Fakultät für Physik der LMU München

Prof. Ilka Brunner

Vorlesung T4p, WS08/09
Klausur am 11. Februar 2009

Name:

Matrikelnummer:

Erreichte Punktzahlen:

1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	2.4

Hinweise

- Die Bearbeitungszeit beträgt 3 Stunden.
- Bitte verwenden Sie den freien Platz sowie die Rückseiten der Blätter für Ihre Antworten. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, legen Sie weitere Blätter bei. Kennzeichnen Sie diese mit Ihrem Namen und der Nummer der Aufgabe. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein separates Blatt.
- Teil 1 der Klausur enthält leichtere Wiederholungs- und Verständnisaufgaben.

Teil 1

---

40 Punkte insgesamt

1.1. **Grundbegriffe**

a) Nennen Sie je ein Beispiel für einen quasistatischen und einen irreversiblen Prozess.

b) Welche der folgenden Zustandsvariablen sind extensiv, welche intensiv: Energie U, Volumen V, Temperatur T, Entropie S.

c) Die Energie $U(S, V, N)$ ist ein thermodynamische Potential in den Variablen S, V, N. Das Differential ist gegeben durch

$$dU = TdS - PdV + \mu dN.$$

Wie lauten die Zustandsgleichungen?

d) Gegeben sei ein kanonisches Ensemble. Zeigen Sie: Der Mittelwert der Energie ist gegeben durch

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_K,$$

wobei Z_K die kanonische Zustandssumme ist.

e) Wie ist der Zusammenhang zwischen kanonischer und grosskanonischer Zustandssumme bei gegebenem chemischen Potential μ?

f) Gegeben sei ein kanonisches Ensemble aus 4 Zuständen mit Energien E_1, E_2, E_3, E_4. Geben Sie die kanonische Zustandssumme an.

1.2 **Ideales Gas**

a) Betrachten Sie ein ideales Gas, das von einem Volumen V_A nach V_B expandiert. Die Teilchenzahl N sei konstant. Berechnen Sie die dabei geleistete Arbeit unter der Annahme dass

   (i) die Temperatur konstant ist.

   (ii) der Druck konstant ist.

b) Berechnen Sie die Entropie eines einatomigen idealen Gases. Leiten Sie aus dU einen Ausdruck für dS her, und integrieren Sie ihn auf, um $S(T, P)$ zu erhalten. (N sei konstant.)

1.3 **Phasenübergänge**

a) Skizzieren Sie ein P-T Diagramm (Phasendiagramm) einer Substanz, die sich beim Gefrieren zusammenzieht.

b) Skizzieren Sie einen Phasenübergang flüssig-gasförmig im P-V Diagramm. Zeichnen Sie mehrere Isothermen ein und markieren Sie den Koexistenzbereich.

c) Unter bestimmten Annahmen (welchen?) wird das Verhalten realer Gase gut durch das ideale Gasgesetz beschrieben. Warum ist das ideale Gasgesetz zur Beschreibung von Phasenübergängen ungeeignet?

d) Betrachten Sie ein System mit 2 Phasen und einer Stoffart. Experimentell vorgegeben seien Druck, Temperatur und Teilchenzahl. Zeigen Sie: Im Gleichgewicht sind die beiden chemischen Potentiale gleich.

Teil 2

2.1. **Magnetische Carnot-Maschine** (15 Punkte)

Eine paramagnetische Substanz erfüllt das Curie-Gesetz

$$M = K\frac{H}{T} \ ,$$

wobei M die Magnetisierung, H das Magnetfeld und K eine Konstante ist. Das Material habe ferner konstante spezifische Wärme $C_M = (\partial U/\partial T)_M$. Es soll als Carnot-Maschine zwischen den beiden Wärmereservoirs der Temperaturen $T_2 > T_1$ verwendet werden. Die magnetische Arbeit ist gegeben durch $\delta W = HdM$.

a) Skizzieren Sie die Kurve in einem $T - M$ Diagramm, die in einem Zyklus durchlaufen wird. Zeigen Sie für die Adiabaten

$$KC_M \log\frac{T}{T_0} = \frac{1}{2}(M^2 - M_0^2),$$

wobei M_0, T_0 Integrationskonstanten sind.

b) Wie gross ist die Arbeit, die die Maschine verrichtet?

2.2. **Maxwell Relationen** (15 Punkte)

a) Der Druck P und das chemische Potential μ sind intensive Variablen und erfüllen daher

$$P(\lambda V, \lambda N) = P(V, N), \quad \mu(\lambda V, \lambda N) = \mu(V, N), \lambda \in \mathbf{R}_+ \ .$$

Zeigen Sie, dass daraus die folgenden Beziehungen resultieren:

$$V \frac{\partial P}{\partial V} + N \frac{\partial P}{\partial N} = 0, \quad V \frac{\partial \mu}{\partial V} + N \frac{\partial \mu}{\partial N} = 0.$$

b) Welche Maxwell-Relationen folgen aus der freien Energie $F(T, V, N)$?

c) Die isotherme Kompressibilität ist gegeben durch

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

Verwenden Sie die Ergebnisse aus a) und b), um zu zeigen dass

$$\kappa_T = \frac{V}{N^2} \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{T,V}$$

2.3. **Relativistische Energie-Impuls Beziehung** (15 Punkte)

Gegeben sei ein nicht-wechselwirkendes Gas aus N masselosen Teilchen mit einer relativistischen Energie-Impuls Beziehung

$$H = \sum_{i=1}^{N} c|\vec{p}_i| \ ,$$

c ist die Lichtgeschwindigkeit.

a) Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme gegeben ist durch

$$Z_K = \frac{1}{N!}(\frac{8\pi V}{\gamma_0})^N \left(\frac{kT}{c}\right)^{3N} \quad .$$

Hier ist γ_0 eine einheitenbehaftete Normierungskonstante, insbesondere ist das Mass $d\tilde{\Gamma} = \frac{1}{\gamma_0^N N!} \prod_{\alpha=1}^{3N} dp_\alpha dq_\alpha$ dimensionslos.

Hinweis: $n! = \int_0^\infty t^n e^{-t}$

b) Berechnen Sie die Energie E und den Druck P.

2.4. **Äquipartitionstheorem** (15 Punkte)

Betrachten Sie ein klassisches System mit Hamiltonfunktion H im kanonischen Ensemble.

a) Zeigen Sie

$$\langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_j} \rangle = \delta_{ij} kT, \quad \langle p_i \frac{\partial H}{\partial p_j} \rangle = \delta_{ij} kT$$

Setzen Sie hierbei voraus, dass $\exp(-\beta H(p,q))$ für grosse p, q stark abfällt, so dass alle Randterme verschwinden.

b) Benutzen Sie Teil a) um $\langle H \rangle$ im Fall des einatomigen idealen Gases zu berechnen.