Übung zur Vorlesung T4p, Blatt 10

21.12.2009

1. **Volumen einer n-dimensionalen Kugel**

In dieser Aufgabe soll das Volumen einer Kugel mit Radius r im n-dimensionalen Raum $\mathbf{R}^n$ berechnet werden. Das Ergebnis ist

$$V_n = \frac{r^n \pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})},$$

wobei Γ die Eulersche Gamma-Funktion ist. Überlegen Sie sich zunächst, dass $V_n(r) = c_n r^n$, wobei c_n eine r-unabhängige Konstante ist.

2. **Stirling Formel**

Leiten Sie die Stirling-Formel für grosse n her:

$$\Gamma(n) \sim \sqrt{2\pi n}\; n^n\; e^{-n}\ .$$

Benutzen Sie die Integral-Darstellung der Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt\ .$$

Startpunkt: Zeigen Sie, dass

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{f(t)} dt$$

wobei (für grosse n) $f(t) = n \ln t - t$. Führen Sie eine Taylorentwicklung von $f(t)$ (um das Extremum der Funktion) durch. Warum liefert dies eine gute Näherung?

3. **Ensemble aus 4 Atomen**

Wir betrachten eine Gesamtheit aus 4 identischen Atomen, von denen sich jedes in einem von 5 Energie-Eigenzuständen befinden kann: $H|\nu >= \nu\epsilon|\nu >$, wobei $0 \leq \nu \leq 4$. Die Gesamtenergie des Systems betrage $E_{tot} = 5\epsilon$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $p_{i,\nu}$ dafür, dass das i-te Atom sich im Zustand $|\nu >$ befindet. Überlegen Sie sich zunächst, dass $p_{i,\nu}$ von i unabhängig ist. Zählen Sie dann die Anzahl der Konfigurationen, bei denen sich ein festes Atom im Zustand $|\nu >$ befindet. Schliessen Sie nun, was die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind.