Übung zur Vorlesung T4, Blatt 5

15.11.2011

1. **Wahrscheinlichkeitsverteilungen**

   a) Berechnen Sie die charakteristische Funktion, sowie die Momente μ_1 und μ_2 für die Laplace Verteilung

   $$p(x) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{|x|}{a}} \ .$$

   b) Berechnen Sie die Momente μ_1 und μ_2 für die Maxwell Verteilung

   $$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{a^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) .$$

2. **Momente und Kumulanten**

Betrachten Sie die Reihenentwicklung der charakteristischen Funktion einer Zufallsvariablen

$$\Phi_X(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \mu_n$$

sowie die Entwicklung von ln Φ_k in Kumulanten.

$$\ln \, \Phi_X(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \kappa_n \ .$$

Leiten Sie durch Vergleich der Reihenentwicklungen von $\Phi_X(k)$ in Momente und Kumulanten die folgende Beziehung her:

$$\mu_m = \sum_{r_n; n r_n = m} \prod_n \frac{m!}{(n!)^{r_n} r_n!} \kappa_n^{r_n} \ .$$

Geben Sie den Zusammenhang zwischen Momenten und Kumulanten fuer die ersten 3 Ordnungen explizit an. Stellen Sie fest: Der numerische Vorfaktor vor $\prod_n \kappa_n^{r_n}$ mit $r_n n = m$ entspricht der Anzahl von Möglichkeiten m Punkte in r_n Untergruppen mit n Elementen aufzuteilen.

3. **Ensemble aus 4 Atomen**

Wir betrachten eine Gesamtheit aus 4 identischen Atomen, von denen sich jedes in einem von 5 Energie-Eigenzuständen befinden kann: $H|\nu >= \nu\epsilon|\nu >$, wobei $0 \leq \nu \leq 4$. Die Gesamtenergie des Systems betrage $E_{tot} = 5\epsilon$. Es soll keine Wechselwirkung zwischen den Atomen geben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $p_{i,\nu}$ dafür, dass das i-te Atom sich im Zustand $|\nu >$ befindet. Überlegen Sie sich zunächst, dass $p_{i,\nu}$ von i unabhängig ist. Zählen Sie dann die Anzahl der Konfigurationen, bei denen sich ein festes Atom im Zustand $|\nu >$ befindet. Schliessen Sie nun, was die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind.