Fakultät für Physik der LMU München

Prof. Ilka Brunner
Dr. Andres Collinucci

Vorlesung T4, WS10/11
Klausur am 16. Februar 2011

Name:

Matrikelnummer:

Erreichte Punktzahlen:

1	2	3	4	5	6

Hinweise

- Die Bearbeitungszeit beträgt 3 Stunden.
- Bitte verwenden Sie den freien Platz sowie die Rückseiten der Blätter für Ihre Antworten. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, legen Sie weitere Blätter bei. Kennzeichnen Sie **jedes einzelne Blatt** mit Namen, Matrikelnummer und der Nummer der Aufgabe. Verwenden Sie für jede Aufgabe **ein separates** Blatt.

Name, Vorname: Matrikel-Nr.:

1. **Kurzfragen**

a) Die freie Energie $F(T, V, N)$ eines Systems sei bekannt. Bestimmen Sie die Zustandsgleichungen.

b) Zeigen Sie
$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,N}$$

c) Gegeben sei ein System mit den Phasen flüssig und gasförmig. Zeigen Sie, dass im Gleichgewicht die chemischen Potentiale μ_{fl} und μ_{gas} gleich sind.

d) Der Gibb'sche Korrekturfaktor ist essentiell um

(i) Die thermodynamischen Zustandsgleichungen des idealen Gases korrekt herauszubekommen.

(ii) Die Mischungsentropie zweier idealer Gase korrekt behandeln zu können.

Geben Sie eine kurze Begründung dafür, warum die eine Aussage falsch ist, die andere richtig.

e) Gegeben sei ein System mit 3 Zuständen der Energien E_1, E_2, E_3. Wie lautet die kanonische Zustandssumme?

f) Gegeben sei eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Wahrscheinlickeiten $p_1, \ldots, p_N$.

(i) Wie lautet die Shannon Entropie?

(ii) Für welche Verteilung wird die Shannon Entropie maximal?

(iii) Für welche Verteilung wird die Shannon Entropie minimal?

g) Erklären Sie kurz die Idee der Molekularfeldapproximation beim Ising-Modell.

Name, Vorname: Matrikel-Nr.:

2. **Wärmekapazität**

a) Zeigen Sie

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial T}\left(T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P\right)$$

b) Zeigen Sie, dass für das van der Waals Gas die Wärmekapazität C_V nicht vom Volumen abhängt.

Hinweis: Die Zustandsgleichung für das Van der Waals Gas lautet:

$$(P + \frac{N^2}{V^2}a)(V - Nb) = NkT$$

Name, Vorname: Matrikel-Nr.:

3. **Fermi-Gas**

Betrachten Sie ein ideales Fermi Gas. Die Energieniveaus für ein einzelns Teilchen seien $E_0 \leq E_1 \leq E_2 \cdots \leq E_l \ldots$.

a) Bestimmen Sie die grosskanonische Zustandssumme.

b) Bestimmen Sie die mittlere Besetzungszahl $\langle n_l \rangle$ des l-ten Niveaus.

c) Skizzieren Sie die Fermi-Dirac Verteilung im Limes $T \to 0$. Was versteht man unter der Fermi-Energie E_F?

Betrachten Sie nun ein Fermi-Gas am absoluten Nullpunkt. Bestimmen Sie die mittlere Energie pro Teilchen $\langle E \rangle / N$ in den folgenden beiden Fällen:

d) Nichtrelativistische freie Teilchen

e) Relativistische freie Teilchen mit Energie-Impuls Relation $E_p = |\vec{p}|c$, c die Lichtgeschwindigkeit.

Kontrolle: d): $\frac{\langle E \rangle}{N} = \frac{3}{5} E_F$, e) :$\frac{\langle E \rangle}{N} = \frac{3}{4} E_F$

Name, Vorname: Matrikel-Nr.:

4. **Bose versus Fermi-Statistik**

Betrachten Sie ein System zweier identischer Teilchen, die 3 unterschiedliche Energieniveaus besetzen können,

$$E_n = nE, \quad n = 0, 1, 2 \ .$$

Das unterste Energieniveau sei zweifach entartet, die anderen Niveaus seien nicht entartet. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme und die mittlere Energie für die Fälle dass

a) es sich um Fermionen handelt.

b) es sich um Bosonen handelt.

Falls Sie die Zustandssumme **nicht** berechnen konnten: Bestimmen Sie die mittlere Energie für den Fall, dass eine kanonische Zustandssumme gegeben ist durch $Z_K = a_0 + \sum_{i=1}^{5} a_i e^{-\beta E_i}$. Aus welcher Zahlenmenge (z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \dots$) müssen die a_i sein, damit der Ausdruck eine konsistente Zustandssumme ergibt?

Name, Vorname: Matrikel-Nr.:

5. Molekülkette

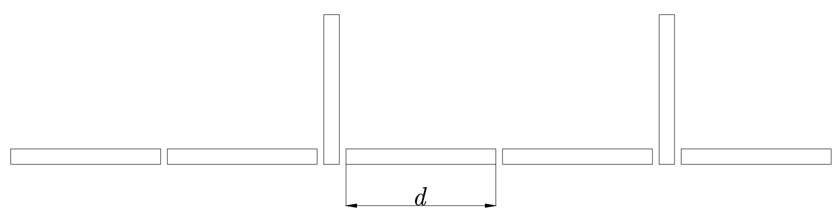
Gegeben sei eine Kette von Molekülen. Jedes der Moleküle hat eine Länge d. Die Moleküle können entweder entlang der Kettenausdehnung ausgerichtet sein, oder senkrecht dazu. Im letzteren Fall sei die Länge entlang der Kette mit 0 anzunähern. Die Energie der senkrechten Kettenglieder sei Δ, die der entlang der Kette orientierten sei 0.

a) Bestimmen Sie die Entropie in der mikrokanonischen Gesamtheit. Ergebnis: $S = A \log \frac{B}{(\alpha E)!(\delta - \gamma E)!}$, wobei Sie $A, B, \alpha, \gamma, \delta$ kennen, wenn Sie die Aufgabe gelöst haben.

b) Bestimmen Sie die Energie in Abhängigkeit von der Temperatur aus a). Verwenden Sie folgende Näherung für die Ableitung der Fakultät: $\frac{d}{dn} \log n! \sim \log n$.
Ergebnis: $E = \frac{N\Delta}{e^{\beta\Delta}+1}$

c) Was ist die mittlere Länge der Kette in Abhängigkeit von der Temperatur?

d) Berechnen Sie nun die kanonische Zustandssumme und daraus die mittlere Energie $\langle E \rangle$.



Name, Vorname: Matrikel-Nr.:

6. **Ising Modell, kanonisches Ensemble**

Betrachten Sie ein Kette von N Spins (magnetischen Momenten), wobei die einzelnen Spins jeweils mit ihrem nächsten Nachbarn wechselwirken.

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1}, \quad s_i = \pm 1,$$

J ist eine Kopplungskonstante.

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme. Gehen Sie hierbei beispielsweise rekursiv vor. Das Ergebnis ist

$$Z = 2(2\cosh\beta J)^{N-1} \ .$$

b) Zeigen Sie $\langle s_j \rangle = 0$, wobei $1 << j << N$.

c) Berechnen Sie den Korrelator $\langle s_i s_j \rangle$, wobei $1 << i < j << N$. Ergebnis:

$$\langle s_i s_j \rangle = (\tanh\beta J)^{|j-i|} \ .$$

Alternative: Gehen Sie mit der Transfermatrixmethode vor. Stellen Sie in diesem Fall periodische Randbedingungen an die Spinkette. Lösen Sie alle drei Aufgabenteile mit dieser Methode.