_F : $m_s = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{G_F}}\right) \sim 1 \text{ TeV}$

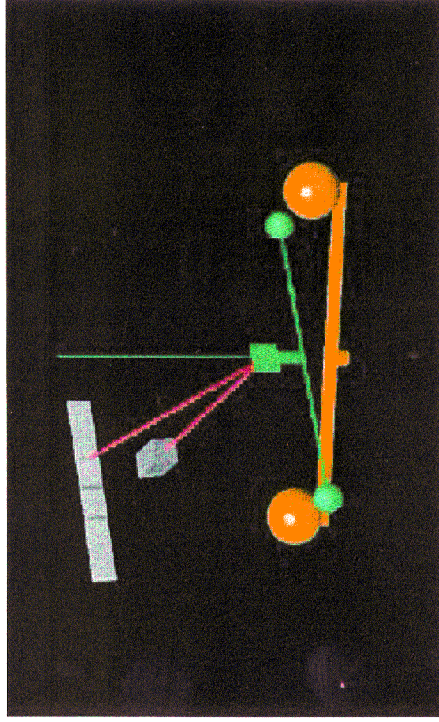
$$\Rightarrow R = \frac{1}{2\sqrt{\pi} M_s} \left(\frac{m_{pl}}{M_s}\right)^{2/n} \approx \begin{cases} 8 \cdot 10^{12} \text{ m} ; & n=1 \\ 0.7 \text{ mm} ; & n=2 \\ 3 \text{ nm} ; & n=3 \\ 6 \text{ pm} ; & n=4 \end{cases}$$

⇒ Abweichungen von Newtons Gravit.gesetz bei
Abständen $\lesssim 1 \text{ mm}$, experimentell nicht ausge-
schlossen!



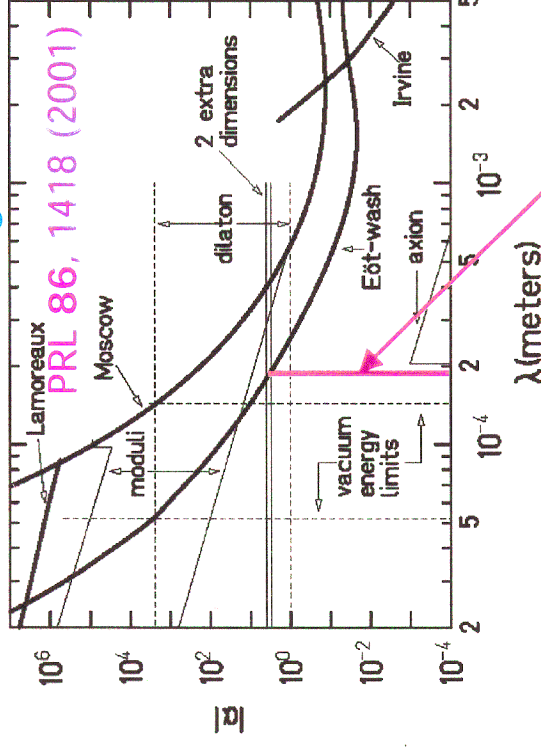
Current Limits from Gravity Experiments

- 1798: Cavendish experiment (torsion balance)

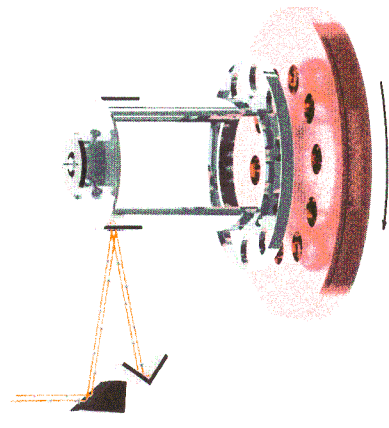


- Mid-1970-ies: a number of Cavendish-type experiments searching for the "fifth forth" via deviations from Newton's law
- Sensitivity vanishes quickly for distances less than 1 mm
- Major background: Van der Waals and Casimir forces
- High-energy colliders are the only means to probe gravity at shorter (sub-micron) distances

E. Adelberger et al.



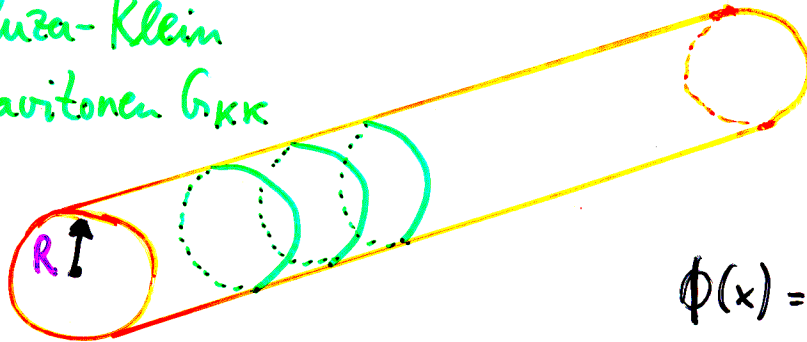
The Eöt-Wash results rule out $n=2$ extra dimensions for $R > 0.19$ mm (or $M_S < 1.9$ TeV)



Effekte großer Extra-Dimensionen

- Anregungsmodi der kompaktifizierten Dimensionen
 $\hat{=}$ Windungszahlen (vgl. T-Dualität)

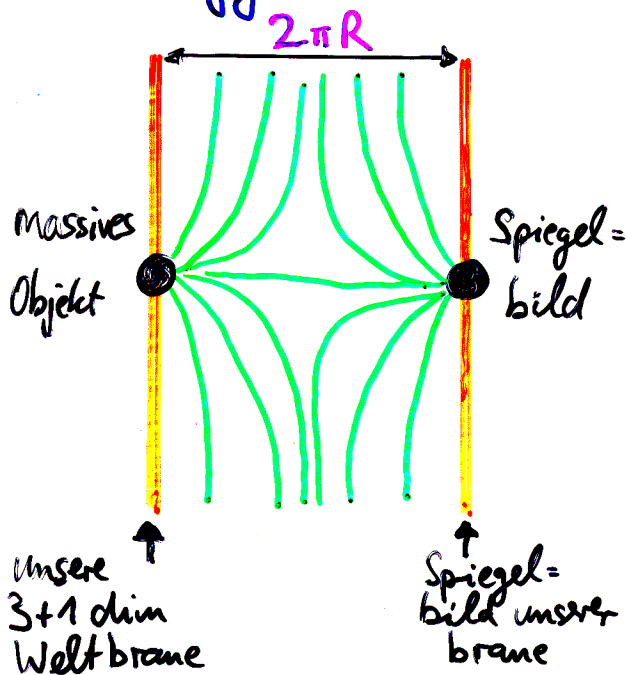
Kaluza-Klein
Gravitonen G_{KK}



$$\phi(x) = \phi(x + 2\pi kR); k=0,1,2,\dots$$

$$\text{Masse } M_{KK} = \frac{2\pi k}{R}$$

Δ "aufgewickelt":



- Impulse der KK-Gravitonen sind quantisiert

$$p \approx \frac{k}{R}, k=0,1,2,\dots$$

- KK-Gravitonen erscheinen massiv aus Sicht unserer 3+1 dim brane, mit

Massenanregungen:

$$M_{KK} = \frac{2\pi k}{R}$$

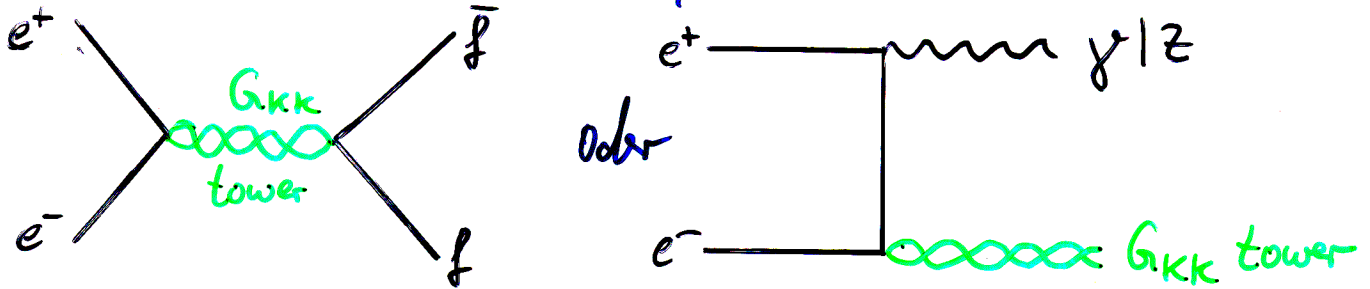
⇒ kleine Stufen in Anregungsenergien!

(z.B. 1.8 meV in $n=2$; 420 eV in $n=3$; 210 keV in $n=4$)

- G_{KK} koppeln mit geringer gravitativer Stärke, bei hohen Energien aber sehr viele Zustände angeregt (sog. towers)

Suche großer Extra-Dimensionen

- Kaluza-Klein Gravitonen koppeln an Energie-Impulstensor und tragen zu fast allen Prozessen im Standard Modell bei, z.B.



- G_{KK} tower breiten sich im bulk (=kompakt. Extra-Dimensionen) aus, so daß aus unserem 3+1 dim Sichtpunkt, Energie und Impuls nicht erhalten scheinen
- Beschleuniger-Experimente (LEP, HERA, Tevatron) haben **keine** Effekte großer Extra-Dimensionen beobachtet

$$\Rightarrow M_s > \begin{cases} 1.4 \text{ TeV} \\ 1.0 \text{ TeV} \\ 0.8 \text{ TeV} \\ 0.8 \text{ TeV} \end{cases} \text{ für } n = \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{cases}$$

- Abkühlrate der Supernova 1987 A (i.w. durch Neutrinos) durch G_{KK} $\Rightarrow M_s > \begin{cases} 30 \text{ TeV} \\ 4 \text{ TeV} \end{cases}$ für $n = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

Fazit

- Quantisierung der Gravitation ist ein äußerst schwieriges Geschäft, das schon mehr als 80 Jahre lang betrieben wird.
- Superstringtheorien könnten die Basis einer allumfassenden Theorie sein, wobei sie selbst nur Grenzfälle einer bislang nicht näher bekannten M-Theorie sind, die möglicherweise der beste Kandidat für eine allumfassende Theorie ist.
- Die bislang geringe experimentelle Prüfbarkeit der Aussagen von Stringtheorien wurde durch den Vorschlag großer Extra-Dimensionen erheblich verbessert. Doch blieben die Suchanstrengungen bisher ohne Erfolg.