Übung zur Vorlesung T4p, Blatt 11

11.01.2010

1. **Idealer Paramagnet**

In der Vorlesung hatten wir ein einfaches Modell für einen Paramagneten angesehen. Betrachten Sie hierzu noch einmal N unabhängige magnetische Momente in einem Magnetfeld H. Jedes Moment hat nur 2 mögliche Richtungen $+m$ und $-m$, parallel oder anti-parallel zum Magnetfeld. Die Hamilton Funktion für dieses System ist

$$\mathcal{H}(m_i) = -\sum_{i=1}^{N} H m_i \ , \quad m_i = \pm m \ .$$

Mit Hilfe der Magnetisierung

$$M = \sum m_i$$

lässt sich dies auch schreiben als

$$\mathcal{H}(m_i) = -HM \ .$$

Um im mikrokanonischen Ensemble arbeiten zu können wollen wir die Energie fixieren, d.h. wir fixieren n, wobei n dadurch definiert ist, dass $\frac{1}{2}(N+n)$ Momente positiv orientiert sind, und $\frac{1}{2}(N-n)$ Momente negativ orientiert sind. Damit ist die die Energie $E = -nHM$.

a) Verifizieren Sie, dass die Entropie gegeben ist durch

$$S(n) = k \ln \frac{N!}{[\frac{1}{2}(N+n)]![\frac{1}{2}(N-n)]!}$$

b) Berechnen Sie $E(T,H)$ und $M(T,H)$, d.h. führen Sie die in der Volresung weggelassenen Schritte aus. Hinweis:

$$dS = \frac{1}{T}dE - \frac{M}{T}dH - \frac{\mu}{T}dN$$

Überlegen Sie sich, dass Sie die Ableitung von ln $n!$ wie folgt annähern können:

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln n! \sim \ln n \ .$$

c) Zeigen Sie, dass im Limes $Hm << kT$ die Magnetierung das Curie-Verhalten zeigt

$$M = const \frac{H}{T}$$

und bestimmen Sie die Konstante.

2. **Fehlstellen im Kristallgitter**

Wir betrachten einen Kristall aus N identischen Atomen. Ein *Schottky Defekt* ist einfach ein fehlendes Atom, d.h. eine Leerstelle im Kristallgitter. Durch Sprünge von Atomen können sich diese Defekte "durch den Kristall bewegen" und bilden somit eine Art Gittergas. Δ sei die Energie, die man zur Bildung eines solchen Schottky-Defektes aufwenden muss, d.h. diese Energie ist nötig, um ein Atom aus dem Innern des Kristalls an seine Oberfläche zu bringen und dabei eine Fehlstelle zurückzulassen. Wir nehmen an, dass diese Energie sowohl von der Lage des Atoms innerhalb des Kristalls wie auch von der Zahl der schon vorhandenen Defekte unabhängig ist. Die Anzahl der Defekte sei D.

a) Wie gross sind Energie und Entropie eines Kristalls mit D Defekten? (Nullpunkt: Kristall ohne Defekte)

b) Berechnen Sie die Anzahl der Fehlstellen in Abhängigkeit von der Temperatur. Ergebnis:

$$D(T) = \frac{N}{1 + e^{\frac{\Delta}{kT}}}$$

c) Berechnen Sie nun den Beitrag der Defekte zur Wärmekapazität $c = \frac{\partial U}{\partial T}$