

Übung zur Vorlesung T4, Blatt 13

24.01.2012

1. Virialentwicklung

Betrachten Sie ein Gas in einem d -dimensionalen Raum. Die Wechselwirkung zwischen den Teilchen ist gegeben durch folgendes Potential

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & \text{falls } 0 < r < a \\ -V_0 & \text{falls } a < r < L \\ 0 & \text{falls } L < r < \infty \end{cases}$$

- Berechnen Sie den zweiten Virialkoeffizienten $B_2(T)$ in d Dimensionen. Diskutieren Sie das Verhalten bei sehr hohen und sehr niedrigen Temperaturen.
- Bestimmen Sie die erste Korrektur zur Isothermen Kompressibilität

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N}.$$

- Berechnen Sie B_3 für den Fall $a = L$ (harte Kugel) und $d = 1$.

2. Innere Energie des van der Waals Gases

In der Vorlesung hatten wir die kanonische Zustandssumme mit dem einfachen Wechselwirkungspotential aus Aufgabe 1 in erster Ordnung mit entsprechenden Näherungen hergeleitet. Insbesondere hatten wir für das Potential F gefunden, dass $F \sim -\frac{1}{\beta} \left(Z_N^{frei} + N^2/2V(-A + \beta B) \right)$. Hierbei war $a = \frac{4\pi}{3}a^3$ und $B = \frac{4\pi}{3}V_0((a+L)^3 - a^3)$.

- a) Leiten Sie $\langle H \rangle$ in dieser Näherung her.
- b) Leiten Sie U nun thermodynamisch her: Gehen Sie aus von der van der Waals Gleichung in der Standard-Notation

$$\left(p + \frac{N^2}{V^2}a \right) (V - Nb) = NkT$$

- (i) Zeigen Sie für das van der Waals Gas:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = \frac{aN^2}{V^2}$$

- (ii) Es ist

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

Zeigen Sie: Dies hängt nicht von V ab (sondern nur von T).

- (iii) Nehmen Sie nun an, dass C_V auch nicht von T abhängt (Begründung?) und berechnen Sie die innere Energie in Abhängigkeit von Temperatur und Volumen, bei konstanter Teilchenzahl.
- (iv) Zeigen Sie, dass für die Entropie gilt

$$S - S_0 = C_V \log \left[\frac{T}{T_0} \left(\frac{V - Nb}{V_0 - Nb} \right)^{\frac{Nk}{C_V}} \right]$$

- (v) Berechnen Sie nun die innere Energie als Potential, d.h. abhängig von den Variablen V, S .