Übung zur Vorlesung T4, Blatt 12

17.01.2012

1. **Nicht wechselwirkende Bosonen**

Betrachten Sie eine Grosskanonische Gesamtheit aus nicht wechselwirkenden Bosonen mit chemischem Potential μ. Die 1-Teilchen Zustände sind durch den Wellenvektor $\vec{q}$ bestimmt und besitzen Energie $\mathcal{E}(\vec{q})$.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\{n_{\vec{q}}\})$, dass sich das System in der Konfiguration mit Besetzungszahlen $\{n_{\vec{q}}\}$ befindet. Drücken Sie diese in Abhängigkeit von der Fugazitäten $z_{\vec{q}} = \exp(\beta(\mu - \mathcal{E}(\vec{q})))$ aus.

b) Für einen gegebenen Wellenvektor $\vec{q}$, berechnen Sie die Charakteristiche Funktion $\langle \exp[ikn_{\vec{q}}]\ .\rangle$

c) Bestimmen Sie nun den Erwartungswert $\langle n_{\vec{q}}\rangle$ und die Varianz $\langle n_{\vec{q}}^2\rangle - \langle n_{\vec{q}}\rangle^2$.

d) Drücken Sie die Varianz aus Teil c) in Abhängigkeit von dem Erwartungswert $\langle n_{\vec{q}}\rangle$ aus.

e) Drücken Sie Ihre Antwort für Teil a) in Abhängigkeit der Besetzungszahlen $\{\langle n_{\vec{q}}\rangle\}$ aus.

f) Berechnen Sie die der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\{n_{\vec{q}}\})$ entsprechende Entropie und drücken Sie diese in Abhängigkeit von $\{\langle n_{\vec{q}}\rangle\}$. Diskutieren Sie den Limes $T \to 0$.

2. **Dirac Teilchen**

Dirac Teilchen sind nicht wechselwirkende Spin 1/2 Fermionen. Die Einteilchenzustände tauchen paarweise auf mit entsprechenden Energien

$$\mathcal{E}_{\pm}(\vec{k}) = \pm\sqrt{m^2c^4 + \hbar k^2 c^2}.$$

a) Zeigen Sie, dass für jedes fermionische System mit chemischen Potential μ die Wahrscheinlichkeit dafür, einen besetzten Zustand mit Energie $\mu+\delta$ zu finden, mit der Wahrscheinlichkeit, einen unbesetzten Zustand der Energie $\mu-\delta$, zu finden, übereinstimmt. Hierbei bezeichnet δ eine beliebige Konstante Energie.

b) Bei Temperatur $T = 0$ sind alle 1-Teilchen Dirac Zustände mit negativen Energien besetzt, während die mit positiven Energien leer sind, d.h. $\mu(T = 0) = 0$. Mit dem Ergebnis aus Teil a), bestimmen Sie das chemische Potential für beliebige Temperatur T.

c) Zeigen Sie, dass die mittlere angeregte Energie dieses Systems bei Temperatur T, folgende Gleichung erfüllt:

$$E(T) - E(0) = 4V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{E}_+(\vec{k})}{\exp\left(\beta \mathcal{E}_+(\vec{k})\right) + 1}$$

d) Zeigen Sie, dass für masselose Dirac Teilchen:

$$E(T) - E(0) = \frac{7\pi^2}{60} V k_B T \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3$$