Übung zur Vorlesung T4, Blatt 11

10.01.2012

1. **Bosegas im Magnetfeld**

Betrachten Sie ein System nicht wechselwirkender Spin 1 Bosonen in einem Magnetfeld. Der Hamiltonoperator für ein Teilchen ist gegeben durch

$$H(\vec{p}, s_z) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu_0 s_z B$$

s_z kann die Werte ± 1 und 0 annehmen.

a) Berechnen Sie die mittleren Besetzungszahlen $\langle n_s(\vec{k})\rangle$ der Einteilchenzustände mit Wellenzahl $\vec{k}$ und $s = -1, 0, 1$.

b) Berechnen Sie die Gesamtzahl N_s der Teilchen mit spin s. Approximieren Sie hierzu die Energieniveaus durch eine kontinuierliche Verteilung.

Ergebnis: $N_s = \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z e^{\beta \mu_0 s B})$, wobei $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}}$ und $z = e^{\mu\beta}$.

c) Bestimmen Sie die Magnetisierung $M(T, \mu) = \mu_0(N_+ - N_-)$. Entwikkeln Sie im Limes kleiner B. Finden Sie die magnetische Suszeptibilität $\chi(T, \mu) = \partial M / \partial B$ in diesem Limes.

Ergebnis: $\chi = \frac{2\mu_0^2 V}{kT\lambda^3} g_{1/2}(z)$, wobei $g_{1/2}(z) = z\frac{dg_{3/2}}{dz}$. $g_{1/2}$ divergiert im limes $z \to 1$.

d) Bestimmen Sie die Temperatur der Bose-Einstein Kondensation in Abhängigkeit von der Gesamtteilchenzahldichte für $B = 0$. Wie verhält sich die Suszeptibilität, wenn sich die Temperatur von oben T_c nähert?

e) Welcher Zustand ist im Limes $T \to 0$ makroskopisch besetzt?

2. **Bose-Einstein-Kondensation in unterschiedlichen Dimensionen**

Berechnen Sie die grosskanonische Zustandssumme Z_G für das d-dimensionale Bose-Gas. Leiten Sie damit die mittlere Teilchendichte $n = \langle N\rangle/V$ her. Verwenden Sie hierzu den Integralausdruck. Betrachten Sie nun den Limes $\mu \to 0$. Für welche Dimensionen bleibt das Integral endlich? Diskutieren Sie die Konsequenzen für die Bose-Einstein Kondensation in unterschiedlichen Dimensionen.