

Übung zur Vorlesung T4, Blatt 1

18.10.2011

1. Stabilitätsbedingungen

Seien $z_1 = (U_1, V_1, N_1)$ und $z_2 = (U_2, V_2, N_2)$ Zustände eines Gases. Dann gilt:

$$S(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) \geq \lambda S(z_1) + (1 - \lambda)S(z_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Das heisst, S ist konkav als Funktion von (U, V, N) . Dies folgt aus der Eigenschaft, dass die Entropie eines geschlossenen Systems monoton mit der Zeit wächst. Streng genommen muss das Gas aus Teilchen bestehen, die miteinander genügend kurzzeitig wechselwirken.

Sei S zweimal differenzierbar. Wird die Variable N unterdrückt, dann ist die obige Gleichung durch die Bedingungen:

$$\begin{aligned} \det(\partial^2 S) &\geq 0 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} &\leq 0 \end{aligned}$$

ersetzbar.

- a) Zeige, dass die Helmholtz Freie Energie $F(T, V, N)$ konvex in den Variablen (V, N) ist.

Hinweis:

$$F(T, V, N) = T \sup_U \left(\frac{1}{T} U - S(U, V, N) \right)$$

- b) Verwende die Konkavität von S , um zu zeigen:

$$c_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N} > 0. \quad (1)$$

- c) Verwende die Konvexität von F , um zu zeigen:

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T,N} > 0. \quad (2)$$

2. Carnot Prozess

- a) Betrachte eine Carnot-Maschine mit einem idealen Gas als Arbeitssubstanz, die zwischen zwei Wärmereservoirs mit Temperatur T_1 bzw. T_2 ($< T_1$) operiert. Zeige, dass für den Wirkungsgrad η gilt:

$$\eta \equiv \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

wobei W die von der Maschine geleistete Arbeit bezeichnet. Berechne hierzu die in jedem Schritt des Prozesses aufgenommene bzw. geleistete Arbeit und die aufgenommene Wärme.

- b) Zeige anhand des zweiten Satzes der Thermodynamik, dass jede reversible Maschine, die zwischen zwei Wärmereservoirs arbeitet, denselben Wirkungsgrad wie die Carnot Maschine hat.
- c) Für den Ausdehnungskoeffizienten $\alpha = V^{-1} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ von Wasser gilt:

$$\alpha \underset{\geq}{\leq} 0 \quad \text{für} \quad T \underset{\geq}{\leq} 4^\circ C$$

Zeichne Adiabaten im T-V Diagramm für Temperaturen über und unter $4^\circ C$. Weshalb ist es nicht möglich, einen Carnot Prozess mit Isothermen bei $2^\circ C$ bzw. $6^\circ C$ herzustellen? (*Hinweis*: verwende Ungleichungen (1) und (2) aus Aufgabe 1, und die Maxwell-Relationen für die Helmholtz Freie Energie).