Übung zur Vorlesung t4p, Blatt 12

18.01.2010

1. **Spezifische Wärme**

Wir betrachten ein beliebiges kanonisches Ensemble mit dem Hamiltonoperator H. Zeigen Sie, dass die spezifische Wärme bei konstantem Volumen geschrieben werden kann als

$$C_V = k\beta^2(\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2) \ ,$$

wobei $\langle \ldots \rangle$ den üblichen Ensemblemittelwert des entsprechenden Operators bezeichnet. Folgern Sie daraus, dass im Grenzwert $N \to \infty$ Energiefluktuationen im Vergleich zur Energie selbst verschwinden.

2. **Ising Paramagnet, kanonisches Ensemble.**

Betrachten Sie ein System von N magnetischen Momenten, die die Werte $s_i = \pm s$ annehmen können. In einem Magnetfeld h ist der Hamiltonian gegeben durch

$$H = -\sum_i h s_i$$

Berechnen Sie

a) die Zustandssumme Z_K und die innere Energie $U = \langle H\rangle$.

b) die freie Energie $F = -kT \ln Z_K(T, V, N)$

c) die durchschnittliche Magnetisierung

$$m = \frac{1}{N}\langle \sum_i s_i\rangle \ .$$

Verifizieren Sie (mit Teil a), dass $U = -Nhm$.

3. **Ising Modell, kanonisches Ensemble**

Betrachten Sie ein Kette von N Spins (magnetischen Momenten), wobei die einzelnen Spins jeweils mit ihrem nächten Nachbarn wechselwirken.

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1}, \quad s_i = \pm 1,$$

J ist eine Kopplungskonstante.

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme. Gehen Sie hierbei rekursiv vor. Das Ergebnis ist

$$Z = 2(2\cosh \beta J)^{N-2} \ .$$

b) Zeigen Sie $\langle s_j \rangle = 0$, wobei $1 << j << N$.

c) Berechnen Sie den Korrelator $\langle s_i s_j \rangle$, wobei $i < j$. Ergebnis:

$$\langle s_i s_j \rangle = (\tanh \beta J)^{|j-i|} \ .$$

Dies kann man umschreiben als

$$\langle s_i s_j \rangle = e^{-|j-i|/\xi} \ ,$$

wobei

$$\xi = -[\log \tanh \beta J]^{-1} > 0$$

Korrelationslänge heisst. ξ divergiert hier im limes $T \to 0$, was wichtig im Zusammenhang mit Phasenübergängen ist.