Übung zur Vorlesung T4, Blatt 7

29.11.2011

1. **Zur Maxwell-Boltzmann Verteilung: Maxwells Zugang**

Die Maxwell-Boltzmann Verteilung eines Idealen Gases lautet

$$f(\vec{v}) = \mathcal{N} e^{-\beta m \frac{\vec{v}^2}{2}}.$$

Zeigen Sie, dass diese die allgemeine Form einer Geschwindigkeitsverteilung ist, die folgende Bedingungen erfüllt:

i) Die Verteilung $f(\vec{v})$ ist rotationsinvariant.

ii) Die Verteilungen der Geschwindigkeitskomponenten v_i, $(i = 1, 2, 3)$, sind unabhängig.

2. **N harmonische Oszillatoren**

Betrachten Sie ein abgschlossenes System von N unterscheidbaren harmonischen Oszillatoren gleicher Frequenz ω, dessen Hamilton Funktion

$$H = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\frac{p_\alpha^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_\alpha^2 \right)$$

lautet. Gehen Sie im folgenden vor, wie in der Vorlesung im Beispiel des idealen Gases.

a) Berechnen Sie die Entropie. Kontrolle:

$$S = kN \left[\ln \frac{E}{\omega h N} + 1 \right] + k \ln \frac{\Delta E}{E},$$

wobei der letzte Term im thermodynamischen Limes entfällt.

b) Zeigen Sie $E = NkT$ und bestimmen Sie den Druck.

3. **Dipole**

Betrachten Sie ein Gas von N nichtwechselwirkenden, stabartigen Molekülen, wobei jedes Molekül die Masse m, Trägheitsmoment I und ein elektrisches Dipolmoment μ habe. Ein Molekül ist durch fünf verallgemeinerte Koordinaten beschrieben: die Position des Schwerpunktes $\vec{r}$ und zwei Winkelkoordinaten θ, ϕ. Aus der klassischen Mechanik kennen Sie bereits die Lagrangefunktion, die solch ein Molekül in einem äußeren elektrischen Feld $\mathcal{E}$ entlang der z-Achse beschreibt:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \mu \mathcal{E} \cos \theta.$$

a) Bestimmen Sie die zugehörige Hamiltonfunktion ausgedrückt durch die verallgemeinerten Impulse $\vec{p}$, p_θ und p_ϕ.

b) Berechnen Sie die kanonische Zustandsfunktion von N nichtwechselwirkenden Dipolen

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N! h^{5N}} \int \left[\prod_{i=1}^{N} d^3\vec{r}_i d\theta_i d\phi_i d^3\vec{p}_i dp_{\theta,i} dp_{\phi,i} \right] \exp(-\mathcal{H}/(kT)).$$

c) Berechnen Sie den Druck und die innere Energie. Diskutieren Sie Ihr Resultat, vergleichen Sie insbesondere das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 1. Verwenden Sie das Äquipartitionstheorem, um Ihr Ergebnis für die innere Energie bei $\mathcal{E} = 0$ zu überprüfen.

d) Berechnen Sie die mittlere Polarisierung $\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{N} \langle \mu \cos\theta_i \rangle$ und diskutieren Sie den Limes für kleine und große elektrische Felder. Zeichnen Sie P als Funktion der Temperatur.