Übung zur Vorlesung T4, Blatt 13

31.01.2012

1. **Korrelationslänge für das Ising-Modell**

Betrachten Sie das eindimensionale Ising-Modell mit periodischen Randbedingungen:

$$H = -J\sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1}, \qquad s_i = \pm 1, \qquad s_{N+1} = s_1.$$

Berechnen Sie den Korrelator $\langle s_i\, s_{i+r}\rangle$ mittels der Transfermatrix T und drücken Sie das Ergebnis durch die Eigenwerte von T aus. Bestimmen Sie die Korrelationslänge ξ, die durch $\langle s_i\, s_{i+r}\rangle \equiv e^{-r/\xi}$ definiert ist. Betrachten Sie nun den Fall $N \gg r$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Übungsblatt 10. Diskutieren Sie den Limes $T \to 0$.

2. **Potts-Modell**

Das Potts-Modell ist eine Verallgemeinerung des eindimensionalen Ising-Modells mit periodischen Randbedingungen. Jedem Gitterpunkt $i = 1, \ldots, N$ mit Gitterabstand $a = 1$ wird eine q-wertige Variable $s_i \in \{1, \ldots, q\}$ zugeordnet. Der Konfigurationsraum Ω ist damit q^N-dimensional. Die Energie einer Konfiguration $\omega \in \Omega$ ist

$$H(\omega) = -2J\sum_{i=1}^{N} \delta_{s_i, s_{i+1}} - 2h\sum_{i=1}^{N} \delta_{s_i, 1}.$$

Die kanonische Zustandssumme ist

$$Z(\beta, J, h) = \sum_{\omega\in\Omega} e^{-\beta H(\omega)}.$$

a) Bestimmen Sie die Transfermatrix T, so dass $Z = \mathrm{Sp}(T^N)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass für die freie Energiedichte im thermodynamischen Limes $f = -\frac{1}{\beta}\ln\lambda_+$ gilt, wobei λ_+ den größten Eigenwert der Matrix T bezeichnet. Bestimmen sie λ_+ und damit die Zustandssumme.

   Kontrolle: λ_+ ist eine Lösung der Gleichung:

   $$\lambda^2 - (\zeta z + \zeta + q - 2)\lambda + z(\zeta - 1)(\zeta + q - 1) = 0,$$

   mit $\zeta = e^{2\beta J}$ und $z = e^{2\beta h}$.

c) Berechnen Sie (bei $h = 0$) die Korrelationslänge ξ (die Abhängigkeit von den Eigenwerten der Transfermatrix ist gleich wie in Aufgabe 1, Sie müßen sie nicht explizit herleiten). Untersuchen Sie wieder den Limes $T \to 0$.