

## Übung zur Vorlesung T4, Blatt 10

---

20.12.2011

### 1. Dichteoperatoren

Welche der folgenden Matrizen könnte die Matrixdarstellung eines Dichteoperators sein? Reiner oder gemischter Zustand? Begründen Sie.

(i)

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & i \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

### 2. Larmor Präzession

Betrachten Sie ein Spin-1/2 Teilchen, das an ein konstantes magnetisches Feld  $\vec{B}$  gekoppelt ist:

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B},$$

wobei  $\vec{\mu} = -(e\hbar/2m)\vec{\sigma}$  das magnetische Moment ist, und  $\vec{\sigma}$  das Vektor von Pauli Matrizen bezeichnet:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die Dichte Matrix  $\rho$  und die Entropie  $S$  in Abhängigkeit von  $\vec{r} = \langle \vec{\sigma} \rangle$
- Gegeben sei  $\vec{r}$  zu einer bestimmten Zeit  $t = 0$ . Bestimmen Sie  $\vec{r}(t)$  für beliebige  $t$ .
- Beschreiben Sie  $\rho$  und  $\vec{r}$  und  $S$  im Falle eines reinen Zustandes und einer Mischung aus reinen Zuständen mit Zufallsphasen.

### 3. Quantenmechanischer harmonischer Oszillator

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit Hamiltonoperator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

- a) Berechnen Sie die Zustandssumme für einen einzelnen harmonischen Oszillator, und berechnen Sie den Erwartungswert  $\langle H \rangle$ .

*Kontrolle:*  $Z_K = \frac{1}{2 \sinh(\beta \hbar \omega / 2)}$

- b) Dasselbe wie in Teil a), aber für  $N$  harmonische Oszillatoren.
- c) Wie lautet die kanonische Dichtematrix  $\rho$  (für einen einzelnen Oszillator), ausgedrückt durch die Energieeigenzustände  $\{|n\rangle\}$  und die Eigenwerte von  $H$ ? Geben Sie die Matrixelemente  $\langle x' | \rho | x \rangle$  an. Handelt es sich um einen reinen oder einen gemischten Zustand?
- d) Die Zustandssumme hängt nicht von  $m$  ab. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \left\langle \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right\rangle$$

*Hinweis:*  $\frac{\partial}{\partial t} \text{tr} e^A = \text{tr} \frac{\partial A}{\partial t} e^A$ . Warum gilt dies nicht ohne die Spurbildung?

- e) Berechnen Sie  $\langle x^2 \rangle$ .
- f) Bestimmen Sie  $\langle x^2 \rangle$  für den klassischen harmonischen Oszillator und vergleichen Sie mit Aufgabenteil e).