

Theoretische Mechanik

Vorlesungs-Skriptum

Andreas Wipf

Theoretisch-Physikalisches-Institut

Friedrich-Schiller-Universität Jena

WS 2002/2003

©2003 Andreas Wipf, Universität Jena

Kopieren für den privaten Gebrauch unter Angabe des Autors erlaubt. Kommerzielle Verwertung
ist nicht gestattet.

Hinweise auf Druckfehler nehme ich gerne entgegen (wipf@tpi.uni-jena.de)

Inhaltsverzeichnis

1	Ursprünge der klassischen Mechanik	1
1.1	Literaturhinweise	1
1.2	Einführung, Historisches	3
1.2.1	Wichtige Ereignisse in der klassischen Mechanik im Überblick	16
2	Kinematik des Massenpunktes	18
2.1	Einführendes	18
2.2	Die Euklidische Geometrie des Raumes	20
2.3	Der Zeitbegriff in der Newtonschen Mechanik	24
2.4	Eigenschaften von Inertialsystemen	26
2.4.1	Punktteilchen in Inertialsystemen	26
2.4.2	Übergang zwischen Inertialsystemen	27
2.4.3	Galileisches Relativitätsprinzip	32
2.5	Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung	34
2.6	Krummlinige Koordinatensysteme	37
2.6.1	Übergang von kartesischen zu krummlinigen Koordinaten	38
2.6.2	Differentialoperatoren	41
2.6.3	Teilchenbahnen in krummlinigen Koordinatensystemen	43
2.6.4	Differentialoperatoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten	45
3	Dynamik von Massenpunkten	46

3.1	Die träge Masse und Kräfte	47
3.1.1	Beschleunigte Bezugssysteme und Scheinkräfte	49
3.1.2	Bewegungen auf der rotierenden Erde	53
3.2	Erhaltungssätze	56
3.2.1	Der Impulssatz	56
3.2.2	Der Drehimpulssatz	56
3.2.3	Energiesatz	59
3.3	Lösungen der Bewegungsgleichung	63
3.3.1	Konstante Kräfte	63
3.3.2	Oszillatoren	65
3.3.3	Reibungskräfte	68
3.4	Lineare Differentialgleichungssysteme	73
3.4.1	Matrix-Exponentialfunktion	74
3.4.2	Stabilität von linearen Systemen I	82
3.5	Erzwungene Schwingungen	83
3.6	Anhang: Matrixfunktionen	86
4	Mehrkörpersysteme	93
4.1	Erhaltungssätze der Punktmechanik	94
4.1.1	Der Impulssatz oder der Schwerpunktsatz	94
4.1.2	Der Drehimpulssatz	96
4.1.3	Der Energiesatz	98
4.2	Gekoppelte Pendel	101
4.3	Das Zweikörperproblem	104
4.3.1	Kepler- und Coulomb-Problem	107
4.4	Zwei-Körper-Zerfall eines Teilchens	114
4.5	Elastische Streuung	117
4.5.1	Streuprozess im Schwerpunktsystem	118
4.5.2	Wirkungsquerschnitte	121

4.5.3	Rutherford Streuung	123
4.5.4	Transformation ins Laborsystem	124
4.6	Bemerkungen zum Dreikörperproblem	125
4.6.1	Exakte Lösungen	126
4.6.2	Numerische Integration des ebenen Dreikörperproblems	130
5	Starre Körper	133
5.1	Bewegungen des starren Körpers	133
5.1.1	Translationen des starren Körpers	134
5.1.2	Drehbewegungen	135
5.1.3	Eulersche Winkel	137
5.2	Rotationsenergie und Trägheitstensor	139
5.2.1	Eigenschaften des Trägheitstensors, Beispiele	142
5.3	Drehimpuls und kräftefreie symmetrische Kreisel	147
5.3.1	POINOT-Darstellung der Trägheitsdrehbewegung	147
5.3.2	Kräftefreie symmetrische Kreisel	148
5.4	Eulersche Gleichungen und Stabilitätsanalyse	152
5.5	Kräftefreie unsymmetrische Kreisel	153
5.5.1	Die elliptischen Funktionen von JACOBI und Theta-Funktionen	155
5.5.2	Trägheitsdrehbewegung in den EULERSchen Winkeln	159
5.6	Der schwere symmetrische Kreisel I	163
6	Zwangsbedingungen und Zwangskräfte	166
6.1	Zwangskräfte und sphärisches Pendel	166
6.1.1	Das sphärische Pendel	167
6.2	Holonome und anholonome Nebenbedingungen	173
6.3	Lagrange-Gleichungen 1. Art und d'Alembert-Prinzip	175
6.3.1	Energiesatz	176
6.3.2	Elimination der Lagrangeschen Multiplikatoren	177

7	Lagrangesche Mechanik	179
7.1	Verallgemeinerte Koordinaten	179
7.2	Lagrange-Funktion	182
7.2.1	Rollpendel, zyklische Koordinaten	183
7.2.2	Homogenität der Zeit und Energieerhaltung	187
7.3	Kreisel im Lagrange Formalismus	188
7.3.1	Schwere symmetrische Kreisel II	190
7.4	Eichtransformationen	192
7.5	Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen	195
7.6	Symmetrien und Erhaltungsgrößen: Noether-Theorem	196
7.6.1	Isotropie des Raumes und Drehimpulserhaltung	198
7.6.2	Homogenität des Raumes und Impulserhaltung	199
8	Hamiltonsches Prinzip	201
8.1	Variationsrechnung	201
8.1.1	Geodätische Linien	203
8.1.2	Die Brachystochrone	204
8.1.3	Mehrere abhängige oder/und unabhängige Variable	206
8.2	Isoperimetrische Probleme	208
8.3	Hamiltonsches Prinzip	209
8.4	Anhang: Differentiation in ∞ -dimensionalen Räumen.	211
9	Hamilton'sche Mechanik	216
9.1	Hamiltonsche Bewegungsgleichungen	217
9.1.1	Beispiele	219
9.1.2	Die Legendre-Transformation	220
9.1.3	Phasenraum, Trajektorien und Flüsse	224
9.2	Zeitliche Änderung von Observablen	226
9.2.1	Poisson-Klammern	227
9.3	Kanonische Transformationen	230

9.3.1	Eingeschränkte kanonische Transformationen	230
9.4	Erzeugende Funktionen	234
9.4.1	Die Erzeugende $F_5(t, q, p)$	235
9.4.2	Die Erzeugende $F_1(t, q, Q)$	236
9.4.3	Die Erzeugende $F_2(t, q, P)$	237
9.4.4	Zusammenhang zwischen den Erzeugenden	239
9.4.5	Die Erzeugenden im Überblick	239
9.5	Theorem von Liouville	240
9.6	Elementare Hamilton-Jacobi Theorie	245
9.6.1	Die Prinzipalfunktion $F_2(t, q, P)$	246
9.6.2	Beispiele	248
9.6.3	Wirkungs- und Winkelvariablen	250

Index

254

Kapitel 1

Ursprünge der klassischen Mechanik

1.1 Literaturhinweise

Folgende Lehrbücher können empfohlen werden:

Allgemeine Lehrbücher:

A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik: Mechanik*, Nachdruck der 8. Auflage, Harri Deutsch, 1994.

L.D. Landau und E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Band 1, *Mechanik*, Akademie-Verlag, Berlin 1990.

H. Goldstein, *Klassische Mechanik*, Aula, 1991; H. Goldstein, C. Poole und J. Safko, *Classical Mechanics*, third edition, Addison Wesley, 2001.

R.P. Feynman, R.B. Leighton und M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I, Addison-Wesley Publishing Company, Reading 1971.

A. Budo, *Theoretische Mechanik*, Wiley, 1990.

N. Straumann, *Klassische Mechanik*, Lecture Notes in Physics, Vol. 289, Springer, 1987.

F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, 5. Aufl., Wiley-VCH, Weinheim 1997

F. Scheck, *Theoretische Physik 1, Mechanik*, 6. Auflage, Springer, 1999.

S. Brandt, H.-D. Dahmen, *Mechanik: eine Einführung in Experiment und Theorie*, 3. Auflage, Springer 1996

H. Stephani und G. Kluge, *Theoretische Mechanik*, Spektrum Akademischer Verlag, 1995.

W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik*, Band 1, Klassische Physik; Band 2, Analytische Mechanik, Vieweg & Son, Braunschweig 1997/1998.

E. Schmutzer, *Grundlagen der Theoretischen Physik*, Teil I; Wissenschaftsverlag, 1989.

W. Greiner, *Theoretische Physik: Mechanik I, II*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, neueste Auflage

T. Fließbach, *Lehrbuch zur theoretischen Physik*, Bd. 1, *Mechanik*, 3. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, 1999.

Mathematische Aspekte der Mechanik:

V.I. Arnold, *Mathematische Methoden der klassischen Mechanik*, Birkhäuser, 1988.

R. Abraham und J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1981.

W. Thirring, *Lehrbuch der mathematischen Physik*, Bd. 1: *Klassische Dynamische Systeme*, Springer, 1988.

Klassische Werke:

I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687, 2. Auflage 1713; deutsch von J. P. Wolfers, Berlin 1872 (Nachdruck Darmstadt 1963).

L. Euler, *Mechanica, sive Motus scientia analytice exposita*, Petersburg 1736, und *Theoria Motus Corporum Solidorum seu Rigidorum*, deutsch von J. P. Wolfers, Greifswald 1853

J.L. de Lagrange, *Mécanique Analytique*, Paris 1788

W.R. Hamilton, *On a general method in Dynamics* und *Second Essay on a general method in Dynamics* 1834, Collected Papers II, 103-211, Cambridge 1940

C.G.J. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, Reimer, Berlin 1866

H. Poincare, *Les Méthodes nouvelles des Mécanique céleste I-III*, Paris 1892-1899, engl. Übers. hrsg. von D. L. Goroff, Amer. Inst. of Phys. 1993

Skripten: Auch im Internet finden Sie einige sehr empfehlenswerte Skripten. Ein guter Anlaufpunkt ist die Seite von Wagner aus München,

<http://www.physik.tu-muenchen.de/~rwagner/physik/skripten.html>.

Ich fand zum Beispiel die Skripten von H.A. Kastrup von der RWTH Aachen und J. Wess von der LMU-München sehr nützlich. Auch das Skript von G. Welsch vom TPI unserer Universität ist empfehlenswert.

Einige Kommentare zur obigen (unvollständigen) Liste:

Die Bücher von GREINER, NOLTING, SCHMUTZER und SOMMERFELD, LANDAU/LIFSCHITZ sind jeweils die ersten Bände einer Reihe über Theoretische Physik. SCHECK und FLIESSBACH haben damit begonnen die theoretische Physik in mehreren Bänden darzustellen. Es

dürfte sich für jeden Physiker empfehlen, mindestens einer dieser Reihen zu besitzen. Dabei sind die Werke von SOMMERFELD UND LANDAU/LIFSCHITZ qualitativ sehr gut, d.h. mit größter Sorgfalt und physikalischer Einsicht geschrieben. Die Bücher von SOMMERFELD sind teilweise natürlich etwas veraltet, aber sein Buch über Mechanik ist nach wie vor sehr empfehlenswert. Die Bücher von LANDAU/LIFSCHITZ sind etwas schwer zu lesen. Sie werden die einzelnen Bände immer dann zu Rate ziehen, wenn Sie den Kurs schon einmal erfolgreich absolviert haben. Das Buch über Mechanik gefällt mir weniger gut wie einige der anderen in der Reihe. Das Buch von SCHMUTZER ist sehr explizit und als Ergänzung zur Vorlesung geeignet. GREINER und NOLTING sind etwa von gleicher Güte und für Anfänger geschrieben, reich an Aufgaben, aber nicht immer systematisch. FLIESSBACH kann ich sehr empfehlen.

GOLDSTEIN (im Westen) und BUDO (im Osten) waren lange Zeit die Standardbücher, auf die man sich hinsichtlich Fragen der Notation und dessen, was jeder Physiker über klassische Mechanik wissen sollte, bezog. (Goldstein transportierte weiter, was vorher die Bücher von BORN und WHITTAKER, beide von 1925, vorgelegt hatten.) Das Buch von Goldstein wurde vor einigen Wochen neu aufgelegt und die dritte Auflage (bisher nur in englischer Sprache) sieht sehr ordentlich aus.

ARNOLDS Buch ist ein echter Klassiker und sei denjenigen Hörern nahegelegt die Sinn für Mathematik haben. Es ist sehr kompakt und anspruchsvoll (auf andere Weise als LANDAU/LIFSCHITZ, eher mathematisch als physikalisch tiefgründig). Die Bücher von STRAUMANN und SCHECK kann man als Brücke zwischen ARNOLD und der Physik ansehen, für Hörer mit Sinn für Mathematik vielleicht als die beste Einführung in die Mechanik.

Die Bücher von FLIESSBACH, KUYPERS und STEPHANI/KLUGE sind ohne Einschränkungen empfehlenswert. Sie führen sorgfältig in die Systematik und die Problemstellungen der Mechanik ein und geben der Physik Priorität gegenüber der Mathematik. KUYPERS ist dabei am ausführlichsten und vermutlich am leichtesten verdaulich (auch wegen der Einbeziehung des Computers in das Lösen von Aufgaben), STEPHANI/KLUGE am kompaktesten. Jede/r sollte selbst entscheiden, welches Buch am besten ihrer/seiner Vorbildung und Interessen entspricht.

In allen erwähnten Büchern mit Ausnahme von ARNOLD, SCHECK und STRAUMANN kommt die Geometrie etwas kurz, also die von Hamilton, Jacobi und Poincaré begründete Tradition, die heute grundlegend für ein Verständnis chaotischer Bewegungen ist.

1.2 Einführung, Historisches

Ziel der Theoretischen Physik ist ein Verständnis der Natur durch Abbildung der Erfahrungen auf mathematische Modelle. Es sollen möglichst viele Naturvorgänge möglichst einfach erklärt und nachprüfbar Vorhersagen gemacht werden. Dabei werden die physikalischen Erscheinungen auf die wesentlichen Aspekte reduziert und Idealisierungen vorgenommen.

Die theoretische Mechanik ist die erste Vorlesung des Theorie-Zyklus bestehend aus der theoretischen Mechanik, Elektrodynamik, Quantenmechanik I, Quantenmechanik II, Thermodynamik und statistische Physik. Sie befaßt sich mit dem Studium der Bewegungen von materiellen Körpern und den Kräften, die diese Bewegungen hervorrufen.

Es gibt gute Gründe die Vorlesungsreihe mit der Theoretischen Mechanik zu beginnen:

- Die Mechanik war die erste erfolgreiche Theorie und dient als Vorbild für andere Theorien.
- Grundlegende physikalische Größen und Begriffe wurden in der Mechanik eingeführt und dann auf andere Theorien übertragen.
- Viele mathematische Methoden der Physik wurden auf dem Gebiet der Mechanik entwickelt.
- Die Mechanik ist unserer Erfahrungswelt relativ nahe (was man von der Quantenmechanik nicht sagen kann).

Die Mechanik ist jener Teil der Physik, in dem es zuerst gelang, dem Ziel der theoretischen Physik nahe zu kommen, d.h. es gelang durch Verallgemeinerung von Erfahrungen einige allgemeine Axiome aufzustellen, aus denen die einzelnen Gesetze auf mathematischen Wege ableitbar sind. Die Mechanik war im vorletzten Jahrhundert so erfolgreich, daß man versuchte jede physikalische Erscheinung auf eine mechanische zurückzuführen. Obwohl dieses so-genannte mechanische Weltbild nicht mehr haltbar ist, stellt die Mechanik doch die allgemeine Grundlage der Physik dar.

Wie jede physikalische Theorie ist auch die klassische Mechanik nur begrenzt gültig und muß in bestimmten Fällen erweitert werden. Sie verliert ihre Gültigkeit

- bei Erscheinungen an welchen sehr schnell bewegte Körper beteiligt sind (zum Beispiel Elektronen mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit). Hier wird die klassische Mechanik durch die relativistische Mechanik der speziellen Relativitätstheorie abgelöst, in deren Rahmen die herkömmlichen NEWTONSCHEN Begriffe wie absoluter Raum und absolute Zeit ihre Bedeutung verlieren.
- bei atomaren Abständen, bei denen die Naturphänomene durch die Quantenmechanik und deren relativistische Verallgemeinerung, den Quantenfeldtheorien, richtig beschrieben werden.
- bei Anwesenheit von großen Massen und/oder Energiedichten, wo der Euklidische Raum durch eine gekrümmte Raumzeit ersetzt wird. Die zugrundeliegende erfolgreiche Theorie ist die allgemeine Relativitätstheorie.

Bereits im antiken Griechenland begannen Mathematiker und Naturwissenschaftler wie PYTHAGORAS (580-496 v.u.Z.), HERAKLEIDES (544-483 v.u.Z.), EUDOXOS (408-355 v.u.Z.), CALIPPOS (370-300 v.u.Z.), ARISTOTELES (384-322 v.u.Z.), ARISTARCH (320-250 v.u.Z.) oder ERATOSTENES (276-194 v.u.Z.) aus eigenem Antrieb Fragen an die Natur zu stellen und Antworten von ihr zu erwarten. Dabei trat eine enge Verknüpfung von Mathematik und Physik zu Tage. Aus der Beobachtung von Naturphänomenen wurden mathematisch formulierte Regeln und Gesetze abgeleitet und in der Mathematik hielt die Beweisführung Einzug.

Die Mechanik hatte hier mit den Hebelgesetzen und der kinematischen Beschreibung der Himmelskörper ihre Anfänge. Als bedeutendster Mathematiker und Physiker dieser Epoche muß wohl ARCHIMEDES (287-212 v.u.Z.) angesehen werden¹.

¹ARCHIMEDES wurde 287 v.u.Z. in Syrakus, dem mächtigsten griechischen Stadtstaat auf Sizilien, als



Abbildung 1.1: Archimedes

Er hat in seinen teilweise erhaltenen Arbeiten den heutigen Anforderungen an eine Beweisführung weitestgehend entsprochen. Bekannt wurde er durch seine raffinierte Schraube, die heute noch im Nildelta als Wasserpumpe dient, die Bestimmung des Silbergehaltes des scheinbaren Goldkranzes von König Hieron II. von Syrakus, die Entdeckung des statischen Auftriebs („*Heureka! Heureka!*“) oder die Aufstellung des Hebelgesetzes („*Gebt mir einen Platz zum Stehen und ich werde die Erde bewegen*“). Er selbst hielt seine theoretischen Arbeiten für seine *wirklichen* Werke. Hierzu gehört seine Abhandlung *’Über das Gleichgewicht ebener Flächen’* in welchem das Prinzip der Hebel aufgestellt wurde, der Schwerpunkt eingeführt und für verschiedene ebene Flächen bestimmt wurde. Mit dieser Schrift legte ARCHIMEDES den Grundstein für die theoretische Mechanik. In seiner Arbeit *’Kreismessung’* finden sich die ersten Rechnungen mit kontrollierten Näherungen und die Anfänge der Infinitesimalrechnung. In seiner Schrift *’Über Kugel und Zylinder’* wurden Flächen von Kreis-, Parabel- und Hyperbelsegmenten bestimmt und die Volumina der zugehörigen Rotationsfiguren bestimmt. Bei seinen Berechnungen benutzt ARCHIMEDES die vereinfachte Form der Integralrechnung. In *’Von den Spiralen’* befasste er sich mit der nach ihm benannten Spirale und benutzte eine Methode, die der Differentialrechnung sehr nahe kommt. So nebenbei löste er zwei der drei berühmten Probleme der Antike: die Dreiteilung eines Winkels und die Quadratur des Kreises. Es ist eine Ironie des Schicksals, daß NEWTON und LEIBNIZ die *’Methodenschrift’*, in welcher der Vorläufer der Infinitesimalrechnung dargelegt wurde, nicht kannten, als sie im 17. Jahrhundert die modernen Infinitesimalrechnung schufen. ARCHIMEDES Schrift *’Über schwimmende Körper’* wird als erste Abhandlung über den statischen Auftrieb angesehen und gilt als eines seiner großen Meisterwerke.

Erst als seine Arbeiten im neunten Jahrhundert ins Arabische übersetzt wurden, führte seine Methode, bei der er Näherungs- und Grenzwerte zu Hilfe nahm, zu neuen mathematischen Entdeckungen. Für die spätere Entwicklung der Mathematik und Physik war die Übersetzung seiner Werke vom Griechischen ins Lateinische durch den Dominikanermönch W. MOERBECKE von Bedeutung. Ab Mitte des 16. Jahrhunderts ließen sich VIETA, KEP-

Sohn des Astronoms PHEIDIAS geboren und lernte in Alexandria bei dem Nachfolger Euklids. Den größten Teil seines Lebens verbrachte er in seiner Geburtsstadt, wo er 212 v.u.Z. bei der Einnahme der Stadt durch die Römer getötet wurde. Zusammen mit F. Gauß und I. Newton wird er oft als einer der drei besten Mathematiker aller Zeiten angesehen. Für historisch Interessierte verweise ich auf das Büchlein von P. Strathern [1]

LER, CAVALIERI, HUYGENS, TORICELLI, FERMAT, PASCAL und viele andere Gelehrte von ARCHIMEDES inspirieren.

Die Kinematik der Planetenbahnen wurde eingehend von NIKOLAUS KOPERNIKUS (1473-1543), und TYCHO DE BRAHE (1546-1601), der die astronomische Beobachtungsgenauigkeit um eine Größenordnung verbesserte, untersucht und schließlich von JOHANNES KEPLER (1571-1630), einer der interessantesten Persönlichkeiten der Wissenschaftsgeschichte, aufgeklärt².

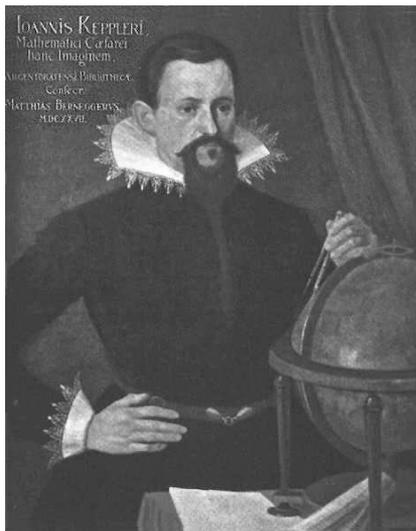


Abbildung 1.2: Johannes Kepler

Neben den bekannten Keplerschen Gesetzen arbeitete er am Brechungsgesetz für kleine Winkel, der Theorie des astronomischen Fernrohrs, der Volumenbestimmung von rotationssymmetrischen Körpern (*'Neue Raumberechnung der Weinfässer'*) und einem genauen Tafelwerk mit den wichtigsten astronomischen Daten. In seinem bahnbrechenden Werk *'Astronomia Nova'* gelang ihm die Entdeckung, daß die Bahn des Planeten Mars eine Ellipse ist, in deren einem Brennpunkt sich der Mittelpunkt der Sonne befindet, und daß der Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Mit seiner Feststellung *„Die Sonne ist die Quelle der bewegenden Kraft, die in der Nähe stärker, in der Ferne schwächer wirkt“* war er 78 Jahre vor Erscheinen von NEWTONS Werk der Gravitationstheorie am nächsten. Er ging den Weg von der einfachen kinematischen Beschreibung der Marsbewegung zu ihrer dynamischen Erklärung. Die in seinem Werk auftretenden Integrationsaufgaben hat KEPLER in Anlehnung an ARCHIMEDES durch Summierungen gelöst. Im Jahre 1619 waren die fünf Bücher der *'Weltharmonien'*, lateinisch *'Harmonices mundi'* fertiggestellt. Hierin findet sich das dritte Keplersche Gesetz, nach dem die dritten Potenzen der mittleren Abstände der Planeten von der Sonne proportional den Quadraten ihrer siderischen Umlaufzeiten sind.

²KEPLER wurde 1571 in Weil der Stadt geboren, studierte Theologie in Tübingen und hatte von 1594-1600 ein Lehramt in Graz inne. Von 1600 bis 1612 wirkte er in der kaiserlichen Sternwarte in Prag, wo er 1601 die Nachfolger des Hofastronoms Tycho Brahe als kaiserlicher Mathematiker antrat. Von 1612 bis 1626 war er in der Landschaftschule in Linz tätig und 1626-1628 weilte er in Ulm und Regensburg. Kepler starb 1630 auf der Reise zum Reichstag in Regensburg. Siehe [2].

Auch GALILEO GALILEI (1564-1642) kommt ein zentraler Platz bei der Herausbildung der modernen Naturwissenschaften zu³. Schone früh bemerkte er, daß die Periode eines Pendels

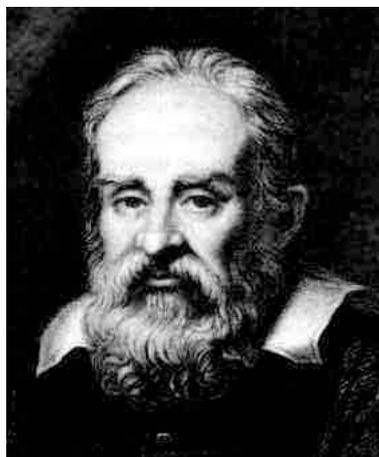


Abbildung 1.3: Galileo Galilei

für kleine Amplituden von der Auslenkung unabhängig ist (Isochronismus). Er experimentierte mit fallenden und rollenden Gegenständen und bestimmte deren Orte nach gleichen Zeitintervallen. Die entsprechenden Resultate wurden in seinem Buch *'De Motu'* (*Zur Bewegung*) veröffentlicht. Nachdem er existierende Teleskope mit dreifacher Vergrößerung wesentlich verbessert hatte und eine zwanzigfache Vergrößerung erreichte, beobachtete und vermaß er die Mondberge, untersuchte die Sonnenfleckenbewegungen und entdeckte die Jupitermonde. Diese und weitere Beobachtungen hat er in seiner Schrift *'Sidereus nuncius'* dargestellt. Wie der *'Dialogo'* hat diese Schrift wesentlich zur Popularisierung der Wissenschaften beigetragen. Für unsere Vorlesung ist sein Abhandlung *'Discorsi'* von großer Bedeutung. Hier hat GALILEO das heute in der Physik bezeichnete *Galileisches Relativitätsprinzip* klar formuliert. Er ist mit seinen Untersuchungen der Bewegung auf einer schiefen Ebene den Trägheitsgesetzen der Newtonschen Mechanik, nach denen die Kraft zur Veränderung und nicht zur Aufrechterhaltung des Bewegungszustandes benötigt wird, sehr nahe gekommen. Wir zitieren GALILEI (Discorsi): „*Indes ist zu beachten, daß der Geschwindigkeitswert, den der Körper aufweist, in ihm selbst unzerstörbar enthalten ist (impresso), während äußere Ursachen der Beschleunigung oder Verzögerung hinzukommen, was man nur auf horizontalen Ebenen bemerkt, denn bei absteigenden nimmt man Beschleunigung wahr, bei aufsteigenden Verzögerung. Hieraus folgt, daß die Bewegung in der Horizontalen eine unaufhörliche sei.*“ Etwas expliziter zeigte er, daß bei der Bewegung auf der schiefen Ebene die Geschwindigkeit proportional zur Laufzeit anwächst und der zurückgelegte Weg proportional zu Quadrat der Zeit ist. GALILEIS Arbeiten müssen auch deshalb als Meilenstein in der Geschichte der Wissenschaft angesehen werden, weil er erstmalig sehr explizit von der Notwendigkeit der Vernachlässigung von Störeinflüssen spricht und idealisierte Versuchsbedingungen auswählt. Er hat bereits Geschwindigkeit und Beschleunigung für die geradlinige Bewegung definiert und mathematisch beschrieben.

³GALILEI wurde 1564 als Sohn eines Mathematikers und Musikers in Pisa geboren, studierte Medizin und wurde 1589 in seinem Geburtsort Professor für Mathematik. 1592 nimmt er ein Lehramt an der Universität zu Padua an. 1610 tritt er in Florenz in die Dienste der Medici. Nach dem berühmten Galilei-Prozess 1633 hatte er bis zu seinem Lebensende 1642 Hausarrest in Arcetri nahe Florenz.

In den Jahrzehnten nach GALILEI beschäftigten sich FRANCIS BACON und RENE DESCARTES⁴ mit den Methoden zur Auffindung sicherer Wahrheiten. Im Gegensatz zu BACON, dem Vater der englischen empirischen Philosophie und dem Begründer der induktiven Methode, hat DESCARTES ein vollständiges philosophisches System vorgelegt. Alles sollte neu überdacht werden, da es keine über jeden Zweifel erhabene Wahrheit gäbe - mit einer einzigen Ausnahme: die Wahrheit der Mathematik. Zur Auffindung der Wahrheit hat DESCARTES vier Regeln aufgestellt. Seine Betonung der mathematischen oder deduktiven Methode war im Folgenden sehr wichtig für die theoretische Durchdringung der Physik. Im zweiten Teil der *'Principia Philosophiae'* formulierte er seine (fehlerhaften) Grundgesetze der Bewegung und arbeitete diese sehr detailliert aus. In der unveröffentlichten Arbeit *'Le monde'* hat DESCARTES bereits erkannt, daß eine Kraft benötigt wird, um einen Körper auf einer Kreisbahn zu führen. Schon im nächsten Kapitel dieser Mechanikvorlesung werden wir von seiner analytischen Geometrie Gebrauch machen, die in *'La Géométrie'* entwickelt wurde. Das rechtwinklige Koordinatensystem nennen wir ihm zu Ehren kartesisches System. Die größte Schwäche von DESCARTES Methoden liegt in der Überbetonung der Ratio auf Kosten des Experimentes.

CHRISTIAAN HUYGENS⁵ hat erkannt, das Vernunft und Erfahrung von gleicher Bedeutung bei der Wahrheitsfindung sind. Die wissenschaftliche Tätigkeit von HUYGENS fällt in die Epoche zwischen GALILEIS Entdeckung der Dynamik und deren Anwendung auf die Gravitationsmechanik durch NEWTON und sie überragte weitaus die seiner Zeitgenossen.

Er verbesserte die Objektivgläser von Fernrohren und entdeckte einen sechsten Saturnmond (den größten) und den Orionnebel. In der kurzen Schrift *'Traité de la Lumière'* legte HUYGENS den Grundstock zur Undulationstheorie des Lichts, welche zum Beispiel die Reflexion, Refraktion und Doppelbrechung erklärt. Er gilt als Miterfinder der Pendeluhr und behandelte eine wichtige mechanische Aufgabe seiner Zeit: das Problem des physischen oder zusammengesetzten Pendels. Er konnte die auch noch heute gültige Formel für die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels der Länge l ,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

ableiten. Er hat gezeigt, das für eine Zykloide die Laufzeit eines Körpers zum Fußpunkt nicht vom Startpunkt abhängt. Er hat dieses so-genannte *Zykloidenpendel*, dessen Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude ist, auch selbst gebaut.

In seinem Werk *'Horologium oscillatorium'* findet sich die Theorie der Kurvenevolutionen. So wird gezeigt, daß die Zykloide ihre eigene Evolute ist. Des weiteren findet sich hierin auch das Trägheitsprinzip und das Prinzip der Superposition von Bewegungen. Die von HUYGENS

⁴DESCARTES wurde 1596 in Le Haye als Sohn eines Juristen geboren. Vom 8. bis 16. Lebensjahr besuchte er das Jesuitenkolleg La Fleche. Nach unruhigen Jahren in Paris und anschließenden Aufhalten in Holland und im Heer der Herzogs von Bayern bereiste er Italien und ist 1629 nach Holland übersiedelt. Im Jahre 1649 ist er auf Einladung der schwedischen Königin CHRISTINE nach Stockholm gegangen. Im darauffolgenden Jahr ist er an einer Lungenentzündung gestorben.

⁵HUYGENS wurde am 14. April 1629 in Haag geboren. Er studierte an der Universität Leyden und später in Breda. Seine besondere Begabung für Mathematik wurde schon früh von DESCARTES gerühmt. 1649 bereiste er Deutschland und Dänemark und promovierte danach in Angers (Frankreich). Er kehrte nach Holland zurück, wurde 1665 Mitglied der neu gegründeten Pariser Akademie und übersiedelte nach Paris. Ab 1681 wohnte er wieder in Holland, wo er 1695 in Haag verstarb.



Abbildung 1.4: *Christiaan Huygens*

abgeleiteten Ergebnisse haben sich ausnahmsweise bis zum heutigen Tage behauptet und sind Bestandteil der an den Universitäten gelehrtten Mechanik.

Nur einige Monate nachdem GALILEI starb wurde ISAAC NEWTON⁶,

dessen bahnbrechende Leistungen im Zentrum dieser Vorlesung stehen werden, geboren. Wahrscheinlich hat niemand die menschliche Naturerkenntnis so weit vorangetrieben wie er. NEWTON studierte die mathematischen Schriften von DESCARTES, EUKLID's Elementargeometrie, die Arithmetik des Unendlichen von WALLIS, die Optik KEPLER's und die Logik SAUNDERSON's.

Während einer erzwungenen einjährigen Abwesenheit von Cambridge, dem *annus mirabilis* 1665/66, bewies er die Abhängigkeit der Lichtbrechung von der Farbe (Dispersion), entwickelte die Differential- und Integralrechnung⁷ und durch Verknüpfung von Keplers Gesetzen und Galileis Erkenntnissen entdeckte er die Schwerkraft.

Diese Entdeckungen und das später formulierte Gravitationsgesetz wurden 20 Jahre später in seinem Meisterwerk, der '*Principia*' veröffentlicht. Newtons drei Bewegungsgesetze lauten:

- ein Körper verharrt im Zustand der gleichförmigen geradlinigen Bewegung oder Ruhe, solange keine aktive Kraft auf ihn einwirkt,
- die Veränderung der Geschwindigkeit eines sich bewegenden Körpers ist proportional zur auf ihn ausgeübten Kraft,
- jeder Aktion entspricht eine gleich große und entgegengesetzt gerichtete Reaktion.

⁶NEWTON wurde am 25.12.1642 in Lincolnshire, in der Nähe von Grantham, geboren. Ab 1661 studierte er am Trinity College in Cambridge. 1669 wurde er zum Lukasischen Professor für Mathematik ernannt. 1696 siedelte er von Cambridge nach London um, wo er bis zu seinem Tode blieb. Er starb am 20.02.1727 in Kensington, London. Siehe [3]

⁷Wegen dieser Methode der Fluxionen kam es später zu einem erbitterten Prioritätenstreit mit LEIBNIZ.



Abbildung 1.5: *Isaac Newton*

Er folgerte, dass die Schwerkraft zwischen zwei Körpern proportional zum Produkt der beiden Körpermassen und umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung ihrer Mittelpunkte ist⁸,

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Bei der Ableitung dieses Gesetzes hat NEWTON keinen Gebrauch des ihm bekannten Integral und Differentialkalküls gemacht. Obwohl seine Berechnungen sich nur auf die Beobachtungen des Mondes und der damals bekannten Planeten stützte, bezeichnete er es ausdrücklich als allgemeines Gesetz der Schwerkraft: „*Hypotheses non fingo*“ (*Ich erfinde keine Hypothesen*).

Mit der einheitlichen Darstellung der klassischen Mechanik, der Formulierung eines darauf aufbauenden physikalischen Weltbildes, der Vollendung der (nichtrelativistischen) Gravitationstheorie sowie der Entwicklung der Infinitesimal- und Integralrechnung hat sich ISAAC NEWTON unsterblich gemacht. Poeten haben zu seinen Ehren Gedichte verfasst, von denen der folgende Zweizeiler POPES das wohl bekannteste ist:

*„All Nature and its laws lay hid in night
God said, let Newton be, and all was light“
Die Natur und ihre Gesetze lagen im Dunkeln
Gott sprach, es werde Newton, und alles wurde Licht*

Kurz nach NEWTONS bahnbrechenden Beiträgen wurde die theoretische und analytische Mechanik von den BERNOULLIS, EULER und LAGRANGE weiterentwickelt und in ihre heutige Form gebracht. Die Brüder JAKOB und JOHANN BERNOULLI⁹ machten sich zusammen

⁸HOOK hatte vor NEWTON die $1/r^2$ -Abhängigkeit der Gravitationskraft postuliert.

⁹JAKOB (1654-1705) wurde als fünftes von elf Kindern in Basel geboren. Er hatte einen Lehrstuhl in seiner Heimatstadt Basel inne. JAKOB pflegte einen wichtigen Briefwechsel mit LEIPNIZ und war Mitglied der



Abbildung 1.6: Jakob Bernoulli

um die Entwicklung und Verbreitung der Infinitesimalrechnung verdient. JAKOB löste das Problem der Isochrone und Brachistochrone, befasste sich mit der Kettenlinie, der Loxodrome und mit der logarithmischen Spirale (diese 'spire mirabilis' ließ er in seinen Grabstein einmeißeln).

Ein für die damalige Zeit typisches Problem war dasjenige der *Brachistochrone*. Diese ist diejenige Kurve, welche zwei im homogenen Kraftfeld gelegene Punkte derart verbindet, daß die Zeit, die ein Körper benötigt, um entlang der Kurve reibungsfrei vom Punkt mit dem höheren Potential zum Punkt mit dem geringeren Potential zu gelangen, minimal wird. Die gesuchte Kurve wird durch diejenige Funktion $y(x)$ beschrieben, für die

$$\int dt = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx$$

minimal wird. Die Lösung ist eine Zykloide, die im höheren Punkt senkrecht beginnt und im niedrigen Punkt waagrecht endet,

$$x(t) = k(t - \sin t) \quad , \quad y(t) = k(1 - \cos t).$$

Die Zykloide ergibt sich als Bahnkurve eines Kreispunktes beim Abrollen eines Kreises mit Radius k auf einer Geraden, und zwar desjenigen Kreispunktes, der im Ursprung der Berührungspunkt war. Anschaulich gesprochen bewegt sich ein Punkt auf dem Reifen eines Fahrrads auf einer Zykloide. Weiter schrieb JAKOB Arbeiten über die Reihenlehre, die Lösung von Differentialgleichungen (die Bernoullische Differentialgleichung ist nach ihm und seinem Bruder benannt) und die Variationsrechnung.

Pariser und Berliner Akademien. JOHANN (1667-1748) war das zehnte Kind und sein Bruder Jacob war sein Lehrer, mit dem er in späteren Jahren bezüglich wissenschaftlicher Arbeiten und Entdeckungen wetteiferte. 1695 nahm er eine Professur in Groningen an und 1705 trat er nach Jacobs Tod dessen Nachfolge in Basel an. DANIEL BERNOULLI (1700-1782), der Sohn von JOHANN, wurde in Groningen geboren. Er studierte in Basel, Heidelberg und Straßburg. Er arbeitete einige Jahre in Petersburg und kehrte 1729 nach Basel zurück.

Das Isochronenproblem wurde ebenfalls von JAKOB gelöst: bewegt sich ein Teilchen unter dem Einfluss der Gravitation längs einer *Isochronen*, dann braucht es vom Startpunkt bis zum Fußpunkt immer die gleiche Zeit, unabhängig vom Startpunkt. Die entsprechende Bernoullische Differentialgleichung

$$y' = p(x)y + q(x)y^n$$

löste JAKOB BERNOULLI 1696 indem er die Variablen separierte. Obwohl wir hier nicht mehr weiter darauf eingehen, sei doch angemerkt, dass JAKOB wohl originellste Arbeiten auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitstheorie zu finden sind.

JOHANN BERNOULLI hatte ähnlich gelagerte Interessen wie sein älterer Bruder. Er war wohl der bedeutendste Mathematiker seiner Epoche und wurde „Archimedes seiner Zeit“ genannt. In der Newton-Leibniz Kontroverse unterstützte er LEIBNIZ indem er gewisse, mit NEWTONS Fluxionenmethode unlösbare Probleme, mit dem Kalkül von LEIBNIZ löste. JOHANN führte heftige Prioritätenstreite mit l'Hôpital (dessen Regel von JOHANN gefunden wurde) und seinem eigenen Sohn Daniel. Bekannt sind seine Arbeiten über die Erhaltung der kinetischen Energie, den Impulssatz und der Bedeutung des Prinzips der Verrückungen, welches in dieser Vorlesung eine wichtige Rolle spielen wird. Des weiteren unterrichtete er Leonhard Euler.

DANIEL BERNOULLI gilt als Begründer der Hydrodynamik und kinetischen Gastheorie und lieferte wesentliche Beiträge zur Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Er formulierte das Superpositionsprinzip für die schwingende Seite und lieferte wichtige Beiträge zur Theorie der Differentialgleichungen.

LEONHARD EULER (1701-1783) war einer der produktivsten Naturwissenschaftler und hat unter anderem die Newtonschen Gedanken wesentlich weiterentwickelt¹⁰. Er lieferte wichtige Beiträge zur Kartographie, Astronomie, Geometrie (Theorie der Flächen, Krümmung von Flächen), Topologie (Euler Charakteristik), Analysis (Differentialgleichungen, Beta- und Gamma Funktionen, Sinus- und Cosinusfunktionen) und Zahlentheorie (Eulerkonstante). So konnte er zeigen, daß

$$2^n + 1 \quad \text{mit} \quad n = 2^m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

nicht immer eine Primzahl ist (wie von Fermat vermutet) und bewies eine andere Fermatsche Vermutung. Bemerkenswert und beachtet waren seine Resultate über die Summation von unendlichen Reihen. So löste er das so-geannte *Basler Problem* an welchem sich seine Vorgänger und Zeitgenossen vergeblich versuchten, nämlich eine geschlossene Form für

$$\zeta(2) = \sum \frac{1}{n^2}$$

abzuleiten. Das Resultat ist $\pi^2/6$. Er zeigte allgemeiner, daß

$$\zeta(s) = \sum n^{-s} = \prod_{\text{Primzahlen}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

¹⁰LEONHARD EULER wurde am 15. April 1707 in Basel geboren. Ab 1727 trat er eine Stelle an der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg an wo er 1730 zum Professor ernannt wurde. 1741 nahm er eine Stelle in Berlin an (ab 1744 in der neugegründeten Akademie der Wissenschaften). Nach MAUPERTUIS Tod wurde er 1759 Leiter der Akademie. 7 Jahre später kehrte EULER nach 25 Jahren in Berlin nach St. Petersburg zurück, wo er teilweise erblindete und ab 1771 vollständig blind wurde. Am 18. September 1783 verstarb er ebenda.

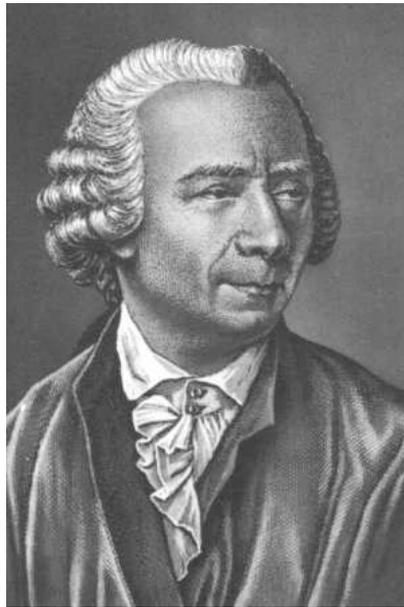


Abbildung 1.7: Leonhard Euler

gilt. EULER leistet wesentliche Beiträge zur Variationsrechnung in *'Methodus inveniendi lineas curvas ...'*, In seiner *'Mechanik oder die analytische Abhandlung der Bewegunglehre'* hat er den Begriff des Massenpunktes eingeführt und die Eigenschaften von krummlinigen Bewegungen weiter untersucht. In *'Die Entdeckung eines neuen Prinzips der Mechanik'* findet sich erstmalig der analytische Zusammenhang

$$\mathfrak{F} = m \cdot \mathfrak{a},$$

welcher von Massenpunkten auf Massenelemente und damit auf Kontinua ausgedehnt wurde. Damit war EULER in der Lage, die nach ihm benannten Gleichungen für (ideale) Flüssigkeitsströmungen sowie für die Bewegung starrer Körper, die im Massenmittelpunkt festgehalten werden, herzuleiten. Die letzteren werden in dieser Vorlesung besprochen werden. EULER hat bei der Untersuchung von starren Körpern das Trägheitsmoment und die Hauptträgheitsachsen eingeführt. Auch die heute noch gültige Fassung des Prinzips von MAUPERTUIS (er hat es früher und genauer formuliert als MAUPERTUIS), nachdem die tatsächlichen Bahnen von Massenpunkten einem Extremalprinzip genügen, stammt von EULER. Er gilt damit zu Recht als Begründer der Variationsrechnung, die in dieser Vorlesung eine zentrale Rolle einnehmen wird.

JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736-1813)¹¹ hat bereits 1756 die Variationsrechnung auf die Mechanik angewandt und frühere Resultate von EULER verallgemeinert. Die hier auftretende Funktion und Variationsgleichungen zweiter Art tragen seinen (und EULERS) Namen und

¹¹LAGRANGE wurde am 25. Januar 1736 in Turin als ältestes von elf Kindern geboren. Schon mit 19 Jahren wurde er zum Mathematikprofessor an der königlichen Artillerieschule in Turin berufen. Ab 1754 hatte LAGRANGE regen Briefkontakt mit EULER in Berlin. Im November 1766 wurde er Direktor an der Berliner Akademie der Wissenschaften und damit Nachfolger EULERS. Nach 20 Jahren in Berlin nahm er 1787 eine Stelle an der Akademie der Wissenschaften in Paris an. Im April 1813 starb er ebenda.

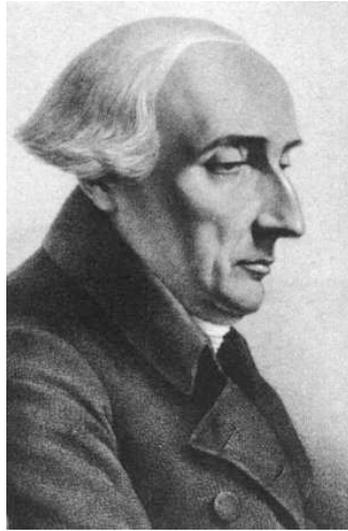


Abbildung 1.8: *Joseph-Louis Lagrange*

werden im zweiten Teil der Vorlesung eine große Rolle spielen. LAGRANGE lieferte wichtige Beiträge zur Schallausbreitung, der Theorie der schwingenden Saite, der Dynamik der Flüssigkeiten (wo er die Lagrangefunktion einführte), den Planetenbewegungen und dem Dreikörperproblem (die Lagrangeschen Punkte werden wir noch kennenlernen). Wie bei EULER sind seine Beiträge zur Zahlentheorie beachtlich. So zeigte er, daß jede natürliche Zahl die Summe von vier Quadraten ist oder daß n eine Primzahl ist genau dann, wenn $(n - 1)! + 1$ durch n teilbar ist. In seinem 1788 erschienen Buch *'Mécanique analytique'* fasste er die seit NEWTON erreichten Resultate in der Mechanik zusammen und machte wesentlichen Gebrauch von der Theorie der Differentialgleichungen (das Buch enthält keine einzige Figur, und LAGRANGE war stolz darauf).

WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865)¹² war einer der bedeutendsten Mathematiker und theoretischen Physiker seiner Zeit. Er lieferte wichtige Beiträge zur Wellentheorie des Lichts und der Strahlenoptik, die er auf Variationsprinzipien gründete. Aufbauend auf den Arbeiten von LAGRANGE, entwickelte er die analytische Mechanik weiter. Er fand das Hamiltonsche Prinzip und stellte die Hamilton-Gleichungen auf. Beide, wie auch die Hamilton-Jacobi-Gleichung, werden einen großen Raum in dieser Vorlesung einnehmen. Seine Formulierung der Mechanik im Phasenraum ist die Hamiltonsche Mechanik. HAMILTON begründete 1843 die Quaternionenrechnung, die in den Rest seines Lebens beschäftigte. Die von ihm in die Steine der Brougham Brücke eingemeißelten berühmten Formeln

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

¹²HAMILTON wurde am 4. August in Dublin geboren. Er war ein Wunderkind und sprach bereits im Alter von 5 Jahren Latein, Griechisch und Hebräisch und noch in jugendlichen Jahren 14 Sprachen. Mit 15 Jahren studierte er die Arbeiten von NEWTON und LAPLACE und als 17-jähriger fand er einen Fehler in der *'Mécanique céleste'* von LAPLACE. 1827 wurde er zum Professor für Astronomie ans Trinity College berufen. Von 1837-45 war er Präsident der Royal Irish Academy. Er starb am 2. September 1865 im Observatorium Dunsink nahe Dublin. Sein Leben verlief nicht immer geradlinig, woran seine Beziehung zu Frauen, und hier insbesondere Catherine Disney, und dem Alkohol nicht ganz unwesentlichen Einfluss hatten.



Abbildung 1.9: William Rowan Hamilton

deuten an, wie wichtig er seine Entdeckung der Quaternionen beurteilte: „*I still must assert that this discovery appears to me to be as important for the middle of the nineteenth century as the discovery of fluxions [the calculus] was for the close of the seventeenth.*“

Im Jahre 1905 publizierte ALBERT EINSTEIN (1879-1955)¹³ drei berühmte Arbeiten in den Annalen der Physik, eine davon über die spezielle Relativitätstheorie mit dem Titel *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Darin zeigte er, dass für schnelle Relativgeschwindigkeiten die Gesetze der klassischen Newtonschen Mechanik ihre Gültigkeit verlieren. Man findet eine Längenkontraktion in Bewegungsrichtung und eine Zeitdilatation. Im Gegensatz zur Newtonschen Mechanik war die relativistische Mechanik mit den Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik verträglich. Mit seiner Speziellen Relativitätstheorie von 1905 und der Allgemeinen Relativitätstheorie von 1915 revolutionierte EINSTEIN das Verständnis von Raum und Zeit. Diese und eine Fülle weiterer Beiträge (zur Lichtquantenhypothese, Brownschen Bewegung, ersten Quantentheorie der spezifischen Wärme, Atomphysik, Bose-Einstein-Statistik) machen ihn zu einem der bedeutendsten Wissenschaftler des vergangenen Jahrhunderts. Im letzten Kapitel dieser Vorlesung werden wir die relativistische Mechanik besprechen und einige der interessantesten Anwendungen, zum Beispiel die berühmte Formel

$$E = mc^2,$$

welche die Äquivalenz zwischen Energie und Masse ausdrückt, kennenlernen. Hier ist nicht der Platz um auf EINSTEIN'S unglaublich tiefgründige Beiträge zur Physik näher einzugehen.

¹³EINSTEIN wurde am 14.3.1879 in Ulm geboren und ging in München und Aargau zur Schule. Er studierte an der ETH in Zürich. 1902 wurde er vom Patentamt in Bern als Gutachter angestellt. 1911 nahm er ein Professur in Prag an und ein Jahr später in Zürich. Im Jahr 1914 wurde er als hauptamtliches Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften berufen und 1917 wurde er Direktor am neu gegründeten Kaiser Wilhelm Institut für Physik in Berlin. Zwanzig Jahre später wechselte er aus politischen Gründen ans Princeton Institute for Advanced Studies. 1921 wurde ihm für die Erklärung des lichtelektrischen Effekts der Nobelpreis verliehen. Albert Einstein starb am 18.4.1955 in Princeton.

Ich verweise auf die unzähligen Biographien über diesen interessanten theoretischen Physiker, z.B. [4]

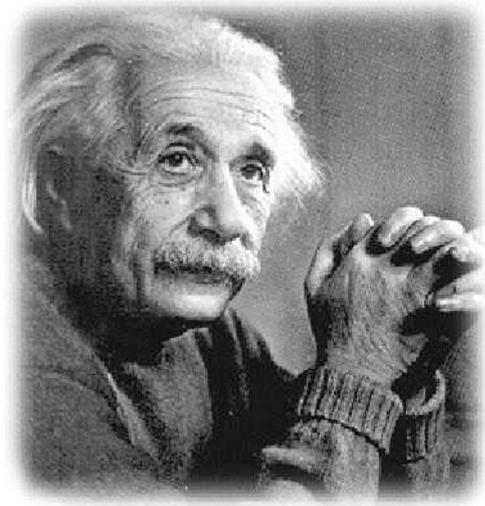


Abbildung 1.10: *Albert Einstein*

1.2.1 Wichtige Ereignisse in der klassischen Mechanik im Überblick

- -260: ARCHIMEDES arbeitet die Hebelgesetze mathematisch aus und entdeckt das Prinzip des Auftriebs.
- 60: HERO VON ALEXANDRIA schreibt *Metrica Mechanics* und *Pneumatics*.
- 1589: GALILEO GALILEI zeigt, daß auf schiefen Ebenen rollende Bälle von unterschiedlichem Gewicht mit derselben Beschleunigung fallen.
- 1638: GALILEO GALILEI veröffentlicht die Dialoge über zwei neue Wissenschaften.
- 1658: CHRISTIAN HUYGENS findet, daß Bälle in einer invertierten Zykloide den niedrigsten Punkt der Zykloide zur gleiche Zeit erreichen und zeigt damit experimentell, daß die Zykloide die Isochrone ist.
- 1668: JOHN WALLIS schlägt die Erhaltung des Impulses vor.
- 1687: ISAAC NEWTON veröffentlicht die '*Principia Mathematica*'.
- 1690: JAKOB BERNOULLI beweist das die Zykloide die Lösung des Isochronenproblems ist.
- 1696: JOHANN BERNOULLI zeigt, daß die Zykloide das brachistochrone Problem löst.
- 1734: DANIEL BERNOULLI löst die gewöhnliche Differentialgleichung für die Schwingungen eines einseitig fixierten elastischen Stabes.
- 1738: DANIEL BERNOULLI untersucht Flüssigkeitströmungen.

- 1739: LEONHARD EULER löst die gewöhnliche Differentialgleichung für den angetriebenen harmonischen Oszillator und bemerkt das Resonanzphänomen.
- 1742: COLIN MACLAURIN entdeckt gleichmäßig rotierende und selbst-gravitierende Rotations-Ellipsoide.
- 1747: PIERRE-LOUIS MOREAU DE MAUPERTUIS wendet das Minimalprinzip auf die Mechanik an.
- 1759: LEONHARD EULER löst die partielle Differentialgleichung für die Schwingungen einer rechteckigen Trommel.
- 1764: LEONHARD EULER untersucht die partielle Differentialgleichung für eine kreisförmige Trommel und entdeckt die Besselfunktionen.
- 1788: JOSEPH LAGRANGE stellt seine Lagrangeschen Bewegungsgleichungen in '*Mécanique Analytique*' vor.
- 1789: ANTOINE LAVOISIER formuliert das Gesetz von der Erhaltung der Masse.
- 1821: WILLIAM HAMILTON beginnt seine Untersuchungen über seine charakteristische Funktion.
- 1834: CARL GUSTAV JACOBI entdeckt seinen gleichmäßig rotierenden selbst-gravitierenden Ellipsoid.
- 1834: JOHN RUSSELL beobachtet eine stabile solitonartige Wasserwelle im Union Kanal nahe Edinburgh.
- 1835: WILLIAM HAMILTON stellt seine kanonischen Bewegungsgleichungen auf.
- 1835: GASPARD DE CORIOLIS untersucht die Bewegungen auf einer drehenden Oberfläche und deduziert den Corioleseffekt.
- 1842: CHRISTIAN DOPPLER untersucht die Dopplerverschiebung von Schall.
- 1847: HERMANN HELMHOLTZ formuliert das Gesetz von der Energieerhaltung.
- 1851: JEAN-BERNARD FOUCAULT zeigt die Erdrotation mit einem riesigen Pendel.
- 1902: JAMES JEANS findet die Längenskala die nötig ist, damit gravitative Instabilitäten anwachsen können.
- 1905: ALBERT EINSTEIN legt die Grundlagen zur Speziellen Relativitätstheorie.

Kapitel 2

Kinematik des Massenpunktes

2.1 Einführendes

In der Mechanik wird die Bewegung von materiellen Körpern untersucht. Zur Beschreibung einer Bewegung im Raum benötigen wir stets eine Bezugsbasis. Dies sind mindestens vier nicht in einer Ebene liegende gegenständliche Punkte, bezüglich welcher die Bewegung beschrieben wird. Die Erfahrung lehrt uns, daß genügend weit weg von sehr dichten und schweren Körpern die Bewegungen in guter Näherung in einem drei-dimensionalen Raum mit Euklidischer Metrik ablaufen. Dazu werden wir durch Messung der Winkelsummen in Dreiecken geleitet, deren Seiten aus den kürzesten Verbindungen zwischen den Eckpunkten gebildet werden. Das Ergebnis ist in sehr guter Näherung immer 180^0 , was für die Euklidische Geometrie charakteristisch ist. Nur in der Nähe von sehr kompakten Körpern oder auf kosmologischen Skalen sind die Abweichungen von der Euklidischen Geometrie nicht mehr vernachlässigbar. Dann wird sie durch die Riemannsche Geometrie zu ersetzen sein und die entsprechenden physikalischen Gesetze sind Gegenstand der allgemeinen Relativitätstheorie. In dieser Vorlesung wollen wir also den physikalischen Raum durch einen kontinuierlichen, homogenen, isotropen und unendlichen Euklidischen Raum modellieren. Der Abstand zweier Punkte im Raum ist die Länge der verbindenden Geraden, welche mit einem (möglichst idealen) Maßstab bestimmt werden kann.

Obwohl Bewegungen von materiellen Körpern unabhängig vom Beobachter ablaufen, benötigen wir zu ihrer Beschreibung ein *Bezugssystem*, zum Beispiel vier Ecken in diesem Hörsaal. Die Bewegungsgesetze werden vom gewählten Bezugssystem abhängen und zu ihrer Formulierung muss das Bezugssystem, oder zumindest eine Klasse von Systemen, festgelegt werden. In der klassischen Mechanik gibt es ideale Bezugssysteme, die sogenannten *Inertialsysteme* in welchen NEWTONS 1. Axiom Gültigkeit hat:

1. Axiom (lex prima): *Es gibt Inertialsysteme, in denen die kräftefreie Bewegung durch $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v} = \text{const.}$ beschrieben wird.*

Zu ihrer Definition benötigt man aber noch den Begriff der Zeitmessung. Zur Zeitbestimmung braucht es eine Uhr, d.h. einen möglichst periodischen Vorgang, dessen Periode eine

Zeiteinheit definiert. Die aktuelle Zeitdefinition erfolgt über Atomfrequenzen, wobei man bekannte Störungen (wie zum Beispiel den Einfluss des Gravitationsfeldes) möglichst korrigiert. Die Zeitdifferenz zwischen zwei am Ort der Uhr stattfindenden Ereignissen ist proportional zur Anzahl der Schwingungen zwischen den Ereignissen. Um den zeitlichen Abstand zweier Ereignisse an zwei verschiedenen Orten zu definieren, stellt man am anderen Ort eine gleichartige Uhr auf und synchronisiert die Uhren, indem man sie durch ein geeignetes Verfahren gleich stellt. Dies kann zum Beispiel mit einem elektromagnetischen Signal mit Laufzeitkorrektur geschehen. Auf diese Weise ist der Begriff der Gleichzeitigkeit eingeführt. Legt der Beobachter noch einen (willkürlich gewählten) Bezugspunkt für die Zeit fest, so kann er einem Ereignis eine eindeutige Zeit zuordnen (89.1 Zeiteinheiten nach dem Zeitorsprung). Bewegt sich eine Uhr mit einer Geschwindigkeit $v \ll c$ relativ zu einer anderen Uhr, so gehen die Uhren synchron. Nähert sich die Relativgeschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit, so verstreichen auf den beiden Uhren verschiedene Zeitdifferenzen zwischen zwei Ereignissen. Auch der Begriff der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse hängt vom Bewegungszustand des Beobachters ab. Bis auf das letzte Kapitel dieser Vorlesung werden wir allerdings von solchen relativistischen Effekten absehen und folgendes Axiom als Arbeitshypothese benutzen:

Es gibt eine für alle Bezugssysteme universelle Zeit.

Oder mit NEWTON: 'Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand'. Dabei lässt er offen, woher er seine absolute Zeit nimmt.

Mit diesem Axiom ist die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse eine systemunabhängige Eigenschaft. Wir werden bei der Entwicklung der Mechanik weiter annehmen, daß der räumliche Abstand zweier Punkte absolute Bedeutung hat:

Der räumliche Abstand von zwei gleichzeitig stattfindenden Ereignisse ist unabhängig vom Bezugssystem.

NEWTONS Formulierung 'Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich' lässt offen, wie er seinen unbeweglichen absoluten Raum von einem dagegen gleichförmig bewegten Raum unterscheiden könne.

Man sollte jedoch in Erinnerung behalten, daß es qualitativ verschiedene *Raumzeit-Modelle* gibt

- MODELLE, BEI DENEN DIE STRUKTUR VON RAUM UND ZEIT UNABHÄNGIG VON DER VORHANDENEN MATERIE IST.
 - Das *Galilei-Newtonsche Modell* mit einer absoluten Zeit, d.h. das Zeitmaß ist vom Bezugssystem unabhängig. Bis auf das letzte Kapitel der Vorlesung werden wir diese Annahmen treffen.
 - Das *Einstein-Poincarésche Modell*, in dem das Zeitmaß vom Bezugssystem abhängt. Dieses Modell wird durch die spezielle Relativitätstheorie implementiert und wird im letzten Kapite diskutiert. Das GALILEI-NEWTONSche Modell ist ein Grenzfall desjenigen von EINSTEIN und POINCARÉ.

- MODELLE, BEI DENEN DIE STRUKTUR VON RAUM UND ZEIT DURCH DIE VORHANDENE MATERIE BESTIMMT IST.
Die wichtigste Theorie mit dieser Eigenschaft ist EINSTEINS Allgemeine Relativitätstheorie. Sie ist eine Erweiterung der NEWTONSchen Theorie und wird in dieser Vorlesung nicht behandelt.

In der ersten Klasse von Raumzeitmodellen gibt es ausgezeichnete Bezugssysteme. Ein solches ist nahezu ideal oder inertial, wenn in ihm für einen hinreichend kräftefreien Körper das Galileische Trägheitsgesetz hinreichend genau gilt, also wenn der Körper in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung beharrt. Für drei Massenpunkte, die sich auf nicht parallelen Geraden bewegen, scheint dies eine leere Aussage zu sein, aber für jede weitere kräftefreie Bewegung liefert dies eine operative Definition von Inertialsystemen. Innerhalb eines frei auf die Erde fallenden Kastens oder in einem weit weg von Himmelskörpern antriebslos fliegenden Raumschiff hat man in guter Näherung ein (lokales) Inertialsystem.

In einem Bezugssystem, sei es nun inertial oder auch nicht, führen wir Ortskoordinaten ein, welche die Lage jedes Punktes im uns interessierenden Raum eindeutig charakterisieren. Ein lokales Ereignis ist durch die Angabe seines Ortes und seiner Zeit charakterisiert und nach Wahl eines Bezugssystems und einer Uhr durch seine Ortskoordinaten und durch t . Wir wollen die soeben an-diskutierten Begriffe nun formalisieren und weiter analysieren.

2.2 Die Euklidische Geometrie des Raumes

Elemente dieser Geometrie sind

1. *Punkte* P_1, \dots, P_m . Ein Punkt kann die Spitze eines Zirkels, der Schnittpunkt zweier Linien oder deren Idealisierungen sein.
2. *Maßstäbe* $\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_m$. Zum Beispiel der Urmeter, ein Zollstock und deren Idealisierungen. Maßstäbe haben genau einen Anfangspunkt A und einen Endpunkt E : $\mathfrak{s} = \overline{AE}$.

Die Existenz von Maßstäben folgt aus der Annahme der Existenz von starren Körpern. Dies sind Körper, die beim Verschieben oder Drehen in kongruente Körper übergehen. Oder anders ausgedrückt, die an verschiedenen Raumpunkten befindlichen materiellen Punkte ändern ihre relativen Abstände und Winkel zueinander nicht. Wir idealisieren und setzen unendlich dünne Maßstäbe voraus. Solche Maßstäbe können addiert werden. Der Maßstab \mathfrak{s}_2 wird zu \mathfrak{s}_1 addiert, indem man \mathfrak{s}_2 parallel zu sich selbst verschiebt bis sein Anfangspunkt A_2 mit dem Endpunkt E_1 des ersten Maßstabes zusammenfällt. Dann ist $\overline{A_1E_2}$ der neue Maßstab $\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2$. Die Addition von Maßstäben ist kommutativ. Falls $A = E$ dann sprechen wir vom 'Nullmaßstab' \mathfrak{o} . Addieren wir \mathfrak{o} zu einem Maßstab \mathfrak{s} , dann erhalten wir wieder \mathfrak{s} . Vertauschen wir End- und Anfangspunkt eines Maßstabes, dann ergibt sich der Maßstab $-\mathfrak{s}$ mit der Regel $\mathfrak{s} + (-\mathfrak{s}) = \mathfrak{o}$.

Wir können Maßstäbe mit Zahlen multiplizieren, zum Beispiel

$$\underbrace{\mathfrak{s}_1 + \dots + \mathfrak{s}_1}_{n\text{-mal}} = n\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_2 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{s}_1 = \frac{1}{n} \mathfrak{s}_2 \implies m\mathfrak{s}_1 = \frac{m}{n} \mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_3.$$

Damit ist die Multiplikation von Maßstäben mit rationalen Zahlen erklärt. Mittels Stetigkeit ergeben sich die folgenden Regeln für reelle Zahlen:

$$(a + b)\mathfrak{s} = (a\mathfrak{s}) + (b\mathfrak{s}), \quad a(b\mathfrak{s}) = (ab)\mathfrak{s}, \quad 1 \cdot \mathfrak{s} = \mathfrak{s} \quad \text{und} \quad a(\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2) = (a\mathfrak{s}_1) + (a\mathfrak{s}_2).$$

Die Regeln implizieren, dass Maßstäbe einen *Vektorraum* V_3 über den reellen Zahlen \mathbb{R} bilden. In der Literatur benutzt man auch oft das Symbol \vec{s} anstelle von \mathfrak{s} für einen Vektor. Wir nennen Maßstäbe *linear unabhängig*, falls keiner der Maßstäbe eine Linearkombination der übrigen Maßstäbe ist. Mehr als drei Maßstäbe sind in drei Dimensionen immer linear abhängig. Andererseits kann man in drei Dimensionen immer drei linear unabhängige Maßstäbe finden. Dann lässt sich jeder Maßstab \mathfrak{s} eindeutig als Linearkombination dieser Maßstäbe schreiben,

$$\mathfrak{s} = s_1 \mathfrak{e}_1 + s_2 \mathfrak{e}_2 + s_3 \mathfrak{e}_3 = \sum_i s_i \mathfrak{e}_i \equiv s_i \mathfrak{e}_i. \quad (2.1)$$

Das Tripel $\{\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3\}$ bildet eine *Basis* des 3-dimensionalen Vektorraumes V_3 . Wir haben die EINSTEINSche Summenkonvention benutzt, nach der über doppelt auftretende Indizes summiert wird. Von großer Bedeutung für die Physik sind die *metrischen* Eigenschaften von Punkten im Raum und Maßstäben, bei denen es um die Bestimmung von *Längen* und *Winkel* geht.

Längen- und Winkelmessungen: Wir können Längen nur vergleichen, zum Beispiel mit dem Urmeter, und nicht absolut angeben. Sei \mathfrak{e} ein 'Einheitsmaßstab' und \mathfrak{s} ein beliebiger Maßstab. Man bringe die beiden Anfangspunkte zu Deckung und richte die beiden Maßstäbe parallel aus. Dann ist

$$\mathfrak{s} = \ell \mathfrak{e}, \quad \ell = \ell(\mathfrak{s}, \mathfrak{e}) \geq 0 \quad (2.2)$$

und ℓ ist die Länge von \mathfrak{s} bezogen auf den Einheitsmaßstab \mathfrak{e} . Man schreibt

$$l(\mathfrak{s}) = \|\mathfrak{s}\|_{\mathfrak{e}}.$$

Mittels Zirkel und Lineal können wir zwei senkrechte Maßstäbe konstruieren oder Winkel Halbierungen vornehmen. Winkel werden damit operativ erklärt.

Skalarprodukt: Längen und Winkel lassen sich am besten mit Hilfe des Skalarproduktes (inneren Produktes) zweier Maßstäbe (Vektoren) beschreiben. Es seien $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \in V_3$ mit Längen ℓ_1, ℓ_2 und ϕ der Winkel zwischen den Maßstäben. Dann ist das *Skalarprodukt* \cdot der beiden Vektoren definiert durch

$$\cdot : V_3 \times V_3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{s}_1 \cdot \mathfrak{s}_2 := \ell_1 \ell_2 \cos \phi. \quad (2.3)$$

Oft schreibt man auch $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ für das Skalarprodukt. Das Skalarprodukt ist eine symmetrische und positive Bilinearform auf dem Vektorraum V_3 der Maßstäbe:

$$\begin{aligned} \text{symmetrisch:} & \quad \mathfrak{s}_1 \cdot \mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_2 \cdot \mathfrak{s}_1 \\ \text{bilinear:} & \quad \mathfrak{s} \cdot (a_1 \mathfrak{s}_1 + a_2 \mathfrak{s}_2) = a_1 \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}_1 + a_2 \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}_2, \\ \text{positiv:} & \quad \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s} = \ell^2 = \|\mathfrak{s}\|^2 > 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{s} = \mathfrak{o}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ist $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ eine Basis und $\mathfrak{s} = s_i \mathfrak{e}_i$ ein beliebiger Vektor, dann gilt

$$\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s} = \sum_{ij} s_i s_j \mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_j \equiv s_i s_j \mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_j.$$

Die Koeffizienten s_i hängen von der gewählten Basis ab. Ersetzen wir zum Beispiel \mathbf{e}_1 durch $2\mathbf{e}_1$ dann geht s_1 in $s_1/2$ über. Wir werden auf diese Basisabhängigkeit der Koeffizienten zurückkommen. Von besonderer Bedeutung sind die *orthonormierten* Basen

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.5)$$

für die $\|\mathbf{s}\|^2$ gleich der Quadratsumme der Koeffizienten in der Entwicklung von \mathbf{s} nach \mathbf{e}_i ist,

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = \sum_i s_i^2. \quad (2.6)$$

Die reellen Koeffizienten s_i in dieser Entwicklung heißen *kartesische Koordinaten* von \mathbf{s} bezüglich der orthonormierten Basis \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$. Bei vorgegebener Basis hat man die ein-eindeutige Zuordnung zwischen Vektoren und Koordinatentripeln,

$$\mathbf{s} \longleftrightarrow \mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Ist die Basis orthonormiert, dann sind die Koeffizienten s_i leicht zu berechnen,

$$s_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{s} \implies \mathbf{s} = \sum_i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{s}) \mathbf{e}_i. \quad (2.8)$$

Meistens legt man bei der Basiswahl auch noch die Orientierung der Einheitsvektoren \mathbf{e}_i fest. Eine positiv orientierte Basis bildet ein Rechtsschraubensystem, vgl. Abbildung (2.1). Eine Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ heißt *kartesisch*, falls sie positiv orientiert und orthonormal ist. Sein nun

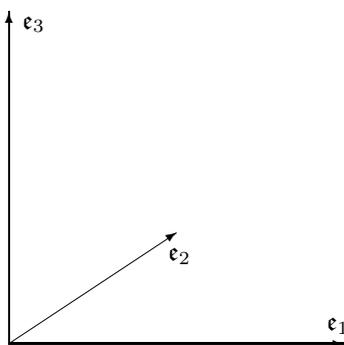


Abbildung 2.1: Eine kartesische Basis ist orthonormiert und orientiert.

O ein fester Raumpunkt und P ein beliebiger zweiter Punkt. Dann heißt der von O nach P zeigende Maßstab

$$\mathbf{r}(P) = \overline{OP} \quad (2.9)$$

Ortsvektor von P bezüglich O . Diese geometrische Definition nimmt keinen Bezug auf eine Basis. Für eine kartesische Basis \mathbf{e}_i in O , sind die Koeffizienten $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$ in der Darstellung

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i \equiv x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (2.10)$$

die *kartesischen Koordinaten* von P bezüglich O und $\{\mathbf{e}_i\}$. Der Abstand des Punktes P von O ist gleich der Länge des Maßstabes, $r = \|\mathbf{r}\|$. Entsprechend gilt für den Abstand zweier Punkte P, Q mit Ortsvektoren \mathbf{r}, \mathbf{r}' und kartesischen Koordinaten x_i und y_i

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = \left\{ \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.11)$$

Dieser Abstand ist unabhängig von der Wahl des Ursprungs O und der kartesischen Basis. Dies bedeutet, daß der euklidische Raum *homogen* und *isotrop* ist. Der Zahlenwert für den Abstand hängt von der Wahl des Einheitsmaßstabes ab und die Koordinaten sind ursprungs- und basisabhängig.

Zwei Vektoren in $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_3$ definieren einen dritten (Pseudo)Vektor über das bilineare schiefsymmetrische *Vektorprodukt* $V_3 \times V_3 \longrightarrow V_3$:

Definition: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ist definiert durch

1. $\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \phi$
2. Ist $\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| \neq 0$ so ist $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ ein positiv orientiertes Tripel und $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$.

Hier ist ϕ der von den Vektoren \mathbf{a}, \mathbf{b} definierte Winkel. Das Vektorprodukt zwischen zwei Vektoren verschwindet genau dann wenn sie linear abhängig sind. Aus der Definition folgt, daß $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ gilt und daß das Produkt bilinear ist. Eine orthonormierte Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ ist genau dann positiv orientiert wenn

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2. \quad (2.12)$$

Sind $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ und $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$ zwei beliebige Vektoren und \mathbf{e}_i eine kartesische Basis, dann ist wegen der Linearität von \wedge in beiden Argumenten

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3 \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Der (Pseudo)Vektor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ steht senkrecht auf der von den Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Ebene und seine Länge ist gleich der Fläche des aufgespannten Parallelogramms. Es gelten die folgenden Identitäten

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) + \mathbf{b} \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) + \mathbf{c} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= 0, \quad (\text{JACOBI}) \\ (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (\text{LAGRANGE}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Aus drei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ kann man das *Spatprodukt* (schiefe Produkt) bilden,

$$V_3 \times V_3 \times V_3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \longrightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \equiv (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \quad (2.15)$$

Das Spatprodukt ist das orientierte Volumen des durch $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ aufgespannten Parallelepipeds. Es verschwindet genau dann, wenn die drei Vektoren linear abhängig sind. Bezüglich einer kartesischen Basis gilt

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

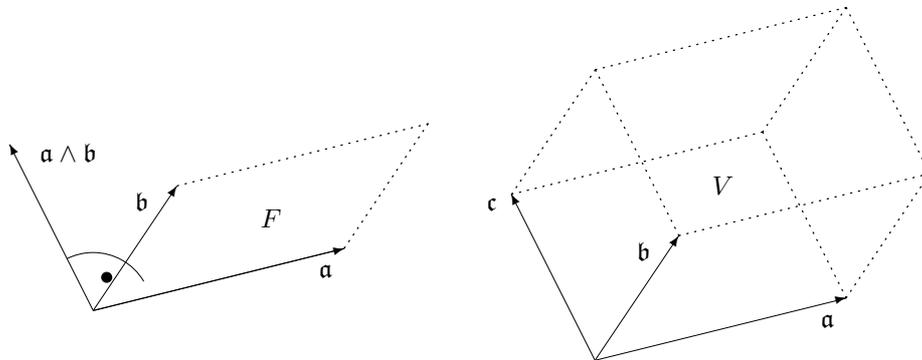


Abbildung 2.2: Vektor- und Spatprodukt. $F = \|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|$ und $V = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

Für eine kartesische Basis ist

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = 1 \implies [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k] = \epsilon_{ijk}, \quad (2.17)$$

wobei der vollständig schiefssymmetrische ϵ -(Pseudo)Tensor die Komponenten

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \quad \text{und} \quad \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1 \quad (2.18)$$

hat. Verjüngt man den ϵ -Tensor über einen, zwei oder alle drei Indizes, so ergibt sich

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp}, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijp} = 2\delta_{kp}, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6. \quad (2.19)$$

Das Spatprodukt ist linear in jedem Argument, zum Beispiel

$$[\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \quad \text{und} \quad [\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \lambda[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}],$$

und ändert sich nicht bei zyklischer Vertauschung der Argumente,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}]. \quad (2.20)$$

2.3 Der Zeitbegriff in der Newtonschen Mechanik

Bei der Einführung einer Zeit in der NEWTONSchen Mechanik geht man von folgenden Elementen aus:

1. An einem festen Raumpunkt P kann man *Ereignisse qualitativ anordnen* in früher, gleichzeitig und später.
2. Man kann *Gleichzeitigkeit* von Ereignissen an verschiedenen Raumpunkten P_1 und P_2 festlegen. Dies kann im Prinzip mittels eines P_1 mit P_2 verbindenden idealen starren Körpers geschehen, über den man unendlich große Signalgeschwindigkeiten übermitteln kann.

Diese Annahme muss in der relativistischen Mechanik aufgegeben werden, da Signalgeschwindigkeiten die Lichtgeschwindigkeit nicht überschreiten können. In der speziellen Relativitätstheorie benutzt man Lichtsignale, um die Gleichzeitigkeit von zwei räumlich getrennten Ereignissen zu definieren¹.

- Um vom qualitativen früher, jetzt und später zu einem *quantitativen Zeitmaß* zu kommen, braucht es einen periodischen physikalischen Vorgang, eine Uhr. Die periodischen Vorgänge definieren ein Zeitintervall-Maß². Ist T_0 ein Zeit-Nullpunkt, T ein beliebiger Zeitpunkt und e_t das zeitliche Einheitsintervall (Sekunde, Stunde etc.) so gilt

$$\overline{T_0 T} = t e_t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

Man kann die Zeitmessung auf Längenmessungen zurückführen wenn man die Bewegung von sehr kleinen *freien Materiekörpern* in *Inertialsystemen* untersucht. Solche Probekörper sind hinreichend kleine Materiestücke ohne innere Struktur, die durch genügendes Entfernen von der restlichen Materie isoliert werden können und mit dieser nicht mehr wechselwirken. In der Natur gibt es bekanntlich vier Wechselwirkungen von Materie aufeinander:

- die *Gravitation*,
- der *Elektromagnetismus*,
- die *starke Wechselwirkung* (Kernkräfte),
- die *schwache Wechselwirkung* (β -Zerfall).

Die Reichweite der beiden letzten ist sehr klein, $< 10^{-13}$ cm, und sie können daher in der makroskopischen Mechanik vernachlässigt werden. Die elektromagnetische Wechselwirkung ist zwar langreichweitig, aber elektrisch neutrale Probekörper werden von elektromagnetischen Einflüssen abgeschirmt. Dagegen ist die Gravitation langreichweitig und universell, das heißt jede Form von Energie und damit Materie (und Antimaterie) erzeugt ein Gravitationsfeld und das Gravitationsfeld wirkt auf alle Materie. Die Gravitation kann nicht abgeschirmt werden und der Raum ist nur frei von Gravitationsfeldern, falls er auch frei von Materie ist. Hier kommt uns aber die Universalität der Gravitation zugute: In einem räumlich und zeitlich homogenen Gravitationsfeld erfahren alle Materieteilchen, *unabhängig von ihrer Zusammensetzung* die gleiche Beschleunigung. In einem im Schwerfeld *frei fallendes Raumschiff* (EINSTEINS Fahrstuhl) erfahren elektromagnetisch abgeschirmte Probekörper keine Beschleunigung und wir können *lokal* die Gravitation 'abschalten'. Die Erfahrung lehrt uns, daß sich in solchen *Bezugssystemen* von einem Punkt aus in verschiedene Richtungen geschossene Teilchen auf Geraden bewegen. Ein System mit dieser Eigenschaft heißt *Inertialsystem*.

Ein Inertialsystem wird realisiert durch ein 'frei fallendes' Raumschiff im Schwerfeld, wobei das Gravitationsfeld über die Ausdehnungen des Raumschiffes konstant ist. Inertialsysteme sind nur räumlich und zeitlich 'lokal' realisierbar.

¹Die heute gebräuchlichste Methode für Präzisionszeitvergleiche von Ereignissen an verschiedenen Orten benutzt die Satelliten des Global Positioning Systems (GPS).

²zum Beispiel die Periode eines Pendels (Genauigkeit 10^{-5} s), die Eigenschwingungen eines Schwingquarzes (10^{-9} s) oder Atomuhren ($10^{-13} - 10^{-15}$ s).

Nun können wir die Zeit- auf die Längenmessung zurückführen, indem wir folgenden Zeitmaß definieren: In einem Inertialsystem legt ein freies Teilchen in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurück. Zum Beispiel könnten wir als Zeitmaß die Lichtsekunde nehmen, also die Zeit, die ein Photon (Lichtteilchen) braucht, um $2.998 \dots 10^8 \text{m}$ zurückzulegen.

2.4 Eigenschaften von Inertialsystemen

Wir wählen nun ein Bezugssystem und zeichnen darin einen Ursprung O aus. Dann können die Punkte des dreidimensionalen Euklidischen Raumes bijektiv auf die Menge der Ortsvektoren $\overline{OP} = \mathbf{r}$ abgebildet werden. Nach Wahl eines Zeitnullpunktes T_0 und eines Zeitskala wird jedes Ereignis durch ein Paar t, \mathbf{r} beschrieben.

2.4.1 Punktteilchen in Inertialsystemen

Nun folgen wir EULER und führen den idealisierten Begriff des *Massenpunktes* oder des *Punktteilchens* ein. Dies ist ein Körper, für dessen Bewegung nur sein Ort relevant ist. Beispielsweise kann man die Erde bei der Berechnung ihrer Bahn um die Sonne in sehr guter Näherung durch einen Massenpunkt in ihrem Schwerpunkt ersetzen. Sobald man sich aber für Eigenschaften interessiert die mit ihrer Nichtstarrheit und Eigenrotation verknüpft sind, müssen wir die Punktteilchennäherung aufgeben. Die Bewegung eines Massenpunktes ist eine Kette von Ereignissen und wird durch eine über einen Zeitintervall definierte Vektorfunktion $\mathbf{r}(t)$ beschrieben. Es ist oft vorteilhaft ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem im Euklidischen Raum zu benutzen. Die orthonormierten Basisvektoren des Koordinatensystems werden mit

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \quad \text{oder mit} \quad \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$$

bezeichnet. Ein Ortsvektor wird dann durch die kartesischen Komponenten $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ eindeutig charakterisiert,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad \text{oder} \quad \mathbf{r} = x_i\mathbf{e}_i. \quad (2.22)$$

Wir haben die oben eingeführte EINSTEINSche Summenkonvention benutzt. Wir werden in dieser Vorlesung die zweite Konvention in (2.22) benutzen und entsprechend die Koordinaten des Ortsvektors \mathbf{r} mit x_1, x_2, x_3 bezeichnen.

Die Bewegung eines Massenpunktes ist dann bekannt, wenn der Ortsvektor als Funktion der Zeit bekannt ist,

$$\mathbf{r}(t) = x_i(t)\mathbf{e}_i. \quad (2.23)$$

$\mathbf{r}(t)$ heißt *Bahnkurve* des Massenpunktes. Ein freies Teilchen bewegt sich auf einer Geraden und legt in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurück, d.h.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v} \cdot t, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(t = 0). \quad (2.24)$$

Der Vektor \mathbf{v} zeigt in Richtung der Geraden und ist die Geschwindigkeit,

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)}{t}. \quad (2.25)$$

Für allgemeinere, beschleunigte Bewegungen definieren wir die (basisunabhängige) Geschwindigkeit durch einen Grenzprozess. Der Massenpunkt befinde sich zur Zeit t in dem durch den Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ gekennzeichneten Punkt P , und nach der Zeitspanne Δt in dem durch $\mathbf{r}(t+\Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta\mathbf{r}$ bestimmten Punkt P' , d.h. die Verrückung des Massenpunktes während des Zeitintervalls Δt ist $\overline{PP'} = \Delta\mathbf{r}$. Die auf die Zeiteinheit bezogene (mittlere) Verrückung ist durch den Vektor

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad (2.26)$$

gegeben. Sie hängt von der Zeit t und der gewählten Zeitspanne Δt ab. Den von Δt unabhängigen Vektor der *Geschwindigkeit* $\mathbf{v}(t)$ findet man dann als Grenzwert von (2.26) für $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \quad (2.27)$$

Bei zeitunabhängigen Basisvektoren \mathbf{e}_i folgt aus $\mathbf{r}(t) = x_i(t)\mathbf{e}_i$

$$\mathbf{v}(t) = v_i(t)\mathbf{e}_i = \dot{x}_i(t)\mathbf{e}_i \quad \text{also} \quad v_i(t) = \dot{x}_i(t). \quad (2.28)$$

Die Geschwindigkeiten bilden einen 3-dimensionalen Vektorraum³.

2.4.2 Übergang zwischen Inertialsystemen

Es seien I und I' zwei beliebige Inertialsysteme mit gleicher Zeiteinheit und gleichem Längenmaßstab, also $e_t = e'_t$ und $\mathbf{e} = \mathbf{e}'$ und zunächst gleichem Zeitursprung $T_0 = T'_0$.

Die Ursprünge O, O' brauchen aber nicht übereinzustimmen. Zum Beispiel könnte O ein Punkt auf dem Gehsteig und O' ein Punkt auf dem vorbeifahrenden Zug sein. Ein und dasselbe freie Teilchen, welches sich zur Zeit t am Ort $P(t)$ aufhält, hat in I und I' die Ortsvektoren

$$\mathbf{r}(t) = \overline{OP(t)} = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}t \quad \text{und} \quad \mathbf{r}'(t) = \overline{O'P(t)} = \mathbf{r}'(0) + \mathbf{v}'t. \quad (2.29)$$

Hieraus folgt

$$\overline{OO'} = \overline{OP(t)} + \overline{P(t)O'} = \overline{OP(t)} - \overline{O'P(t)} = \mathbf{r}(0) - \mathbf{r}'(0) + (\mathbf{v} - \mathbf{v}')t.$$

Die Vektoren

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(0) - \mathbf{r}'(0) \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$$

sind unabhängig von $P(t)$ und die Gleichung

$$\overline{OO'} = \mathbf{a} + \mathbf{u}t \quad (2.30)$$

bedeutet:

Zwei beliebige Inertialsysteme können sich dadurch unterscheiden, daß ihre Ursprünge O und O'

³Dies ist nicht mehr der Fall in der relativistischen Mechanik, in der sich Geschwindigkeiten nicht mehr einfach addieren.

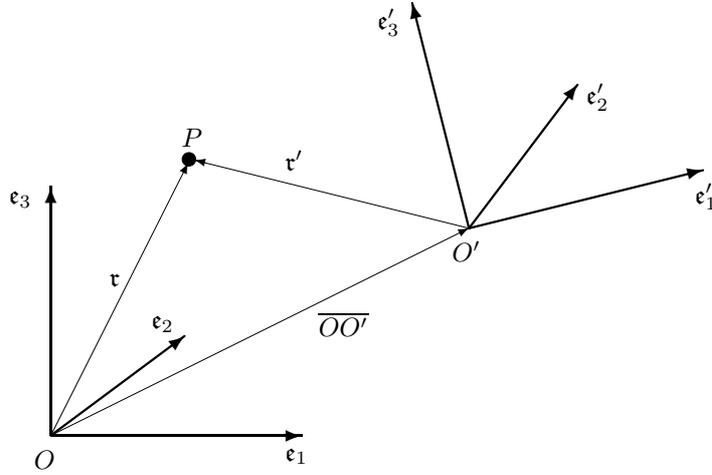


Abbildung 2.3: Es werden zwei Inertialsysteme I, I' betrachtet, deren Ursprünge O und O' durch den zeitabhängigen Vektor $\overline{OO'}$ verbunden sind. Demselben Raumpunkt P werden die Ortsvektoren \mathbf{r} und \mathbf{r}' zugeordnet.

- durch eine (t -unabhängige) räumliche Translation \mathbf{a} gegeneinander verschoben sind und/oder
- sich mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{u} relativ zueinander bewegen.

Eine äquivalente Formulierung ist:

Hat ein Teilchen in einem beliebigen Inertialsystem I' den Ortsvektor $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}'(0) + \mathbf{v}'t$, so hat es im Inertialsystem I den Ortsvektor $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}'(0) + \mathbf{a}) + (\mathbf{v}' + \mathbf{u})t$.

Wir haben dabei nur die Beschreibung der Bewegung des Massenteilchens geändert und nicht die Bewegung selbst (passive Transformation). Die Menge der räumlichen Translationen $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ bildet eine 3-parametrische kommutative Gruppe. Ebenso erzeugen die Menge der speziellen Galilei-Transformationen $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}t$ eine 3-parametrische kommutative Gruppe.

Es seien nun die beiden Zeitursprünge verschieden, $T_0 \neq T'_0$, und

$$\overline{T_0 T'_0} = \tau e_t.$$

Dann gilt wegen

$$\overline{T_0 T'_0} = \overline{T_0 T} - \overline{T'_0 T} = t e_t - t' e_t$$

die Beziehung $\tau = t - t'$. Die Zeittranslationen $t' \rightarrow t = t' + \tau$ bilden eine 1-parametrische kommutative Gruppe.

Nun wollen wir annehmen, dass die Zeit- und Ortsursprünge der Inertialsysteme zusammenfallen, $\mathbf{a} = 0$, und sie keine Relativgeschwindigkeit \mathbf{u} haben. Dann können die kartesischen Basen in I und I' noch verschieden sein. Wir untersuchen die lineare Transformation \mathfrak{R} welche zwischen den beiden Basen vermittelt,

$$\mathbf{e}_i \xrightarrow{\mathfrak{R}} \mathbf{e}'_i = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}'_i) \mathbf{e}_j \equiv R_{ji} \mathbf{e}_j \implies R_{ji} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_i. \quad (2.31)$$

Die Umkehrtransformation lautet offensichtlich

$$\mathbf{e}'_i \xrightarrow{\mathfrak{R}^{-1}} \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}'_j = R_{ij} \mathbf{e}'_j. \quad (2.32)$$

Nun beschreiben wir einen festen Ortsvektor $\mathbf{r} = \overline{OP}$ bezüglich den beiden Basen,

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i = x'_j \mathbf{e}'_j, \quad (2.33)$$

d.h. wir interpretieren die Drehung passiv wie in der linken Figur der folgenden Abbildung.

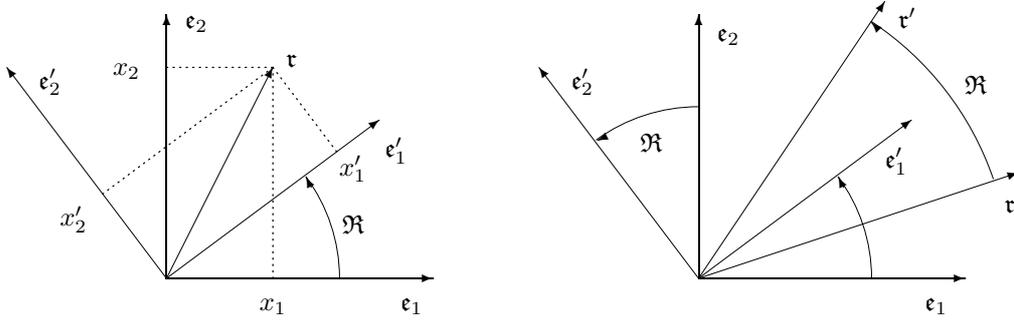


Abbildung 2.4: Passive und aktive Transformationen.

Einsetzen von (2.31) in (2.33) ergibt

$$x_i \mathbf{e}_i = x'_j \mathbf{e}'_j = x'_j R_{ij} \mathbf{e}_i,$$

und wir finden folgende lineare Relation zwischen den kartesischen Koordinaten in den Inertialsystemen I und I' ,

$$x_i = R_{ij} x'_j. \quad (2.34)$$

Hier ist vorteilhaft folgende reelle 3×3 Matrix und ihre Transponierte einzuführen,

$$R = (R_{ij}) \quad \text{und} \quad R^T = (R_{ji}), \quad (2.35)$$

sowie die zu \mathbf{r} gehörigen Koordinatentripel \mathbf{r} und \mathbf{r}' bezüglich der Basen \mathbf{e}_i und \mathbf{e}'_i ,

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

Dann schreibt sich die Drehung der Koordinaten (2.34) gemäß

$$\mathbf{r} = R \mathbf{r}'. \quad (2.36)$$

Die 9 Matrixelemente R_{ij} sind nicht beliebig, da sie kartesische Basen ineinander überführen,

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = R_{ip} R_{jq} \mathbf{e}'_p \cdot \mathbf{e}'_q = R_{ip} R_{jq} \delta_{pq} = R_{ip} R_{jp}.$$

In Matrixschreibweise nehmen diese Bedingungen folgende kompakte Form an,

$$RR^T = R^T R = \mathbb{1}. \quad (2.37)$$

Die transponierte Matrix R^T ist also gleich der inversen Matrix. Wegen $\det R^T = \det R$ folgt dann $\det R \det R = 1$ oder auch

$$R^T = R^{-1} \quad \text{und} \quad \det R = \pm 1. \quad (2.38)$$

Da $R^T R$ eine symmetrische Matrix ist, ergeben die Gleichungen (2.37) 6 Bedingungen für die 9 Koeffizienten R_{ij} , von denen also nur 3 voneinander unabhängig sind.

Eine Drehung kann passiv oder aktiv interpretiert werden. Betrachten wir einen festgehaltenen Punkt P mit Ortsvektor $\mathbf{r} = \overline{OP}$ von zwei gegeneinander gedrehten Basissystemen aus, wie soeben geschehen, dann handelt es sich um eine *passive Transformation*. Die Drehung der kartesischen Basis

$$\mathbf{e}_i \xrightarrow{\mathfrak{R}} \mathbf{e}'_i = R_{ji} \mathbf{e}_j \quad (2.39)$$

wird dann durch die entsprechende Drehung der Koordinaten

$$x_i \longrightarrow x'_i = R_{ji} x_j \quad \text{oder} \quad \mathbf{r}' = R^T \mathbf{r} \quad (2.40)$$

kompensiert, so dass (2.33) gilt. Die Koordinatentransformation (2.40) ist wegen (2.38) äquivalent zu (2.36). Bei einer passiven Drehung wird *ein* fester physikalischen Vorgang von zwei gegeneinander gedrehten Koordinatensystemen aus beschrieben. Man ändert sozusagen nur die Sichtweise.

Dagegen wird bei einer *aktiven Transformation* das Koordinatensystem festgehalten und die materiellen Körper bewegt. Aus der bekannten Transformation (2.31) für die Basisvektoren \mathbf{e}_i unter Drehungen folgt unmittelbar die Transformationsregel für einen beliebigen Ortsvektor,

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i \longrightarrow \mathbf{r}' = \mathfrak{R} \mathbf{r} = x_i \mathfrak{R} \mathbf{e}_i \stackrel{(2.31)}{=} x_i R_{ji} \mathbf{e}_j \equiv x'_j \mathbf{e}_j,$$

wie in der rechten Figur in der Abbildung (2.4) dargestellt. Bei aktiven Drehungen transformieren die kartesischen Koordinaten also wie folgt,

$$x_i \longrightarrow x'_i = R_{ij} x_j \quad \text{oder} \quad \mathbf{r}' = R \mathbf{r}, \quad (2.41)$$

also umkehrt wie bei passiv interpretierten Drehungen, siehe (2.40).

Passiv und aktiv interpretierte Drehungen sind bei festen kartesischen Basen durch die Transformationen (2.36, 2.41) eindeutig bestimmt. Wir können Drehungen also immer als Transformation der (kartesischen) Koordinaten ansehen. Die *Drehungen*

$$R : \mathbf{r}' \longrightarrow \mathbf{r} = R \mathbf{r}' \quad \text{mit} \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' \quad (2.42)$$

sind Elemente der 3-parametrischen *nichtkommutative orthogonale Gruppe* $O(3)$:

$$\mathbb{1} \in O(3), \quad R_1, R_2 \in O(3) \Rightarrow R_1 R_2 \in O(3), \quad R \in O(3) \Rightarrow R^{-1} = R^T \in O(3).$$

Die Drehungen mit $\det R = 1$ definieren eine Untergruppe, die spezielle orthogonale Gruppe $SO(3)$, da wegen (2.38) $\det R^{-1} = \det R$ ist. Sie erhalten die Orientierung und heißen *eigentliche Drehungen*. Die uneigentlichen Drehungen oder *Spiegelungen* ändern die Orientierung.

Zum Beispiel ist die Raumspiegelung

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

uneigentlich. Da die Einheitsmatrix in $SO(3)$ liegt, bilden die uneigentlichen Drehungen keine Untergruppe. Es gilt

$$O(3) = SO(3) \cup PSO(3). \quad (2.43)$$

Für eine explizite Parametrisierung von eigentlichen Drehungen benutzt man den

Satz 1 (Euler) *Jede eigentliche Drehung (spezielle orthogonale Abbildung) besitzt eine Drehachse, d.h. einen 1-dimensionalen Unterraum aus lauter Fixpunkten.*

Wir müssen zeigen, daß $R\mathbf{n} = \mathbf{n}$ für ein $\mathbf{n} \neq 0$ lösbar ist, oder daß \mathbf{n} im Kern von $R - \mathbb{1}$ liegt. Die von \mathbf{n} definierte Gerade ist dann die Drehachse von R . Eine Lösung existiert genau dann, wenn $R - \mathbb{1}$ den Eigenwert 0 hat oder wenn $\det(R - \mathbb{1}) = 0$ ist. Wegen

$$\begin{aligned} \det(R - \mathbb{1}) &= \det(R - \mathbb{1})^T = \det(R^{-1} - \mathbb{1}) = \det[R^{-1}(\mathbb{1} - R)] \\ &= \det R^{-1} \det(\mathbb{1} - R) = \det(\mathbb{1} - R) = -\det(R - \mathbb{1}) \end{aligned}$$

ist dies der Fall. Für eine explizite Parametrisierung von Drehungen um eine Achse, definiert durch den Einheitsvektor \mathbf{n} , um den Winkel θ betrachte man die Figur (2.5) Man sieht,

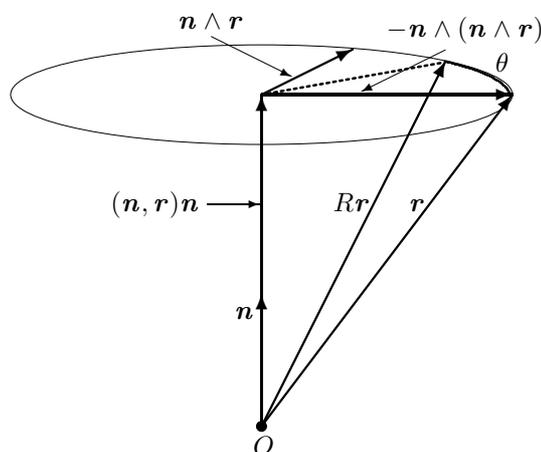


Abbildung 2.5: Drehung um die Achse \mathbf{n} mit Winkel θ .

daß so eine Drehung die folgende Form hat:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{n}, \theta)\mathbf{r} &= (\mathbf{n}, \mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}) \cos \theta + \mathbf{n} \wedge \mathbf{r} \sin \theta \\ &= \mathbf{r} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{r} \theta + O(\theta^2). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Fassen wir zusammen: charakterisieren (t', \mathbf{r}') und (t, \mathbf{r}) ein festes Ereignis bezüglich zweier Inertialsysteme mit Ursprüngen O, O' und kartesischen Basen $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_i$, dann sind folgende Transformationen zwischen den zwei Koordinatensystemen möglich:

Art der Transformation	Operation	Zeitkoordinate	Raumkoordinaten
Translation von O	$\overline{OO'} = \mathbf{a}$	$t = t'$	$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$
Translation von T_0	$\overline{T_0T'_0} = \tau \mathbf{e}_t$	$t = t' + \tau$	$\mathbf{r} = \mathbf{r}'$
Drehung der \mathbf{e}_i	$\mathbf{e}'_i = R_{ji} \mathbf{e}_j$	$t = t'$	$\mathbf{r} = R \mathbf{r}'$
spez. Galileitransformation	$\overline{OO'} = \mathbf{u} t'$	$t = t'$	$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u} t'$

(2.45)

Dabei bezeichnen \mathbf{a} und \mathbf{u} die den konstanten Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{u} zugeordneten Tripel,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Die Menge aller Transformationen die Inertialsysteme in Inertialsysteme überführen bildet die *Galilei Gruppe*. Ein beliebiges Element dieser Gruppe ist eine Zusammensetzung der Translationen, Drehungen und speziellen Galileitransformationen in (2.45) und hat die Form

$$t = t' + \tau \quad \text{und} \quad \mathbf{r} = \mathbf{u} t' + R \mathbf{r}' + \mathbf{a}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \quad R^T R = \mathbb{1}. \quad (2.46)$$

Eine *Galilei-Transformation* ist durch die 10 Parameter $(\tau, \mathbf{a}, \mathbf{u}, R)$ bestimmt. Transformiert man zuerst von $I'' \rightarrow I'$ gemäß

$$t' = t'' + \tau' \quad \text{und} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{u}' t'' + R' \mathbf{r}'' + \mathbf{a}',$$

und anschließend von I' nach I wie in (2.46), so ergibt sich die zusammengesetzte Galileitransformation

$$(\tau, \mathbf{a}, \mathbf{u}, R)(\tau', \mathbf{a}', \mathbf{u}', R') = (\tau + \tau', \mathbf{a} + R \mathbf{a}' + \mathbf{u} \tau', \mathbf{u} + R \mathbf{u}', R R'). \quad (2.47)$$

Den Galilei Transformationen können wir 5×5 Matrizen zuordnen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{o}^T \\ \tau & 1 & \mathbf{o}^T \\ \mathbf{a} & \mathbf{u} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Zum Einselement gehört die Matrix $\mathbb{1}_5$ und zur inversen Galilei-Transformation die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{o}^T \\ -\tau & 1 & \mathbf{o}^T \\ R^{-1}(\mathbf{u}\tau - \mathbf{a}) & -R^{-1}\mathbf{u} & R^{-1} \end{pmatrix}.$$

In der relativistischen Mechanik werden die Galilei- durch die Poincaré-Transformationen abgelöst und die Galileitransformationen mit $\tau = 0$ und $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ durch die Lorentztransformationen.

2.4.3 Galileisches Relativitätsprinzip

Der erste Teil des *Galileischen Relativitätsprinzips* beschreibt die physikalische Darstellung ein und desselben Vorgangs von verschiedenen Inertialsystemen aus:

Äquivalenz von Inertialsystemen: *Mechanische Vorgänge laufen von verschiedenen Inertialsystemen aus gesehen 'gleichartig' ab, d.h. sie können sich in ihrer quantitativen Beschreibung nur durch eine Galileitransformation $(\tau, \mathbf{a}, \mathbf{u}, R)$ unterscheiden.*

Hier werden die Transformationen als *passive Transformationen* interpretiert. Die Vorgänge werden von zwei Experimentatoren in I und I' durch Gesetze der gleichen Form beschrieben (Kovarianz). Beide wenden NEWTONS Axiome an; dabei verknüpft die Galileitransformation die Orts- und Zeitkoordinaten, welche einem festen Ereignis in beiden Inertialsystemen zugeordnet werden.

Der zweite Teil des Äquivalenzprinzips besagt, daß ein Vorgang, der in *irgendeinem* Inertialsystem möglich ist, in derselben quantitativen Form auch in jedem fest vorgegebenen Inertialsystem im Prinzip realisierbar ist:

Äquivalenz von Vorgängen in einem Inertialsystem: *Ist in einem gegebenen Inertialsystem ein bestimmter Vorgang realisierbar, so sind in diesem System im Prinzip auch alle Vorgänge realisierbar, die sich in ihrer Beschreibung durch Galileitransformationen unterscheiden.*

Hier interpretieren wir die Transformationen *aktiv*. Man betrachtet *zwei* physikalische Systeme innerhalb *eines* Inertialsystems, welche durch eine Galileitransformation auseinander hervorgehen. Die Vorgänge in beiden physikalischen Systemen werden durch Gesetze der gleichen Form beschrieben (Kovarianz).

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung eines freien Teilchens, das sich in jedem Inertialsystemen unbeschleunigt längs Geraden bewegt. In jedem solchen ausgezeichneten Systemen lautet seine Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = 0, \quad (2.49)$$

wobei m die träge Masse des Teilchens bezeichnet⁴. Diese ist invariant unter Galileitransformationen. Um dies explizit zu sehen untersuchen wir die Transformation der Geschwindigkeiten. Mit (2.46) gilt

$$dt = dt' \quad \text{und} \quad d\mathbf{r} = \mathbf{u}dt' + R d\mathbf{r}'.$$

Daraus erhalten wir

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt'} = \mathbf{u} + R\mathbf{v}'(t'). \quad (2.50)$$

Ein in I' ruhendes Teilchen (zum Beispiel am Ursprung O') bewegt sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{u} bezüglich I . Durch weitere Differenziation erhält man

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = R\ddot{\mathbf{r}}'(t').$$

Wie erwartet ist das 1. NEWTONsche Axiom kovariant unter allgemeinen Galileitransformationen

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = 0 \iff m\ddot{\mathbf{r}}'(t') = 0.$$

Das Galileische Relativitätsprinzip⁵ macht wesentliche Aussagen über die angenommene Struktur von Raum und Zeit. Es hat aber auch wichtige Konsequenzen für die dynamischen

⁴Wir kommen auf die träge Masse zurück.

⁵Es wird später durch das allgemeinere von EINSTEIN ersetzt werden.

Eigenschaften eines physikalischen Systems. Wir werden später beweisen, daß zu jedem der 10 Parameter der Galileigruppe eine erhaltene Größe gehört. Dies ist der Inhalt eines Satzes von EMMY NOETHER. Folgende Symmetrien bedingen folgende Erhaltungsgrößen:

Zeittranslationen	→	Energieerhaltung
Raumtranslationen	→	Impulserhaltung
Spezielle Galileiinvarianz	→	konstante Schwerpunktsbewegung
Drehinvarianz	→	Drehimpulserhaltung.

Wir betonen noch einmal, daß die Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen in *jedem* System die Form

$$\dot{\mathbf{p}} = 0$$

hat. Aber in Inertialsystemen folgt daraus die Bewegungsgleichung (2.49)

$$\dot{\mathbf{p}} = 0$$

für die Komponenten p_i des Impulsvektors,

$$\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},$$

da nur in diesen Systemen O unbeschleunigt ist und die Basisvektoren \mathbf{e}_i nicht rotieren.

2.5 Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Wir wählen ein Bezugssystem mit Ursprung O und vorerst orthonormierten Maßstäben \mathbf{e}_i . Die Bewegung eines Massenpunktes P ist bekannt, wenn der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ als Funktion der Zeit bekannt ist

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \tag{2.51}$$

Bei festgelegter Basis ist die Bewegung durch die Koordinatenfunktionen $x_i(t)$ in der Zerlegung

$$\mathbf{r}(t) = x_i(t) \mathbf{e}_i \tag{2.52}$$

eindeutig bestimmt. Wir nehmen an, daß diese Funktionen mindestens zweimal differenzierbar sind. Die Raumkurve $\mathbf{r}(t)$ heißt auch *Bahnkurve* des Massenpunktes.

Der von t abhängige Vektor der Geschwindigkeit (siehe Abschnitt 2.4.1)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{2.53}$$

ergibt sich als Grenzlage der Sekante durch die Vektoren $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ und $\mathbf{r}(t)$ pro Zeitintervall Δt im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$. Damit ist die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ tangential an der Bahnkurve

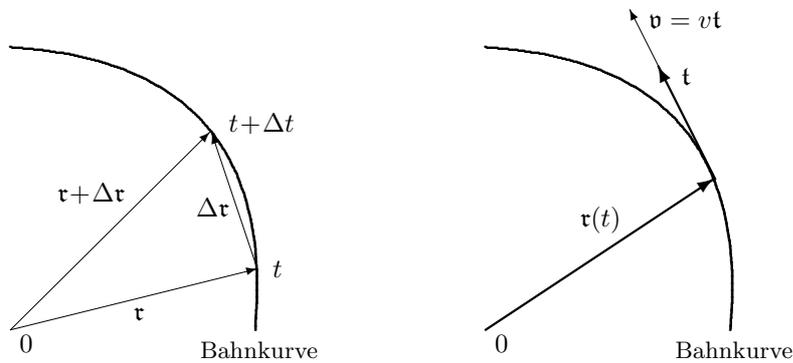


Abbildung 2.6: Zur Definition der Geschwindigkeit

am Punkt $\mathbf{r}(t)$. Auf Bahnpunkten wo $\mathbf{v} \neq 0$ können wir den Geschwindigkeitsvektor in seinen Betrag und Tangenteneinheitsvektor zerlegen, $\mathbf{v} = v \mathbf{t}$, $v = \|\mathbf{v}\| = \|\dot{\mathbf{r}}\|$ und $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$.

$$\mathbf{v} = v \mathbf{t}, \quad v = \|\mathbf{v}\| = \|\dot{\mathbf{r}}\| \quad \text{und} \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}. \quad (2.54)$$

Führen wir die *Bogenlänge* s (auch als natürlicher Parameter bezeichnet) des Kurvenstückes von P_0 bis P_1 ein (siehe Abbildung 2.7),

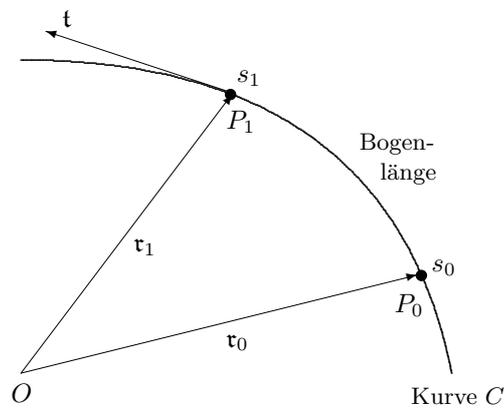


Abbildung 2.7: Zur Bogenlänge

$$s(C) = \int_{s_0}^{s_1} ds, \quad ds = \|d\mathbf{r}\| \implies \frac{ds}{dt} = \|\dot{\mathbf{r}}\| = v, \quad (2.55)$$

dann finden wir für die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{t} v. \quad (2.56)$$

woraus wir entnehmen, daß der Tangenteneinheitsvektor \mathbf{t} die 'Geschwindigkeit' der Bahn mit der Bogenlänge als 'Zeit' ist.

Der Vektor der *Beschleunigung* ist die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}, \quad (2.57)$$

und für zeitunabhängige Basen

$$\mathbf{a} = \ddot{x}_i \mathbf{e}_i.$$

Der Beschleunigungsvektor ist tangential am *Hodographen*, daß heißt an der Kurve $t \rightarrow \mathbf{v}(t)$. Wir gebrauchen die Darstellung (2.54) und finden

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{t}) = \dot{v}\mathbf{t} + v\dot{\mathbf{t}}. \quad (2.58)$$

Im letzten Term ersetzen wir die Ableitung nach der Zeit durch die nach der Bogenlänge,

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\mathbf{t}}{ds} \equiv v\mathbf{t}',$$

wobei der Strich die Ableitung nach s kennzeichnet. Die Änderung des Tangenteneinheitsvektors zerlegen wir nach seinem Betrag und seiner Richtung,

$$\mathbf{t}' \equiv \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n} = \mathbf{n}/R, \quad \kappa = \|\mathbf{t}'\| = \left\| \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right\|, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad (2.59)$$

wobei der *Hauptnormaleneinheitsvektor* \mathbf{n} , die *Krümmung* κ und der *Krümmungsradius* R der Bahnkurve eingeführt wurden. Die Krümmung ist ein Maß für die Abweichung der Kurve von einer Geraden. Für eine Kreisbahn ist in jedem Punkt die Krümmung $\kappa = 1/R$, wobei R der Kreisradius ist. Man kann die Krümmung einer Kurve in einem Punkt definieren als die Krümmung desjenigen Kreises, der die Kurve im betrachteten Punkt berührt und sich am besten an die Kurve anschmiegt. Benutzen wir

$$\dot{\mathbf{t}} = v\mathbf{t}', \quad \ddot{\mathbf{t}} = \dot{v}\mathbf{t}' + v\dot{\mathbf{t}}' \implies \dot{\mathbf{t}} \wedge \ddot{\mathbf{t}} = v^2 \mathbf{t} \wedge \dot{\mathbf{t}}' = v^3 \mathbf{t} \wedge \mathbf{t}'$$

sowie $\mathbf{t} \perp \dot{\mathbf{t}}$, dann können wir die Krümmung der Kurve am Punkte $\mathbf{r}(t)$ folgendermaßen schreiben:

$$\kappa = \|\mathbf{t} \wedge \mathbf{t}'\| = \frac{\|\dot{\mathbf{t}} \wedge \ddot{\mathbf{t}}\|}{\|\dot{\mathbf{t}}\|^3}. \quad (2.60)$$

Die rechte Seite ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve.

Durch Einsetzen von (2.59) in (2.58) ergibt sich die Beschleunigung

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{t} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \quad (2.61)$$

Damit ist der Beschleunigungsvektor zerlegt in einen Anteil der von der Betragsänderung der Geschwindigkeit herrührt und einen Anteil, dessen Ursache die Richtungsänderung der Geschwindigkeit ist. Für Planeten auf Kreisbahnen ist $\dot{v} = 0$, $\|\mathbf{a}\| = v^2/R$ und für Elektronen im Linearbeschleuniger ist $R = \infty$, $\|\mathbf{a}\| = \dot{v}$.

Der Einheitsvektor \mathbf{n} steht senkrecht auf dem Tangentenvektor, da

$$0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) = 2\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t} \stackrel{(2.59)}{=} 2\kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0. \quad (2.62)$$

Die durch die orthonormalen Vektoren \mathbf{t}, \mathbf{n} aufgespannte Ebene heißt *Schmiegeebene* der Bahnkurve. Sie ist diejenige Ebene, in welcher der Schmiegekreis mit Radius $R = 1/\kappa$ liegt. Man kann diese zwei Vektoren noch durch den *Binormaleneinheitsvektor* $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ ergänzen. Die orthonormalen Vektoren

$$\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}\}$$

sind das *begleitende Dreibein*. Es definiert das so-genannte natürliche Koordinatensystem für Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Der Vollständigkeit halber diskutieren wir noch die *Torsion einer Kurve*. In jedem Punkt der Kurve, in dem die Krümmung nicht verschwindet, definieren

$$\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\} \equiv \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$$

ein positiv orientiertes orthonormiertes System. Damit ist Ableitung von \mathbf{t}_i nach dem Bogenparameter eine Linearkombination der \mathbf{t}_j ,

$$\mathbf{t}'_i = \sum_j a_{ij} \mathbf{t}_j.$$

Wegen (2.59) ist die erste Zeile der Matrix (a_{ij}) gleich $(0, \kappa, 0)$. Weiterhin ist diese Matrix antisymmetrisch,

$$\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_j = \delta_{ij} \implies \mathbf{t}'_i \cdot \mathbf{t}_j + \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}'_j = a_{ij} + a_{ji} = 0,$$

und hat damit die Gestalt

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Die Funktion $\omega(s)$ heißt *Torsion* oder *Windung* der Kurve. Sie ist ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der sich die Schmiegeebene dreht. Bei ebenen Kurven verschwindet die Torsion identisch. Sie tritt in den *FRENETSchen Formeln*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= k(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -k(s)\mathbf{t}(s) + \omega(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= -\omega(s)\mathbf{n}(s), \end{aligned}$$

einem System von 9 linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, auf. Für beliebige Parameter, und insbesondere der Zeit, ist die Torsion

$$\omega = \frac{[\mathbf{v}, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}]}{(\mathbf{v} \wedge \mathbf{a})^2}.$$

2.6 Krummlinige Koordinatensysteme

In kartesischen Koordinaten sind die Koordinatenlinien Geraden. Oft ist es jedoch hilfreich, die Koordinaten dem physikalischen Problem anzupassen und krummlinige Koordinaten zu wählen. Dann ändern die Basisvektoren und Koordinatenlinien ihre Richtung. Stehen die

Koordinatenlinien senkrecht aufeinander, so spricht man von rechtwinkligen krummlinigen Koordinaten. Zum Beispiel sind die Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) definiert durch

$$x = x^1 = \rho \cos \varphi, \quad y = x^2 = \rho \sin \varphi, \quad z = x^3 = z \quad (2.64)$$

und die Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) in

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \theta \quad (2.65)$$

rechtwinklig. Für kartesische Basen und Koordinaten ist $\mathbf{e}_a = \mathbf{e}^a$ und $x_a = x^a$ und wir brauchen nicht zwischen unteren und oberen Indizes zu unterscheiden. Zur besseren Unterscheidung indizieren wir in diesem Abschnitt die kartesischen Größen mit den Anfangsbuchstaben des Alphabets. Für Größen die sich auf krummlinige Koordinatensysteme beziehen muss man zwischen unteren und oberen Indizes unterscheiden: Koordinaten haben obere Indizes. Wir betrachten ein Koordinatentripel

$$q^i = q^i(x^1, x^2, x^3) \quad (2.66)$$

und wollen voraussetzen, dass die Umkehrtransformation

$$x^a = x^a(q^1, q^2, q^3). \quad (2.67)$$

existiert. Nach dem Theorem über implizite Funktionen ist dies der Fall, wenn die Determinante der Transformationsmatrix

$$e_a^i = \frac{\partial q^i}{\partial x^a} \quad (2.68)$$

nicht verschwindet. Die inverse Transformationsmatrix

$$e_i^a = \frac{\partial x^a}{\partial q^i} \quad \text{mit} \quad e_j^a e_a^i = \delta_j^i \quad \text{und} \quad e_b^i e_i^a = \delta_b^a, \quad (2.69)$$

ist dann ebenfalls regulär. Wir wollen auch voraussetzen, daß die Transformation (2.67) die Orientierung erhält, oder daß

$$e = \det(e_i^a) = \frac{1}{\det(e_a^i)} > 0. \quad (2.70)$$

2.6.1 Übergang von kartesischen zu krummlinigen Koordinaten

Zum einen können *kovariante* Basisvektoren

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial(x^a \mathbf{e}_a)}{\partial q^i} \equiv e_i^a \mathbf{e}_a \quad (2.71)$$

definiert werden, die sich tangential an die Koordinatenlinien q^i anschmiegen. Zum anderen können über Gradientenbildung *kontravariante* Basisvektoren

$$\mathbf{g}^i = \nabla q^i = \left(\mathbf{e}^a \frac{\partial}{\partial x^a} \right) q^i = \mathbf{e}^a e_a^i \quad (2.72)$$

eingeführt werden, die auf den Niveauflächen $q^i = \text{const.}$ senkrecht stehen, siehe Abbildung (2.8).

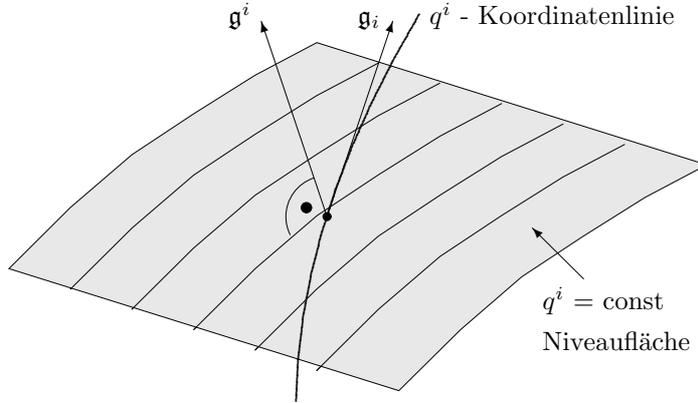


Abbildung 2.8: Die kovarianten und kontravarianten Basisvektoren.

Im Gegensatz zur kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_a = \mathbf{e}^a\}$ sind die ortsabhängigen Basen $\{\mathbf{g}_i\}$ und $\{\mathbf{g}^i\}$ verschieden. Für rechtwinklige Systeme sind sie noch parallel, $\mathbf{g}_i \parallel \mathbf{g}^i$. Die Skalarprodukte

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = e_i^a e_{ja} = g_{ji} \quad \text{und} \quad g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = e_a^i e^{aj} = g^{ji} \quad (2.73)$$

sind ortsabhängig, da die Basisvektoren ortsabhängig sind. Die Matrix g_{ij} ist der *metrische Fundamentaltensor*. Invariant sind demgegenüber die Skalarprodukte von kovarianten und kontravarianten Basisvektoren

$$\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}^i = e_j^a e_a^i = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i. \quad (2.74)$$

Ein beliebiger Vektor kann als Linearkombination der kartesischen, kontra- oder kovarianten Basisvektoren geschrieben werden,

$$\mathbf{u} = u^a \mathbf{e}_a = u^i \mathbf{g}_i = u_i \mathbf{g}^i \quad (2.75)$$

wobei sich mit (2.74) die Koeffizienten als Skalarprodukte von \mathbf{u} mit den Basisvektoren schreiben lassen,

$$\begin{aligned} u^a &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^a = u^i e_i^a = e_a^i u_i \\ u^i &= \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{u} = u^a e_a^i = g^{ij} u_j \\ u_i &= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u} = e_i^a u_a = g_{ij} u^j. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Wir können also kovariante Indices leicht in kovariante oder kartesische umrechnen und umgekehrt. Insbesondere ist (g_{ij}) die zu (g^{jk}) inverse Matrix, wie man auch direkt nachrechnen kann:

$$g_{ij} g^{jk} = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j)(\mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}^k) = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^k = \delta_i^k. \quad (2.77)$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} ist

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^a v_a = g_{ij} u^i v^j = g^{ij} u_i v_j. \quad (2.78)$$

Die symmetrische Matrix g_{ij} bestimmt die Längenmessung in den gewählten krummlinigen Koordinaten,

$$d\mathbf{x} = \mathbf{g}_i dq^i \implies ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = g_{ij} dq^i dq^j, \quad (2.79)$$

und dieser wichtigen Eigenschaft verdankt sie ihren Namen: *metrischer Tensor*. Das von den drei infinitesimalen Vektoren

$$d\mathbf{r}_1 = \mathbf{g}_1 dq^1, \quad d\mathbf{r}_2 = \mathbf{g}_2 dq^2 \quad \text{und} \quad d\mathbf{r}_3 = \mathbf{g}_3 dq^3$$

aufgespannte Parallelepipeton hat ein Volumen proportional zum Spatprodukt der kovarianten Basisvektoren,

$$\begin{aligned} dV &= [d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2, d\mathbf{r}_3] = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] dq^1 dq^2 dq^3 = e_1^a e_2^b e_3^c [\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_c] dq^1 dq^2 dq^3 \\ &= \epsilon_{abc} e_1^a e_2^b e_3^c dq^1 dq^2 dq^3 = \det(e_i^a) dq^1 dq^2 dq^3 = \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3, \end{aligned}$$

wobei g die Determinante des metrischen Tensors g_{ij} bezeichnet. Im letzten Schritt machten wir von (2.73) Gebrauch, d.h. von $e = \sqrt{g}$. Um die Volumenform

$$dV = \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3, \quad g = \det(g_{ij}) \quad (2.80)$$

zu erhalten, muss man also das Produkt der Differentiale noch mit der Wurzel der Determinante g des metrischen Fundamentaltensors im betreffenden Koordinatensystem multiplizieren. Insbesondere haben wir bewiesen, daß

$$[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] = e \implies [\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k] = e \epsilon_{ijk} \equiv \eta_{ijk}, \quad e = \pm\sqrt{g} \quad (2.81)$$

gilt. Diese Formel für das Spatprodukt der kovarianten Basisvektoren ist korrekt für beide Orientierungen der kovarianten Basisvektoren. Für ein nicht-positiv orientiertes Tripel ist $e = -\sqrt{g} < 0$. Hier haben wir den total antisymmetrischen *Levi-Civita Tensor* dritter Stufe η_{ijk} eingeführt. Durch 'hochziehen' der Indizes mit der Metrik erhält man den entsprechenden kontravarianten Tensor

$$\eta^{ijk} = [\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k] = \det(e_a^i) \epsilon_{ijk} = \frac{1}{e} \epsilon_{ijk} \equiv \eta^{ijk}. \quad (2.82)$$

Entsprechend können die Flächen des das Volumenelements dV bildenden Parallelepipedons als vektorielle Flächenelemente angesehen werden, beispielsweise

$$d\mathfrak{A}^1 = d\mathbf{r}_2 \wedge d\mathbf{r}_3 = \mathbf{g}_2 \wedge \mathbf{g}_3 dq^2 dq^3$$

Der Vektor $\mathbf{g}_2 \wedge \mathbf{g}_3$ hat ein verschwindendes Skalarprodukt mit \mathbf{g}_2 und \mathbf{g}_3 und muss daher proportional zu \mathbf{g}^1 sein,

$$\mathbf{g}_2 \wedge \mathbf{g}_3 = C \cdot \mathbf{g}^1 \implies [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] = e = C.$$

Wir schließen, daß

$$\mathbf{g}_i \wedge \mathbf{g}_j = \eta_{ijk} \mathbf{g}^k. \quad (2.83)$$

Die gerichteten Flächenelemente haben damit die Form

$$d\mathfrak{A}^1 = e \mathbf{g}^1 dq^2 dq^3, \quad d\mathfrak{A}^2 = e \mathbf{g}^2 dq^3 dq^1 \quad \text{und} \quad d\mathfrak{A}^3 = e \mathbf{g}^3 dq^1 dq^2. \quad (2.84)$$

Zum Beispiel steht $d\mathfrak{A}^1$ senkrecht auf den Niveauflächen $q^1 = \text{const.}$

2.6.2 Differentialoperatoren

Für viele Rechnungen, insbesondere in der Elektrodynamik, ist es nützlich die gängigsten Differentialoperatoren in beliebigen krummlinigen Koordinatensystemen zu kennen.

Gradient: Der Gradient ist definiert durch

$$df = d\mathbf{x} \cdot \nabla f \Rightarrow \nabla f = \boldsymbol{\epsilon}^a \partial_a f = \boldsymbol{\epsilon}^a e_a^i \partial_i f = \mathbf{g}^i \partial_i f, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

Wegen (2.72) finden wir für den Gradienten

$$\nabla = \mathbf{g}^i \partial_i = \mathbf{g}_i g^{ij} \partial_j. \quad (2.85)$$

Divergenz: Wir definieren die Divergenz eines Vektorfeldes, so daß der Gaußsche Satz

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} = \int_{\partial V} d\mathfrak{A} \cdot \mathbf{a} \quad (2.86)$$

gilt. Für ein kleine Volumenelement ΔV wie in Abbildung (2.9) gilt dann

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\partial \Delta V} d\mathfrak{A} \cdot \mathbf{a}. \quad (2.87)$$

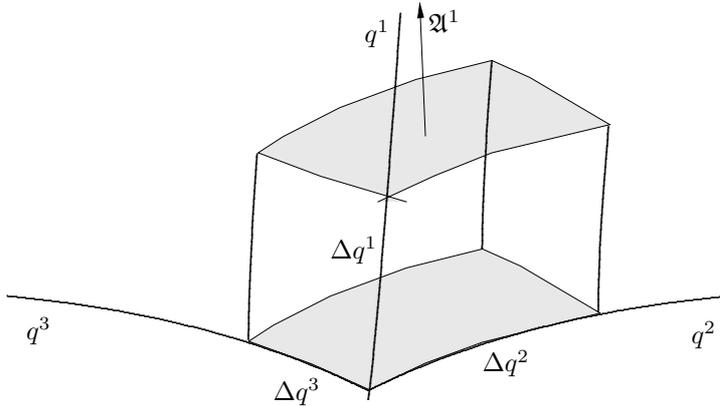


Abbildung 2.9: Zur Berechnung der Divergenz

Wir berechnen den Beitrag der in Abbildung (2.9) gekennzeichneten Flächen zum Oberflächenintegral. Mit $d\mathfrak{A}$ aus (2.84) und $\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i$ finden wir $d\mathfrak{A} \cdot \mathbf{a} = e (a^1 dq^2 dq^3 + a^2 dq^3 dq^1 + a^3 dq^1 dq^2)$, und damit ist dieser Beitrag

$$\left\{ (ea^1)(q^1 + \Delta q^1, q^2, q^3) - (ea^1)(q^1, q^2, q^3) \right\} \Delta q^2 \Delta q^3 \sim \frac{\partial}{\partial q^1} (ea^1) dq^1 dq^2 dq^3.$$

Dividieren wir durch $\Delta V = e dq^1 dq^2 dq^3$, dann erhalten wir für den Beitrag der beiden gekennzeichneten Flächen zur rechten Seite in (2.87)

$$\frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial q^1} (ea^1).$$

Berücksichtigen wir nun noch die beiden anderen Terme von den Flächen mit konstantem q^2 beziehungsweise q^3 , so finden wir

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} a^i) \quad (2.88)$$

für die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{a} = a^i \mathbf{q}_i$.

Rotation: Die Rotation gewinnen wir aus dem Stokesschen Satz

$$\int_A d\mathfrak{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) = \int_{\partial A} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}. \quad (2.89)$$

Auf der gekennzeichneten unteren infinitesimalen Fläche in (2.9) bedeutet dies

$$\begin{aligned} e \Delta q^2 \Delta q^3 \mathbf{g}^1 \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) &\sim \Delta q^2 \{a_2(q^1, q^2, q^3) - a_2(q^1, q^2, q^3 + \Delta q^3)\} \\ &+ \Delta q^3 \{a_3(q^1, q^2 + \Delta q^2, q^3) - a_3(q^1, q^2, q^3)\}, \end{aligned}$$

oder nachdem wir die Differenzen auf der rechten Seite in Δq^3 beziehungsweise in Δq^2 entwickeln,

$$e \mathbf{g}^1 \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) = \frac{\partial a_3}{\partial q^2} - \frac{\partial a_2}{\partial q^3} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}^1 \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) = \eta^{1jk} \frac{\partial a_k}{\partial q^j},$$

wobei der total antisymmetrische Tensor η^{ijk} schon in der Formel (2.82) auftrat. Mit den analogen Resultaten für die verbleibenden Komponenten erhalten wir folgende Formel für die Rotation eines Vektorfeldes in beliebigen krummlinigen Koordinaten:

$$\nabla \wedge \mathbf{a} = \mathbf{g}_i \eta^{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial q^j} \quad (2.90)$$

Laplace-Operator: Um den LAPLACE-Operator zu berechnen, bilden wir zuerst den Gradienten einer Funktion f und danach die Divergenz des so gewonnenen Vektorfeldes ∇f ,

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial q^j} f)$$

woraus sich

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial q^j} \right) \quad (2.91)$$

für den gesuchten LAPLACE-BELTRAMI-Operator ergibt.

Rechtwinklige Koordinaten: In dieser Vorlesung werden wir fast ausschließlich rechtwinklige Koordinaten gebrauchen, für welche der metrische Tensor diagonal ist,

$$g_{ij} = \lambda_i^2 \delta_{ij}, \quad \text{so daß} \quad \sqrt{g} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (2.92)$$

ist. Dann sind die \mathbf{g}_i und \mathbf{g}^i parallel zueinander (die Koordinatenlinien schneiden die Koordinatenflächen senkrecht) und die Vektoren

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{g}_i}{\lambda_i} = \lambda_i \mathbf{g}^i \quad (\text{keine Summe über } i!) \quad (2.93)$$

bilden ein Orthonormalsystem. Entsprechend hat das Wegelement $d\mathbf{r}$ von $\{q^i\}$ nach $\{q^i + dq^i\}$ die Form

$$d\mathbf{r} = \sum_i \lambda^i \mathbf{e}_i dq^i. \quad (2.94)$$

Es bietet sich nun an, ein Vektorfeld nach der orthonormierten Basis $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$ anstelle der kovarianten Basis \mathbf{g}_i zu entwickeln,

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i = a_i \mathbf{g}^i = \sum_i \tilde{a}_i \mathbf{e}_i \implies \tilde{a}_i = \lambda_i a^i, \quad a_i = \lambda_i \tilde{a}_i. \quad (2.95)$$

Der Gradient einer Funktion vereinfacht sich zu

$$\nabla f = \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} \mathbf{e}_i, \quad (2.96)$$

die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{a} = \tilde{a}_i \mathbf{e}_i$ zu

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \left[\frac{\partial(\lambda_2 \lambda_3 \tilde{a}_1)}{\partial q^1} + \frac{\partial(\lambda_1 \lambda_3 \tilde{a}_2)}{\partial q^2} + \frac{\partial(\lambda_1 \lambda_2 \tilde{a}_3)}{\partial q^3} \right], \quad (2.97)$$

und die Rotation hat die Form

$$\nabla \wedge \mathbf{a} = \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} \left[\frac{\partial(\lambda_3 \tilde{a}_3)}{\partial q^2} - \frac{\partial(\lambda_2 \tilde{a}_2)}{\partial q^3} \right] \mathbf{e}_1 + \text{zyklisch}. \quad (2.98)$$

Der LAPLACE-BELTRAMI-Operator vereinfacht sich zu

$$\Delta = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \lambda_2 \lambda_3 \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2} \lambda_3 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\partial}{\partial q^3} \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial}{\partial q^3} \right). \quad (2.99)$$

2.6.3 Teilchenbahnen in krummlinigen Koordinatensystemen

Wir wollen die Bewegung eines Punktteilchens in beliebigen (möglichst angepassten) Koordinaten beschreiben. Wegen $d\mathbf{r} = dq^i \mathbf{g}_i$ ist die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{q}^i \mathbf{g}_i \quad (2.100)$$

und die Beschleunigung

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{q}^i \mathbf{g}_i + \dot{q}^i \dot{\mathbf{g}}_i. \quad (2.101)$$

Für rechtwinklige Koordinatensysteme lassen sich die Gleichungen für Geschwindigkeit und Beschleunigung wie folgt vereinfachen:

$$\dot{\mathbf{r}} = \sum_i \dot{q}^i \lambda_i \mathbf{e}_i \quad (2.102)$$

und

$$\ddot{\mathbf{r}} = \sum_i \left\{ \left[\frac{d}{dt} (\dot{q}^i \lambda_i) \right] \mathbf{e}_i + \dot{q}^i \lambda_i \dot{\mathbf{e}}_i \right\}. \quad (2.103)$$

Da die \mathbf{e}_i orthonormiert sind, steht $\dot{\mathbf{e}}_i$ senkrecht auf \mathbf{e}_i .

Zylinderkoordinaten: Oft gebraucht werden die Zylinder- und Kugelkoordinaten. Für die Zylinderkoordinaten (2.64) ist das Linienelement

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

und damit $\lambda_\rho = 1$, $\lambda_\varphi = \rho$ und $\lambda_z = 1$. Aus

$$\mathbf{r} = \rho \cos \varphi \mathbf{e}_x + \rho \sin \varphi \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$$

berechnen sich die kovarianten Basisvektoren durch Ableiten von \mathbf{r} nach den Zylinderkoordinaten. Normiert man diese, so ergibt sich folgende orthonormierte Basis,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \mathbf{g}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{\rho} \mathbf{g}_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{g}_z = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (2.104)$$

siehe Abbildung (2.10). Eine kurze Rechnung zeigt, daß

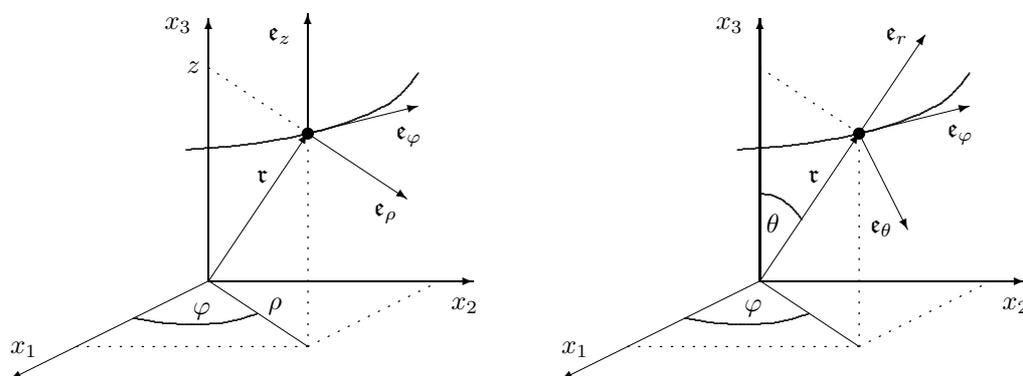


Abbildung 2.10: Zylinder- und Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Kugelkoordinaten: Für die Kugelkoordinaten (2.65) ist

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + r \cos \theta \mathbf{e}_z \quad (2.106)$$

und man findet das Linienelement

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.107)$$

so daß $\lambda_r = 1$, $\lambda_\theta = r$ und $\lambda_\varphi = r \sin \theta$. Durch Ableiten von $d\mathbf{r}$ nach den Kugelkoordinaten und anschließender Normierung findet man die orthogonalen Einheitsvektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y,\end{aligned}\tag{2.108}$$

siehe Abbildung (2.10). Damit kann man die Geschwindigkeit und Beschleunigung in Koordinaten berechnen. Man findet für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung die Formeln

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \right] \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}\tag{2.109}$$

2.6.4 Differentialoperatoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten

Bei kugel- oder axialsymmetrische Problemen ist es oft angebracht die dem Problem angepassten Kugel- oder Zylinderkoordinaten zu benutzen. Da diese Koordinatensystem oft gebraucht werden, geben wir hier die explizite Form der Differentialoperatoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten an:

In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) gilt:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \\ \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ \nabla \wedge \mathbf{a} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

In Kugelkoordinaten (r, θ, φ) gilt:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \\ \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2a_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r \tan \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\ \nabla \wedge \mathbf{a} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r \tan \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{a_\varphi}{r} \right) \mathbf{e}_\theta + \\ &\quad \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

Kapitel 3

Dynamik von Massenpunkten

Nach dem 1. Newtonschen Axiom bewegen sich *freie Körper in einem Inertialsystem* geradlinig und gleichförmig. Sind die Wechselwirkungen mit der Umgebung (beabsichtigt oder unbeabsichtigt) ungenügend abgeschirmt, dann sind Körper äußeren Einflüssen ausgesetzt. In der makroskopischen Mechanik sind dafür die gravitative und die elektromagnetische Kraft verantwortlich. Es wirken *Kräfte* auf die Körper und diese führen zu Abweichungen ihrer Bahn von der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung. Die beschleunigten Bewegungen sind bestimmt durch die Kräfte und die Fähigkeit der Materie des Teilchens, auf diese Einflüsse zu reagieren, seine *Trägheit*. Nach der Erfahrung gibt es ein für jedes Materieteilchen universelles Maß an Trägheit, unabhängig von den jeweiligen Einflüssen. Das eigentliche Bewegungsgesetz gibt an, wie sich der Körper in Inertialsystemen unter dem Einfluss von Kräften bewegt:

2. Newtonsches Axiom (lex secunda) *Die Änderung der Bewegungsgröße ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft.*

Für *Bewegungsgröße* benutzen wir heute das Wort *Impuls*. Der Impuls \mathbf{p} ist definiert als Produkt von träger Masse m und Geschwindigkeit,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (3.1)$$

Das 2. Newtonsche Gesetz ist demnach gleichwertig mit

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathfrak{F}. \quad (3.2)$$

In den meisten Fällen ist die Masse konstant¹, und dann gilt

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{a} = \mathfrak{F} \quad (3.3)$$

gilt. In diesem Kapitel werden wir uns ausführlich mit der Bedeutung und den Anwendungen der Gleichung (3.2) beschäftigen. Sie beinhaltet die Begriffe träge Masse und Kraft, die zuerst als messbare Größen erklärt werden müssen.

¹Für eine Treibstoff verlierende Rakete ist die Masse zeitabhängig.

3.1 Die träge Masse und Kräfte

Wir setzen voraus, dass Länge und Zeit bereits definiert sind. Dann ist die Beschleunigung $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ eine messbare Größe. Wir betrachten eine bestimmte, in ihrer Größe unbekannte Kraft (zum Beispiel eine Federkraft) und zwei Körper. Wir messen die Beschleunigungen \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 welche durch die unbekannte Kraft hervorgerufen werden. Nach (3.3) ist das Verhältnis m_1/m_2 gleich dem Verhältnis $\|\mathbf{a}_2\|/\|\mathbf{a}_1\|$. Damit ist das Verhältnis der trägen Massen als Messgröße festgelegt. Man definiert nun willkürlich die träge Masse eines bestimmten Körpers als 1 Masseneinheit, bekanntlich ist dies das Kilogramm (kg). Hierdurch ist dann die träge Masse jedes Körpers bezogen auf das Kilogramm als Messgröße bestimmt.

Auch der *Stoßprozess zweier Teilchen (Körper)* erlaubt die operative Definition der trägen Masse. Zwei freie Teilchen bewegen sich in einem Inertialsystem längs Geraden mit konstanten Geschwindigkeiten \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 aufeinander zu, stoßen zusammen und bewegen sich nach dem Stoß mit konstanten Geschwindigkeiten \mathbf{w}_1 und \mathbf{w}_2 wieder auseinander. Der Stoß braucht nicht elastisch zu sein. Es wird lediglich vorausgesetzt, dass die Teilchen durch den Stoß ihre Identität nicht verlieren, und dass die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß gemessen werden können. Man findet, dass bei gleichen Teilchen aber veränderlichen Geschwindigkeiten \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 das Verhältnis

$$\alpha = \frac{\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1\|}{\|\mathbf{v}_2 - \mathbf{w}_2\|}$$

immer denselben Wert hat. Weiter stellt man fest, dass sich bei Vervielfachung der Materie eines Teilchens durch Volumenänderung das obige Verhältnis α umgekehrt proportional verändert. Verdoppelt man die Materie des zweiten Teilchens, so verdoppelt sich der Wert von α , verdoppelt man die Materie des ersten Teilchens, so halbiert sich der Wert von α , usw. Man setzt daher

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1}. \quad (3.4)$$

und nennt m_1, m_2 die *trägen Massen* der beiden Teilchen. Damit ist das Verhältnis von trägen Massen operational definiert. Nach Wahl einer Einheitsmasse sind damit alle Massen bestimmt.

Das Verhältnis α ist invariant gegenüber beliebigen Galilei-Transformationen, da mit (2.50) die Komponenten der Geschwindigkeiten folgendermaßen transformieren,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{u} + R \mathbf{v}'_i, \quad \mathbf{w}_i = \mathbf{u} + R \mathbf{w}'_i,$$

so daß

$$\|\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i\| = \|R(\mathbf{v}'_i - \mathbf{w}'_i)\| = \|\mathbf{v}'_i - \mathbf{w}'_i\|$$

gilt. Benutzt man die gleiche Einheitsmasse in allen Inertialsystemen, dann ist die in (3.4) definierte träge Masse eines Körpers unabhängig vom Inertialsystem. Die oben zur Definition der trägen Masse benutzte Beziehung $m_1\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1\| = m_2\|\mathbf{v}_2 - \mathbf{w}_2\|$ folgt aus dem noch zu beweisenden *Impulssatz*. Danach ist die Summe der Impulse vor und nach einem Stoß dieselbe. Für den Stoß zweier Teilchen gilt also

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{w}_1 + m_2\mathbf{w}_2, \quad (3.5)$$

Neben der trägen Masse gibt es die begrifflich verschiedene *schwere Masse*, die proportional zur Stärke der Gravitationskraft auf einen Körper ist. Die schweren Massen zweier Körper sind gleich, wenn sie durch einen dritten Körper dieselbe Anziehungskraft erfahren. Sie kann experimentell durch eine Kraftmessung festgelegt werden. Die schwere Masse könnte eine von der trägen Masse unabhängige Eigenschaft eines Körpers sein. Experimentell stellt sich jedoch heraus, daß das Verhältnis der beiden Massen immer gleich groß ist. Daher verzichtet man in der Notation zumeist auf eine Unterscheidung der beiden Begriffe und setzt beide Massen gleich m . Die Eigenschaft der Gleichheit von träger und schwerer Masse wird axiomatisch oft angenommen und dieses sogenannten *Äquivalenzprinzip* ist ein zentraler Ausgangspunkt in der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Äußere Kräfte: Die Ursache für die Abweichung von der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung ist in den am Körper angreifenden Kräften zu suchen, die zu einer zeitlichen Änderung des Impulses führen. Fast immer ist die Kraft \mathfrak{F} auf ein Teilchen eine Funktion der Zeit t , des Ortsvektors $\mathbf{r}(t)$ und der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ des Teilchens

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(t, \mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)). \quad (3.6)$$

Eine Ausnahme ist die beschleunigungsabhängige Kraft auf ein elektromagnetische Wellen abstrahlendes geladenes Teilchen. Wir werden derartige Strahlungsdämpfungen in dieser Vorlesung vernachlässigen. Sie werden in der Elektrodynamik behandelt.

Nach Einführung eines kartesischen Koordinatensystems können wir die Bewegungsgleichung (3.3) für eine Kraft von der Gestalt (3.6) in ein gekoppeltes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung umformen,

$$m\ddot{x}_a = F_a(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3). \quad (3.7)$$

Welches kartesische Koordinatensystem für die Lösung dieser Gleichungen besonders geeignet ist und ob überhaupt die Verwendung von kartesischen Koordinaten günstig ist, hängt von der konkreten Form von $\mathfrak{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ ab.

Man spricht von *äußeren Kräften*, wenn die Rückwirkung des betrachteten Teilchens auf das die Kräfte erzeugende System vernachlässigt wird. Dies ist sicher eine gute Näherung für die Bewegung einer Rakete im Gravitationsfeld der sehr viel schwereren Erde oder eines Elektrons im elektrischen Feld eines Kondensators. Dagegen wird ein Elektron auf ein mit ihm wechselwirkendes Elektron zurückwirken. Über diese Rückwirkung macht das dritte Newtonsche Axiom die einfache, oft unter dem Schlagwort *actio = reactio* zusammengefasste Aussage:

Newtons 3. Axiom (lex tertia): *Der Kraft, mit der die Umgebung auf einen Massenpunkt wirkt, entspricht stets eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft, mit der der Massenpunkt zurückwirkt,*

$$\mathfrak{F}_{\text{actio}} = -\mathfrak{F}_{\text{reactio}}. \quad (3.8)$$

Bei der Behandlung von Mehrkörpersystemen wird dieses Prinzip eine große Rolle spielen.

Wirken zwei verschiedene Kräfte \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 auf ein und denselben Massenpunkt, so erhält man die Gesamtkraft durch die Vektorsumme $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$. Dies wird als das *Superpositionsprinzip* für Kräfte bezeichnet. Wie die Geschwindigkeit und Impuls Vektoren sind, ist auch die Kraft ein Vektor und die Kräfte bilden einen 3-dimensionalen Vektorraum.

3.1.1 Beschleunigte Bezugssysteme und Scheinkräfte

Inertialsysteme sind dadurch ausgezeichnet, daß in ihnen das Trägheitsgesetz gilt, d.h. ein kräftefreier Körper ist in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit. Ruht der Ursprung O in einem Inertialsystem und rotiert die Basis $\{\epsilon_a\}$ nicht gegenüber den Fixsternen, so impliziert die NEWTONsche Bewegungsgleichung (3.2) für die Komponenten des Orts-, Impuls- und Kraftvektors in

$$\mathbf{r} = x_a \epsilon_a, \quad \mathbf{p} = p_a \epsilon_a \quad \text{und} \quad \mathfrak{F} = F_a \epsilon_a$$

die Differentialgleichungen

$$\dot{p}_a = F_a \xrightarrow{m=\text{const}} m\ddot{x}_a = F_a \quad \text{oder} \quad m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (3.9)$$

Wie wird die letzte Bewegungsgleichung für die Komponenten von \mathbf{r} in Nicht-Inertialsystemen aussehen? Die Beantwortung dieser Frage ist relevant, da die meisten der unseren Rechnungen zugrundeliegenden Systeme, zum Beispiel die Erdoberfläche, eigentlich keine Inertialsysteme sind. Genaue Messungen sollten daher Abweichungen von den Vorhersagen der Newtonschen Gesetze zeigen. Wir werden sehen, daß man die Gesetze für Nicht-Inertialsysteme durch Einführung von Trägheitskräften (Scheinkräften) so modifizieren kann, daß sie mit den Beobachtungen übereinstimmen.

Die Bewegung eines beliebigen Systems S' mit Ursprung O' , kartesischer Basis ϵ'_a und Koordinaten x'_a relativ zu einem *Inertialsystem* IS mit kartesischer Basis ϵ_a und Koordinaten x_a setzt sich aus der Bewegung des Ursprungs O' von S' und der Drehung der Achsen von S' zusammen. Es gilt

$$\overline{OP} = \mathbf{r} = x_a \epsilon_a = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + x'_a \epsilon'_a, \quad \mathbf{r}_0 = \overline{OO'}, \quad (3.10)$$

siehe Abbildung (3.1). Wir nehmen an, daß die Zeit Uhren S' und IS synchronisiert sind. Für

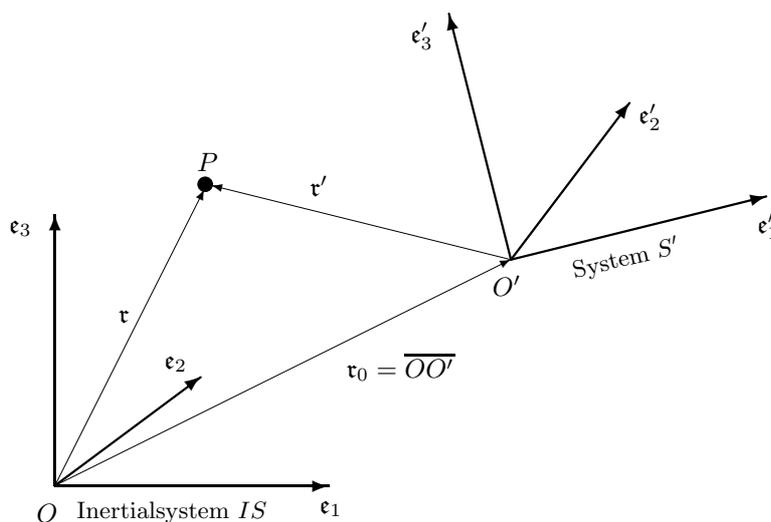


Abbildung 3.1: Beschleunigtes System S' .

$\mathbf{r}_0 = \mathbf{u} t$ und $\epsilon_a = R_{ab} \epsilon'_b$ mit zeitunabhängiger Relativgeschwindigkeit \mathbf{u} und zeitunabhängiger

Drehmatrix $(R_{ab}) \in SO(3)$ wäre dies eine Galileitransformation und damit S' ebenfalls ein Inertialsystem. Für beliebig beschleunigte Systeme sind $\dot{\mathbf{t}}_0$ und \mathbf{e}'_a zeitabhängig und

$$\dot{\mathbf{t}} = \dot{\mathbf{t}}_0 + \dot{x}'_a \mathbf{e}'_a + x'_a \dot{\mathbf{e}}'_a. \quad (3.11)$$

Für einen *mitrotierenden* Beobachter ändern sich die Achsenrichtungen \mathbf{e}'_a ja nicht und er würde dem Massenpunkt die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}' = \dot{x}'_a \mathbf{e}'_a \quad (3.12)$$

zuschreiben². Der letzte Term in (3.11) rührt ausschließlich von der Drehung des Systems S' relativ zu Inertialsystem her. Zusammen mit dem ersten Term beschreibt er die Geschwindigkeit eines - vom Inertialsystem aus gesehenen - in S' ruhenden Massenpunktes. Ein mitrotierender Punkt hat konstante Koordinaten x'_a .

Hier müssen wir noch einmal auf die Drehungen zurückkommen. Da wir zwei kartesische Bezugssysteme wählten, können nach (2.31) die Basen ineinander gedreht werden,

$$\mathbf{e}'_a = R_{ba} \mathbf{e}_b \quad \text{oder} \quad \dot{\mathbf{e}}'_a = \dot{R}_{ba} \mathbf{e}_b \stackrel{(2.32)}{=} \dot{R}_{ba} R_{bc} \mathbf{e}'_c = (R^T \dot{R})_{ca} \mathbf{e}'_c. \quad (3.13)$$

Für eine Drehung ist $R^T R = \mathbb{1}$ und entsprechend ist die infinitesimale Drehmatrix

$$\Omega' = R^T \dot{R} = R^{-1} \dot{R} \quad (3.14)$$

antisymmetrisch, wie man leicht beweist:

$$0 = \frac{d}{dt}(R^T R) = \dot{R}^T R + R^T \dot{R} = (R^T \dot{R})^T + R^T \dot{R} = \Omega'^T + \Omega'. \quad (3.15)$$

Damit finden wir für die Geschwindigkeit bezüglich des Inertialsystems

$$\dot{\mathbf{t}} = \dot{\mathbf{t}}_0 + \dot{x}'_a \mathbf{e}'_a + x'_a \Omega'_{ba} \mathbf{e}'_b = \dot{\mathbf{t}}_0 + (\dot{x}'_a + \Omega'_{ab} x'_b) \mathbf{e}'_a. \quad (3.16)$$

Hier ist es angebracht, den Vektor der *Winkelgeschwindigkeit* \mathfrak{w} einzuführen,

$$\mathfrak{w} = \omega_a \mathbf{e}_a = \omega'_a \mathbf{e}'_a.$$

Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im beschleunigten System parametrisieren die schiefsymmetrische infinitesimale Drehmatrix,

$$\Omega' = \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_3 & \omega'_2 \\ \omega'_3 & 0 & -\omega'_1 \\ -\omega'_2 & \omega'_1 & 0 \end{pmatrix} \implies \Omega'_{ab} x'_b \mathbf{e}'_a = \mathfrak{w} \wedge \mathbf{r}' \quad (3.17)$$

Damit erhalten wir endgültig

$$\dot{\mathbf{t}} = \dot{\mathbf{t}}_0 + \mathbf{v}' + \mathfrak{w} \wedge \mathbf{r}' = \dot{\mathbf{t}}_0 + \left(\frac{d}{dt} \Big|_{S'} + \mathfrak{w} \wedge \right) \mathbf{r}'. \quad (3.18)$$

Selbst ein Teilchen mit konstanten S' -Koordinaten hat eine Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{t}}_0$ wegen der Bewegung des Ursprungs O' relativ zu O und eine Geschwindigkeit $\mathfrak{w} \wedge \mathbf{r}'$ aufgrund der Drehung des Nichtinertialsystems bezüglich IS . Diese Drehung erfolgt um die durch den Vektor

²Beachte: Für $\mathbf{r}_0 = 0$ ist offensichtlich $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Aber für die soeben definierte Geschwindigkeit \mathbf{v}' im System S' ist \mathbf{v}' trotzdem nicht gleich $\dot{\mathbf{t}}$. Ein mitbewegter Punkt hat $\mathbf{v}' = \mathbf{o}$ aber $\dot{\mathbf{t}} \neq \mathbf{o}$.

der Winkelgeschwindigkeit definierte Drehachse mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \|\boldsymbol{\omega}\|$. Die in (3.18) abgeleitete Vorschrift zur Bildung der Zeitableitung eines Vektors $\mathbf{u} = u_a \mathbf{e}_a$, der in einem rotierenden Koordinatensystem dargestellt wird,

$$\mathbf{u} = u'_a \mathbf{e}'_a,$$

kann man in der Operatorgleichung

$$\frac{d}{dt}\Big|_{IS} = \frac{d}{dt}\Big|_{S'} + \boldsymbol{\omega} \wedge$$

zusammenfassen. Die vom Inertialsystem aus gesehene Zeitableitung $d/dt|_{IS}$ eines im Nichtinertialsystem aufgeschriebenen Vektors bildet man, indem man zunächst die Zeitableitung der *Komponenten* in S' ausführt, $d/dt|_{S'}$, und dann den Einfluss der Rotation berücksichtigt.

Um die Beschleunigung bezüglich des IS zu berechnen, benötigen wir die zweite Zeitableitung der Basisvektoren \mathbf{e}'_a :

$$\ddot{\mathbf{e}}'_a = \mathbf{e}'_b \dot{\Omega}'_{ba} + \dot{\mathbf{e}}'_b \Omega'_{ba} = \mathbf{e}'_b \dot{\Omega}'_{ba} + \mathbf{e}'_b (\Omega'^2)_{ba}.$$

Dies setzen wir in

$$\ddot{\mathbf{r}} \stackrel{(3.11)}{=} \ddot{\mathbf{r}}_0 + \ddot{x}'_a \mathbf{e}'_a + 2\dot{x}'_a \dot{\mathbf{e}}'_a + x'_a \ddot{\mathbf{e}}'_a$$

ein. Damit finden wir für die Beschleunigung

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}' + (\dot{\boldsymbol{\omega}}'_a \mathbf{e}'_a) \wedge \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'). \quad (3.19)$$

Damit lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung im Nichtinertialsystem für einen Massenpunkt (mit konstanter träger Masse)

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{a}}' &= \mathfrak{F} + \mathfrak{F}_s, \\ \mathfrak{F}_s &= \underbrace{-m\ddot{\mathbf{r}}_0}_{\text{Zentrifugalkraft}} - \underbrace{m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}')}_{\text{Corioliskraft}} - \underbrace{m(\dot{\boldsymbol{\omega}}'_a \mathbf{e}'_a) \wedge \mathbf{r}'}_{\text{Trägheitskräfte}} - \underbrace{2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}'}_{\text{Corioliskraft}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Hierbei bezeichnen \mathbf{v}' und \mathbf{a}' die Geschwindigkeit und Beschleunigung, wie sie vom beschleunigten System aus gesehen werden,

$$\mathbf{v}' = \dot{x}'_a \mathbf{e}'_a \quad \text{und} \quad \mathbf{a}' = \ddot{x}'_a \mathbf{e}'_a.$$

Die *Scheinkräfte*, die neben \mathfrak{F} auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung (3.20) stehen, dienen nur dazu den Massenpunkt in Abwesenheit einer wirklichen Kraft \mathfrak{F} gleichförmig auf einer Geraden im Inertialsystem zu führen. Sie rühren alle von der Trägheit der Masse her, sind proportional zur trägen Masse und werden deshalb *Trägheitskräfte* genannt. Sie werden sehr verständlich, wenn man das Trägheitsgesetz in Betracht zieht, nachdem eine kräftefreie Bewegung in dem Inertialsystem IS unbeschleunigt vor sich geht. Die scheinbare Beschleunigung eines freien Körpers in einem nicht-Inertialsystem rührt dann von den Trägheitskräften her.

Die Scheinkraft $-m\ddot{\mathbf{r}}_0$ in (3.20) beschleunigt die Insassen eines bremsenden Fahrzeuges nach vorne, weil sie infolge ihrer Trägheit die Tendenz haben, die frühere, höhere Geschwindigkeit beizubehalten. Um den Fahrer auf dem Sitz zu halten braucht es einer entgegengesetzten Zwangskraft, die von den Sicherheitgurten übertragen wird. Die Insassen eines durch eine

Kurve fahrenden Fahrzeuges werden nach der äußeren Seite des Fahrzeuges gedrückt, weil sie sich in dem Inertialsystem, welches mit der ursprünglich geradlinigen gleichförmigen Bewegung des Fahrzeugs verbunden ist, kräftefrei bewegen und daher, infolge ihrer Trägheit, diese geradlinige Bewegung fortzusetzen bestrebt sind. Die Geschwindigkeit \mathbf{v} ist ja nach dem Trägheitsgesetz nicht nur dem Betrag, sondern auch der Richtung nach konstant, wenn keine Kräfte wirken. Die entsprechende Scheinkraft ist die wohlbekannte *Zentrifugalkraft*

$$\mathfrak{F}_z = -m\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{r}'). \quad (3.21)$$

Sie ist proportional zu ω^2 und zum Abstand von der Drehachse und zeigt von der Achse weg. Die Zentrifugalkraft ist der zur Drehachse hinzeigenden *Zentripedalkraft* betragsgleich und entgegengerichtet. Für konstantes \mathbf{v} und für $d^2\mathbf{r}_0/dt^2 = 0$ ist die Zentrifugalkraft die einzig wirksame Trägheitskraft auf ein in S' ruhendes Teilchen. Für einen Körper am Äquator ist die von der Erddrehung herrührende Zentrifugalbeschleunigung

$$\omega^2 r = 3.38 \text{ cm/s}^2,$$

was etwa 0.3% der gravitativen Beschleunigung ist. Die Resultante der zum Erdmittelpunkt gerichteten Gravitationskraft

$$\mathfrak{F}_G = G \frac{m_s M_s}{r^3} \mathbf{r}, \quad m_s \text{ schwere Masse,}$$

und der Zentrifugalkraft (3.21) ist für einen irdischen Beobachter das *Gewicht* eines Körpers, das nach Definition mg - vektoriell $m\mathbf{g}$ - ist, wenn unter g die an dem Ort des Massenpunktes gemessene Fall- oder Erdbeschleunigung verstanden wird. Hier haben wir die träge und schwere Masse gleich gesetzt. Das Gewicht bzw. \mathbf{g} ändert sich infolge der Zentrifugalkraft mit der geographischen Breite ψ , vom äquatorialen Wert 978.0 bis auf 983.2 cm/s², dem Wert an den Polen. Aus dem gleichen Grund ist die Form der Erde, das *Geoid*, von der Kugelform verschieden, und \mathbf{g} zeigt nicht genau nach dem Erdzentrum, sondern steht senkrecht auf der Geoidfläche. Bei den meisten Problemen sind jedoch die Bewegungen so kurz, daß \mathbf{g} mit genügender Genauigkeit als konstant angenommen werden kann.

Am ungewöhnlichsten ist wohl die *Coriolis*-Scheinkraft

$$\mathfrak{F}_c = -2m\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}', \quad (3.22)$$

die immer senkrecht zur Geschwindigkeit in S' und zur Drehachse steht, und zu überraschenden Effekten führt. Sie nimmt proportional mit der Winkelgeschwindigkeit und der Geschwindigkeit in S' zu. Man stelle sich etwa eine um eine senkrechte Achse rotierende waagrechte Scheibe vor. Auf dieser Scheibe lasse man reibungsfrei eine Kugel rollen, und zwar erteile man ihr im Drehzentrum eine Geschwindigkeit \mathbf{v} relativ zum Inertialsystem IS , worauf man sie sich selbst überlasse. Von einem mit der Scheibe rotierenden System S' aus betrachtet, wird aber die Kugel nicht einer Geraden, sondern einer Kurve des in der Abbildung (3.2) gezeigten Typs folgen. Von S' aus gesehen führt die Kugel also keine kräftefreie Bewegung aus und dies wird auf die *Coriolis*-Scheinkraft zurückgeführt.

Die Erde dreht sich entgegen dem Uhrzeigersinn um den Nordpol mit einer Winkelgeschwindigkeit von

$$\omega \sim 7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

relativ zu den Fixsternen. Auf der nördlichen Erdhalbkugel zeigt der Kreisfrequenzvektor \mathbf{v} aus der Erdoberfläche heraus und auf der südlichen Halbkugel in sie hinein. Ein auf der

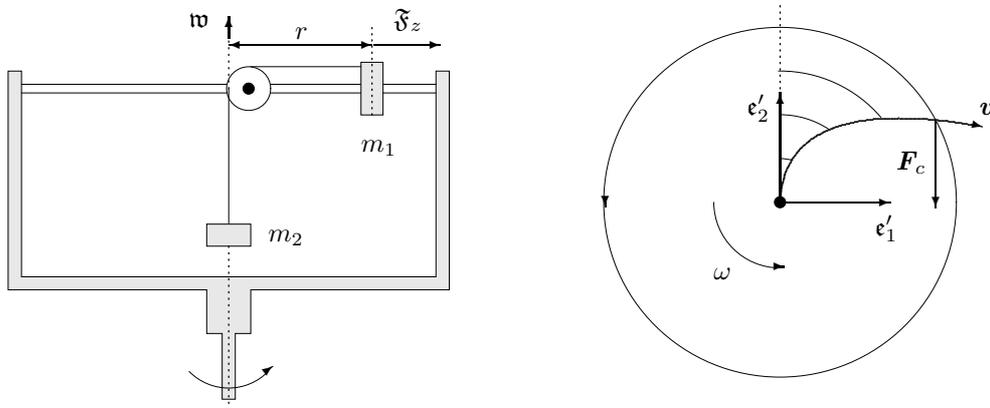


Abbildung 3.2: Zur Zentrifugal- und Corioliskraft

nördlichen Halbkugel längs der Erdoberfläche abgeschossenes Projektil wird aufgrund der Corioliskraft nach rechts (in Bewegungsrichtung) abgelenkt. Auf der südlichen Halbkugel wird es nach links abgelenkt. Die Coriolis Beschleunigung ist immer kleiner als

$$2\omega v \sim 1.5 \times 10^{-4} \frac{v}{\text{sec}},$$

wobei v die Geschwindigkeit des Projektils ist. Sie spielt eine wichtige Rolle in vielen ozeanographischen und meteorologischen Phänomenen. So macht sie sich zum Beispiel bemerkbar bei der Ablenkung der Passatwinde nach links auf der Südhalbkugel und nach rechts auf der Nordhalbkugel.

Bewegt sich dagegen ein *geführtes* Teilchen auf der um die ϵ_3 -Achse rotierende Scheibe radial von der Drehachse weg, $\rho' = v't$ und $\varphi' = \text{constant}$, dann muß der Corioliskraft $-2m\omega v \epsilon'_\varphi$ durch eine führende Zwangskraft entgegengewirkt werden. Dies erklärt die stärkere Abnutzung der rechten Schienen auf der Nordhalbkugel und der linken auf der Südhalbkugel. Flüsse werden auf der Nordhalbkugel auf der rechten Seite stärker ausgeschwemmt als auf der linken.

Die dritte Trägheitskraft in (3.20) tritt nur auf, wenn sich die Drehachse und/oder die Winkelgeschwindigkeit ändern. Ruht das Teilchen in S' , dann beschreibt es im Inertialsystem IS eine sich zeitliche ändernde Drehbewegung und dies führt zu einer zusätzlichen Trägheitskraft.

3.1.2 Bewegungen auf der rotierenden Erde

Als mitrotierende Beobachter auf der Erde bemerken wir bei der Bewegung von Körpern die beiden Scheinkräfte Zentrifugalkraft und Corioliskraft. Zur Beschreibung der Bewegungen benutzen wir das angepasste Koordinatensystem am Beobachtungsort der geographischen Breite ψ nach Abbildung (3.3).

Wir benötigen die Transformation von der kartesischen Basis ϵ_a des durch die Fixsterne definierten Inertialsystems und der am Beobachtungsort befindlichen mitrotierenden karte-

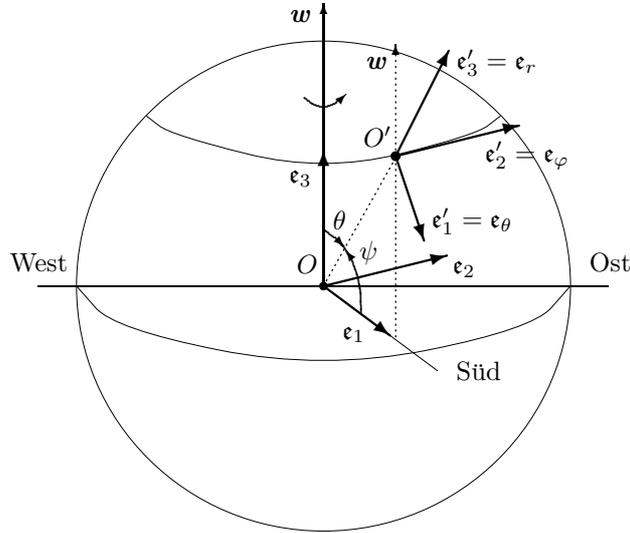


Abbildung 3.3: Beschleunigtes Koordinatensystem auf Erdoberfläche.

sischen Basis \mathbf{e}'_a . Wir nehmen an, daß zur Anfangszeit $t = 0$ die mitrotierende Basis am Nordpol gleich der Basis \mathbf{e}_a ist. Aus Abbildung (3.3) oder (2.108) entnimmt man, daß für $t = 0$ die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}'_1 &\equiv \mathbf{e}_\theta = \sin \psi \mathbf{e}_1 - \cos \psi \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 &= \sin \psi \mathbf{e}'_1 + \cos \psi \mathbf{e}'_3 \\
 \mathbf{e}'_2 &\equiv \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}'_2 \\
 \mathbf{e}'_3 &\equiv \mathbf{e}_r = \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3 &= -\cos \psi \mathbf{e}'_1 + \sin \psi \mathbf{e}'_3
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

gelten. Der im Inertialsystem konstante Winkelgeschwindigkeitvektor hat auch im beschleunigten System (O', \mathbf{e}'_a) zeitunabhängige Koordinaten,

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3 = \omega (\sin \psi \mathbf{e}'_3 - \cos \psi \mathbf{e}'_1), \quad \psi = \text{constant}.$$

Nun ist es einfach, die Corioliskraft zu berechnen,

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}_c &= -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}' = -2m\omega (\sin \psi \mathbf{e}'_3 - \cos \psi \mathbf{e}'_1) \wedge (\dot{x}'_a \mathbf{e}'_a) \\
 &= 2m\omega \{ \sin \psi \dot{x}'_2 \mathbf{e}'_1 - (\sin \psi \dot{x}'_1 + \cos \psi \dot{x}'_3) \mathbf{e}'_2 + \cos \psi \dot{x}'_3 \mathbf{e}'_3 \}.
 \end{aligned}$$

Diese Corioliskraft wird mit der Gravitationskraft $-mge'_3 = m\mathbf{g}$ und der Zentrifugalkraft überlagert. Wählen wir für O' einen Punkt auf der Erdoberfläche wie in Abbildung (3.3), dann enthält $\ddot{\mathbf{r}}_0$ in (3.20) die Zentrifugalkraft; würden wir für O' den Erdmittelpunkt wählen, dann wäre $\ddot{\mathbf{r}}_0 = 0$ und (3.21) beschriebe die Zentrifugalkraft. Wie oben erklärt wurde, können wir diese Kraft in guter Näherung durch eine geringfügige Änderung von g berücksichtigen. Damit erhalten wir (in dieser Näherung) folgende Bewegungsgleichungen für ein nur der Gravitationskraft ausgesetztes Teilchen im erdgebundenen System $\{O', \mathbf{e}'_a\}$:

$$\mathbf{a}' = -2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}' + \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = -g\mathbf{e}'_3, \tag{3.24}$$

wobei die Kreisfrequenz der Erde $\omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ist. In den folgenden Rechnungen sind alle Koordinaten erdgebundenen. Um die Notation nicht zu überladen, lassen wir nun

die Striche an den mitbewegten Koordinaten weg. Die Koordinatentripel im erdgebundenen System gehorchen den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= -2\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{g} \quad \text{mit} \\ \mathbf{r} &= (x_1, x_2, x_3)^T, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega(-\cos\psi, 0, \sin\psi)^T, \quad \mathbf{g} = -(0, 0, g)^T.\end{aligned}\quad (3.25)$$

In Abwesenheit des Gravitationsfeldes beschreibt das Geschwindigkeitstripel \mathbf{v} des dann *freien* Teilchens eine Drehung um die Drehachse mit der Kreisfrequenz 2ω ,

$$\dot{\mathbf{v}} = -2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}$$

und entsprechend ist

$$\mathbf{v}(t) = (\hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{v}_0)\hat{\mathbf{w}} - \hat{\mathbf{w}} \wedge \{ \mathbf{v}_0 \sin 2\omega t + \hat{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{v}_0 \cos 2\omega t \}, \quad (3.26)$$

wobei $\hat{\mathbf{w}}$ das Koordinatentripel des in Richtung des Kreisfrequenzvektors zeigende Einheitsvektors im erdgebundenen System ist. Das zugehörige Koordinatentripel \mathbf{r} beschreibt dann ebenfalls eine derartige Drehung, überlagert mit einem konstanten Drift parallel zur Drehachse,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + (\hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{v}_0)\hat{\mathbf{w}}t + \frac{1}{2\omega}\hat{\mathbf{w}} \wedge \{ \mathbf{v}_0(\cos 2\omega t - 1) - (\hat{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{v}_0) \sin 2\omega t \}. \quad (3.27)$$

Das Differentialgleichungssystem erster Ordnung (3.25) für die Geschwindigkeit hat die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= (\hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{v}_0)\hat{\mathbf{w}} - \frac{1}{2\omega}\hat{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{g} + (\hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{g})\hat{\mathbf{w}}t \\ &- \hat{\mathbf{w}} \wedge \left\{ (\mathbf{v}_0 + \frac{1}{2\omega}\hat{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{g}) \sin 2\omega t + (\hat{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{v}_0 - \frac{1}{2\omega}\mathbf{g}) \cos 2\omega t \right\}.\end{aligned}$$

Im Grenzfall $g \rightarrow 0$ geht sie über in die einfachere Lösung (3.26) für ein freies Teilchen. Nun integrieren wir bezüglich der Zeit und finden folgende Zeitabhängigkeit für die Position eines Teilchens in erdgebundenen Koordinaten,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + (\hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{v}_0)\hat{\mathbf{w}}t - \frac{1}{2\omega}(\hat{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{g})t + \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{g})\hat{\mathbf{w}}t^2 \\ &+ \frac{1}{2\omega}\hat{\mathbf{w}} \wedge \left\{ (\mathbf{v}_0 + \frac{1}{2\omega}\hat{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{g})(\cos 2\omega t - 1) - (\hat{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{v}_0 - \frac{1}{2\omega}\mathbf{g}) \sin 2\omega t \right\}\end{aligned}\quad (3.28)$$

Zuerst betrachten wir den freien Fall mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{r}_0 = (0, 0, h)^T \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_0 = (0, 0, 0)^T.$$

Wegen

$$\hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{g} = -g \sin\psi, \quad \hat{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{g} = -g \cos\psi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{w}} \wedge (\hat{\mathbf{w}} \wedge \mathbf{g}) = g \cos\psi \begin{pmatrix} \sin\psi \\ 0 \\ \cos\psi \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

vereinfacht sich die Lösung zu

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{g}{2\omega^2} \sin\psi \cos\psi \{ (\omega t)^2 - \sin^2 \omega t \} \\ x_2 &= \frac{g}{2\omega^2} \cos\psi \{ \omega t - \sin \omega t \cos \omega t \} \\ x_3 &= h - \frac{g}{2\omega^2} \{ (\omega t)^2 \sin^2 \psi + \sin^2 \omega t \cos^2 \psi \}.\end{aligned}$$

Erst nach einer Fallzeit von mehreren Stunden ist $\omega t \sim 1$. Damit dürfen wir $\omega t \ll 1$ annehmen und die trigonometrischen Funktionen entwickeln,

$$\sin \omega t \sim \omega t + \dots \quad \text{und} \quad \cos \omega t \sim 1 - \frac{1}{2}(\omega t)^2 + \dots$$

Berücksichtigen wir Terme bis zur Ordnung $g(\omega t)^3/\omega^2$, so erhalten wir

$$x_1 \sim 0, \quad x_2 \sim \frac{1}{3}gt^2(\omega t) \cos \psi \quad \text{und} \quad x_3 \sim h - \frac{1}{2}gt^2. \quad (3.30)$$

Da wir die (erdfeste) 2-Achse in der Ost-Richtung gewählt haben, bedeutet der immer positive x_2 -Wert, daß *ein frei fallende Körper von der Vertikalen nach Osten abweicht*. Auf unserem Breitenkreis ist die Abweichung bei 100 m Fallhöhe etwa 1.5 cm.

3.2 Erhaltungssätze

Es gibt einige grundlegende Naturgesetze, die mathematisch in der Form von Erhaltungssätzen formuliert werden können. Ein Erhaltungssatz sagt aus, daß in einem abgeschlossenen physikalischen System eine bestimmte physikalische Größe (zum Beispiel der Gesamtimpuls oder die Energie) für alle Zeiten unverändert erhalten bleiben. Erhaltungssätze spielen eine zentrale Rolle in allen Gebieten der Physik. Sie erleichtern oder ermöglichen oft die Lösung von physikalischen Problemen.

3.2.1 Der Impulssatz

Dieser Erhaltungssatz drückt die Newtonschen Bewegungsgleichung (3.2) in Abwesenheit von äußeren Kräften aus,

$$\dot{\mathbf{p}} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{p} = \text{const.} \quad (3.31)$$

Ist die Summe *aller* auf einen Körper wirkenden Kräfte Null, dann ist sein Impuls erhalten.

3.2.2 Der Drehimpulssatz

Multiplizieren wir das Newtonsche Bewegungsgesetz vektoriell mit \mathbf{r} dann erhalten wir

$$\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) = \mathbf{r} \wedge \mathfrak{F}, \quad (3.32)$$

da $\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{p} = 0$ ist. Definieren wir den *Drehimpuls* \mathfrak{L} des Teilchens und das auf ihn einwirkende *Drehmoment* \mathfrak{M} ,

$$\mathfrak{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} = m\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} = \mathbf{r} \wedge \mathfrak{F}, \quad (3.33)$$

so wird (3.32) zur Bewegungsgleichung für den Drehimpuls,

$$\dot{\mathfrak{L}} = \mathfrak{M}. \quad (3.34)$$

Wie der Ortsvektor beziehen sich der Drehimpuls und das Drehmoment auf den Ursprung des gewählten Inertialsystems. Bei einer Verschiebung des Systems ändern sich \mathcal{L} und \mathfrak{M} im Gegensatz zu \mathbf{p} und \mathfrak{F} . Verschwindet das Drehmoment, dann ist der Drehimpuls erhalten. Für $\mathfrak{F} \neq 0$ verschwindet \mathfrak{M} genau dann, wenn \mathbf{r} und \mathfrak{F} parallel sind. Die Kraft muss also in Richtung zum Zentrum des Bezugssystems (oder entgegengesetzt) wirken,

$$\mathfrak{F} = K(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \mathbf{r}. \quad (3.35)$$

Eine solche Kraft heißt *Zentralkraft*. Bewegt sich ein Partikel unter dem Einfluss einer Zentralkraft, dann ist sein Drehimpuls erhalten,

$$\mathcal{L} = \text{const} = \mathcal{L}_0. \quad (3.36)$$

Obwohl \mathbf{r} und \mathbf{p} für ein bewegtes Teilchen beide von der Zeit abhängen, ist für eine Zentralkraft der Drehimpuls zeitunabhängig. Man nennt (3.36) *Drehimpulserhaltungssatz*. Wir haben bei unserer Ableitung an keiner Stelle vorausgesetzt, daß die träge Masse des Partikels konstant ist.

Um den Drehimpulserhaltungssatz (3.36) zu veranschaulichen, multiplizieren wir (3.33) skalar mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ und erhalten mit Hilfe von (3.36)

$$0 = \mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathcal{L}} = \mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathcal{L}}_0. \quad (3.37)$$

Dies bedeutet, daß alle möglichen Bahnen $\mathbf{r}(t)$ in derjenigen Ebene durch den Ursprung liegen, die senkrecht auf dem Drehimpuls \mathcal{L}_0 steht. Damit ist für $\mathcal{L}_0 \neq 0$ die Konstanz der Richtung von \mathcal{L}_0 veranschaulicht. Der Betrag des Drehimpulses hängt eng mit der vom Ortsvektor $\mathbf{r}(t) = \overline{OP}(t)$ überstrichenen Fläche pro Zeiteinheit zusammen, siehe die folgende Abbildung (3.4).

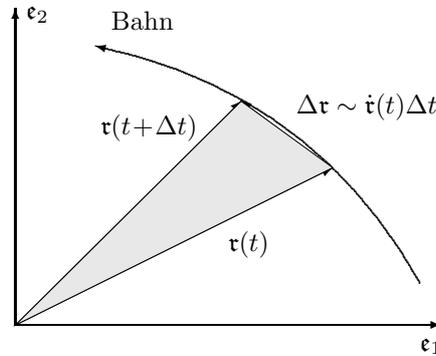


Abbildung 3.4: Der Ortsvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen

Bewegt sich ein Teilchen während der kurzen Zeit Δt von $\mathbf{r}(t)$ nach $\mathbf{r}(t + \Delta t) \sim \mathbf{r}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t)\Delta t + O((\Delta t)^2)$, dann ist die dabei überstrichene gerichtete Fläche

$$\Delta \mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \wedge \Delta \mathbf{r} = \frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \wedge \dot{\mathbf{r}} \Delta t$$

und die *Flächengeschwindigkeit* ist

$$\dot{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2m} \mathcal{L}. \quad (3.38)$$

Für einen erhaltenen Drehimpuls und eine zeitunabhängige träge Masse ist die vom Fahrstrahl pro Zeitintervall überstrichene Fläche konstant,

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2m} \mathfrak{L} t. \quad (3.39)$$

Damit ist der Betrag und die Richtung des erhaltenen Drehimpulses geometrisch veranschaulicht:

Satz 2 (Konstanz der Flächengeschwindigkeit) *Unter der Wirkung jeder Zentralkraft ist die Flächengeschwindigkeit eines Massenpunktes konstant, d.h. die Bewegung ist eben und der Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

Dieser Satz ist im speziellen Fall der Planetenbewegung als das zweite KEPLERSche Gesetz bekannt. Der Flächensatz ist eine Vektorgleichung und enthält entsprechend drei Integrationskonstanten. Zwei bestimmen die Bahnebene und die dritte legt den Betrag der Flächengeschwindigkeit in der Bahnebene fest. Ist die Bahn-Ebene die $x - y$ -Ebene, dann ist

$$\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} = (x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1) \mathbf{e}_3.$$

In Polarkoordinaten $x_1 = \rho \cos \varphi$ und $x_2 = \rho \sin \varphi$ ist

$$\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} = \rho^2 \dot{\varphi} \mathbf{e}_3 = \frac{1}{m} \mathfrak{L}. \quad (3.40)$$

Der Drehimpuls $\mathfrak{L} = L \mathbf{e}_3$ zeigt in die Richtung von \mathbf{e}_3 und der Drehimpulserhaltungs- und Flächensatz können folgendermaßen geschrieben werden,

$$L = m \rho^2 \dot{\varphi} \quad \text{und} \quad A = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} t.$$

Schlussendlich wollen wir noch untersuchen, wie sich der Drehimpuls ändert wenn wir das Inertialsystem wechseln. Zuerst zeigen wir, daß unter Drehungen des Inertialsystems,

$$\mathbf{e}'_a = R_{ba} \mathbf{e}_b, \quad R \in SO(3),$$

die Komponenten des Drehimpuls vektorieell transformieren, d.h. genauso wie der Orts- und Impulskoordinaten,

$$\mathbf{r} = R \mathbf{r}' \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = R \mathbf{p}'.$$

Es sei \mathbf{L} das Komponententripel des Drehimpulses,

$$\mathfrak{L} = L_a \mathbf{e}_a, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt von gedrehten Vektoren geht in das gedrehte Kreuzprodukt der Vektoren über und entsprechend gilt

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} = (R \mathbf{r}') \wedge (R \mathbf{p}') = R (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{p}') = R \mathbf{L}', \quad (3.41)$$

und dies beweist die gemachte Aussage. Dagegen transformiert der Drehimpuls unter Raumspiegelungen anders als \mathbf{r} und \mathbf{p} :

$$\mathbf{r} = P \mathbf{r}' = -\mathbf{r}', \quad \mathbf{p} = P \mathbf{p}' = -\mathbf{p}' \implies \mathbf{L} = \mathbf{L}', \quad (3.42)$$

siehe Abbildung (3.5), in welcher die Raumspiegelung aktiv interpretiert wurde. Ein Vektor, der unter Raumspiegelung in sich übergeht heißt *Pseudovektor*. Im Gegensatz zu den Vektoren \mathbf{r}, \mathbf{p} und \mathfrak{F} ist \mathfrak{L} ein Pseudovektor.

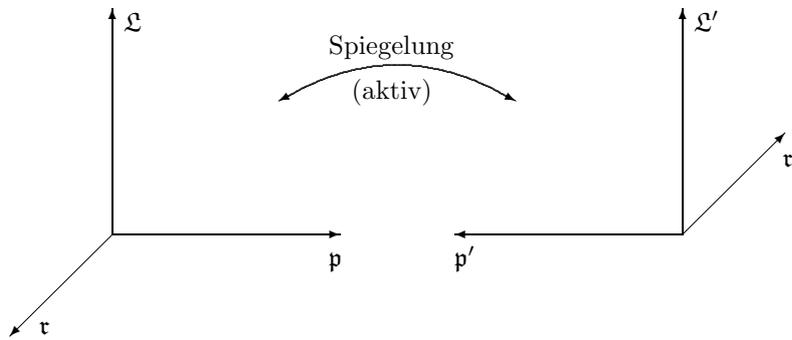


Abbildung 3.5: \mathfrak{L} ist ein Pseudovektor

3.2.3 Energiesatz

Ein Partikel bewege sich unter dem Einfluss einer äußeren Kraft von \mathbf{r} nach $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Dann ist das Skalarprodukt der Kraft am Ort \mathbf{r} mit der infinitesimalen Verschiebung,

$$dA = \mathfrak{F} \cdot d\mathbf{r}$$

die von der Kraft an dem Teilchen geleistete infinitesimale Arbeit. Die längs eines Weges C von P_1 (mit Ortsvektor \mathbf{r}_1) nach P_2 (mit Ortsvektor \mathbf{r}_2) geleistete Arbeit ist

$$A = \int_C dA = \int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.43)$$

Die Arbeit hängt von der Kraft, von Anfangs- und Endpunkt des Weges und im allgemeinen Fall auch vom gewählten Weg C selbst ab. Die Wegabhängigkeit merkt ein Schwimmer, der

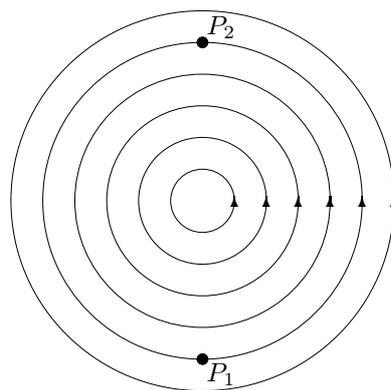


Abbildung 3.6: Zur Wegabhängigkeit der Arbeit

in der Strömung in Abbildung (3.6) von P_1 nach P_2 einmal mit der Strömung und einmal

gegen sie schwimmt. Die pro Zeit verrichtete Arbeit wird *Leistung* genannt,

$$P = \frac{dA}{dt} = \mathfrak{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathfrak{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.44)$$

Die Arbeit wird in Energieeinheiten

$$\text{Joule} = \text{J} = \text{Nm} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

gemessen und die Leistung in Watt = J/s = Nm/s. Auf die Leistung stoßen wir auch, wenn wir die NEWTONsche Bewegungsgleichung (für eine konstante träge Masse) (3.3) mit der Geschwindigkeit multiplizieren,

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathfrak{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung erkennen wir die Zeitableitung der *kinetischen Energie*,

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2, \quad (3.45)$$

also die mit der Bewegung verbundenen Energie. Damit können wir die Gleichung auch in der Form

$$\frac{d}{dt} T = \mathfrak{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = P \quad (3.46)$$

schreiben. Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie ist gleich der zu- oder abgeführten Leistung. Oft hat man es mit Kräften zu tun für die

$$\mathfrak{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{d}{dt} V(\mathbf{r}) \quad (3.47)$$

gilt. Diese Bedingung an die Kraft kann für beliebiges $\dot{\mathbf{r}}$ auf zweierlei Weise erfüllt werden.

Eine erste Möglichkeit ist eine Kraft, die immer senkrecht zur Geschwindigkeit steht. Dann wäre $\mathfrak{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ und (3.47) mit $V = 0$ erfüllt. Ein wichtiges Beispiel ist die *LORENTZkraft*

$$\mathfrak{F} = e(\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathfrak{B})$$

die in einem Magnetfeld \mathfrak{B} auf ein geladenes Teilchen mit elektrischer Ladung e wirkt. Ein Magnetfeld kann an einem geladenen Teilchen keine Arbeit leisten. Die zweite, für die Mechanik wesentliche Möglichkeit der Erfüllung von (3.47) sind *Potentialkräfte*, für welche die Kraft \mathfrak{F} ein Potential besitzt,

$$\mathfrak{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) \implies \mathfrak{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial V}{\partial x_a} \dot{x}_a = -\frac{d}{dt} V(\mathbf{r}). \quad (3.48)$$

Setzen wir dies in (3.46) ein, so finden wir

$$\frac{d}{dt} (T + V(\mathbf{r})) = 0, \quad (3.49)$$

woraus sich unmittelbar der *Energiesatz* ergibt,

$$E = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) = \text{const.} \quad (3.50)$$

Im konservativen Kraftfeld ist die Summe aus kinetischer Energie und V erhalten. Die Funktion $V(\mathbf{r})$ ist eine Energie und heißt *potentielle Energie* oder *Potential*.

Aus (3.49) kann man sofort eine notwendige Bedingung ablesen, welcher die Komponenten K_a einer *konservativen Kraft* genügen müssen: Da für ein genügend glattes Potential V die zweiten Ableitungen vertauschen, gilt

$$0 = (\partial_a \partial_b - \partial_b \partial_a)V = -(\partial_a K_b - \partial_b K_a), \quad \text{wobei} \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$$

ist. Mit Hilfe der früher eingeführten Differentialoperatoren können wir auch schreiben,

$$\mathfrak{F} = -\nabla V \implies \nabla \wedge \mathfrak{F} = \mathbf{o}. \quad (3.51)$$

Ein konservatives Kraftfeld ist also wirbelfrei. Auf einfach zusammenhängenden Gebieten kann man auch die Umkehrung beweisen. Es sei C irgend eine Kurve in einem einfach zusammenhängenden Gebiet die P_0 mit P verbindet und sei $\nabla \wedge \mathfrak{F} = 0$ im betrachteten Gebiet. Dann ist die bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt von der Kraft am Teilchen geleistete Arbeit $\int \mathfrak{F} \cdot d\mathbf{x}$ unabhängig vom gewählten Weg C . Bei festem Anfangspunkt definiert sie dann eine bis auf eine Konstante eindeutige Funktion des Endpunktes. Ist $P = P_0$, dann verschwindet das Linienintegral, und wir dürfen

$$V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_0) = - \int_C \mathfrak{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{x} \quad (3.52)$$

schreiben. Um die Wegunabhängigkeit der geleisteten Arbeit zu beweisen, betrachte man den auf einen Punkt zusammenziehbaren Rand ∂A der von den beiden Wegen C und C' eingeschlossenen Fläche, siehe Abbildung (3.7). Mit dem STOKESSchen Satz verschwindet

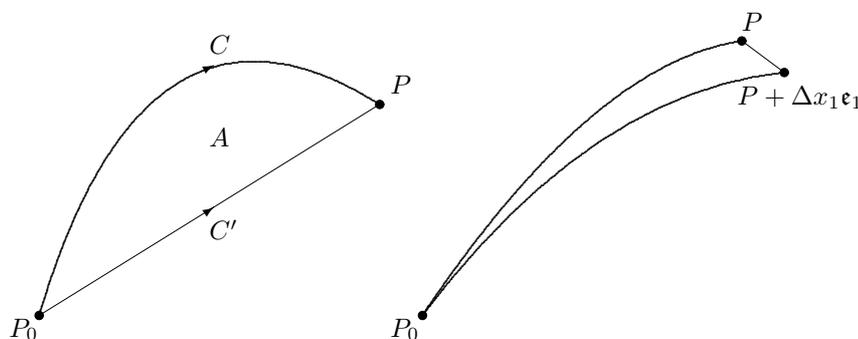


Abbildung 3.7: Zur Wegunabhängigkeit der Arbeit

die von einem konservativen Kraftfeld längs irgendeiner geschlossenen (und zusammenziehbaren) Kurve geleistete Arbeit,

$$0 = \int_A d\mathfrak{A} \cdot (\nabla \wedge \mathfrak{F}) = \int_{\partial A} \mathfrak{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{C'} \mathfrak{F} \cdot d\mathbf{x} - \int_C \mathfrak{F} \cdot d\mathbf{x},$$

was beweist, daß die längs C und C' geleisteten Arbeiten gleich sind,

$$\int_{C'} \mathfrak{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_C \mathfrak{F} \cdot d\mathbf{x}. \quad (3.53)$$

Wir haben berücksichtigt, daß C und C' verschiedene Orientierungen haben. Umgekehrt ist

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{P_0}^P \mathfrak{F} \cdot d\mathbf{x} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta x_1} \int_P^{P+\Delta x_1 \mathbf{e}_1} \mathfrak{F} \cdot d\mathbf{x} \right) = \mathfrak{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1 = K_1(\mathbf{r}), \quad (3.54)$$

was bedeutet, daß $\mathfrak{F} = -\nabla V$ ist. Damit haben wir bewiesen, daß ein Kraftfeld dann und nur dann ein Potential besitzt, wenn die Rotation der Kraft verschwindet, d.h. wenn das Kraftfeld wirbelfrei ist.

Das Potential wird durch die Definition $\mathfrak{F} = -\nabla V$ nur bis auf eine beliebige additive Konstante bestimmt. Daher kann der Wert von V in einem willkürlich gewählten Punkt P_0 mit Ortsvektor \mathbf{r}_0 gleich Null angenommen werden. Dann hat das Potential

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{P_0}^P \mathfrak{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_P^{P_0} \mathfrak{F} \cdot d\mathbf{x}$$

folgende Bedeutung: In einem Punkt P ist der Wert des Potentials gleich der Arbeit, welche die Feldkräfte leisten, bis sie den Massenpunkt von P nach P_0 verschieben, oder es ist gleich der Arbeit, die gegen die Feldkräfte geleistet werden muß, wenn der Massenpunkt von P_0 in P überführt wird.

Die Punkte in denen das Potential denselben Wert V_0 hat, bilden eine durch die Gleichung

$$V(\mathbf{r}) = V_0$$

bestimmte Fläche, die *Äquipotentialfläche* oder *Niveaufläche* genannt wird. Wird der Massenpunkt längs einer Äquipotentialfläche bewegt, so entsteht keine Potentialdifferenz und es muß keine Arbeit aufgebracht werden. Hieraus oder aus $\mathfrak{F} = -\nabla V$ folgt, daß die Kraft \mathfrak{F} senkrecht auf der Niveaufläche steht.

Nicht alle Kräfte sind konservativ. Dissipative Kräfte treten immer dann auf, wenn mit Leistungsverlusten einhergehende Reibungseffekte auftreten. Entsprechend teilen wir eine Kraft in ihre konservativen und dissipativen Anteile auf,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\text{Kons}} + \mathfrak{F}_{\text{Diss}}. \quad (3.55)$$

Ersetzen wir in (3.46) die Leistung der konservativen Kräfte entsprechend (3.48) durch ihr Potential, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) \right) = \mathfrak{F}_{\text{Diss}} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (3.56)$$

Die Summe aus kinetischer Energie T und potentieller Energie V ist die Energie des Massenpunktes. Entsprechend ist (3.56) die Bilanzgleichung der Energie, der Energiesatz:

Lemma 1 (Bilanzgleichung für die Energie) *Die zeitliche Änderung der Energie ist gleich der Leistung der dissipativen Kräfte. In Abwesenheit von dissipativen Kräften ist die Energie erhalten.*

3.3 Lösungen der Bewegungsgleichung

Für ein freies Teilchen ist die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad (3.57)$$

eine lineare Funktion der Zeit. Bei bekannter Anfangslage \mathbf{r}_0 und Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 hat sie die Form

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t, \quad (3.58)$$

und bei bekannter Anfangslage \mathbf{r}_0 und Endlage $\mathbf{r}(T) = \mathbf{r}_1$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \frac{t}{T} \{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\}. \quad (3.59)$$

Auch wenn Kräfte wirken ist (für genügend kleine Zeitintervalle und reguläre Kräfte) eine Lösung durch Angabe von Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit, oder durch Anfangs- und Endlage, eindeutig bestimmt.

3.3.1 Konstante Kräfte

Die einfachsten Kräfte sind solche, bei denen \mathfrak{F} konstant ist. Beispiele hierfür sind die näherungsweise konstante Gravitationskraft in der Nähe der Erdoberfläche oder die Kraft auf ein elektrisch geladenes Teilchen im Innern eines Kondensators. Es genügt hier, den Fall der Bewegung im Schwerfeld zu betrachten. Wir lassen die Erdanziehungskraft in die negative 3-Richtung zeigen und haben dann

$$m_t \ddot{\mathbf{r}} = \mathfrak{F} = -m_s g \mathbf{e}_3, \quad (3.60)$$

wo links die träge und rechts die schwere Masse stehen. Nach dem mit genügender Genauigkeit experimentell verifizierten Äquivalenzprinzip dürfen wir diese gleich setzen, $m_t = m_s = m$. Die allgemeine Lösung dieser einfachen Differentialgleichung lässt sich sofort angeben:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \mathbf{e}_3. \quad (3.61)$$

In der Ebene parallel zur Erdoberfläche ist die Bewegung geradlinig und gleichförmig und in Richtung der Schwerkraft gleichmäßig beschleunigt. Für die Anfangsbedingungen

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{o} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_0 = v_0 (\cos \alpha, 0, \sin \alpha)^T$$

ist die Lösung

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha, \quad y(t) = 0 \quad \text{und} \quad z(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3.62)$$

und beschreibt eine Parabel

$$z(x) = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

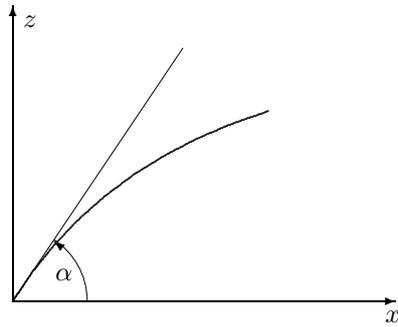


Abbildung 3.8: Wurfbewegung.

in der von x - z Ebene. Die *Wurfzeit* T ist durch $z(T) = 0$ bestimmt und ergibt sich mit der Lösung $z(t)$ in (3.62) zu

$$T = \frac{2}{g} v_0 \sin \alpha.$$

Die *Reichweite* des Wurfs ist

$$R = x(T) = \frac{2}{g} v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2\alpha$$

und sie ist maximal v_0^2/g für einen Wurfwinkel $\pi/4$. Die maximal mögliche Wurfhöhe $v_0^2/2g$ wird natürlich für den senkrechten Wurf erreicht. Für beliebige Winkel ist die Wurfhöhe

$$h = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2 \alpha.$$

Konstante Kräfte sind konservativ Kräfte,

$$\mathfrak{F} = -\nabla V, \quad V(\mathbf{r}) = -\mathfrak{F} \cdot \mathbf{r} + V_0. \quad (3.63)$$

Für die Wurfbewegungen ist es sinnvoll die Konstante V_0 so zu wählen, daß V auf der Erdoberfläche verschwindet. Dann ist

$$V(\mathbf{r}) = mgz,$$

und der Energiesatz nimmt folgende einfache Form an

$$\frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + mgz = E. \quad (3.64)$$

Für die obige Lösung sind die kinetische und potentielle Energie

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} \{v_0^2 - 2gv_0 t \sin \alpha + g^2 t^2\} \\ V(t) &= mgz(t) = \frac{m}{2} \{2gv_0 t \sin \alpha - g^2 t^2\} \end{aligned}$$

und die gesamte Energie $E = T + V = mv_0^2/2$ ist natürlich konstant. Solange der geworfene Stein steigt verliert er kinetische Energie, da die Schwerkraft ihn verlangsamt: der Stein muß Arbeit gegen die Schwerkraft leisten. Der Verlust an kinetischer Energie bedeutet Gewinn an potentieller Energie. Nach Erreichen der maximalen Höhe gewinnt der Stein wieder kinetische Energie auf Kosten seiner potentiellen Energie; die Schwerkraft leistet am Stein Arbeit.

3.3.2 Oszillatoren

Ein Teilchen bewege sich in einer Umgebung O des Koordinatenursprungs mit Ortsvektor $\mathbf{r} = 0$ unter dem Einfluss einer konservativen Kraft $\mathfrak{F} = -\nabla V$. Wir nehmen an, daß V in der Umgebung des Ursprungs in eine Taylorreihe entwickelt werden kann,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= V|_0 + \left. \frac{\partial V}{\partial x_a} \right|_0 x_a + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_a \partial x_b} \right|_0 x_a x_b + \text{höhere Potenzen in } x_a \\ &\equiv V^{(0)} + V_a x_a + \frac{1}{2} V_{ab} x_a x_b + \text{höhere Potenzen in } x_a. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Der erste konstante Term $V^{(0)}$ in der Entwicklung, die nullte Näherung, trägt nicht zur Kraft bei und kann ignoriert werden. Die erste Näherung

$$V^{(1)} = V^{(0)} + V_a x_a,$$

liefert eine konstante Kraft $K_a^{(1)} = -V_a$, die schon behandelt wurde. Die zweite Näherung

$$V^{(2)}(\mathbf{r}) = V^{(0)} + V_a x_a + \frac{1}{2} V_{ab} x_a x_b \quad (3.66)$$

führt auf ein lineares Kraftgesetz,

$$\mathfrak{F}^{(2)} = -\mathbf{e}_a (V_a + V_{ab} x_b).$$

Für $V_a = 0$ ist der Ursprung eine *Gleichgewichtslage* des Teilchens und die Bewegungsgleichungen für die kartesischen Koordinaten lauten

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -V'' \mathbf{r}, \quad V'' = (V_{ab}). \quad (3.67)$$

Die symmetrische Matrix V'' kann immer mit einer orthogonalen Drehmatrix diagonalisiert werden. Sind $m\omega_1^2, m\omega_2^2$ und $m\omega_3^2$ die Eigenwerte dieser Matrix, dann gibt es immer eine Drehmatrix R mit

$$R^{-1}V''R = \tilde{V}'' = m \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

Energien werden in $\text{Nm} = \text{kg m}^2/\text{s}^2$ angegeben und entsprechend haben die ω_a die Dimension $1/\text{s}$, also die Dimension von Frequenzen. Die Koordinaten im gedrehten System

$$\tilde{\mathbf{r}} = R^{-1} \mathbf{r} \quad (3.69)$$

erfüllen dann die einfachen *entkoppelten* Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\tilde{\mathbf{r}}} = -\tilde{V}'' \tilde{\mathbf{r}} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\tilde{\mathbf{r}}} = - \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{r}}, \quad (3.70)$$

oder in Komponenten ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}}_1 &= -\omega_1^2 \tilde{x}_1 \\ \ddot{\tilde{x}}_2 &= -\omega_2^2 \tilde{x}_2 \\ \ddot{\tilde{x}}_3 &= -\omega_3^2 \tilde{x}_3. \end{aligned}$$

Für $\omega_a^2 > 0$ bezeichnet man die ω_a als *Eigen(kreis)frequenzen* des Systems und die Koordinaten \tilde{x}_a , für welche die Bewegungsgleichungen entkoppeln, als *Normalkoordinaten*. Da jede Normalkoordinate \tilde{x}_a der Bewegungsgleichung eines 1-dimensionalen Oszillators gehorcht, genügt es, die eindimensionale Bewegung

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x = -\frac{1}{m} V', \quad V = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2, \quad (3.71)$$

zu untersuchen. Diese Bewegungsgleichung ist ein gutes Modell für kleine Auslenkungen einer Feder, für welche die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist. Die Federkonstante ist $k = m\omega_0^2$.

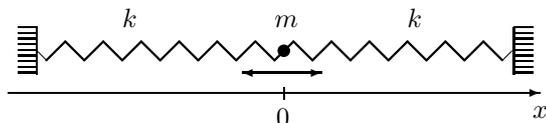


Abbildung 3.9: *Harmonischer Oszillator in Ruhelage*

Stabiles Gleichgewicht $\omega_0^2 > 0$: Ein System mit $V = m\omega_0^2 x^2/2$ heißt *harmonischer Oszillator*, wobei der Zusatz *harmonisch* erst aus der Art der Lösung klar wird. Die Kraft zeigt immer in Richtung des Ursprungs und die triviale Gleichgewichtslösung $x(t) = 0$ ist stabil. Aus dem Energiesatz

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) \quad (3.72)$$

folgt bereits, daß

$$\frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \leq E \quad \text{oder} \quad |x| \leq \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{2E}{m}} \equiv a \quad (3.73)$$

gelten muß. Das Teilchen wird durch die lineare Kraft an den Ursprung gebunden. Für $x = \pm a$ ist die Geschwindigkeit des Oszillators Null; er kehrt seine Bewegung um. Diese beiden Orte sind offensichtlich *Umkehrpunkte* der Bewegung. Wir können den Energiesatz benutzen, um \dot{x} als Funktion von x zu bestimmen,

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} - \omega_0^2 x^2} = \pm \omega_0 \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (3.74)$$

Für $\dot{x} \neq 0$ kann man die Umkehrfunktion $t(x)$ von $x(t)$ bilden und es gilt

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}} = \pm \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{oder} \quad \omega_0 t = \pm \int^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (3.75)$$

Mit

$$\int^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} - \varphi_0,$$

wobei φ_0 eine zunächst willkürliche Integrationskonstante ist, finden wir für das positive Vorzeichen in (3.75) die Lösung

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = a \sin \varphi_0 \cos \omega_0 t + a \cos \varphi_0 \sin \omega_0 t. \quad (3.76)$$

Für das negative Vorzeichen ist die Lösung bis auf die Ersetzung $\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 + \pi$ identisch. Die allgemeine Lösung hängt also von den beiden *Integrationskonstanten* $a \geq 0$ und $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ ab. Die positive Größe a ist der Maximalwert der Auslenkung und heisst *Amplitude* oder *Schwingungsweite* der Oszillation. Die *Phase* $\omega_0 t + \varphi_0$ gibt den momentanen Auslenkungszustand der Schwingung an. Für den harmonischen Oszillator ist die Kreisfrequenz ω_0 unabhängig von der Amplitude.

Der Ort und die Geschwindigkeit des Oszillators zur Zeit Null sind

$$x_0 = x(0) = a \sin \varphi_0 \quad \text{und} \quad v_0 = \dot{x}(0) = a\omega_0 \cos \varphi_0,$$

so daß wir auch schreiben können

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (3.77)$$

Die Ortskoordinate x ist eine periodische und harmonische Funktion der Zeit und die *Periodendauer* T ist definiert durch

$$\omega_0 T = 2\pi. \quad (3.78)$$

Die Größe ω_0 heißt *Kreisfrequenz*. Die *Frequenz* der Schwingung ist gegeben durch

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (3.79)$$

Instabiles Gleichgewicht $\omega_0^2 < 0$. Für negatives ω_0^2 ist ω_0 imaginär und die lineare Kraft vom Ursprung weggerichtet. Damit wird die Gleichgewichtslösung $x = 0$ instabil. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = |\omega_0^2| x$$

hat nun die Form

$$x(t) = a \sinh(|\omega_0|t + \varphi_0) = x_0 \cosh |\omega_0|t + \frac{v_0}{|\omega_0|} \sinh |\omega_0|t. \quad (3.80)$$

Mit zunehmender Zeit wächst die Koordinate x über alle Grenzen. Wie erwartet ist die Bewegung instabil.

Phasenbahnen: Zwischen den Koordinaten $x(t)$ und $p(t) = m\dot{x}(t)$ besteht wegen der Energieerhaltung

$$\frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = E$$

die Beziehung

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{B^2} = 1 \quad \text{mit} \quad A^2 = \frac{2E}{m\omega_0^2}, \quad B^2 = 2mE. \quad (3.81)$$

Für $\omega_0^2 > 0$ ist dies die Gleichung einer Ellipse mit dem Mittelpunkt im Ursprung und den Halbachsen A und B . Der Massenpunkt durchläuft in der (x, p) Ebene, dem sogenannten *Phasenraum* des eindimensionalen Oszillators, eine Ellipse mit den Halbachsen A und B , und zwar im Uhrzeigersinn, siehe Abbildung (3.10).

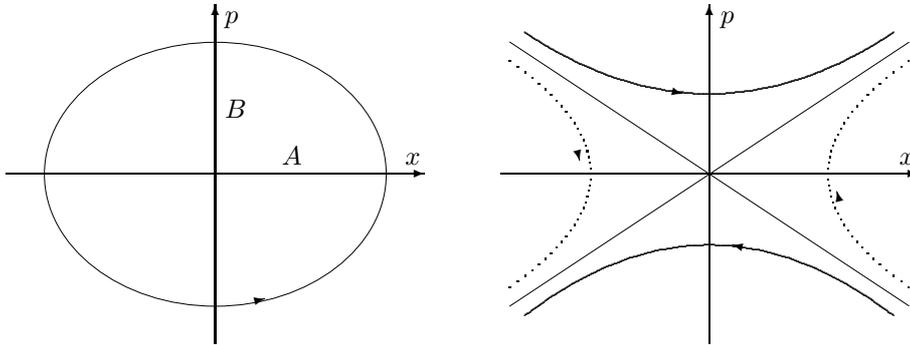


Abbildung 3.10: *Phasenportrait für den harmonischen Oszillator. Die durchgezogenen Phasenbahnen haben $E > 0$ und die gestrichelten $E < 0$.*

Die Lösung der Bewegungsgleichung ist durch Vorgabe von Anfangsort und -geschwindigkeit oder äquivalent durch Angabe von Anfangsort und Anfangsimpuls eindeutig bestimmt. Jeder Punkt im Phasenraum bestimmt also eine eindeutige Lösung und damit eine Lösungskurve $\{x(t), p(t)\}$ im Phasenraum. Eine Lösungskurve bezeichnet man als *Phasenbahn* und die Gesamtheit aller möglichen Phasenbahnen eines vorgegebenen Systems als *Phasenportrait*. Für den instabilen Oszillator ist $A^2 = -|A|^2$ und die Gleichung (3.81) beschreibt eine Hyperbel mit Mittelpunkt im Ursprung. Nur für die stabile Bewegung verläuft die Phasenbahn für alle Zeiten in einem beschränkten Gebiet.

3.3.3 Reibungskräfte

Den idealen Oszillator, der beliebig lange mit konstanter Amplitude schwingt, gibt es nicht, da Reibungsverluste unvermeidlich sind. Reibungskräfte sind in der Regel geschwindigkeitsabhängig, und für dissipative Systeme hat die Bewegungsgleichung die allgemeine Form

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathfrak{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathfrak{F}_{\text{Kons}} + \mathfrak{F}_{\text{Diss}}. \quad (3.82)$$

Für kleinen Geschwindigkeiten kann $\mathfrak{F} = F_a \mathbf{e}_a$ in der Nähe des Ursprungs in eine Taylorreihe entwickelt werden

$$F_a = F_a|_0 + \left. \frac{\partial F_a}{\partial x_b} \right|_0 x_b + \left. \frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}_b} \right|_0 \dot{x}_b + \dots,$$

wobei die Ableitungen an der Stelle $\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{o}$ zu berechnen sind. Im folgenden vernachlässigen wir die durch die Punkte angedeuteten höheren Potenzen in x_a und \dot{x}_a und beschränken uns auf Kräfte der Form

$$F_a = F_a|_0 + \left. \frac{\partial F_a}{\partial x_b} \right|_0 x_b + \left. \frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}_b} \right|_0 \dot{x}_b. \quad (3.83)$$

Wir wollen annehmen, daß in Abwesenheit des letzten Terms die Kraft konservativ sei, also

$$\mathfrak{F}_{\text{Kons}} = \mathbf{e}_a \left(F_a|_0 + \left. \frac{\partial F_a}{\partial x_b} \right|_0 x_b \right) = -\nabla V, \quad (3.84)$$

gelte, mit einem offensichtlich quadratischen Potential

$$V = V^{(0)} + V_a x_a + \frac{1}{2} V_{ab} x_a x_b. \quad (3.85)$$

Wir haben hier die Notation aus (3.65) übernommen. Für die Koeffizienten des konservativen Kraftanteils in (3.84) finden wir

$$F_a|_0 = -V_a \quad \text{und} \quad \frac{\partial F_a}{\partial x_b} \Big|_0 = \frac{\partial F_b}{\partial x_a} \Big|_0 = -V_{ab}. \quad (3.86)$$

Die im dissipativen Kraftanteil auftretenden Koeffizienten

$$\mathfrak{F}_{\text{Diss}} = \epsilon_a \left(\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}_b} \Big|_0 \dot{x}_b \right)$$

setzen wir schlussendlich noch

$$\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}_b} \Big|_0 = -W_{ab}, \quad (3.87)$$

damit die Formeln etwas übersichtlicher werden. Damit schreiben sich die Bewegungsgleichungen (3.82) für die Ortskoordinaten in einem Inertialsystem wie folgt

$$m\ddot{x}_a = -V_a - V_{ab}x^b - W_{ab}\dot{x}^b. \quad (3.88)$$

Setzen wir noch

$$(V_a) = \mathbf{V}', \quad (V_{ab}) = V'' \quad \text{und} \quad (W_{ab}) = W,$$

so nehmen sie folgende einfache Form an,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{V}' - V''\mathbf{r} - W\dot{\mathbf{r}} \quad (3.89)$$

Im Gegensatz zu \mathbf{V}'' braucht die Matrix W nicht symmetrisch zu sein. Die zugehörige *Energiebilanzgleichung* hat die Form

$$\frac{d}{dt}(T + V) = -W_{ab}\dot{x}_a\dot{x}_b = -\dot{\mathbf{r}} \cdot W \dot{\mathbf{r}}, \quad (3.90)$$

mit dem quadratischen Potential $V(\mathbf{r})$ in (3.85). Da bei Reibungskräften die Energie stets abnimmt, muß

$$\dot{x}_a W_{ab} \dot{x}_b \geq 0 \quad (3.91)$$

für alle Geschwindigkeiten gelten. In die Formel für die Abnahme der Energie geht nur der symmetrische Anteil der Matrix W ,

$$W_{(ab)} = \frac{1}{2}(W_{ab} + W_{ba}),$$

ein. Die Bedingung (3.91) bedeutet, daß die Eigenwerte von $W_{(ab)}$ nicht-negativ sind. Der antisymmetrische Anteil von W ,

$$W_{[ab]} = \frac{1}{2}(W_{ab} - W_{ba}),$$

trägt zur Leistungsbilanz nicht bei, ganz ähnlich wie die Lorentzkraft im magnetischen Feld. Deshalb machen wir jetzt die vereinfachende Annahme, daß die Matrix W symmetrisch ist. Den allgemeinen Fall werden wir später behandeln.

Wir untersuchen nun wichtige Spezialfälle der Bewegungsgleichung (3.88) beziehungsweise (3.89). Ist die Matrix V'' invertierbar dann können wir unser Koordinatensystem verschieben,

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} - (V'')^{-1} \mathbf{V}',$$

und bezüglich der neuen Koordinaten $\tilde{\mathbf{r}}$ verschwindet der konstante Kraftanteil. Wir dürfen also annehmen, daß $\mathbf{V}' = 0$ ist.

- Für $W = 0$ handelt es sich um den bereits diskutierten harmonischen Oszillator.
- Für $V'' = 0$ erfüllt der Ortsvektor die einfache lineare Differentialgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -W\dot{\mathbf{r}} \quad (3.92)$$

Jede symmetrische Matrix W kann nach einem Satz der linearen Algebra mit einer Drehmatrix R diagonalisiert werden,

$$R^{-1}WR = \tilde{W}, \quad \text{mit} \quad \tilde{W} = m \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma_a \geq 0. \quad (3.93)$$

Die Eigenwerte von W sind also $m\gamma_a$, wobei die nicht-negativen γ_a die Dimensionen einer Frequenz haben. Nun benutzen wir die diagonalisierende Drehung R um auf *Normalkoordinaten* zu transformieren,

$$\mathbf{r} = R\tilde{\mathbf{r}}. \quad (3.94)$$

Bezüglich der geschlängelten Normalkoordinaten lauten die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\tilde{\mathbf{r}}} = -R^{-1}WR\dot{\tilde{\mathbf{r}}} = -\tilde{W}\dot{\tilde{\mathbf{r}}}. \quad (3.95)$$

Da \tilde{W} diagonal ist, siehe (3.93), entkoppeln die drei Differentialgleichungen nach der Transformation auf Normalkoordinaten $\tilde{\mathbf{r}}$. Es genügt daher, den eindimensionalen Fall zu betrachten,

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x},$$

wobei x eine der Koordinaten \tilde{x}_a bezeichnet und entsprechend γ einer der γ_a in (3.93). Diese einfache Differentialgleichung für die Geschwindigkeit hat die Lösung

$$\dot{x}(t) = e^{-\gamma t} v_0, \quad v_0 = \dot{x}(0). \quad (3.96)$$

Eine weitere Integration führt auf folgende Zeitabhängigkeit der Ortskoordinate

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}), \quad x_0 = x(0). \quad (3.97)$$

Die Lösung hat das asymptotische Verhalten

$$x(t \rightarrow \infty) = x_0 + \frac{v_0}{\gamma}, \quad (3.98)$$

d.h. das Teilchen legt nur eine endliche Strecke zurück, auch wenn man beliebig lange wartet. Im Phasenraum verläuft die Bewegung längs der Strecke vom Punkt $(x_0, p_0 = mv_0)$ zum Punkte $(x_0 + v_0/\gamma, 0)$.

- Für $V'' \neq 0$ und $W \neq 0$ ist die Lösungsuche für die lineare Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -V''\mathbf{r} - W\dot{\mathbf{r}} \quad (3.99)$$

relativ schwierig ohne zusätzliche Annahmen an die Kraft, d.h. an die symmetrischen Matrizen V'' und W . Wir wollen vorerst annehmen, daß sie vertauschen

$$V''W - WV'' \equiv [V'', W] = 0.$$

Der allgemeine Fall wird dann später analysiert. Nach einem Theorem aus der linearen Algebra können zwei kommutierende und diagonalisierbare Matrizen *gleichzeitig* diagonalisiert werden,

$$V'' = R\tilde{V}''R^{-1} \quad \text{und} \quad W = R\tilde{W}R^{-1}, \quad \text{mit diagonalen } \tilde{V}'', \tilde{W}. \quad (3.100)$$

Für \tilde{V}'' wählen wir die Parametrisierung (3.68) und für \tilde{W} diejenige in (3.93). In den entsprechenden Normalkoordinaten $\tilde{\mathbf{r}} = R\tilde{\mathbf{r}}$ entkoppeln dann die Differentialgleichungen wieder,

$$\ddot{\tilde{x}}_a = -\omega_a^2\tilde{x}_a - \gamma_a\dot{\tilde{x}}_a$$

und es genügt, die eindimensionale Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = -\omega_0^2x - \gamma\dot{x} \quad (3.101)$$

zu untersuchen. Aus den Analysis ist bekannt, daß jede Lösung einer derartigen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten eine Linearkombination von zwei *Fundamentallösungen* ist

$$x(t) = P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t}, \quad (3.102)$$

wobei die P_i Polynome in t sind. Ist λ_1 und λ_2 verschieden, dann sind die P_i Konstanten. Ist $\lambda_1 = \lambda_2$, dann können sie Polynome vom Grade 1 sein. Setzen wir nun den Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

ins (3.101) ein, so ergibt sich

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega_0^2 e^{\lambda t} - \lambda\gamma e^{\lambda t}.$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn die Konstante λ im Exponent die *charakteristische Gleichung* erfüllt,

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (3.103)$$

Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2} + \mu \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2} - \mu \quad \text{mit} \quad \mu = +\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}. \quad (3.104)$$

Für $\mu \neq 0$ ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung hat nach dem zitierten Theorem die Form

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (3.105)$$

Die beiden Integrationskonstanten a_1 und a_2 werden durch Vorgabe von Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit festgelegt. Für $\gamma^2 = 4\omega_0^2$ ist $\lambda_1 = \lambda_2$ und (3.105) ist nicht mehr die allgemeine Lösung, siehe weiter unten. Wir diskutieren nun die verschiedenen Lösungstypen.

Starke Dämpfung (Kriechfall): Für $\gamma^2/4 > \omega_0^2$ und mit obiger Definition von μ schreibt sich die Lösung gemäß

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}(a_1 e^{\mu t} + a_2 e^{-\mu t}). \quad (3.106)$$

Da $\gamma/2 > \mu$ ist, gilt

$$x(t \rightarrow \infty) = 0. \quad (3.107)$$

Die Bewegung ist nicht periodisch. Man kann leicht die Konstanten a_1 und a_2 mit den Anfangswerten $x_0 = x(0)$ und $v_0 = \dot{x}(0)$ in Verbindung bringen und findet

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} \left(x_0 \cosh \mu t + \frac{1}{\mu} \left(v_0 + \frac{1}{2} \gamma x_0 \right) \sinh \mu t \right). \quad (3.108)$$

Schwache Dämpfung (Schwingfall): Hier ist $\gamma^2/4 < \omega_0^2$ und μ wird imaginär. Setzen wir

$$\mu = i\omega_\gamma, \quad \omega_\gamma = +\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}, \quad (3.109)$$

dann lautet die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} (a_1 e^{i\omega_\gamma t} + a_2 e^{-i\omega_\gamma t}). \quad (3.110)$$

Da $x(t)$ eine reelle Größe ist, muß $a_2 = \bar{a}_1$ gelten. Stellen wir $a_{1,2}$ in Polarkoordinaten dar

$$a_1 = \frac{1}{2i} a e^{i\varphi_0} \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{i}{2} a e^{-i\varphi_0} \quad \text{mit} \quad a > 0,$$

dann schreibt sich die Lösung gemäß

$$\begin{aligned} x(t) &= a e^{-\gamma t/2} \sin(\omega_\gamma t + \varphi_0) \\ &= e^{-\gamma t/2} \left(x_0 \cos \omega_\gamma t + \frac{1}{\omega_\gamma} \left(v_0 + \frac{1}{2} \gamma x_0 \right) \sin \omega_\gamma t \right). \end{aligned} \quad (3.111)$$

Hier handelt sich um eine periodische Schwingung mit Kreisfrequenz $\omega_\gamma < \omega_0$ und abklingender Amplitude

$$a e^{-\gamma t/2} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.112)$$

Das Verhältnis der Ausschläge in zwei benachbarten Maxima, deren zeitlicher Abstand $T = 2\pi/\omega_\gamma$ ist, beträgt $\exp(-\gamma T/2)$. Die Zeit $\tau = 2/\gamma$, nach der die Amplitude auf den e -ten Teil abgesunken ist, heißt *Relaxationszeit* der Schwingung. Für $\gamma \rightarrow 2\omega_0$ wird der Schwinger so stark abgebremst, daß $\omega_\gamma \rightarrow 0$ strebt.

Kritische Dämpfung (aperiodischer Grenzfall): Für $\gamma = 2\omega_0$ ist

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2}$$

und (3.105) gibt zunächst nur eine Lösung,

$$x(t) = ae^{-\gamma t/2} = ae^{-\omega_0 t}, \quad a = a_1 + a_2.$$

Da die Bewegungsgleichung aber eine Differentialgleichung 2. Ordnung ist, muß die allgemeine Lösung 2 Integrationskonstanten enthalten. Eine zweite unabhängige Lösung gewinnt man mittels der Methode der *Variation der Konstanten*. Dazu lässt man die Integrationskonstante a von der Zeit abhängen und setzt

$$x(t) = a(t)e^{-\omega_0 t}.$$

Nun setzen wir

$$\dot{x}(t) = \{\dot{a}(t) - \omega_0 a(t)\}e^{-\omega_0 t} \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = \{\ddot{a}(t) - 2\omega_0 \dot{a}(t) + \omega_0^2 a(t)\}e^{-\omega_0 t}$$

in die Bewegungsgleichung $\ddot{x} + 2\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ein. Wir erhalten

$$\{\ddot{a} - 2\omega_0 \dot{a} + \omega_0^2 a\} + 2\omega_0 \{\dot{a} - \omega_0 a\} + \omega_0^2 a = \ddot{a} = 0$$

woraus folgt, dass $a(t)$ eine lineare Funktion der Zeit sein muss, $a(t) = a_1 + a_2 t$. Die allgemeine Lösung für $\gamma = 2\omega_0$ ist deshalb

$$x(t) = e^{-\omega_0 t} (a_1 + a_2 t) = e^{-\omega_0 t} \{x_0 + (\omega_0 x_0 + v_0)t\}. \quad (3.113)$$

Der Bewegungsablauf ist ähnlich dem der starken Dämpfung. In Abbildung (3.11) sind die Schwingungsformen eines gedämpften Oszillators mit $\omega_0 = 1$, $x_0 = 1$, $v_0 = 0$ für die Werte $\gamma = 8$ (Kriechfall), $\gamma = 2$ (kritisch) und $\gamma = 1/2$ (Schwingfall) gezeigt.

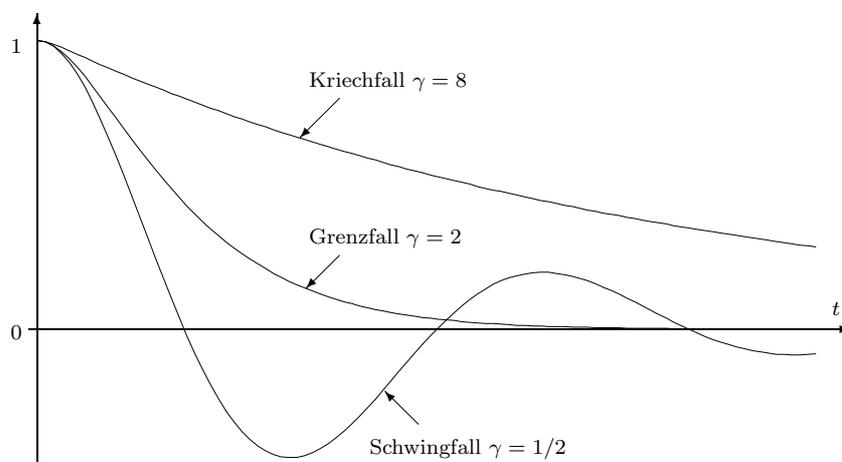


Abbildung 3.11: Die verschiedenen Lösungstypen für den Oszillator mit Dämpfung.

3.4 Lineare Differentialgleichungssysteme

Für die bisher betrachteten dynamischen Systeme lauten die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\mathbf{r} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{r}} \quad (3.114)$$

mit Matrizen A und B . Für ein 1-dimensionales System sind A und B Zahlen und für eine 3-dimensionale System 3×3 -Matrizen. Mit $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ sind die Bewegungsgleichungen äquivalent zu folgendem gewöhnlichen Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \equiv M \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (3.115)$$

oder wenn wir Orts- und Geschwindigkeitsvektor in einen Vektor $\boldsymbol{\xi}$ vereinigen,

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

schreibt sich die Bewegungsgleichung gemäß

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi} \quad \text{mit Anfangsbedingung} \quad \boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0. \quad (3.117)$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung *erster Ordnung* beschreibt die Bewegung im Raum mit Koordinaten \mathbf{r} und \mathbf{v} . Für 1-dimensionale Systeme ist M eine 2×2 - und für 3-dimensionale Systeme eine 6×6 Matrix. Wäre M eine reelle oder komplexe Zahl, dann könnten wir die Lösung dieser dann sehr einfachen Differentialgleichung sofort angeben. Für Systeme von Differentialgleichungen, d.h. wenn M keine Zahl sondern eine Matrix ist, ist die Lösung ähnlich einfach, wie wir jetzt sehen werden.

3.4.1 Matrix-Exponentialfunktion

Formal hat die Differentialgleichung (3.117) mit beliebiger Matrix M die folgende Lösung,

$$\boldsymbol{\xi}(t) = e^{Mt} \boldsymbol{\xi}_0. \quad (3.118)$$

Dabei braucht M nicht die spezielle Form in (3.115) zu haben. Wir wollen uns hier nicht auf 1 oder 3-dimensionale Bewegungen in der klassischen Mechanik beschränken. Deshalb soll M im Folgenden eine *beliebige n -dimensionale Matrix* sein.

Der Beweis der Behauptung (3.118) ist einfach und benutzt die Reihendarstellung der Matrix-Exponentialfunktion,

$$e^{Mt} = \mathbb{1} + tM + \frac{t^2}{2!}M^2 + \frac{t^3}{3!}M^3 + \dots$$

Für beliebige Matrizen ist dies eine absolut konvergente Potenzreihe. Deshalb vertauschen Differenzieren und Summieren und wir finden

$$\frac{d}{dt}e^{Mt} = M(\mathbb{1} + tM + \frac{t^2}{2!}M^2 + \dots) = Me^{Mt} = e^{tM}M. \quad (3.119)$$

Daraus folgt unmittelbar, daß $\boldsymbol{\xi}$ in (3.118) die Differentialgleichung (3.117) löst,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \frac{d}{dt}e^{Mt} \boldsymbol{\xi}_0 = Me^{Mt} \boldsymbol{\xi}_0 = M\boldsymbol{\xi}(t). \quad (3.120)$$

Nur wenn zwei Matrizen vertauschen, $[M, N] = 0$, hat die Exponentialfunktion die für Zahlen charakteristische Eigenschaft

$$e^{M+N}e^Me^N = e^Ne^Me^M \iff [M, N] \equiv MN - NM = 0. \quad (3.121)$$

Da M und $(-M)$ vertauschen folgt sofort, daß

$$(e^M)^{-1} = e^{-M}. \quad (3.122)$$

Für zwei nicht-kommutierende Matrizen kann man die BAKER-HAUSDORFF und BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF Formeln benutzen. Die erste lautet

$$e^{tM} N e^{-tM} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{[M, [M, [\dots, [M, N] \dots]]}_{n\text{-mal}} = \exp(t \operatorname{ad}_M) N, \quad (3.123)$$

wobei wir die lineare Abbildung

$$\operatorname{ad}_M : N \longrightarrow [M, N]$$

eingeführt haben, und die zweite Formel

$$e^M e^N = \exp \left(M + N + \frac{1}{2} [M, N] + \frac{1}{12} [M, [M, N]] + \frac{1}{12} [N, [N, M]] + \dots \right). \quad (3.124)$$

Im Exponent auf der rechten Seite stehen neben M und N nur Glieder, die (von Zahlenfaktoren abgesehen) nur durch Kommutatoren von M und N allein gebildet werden. Dieses HAUSDORFFSche Ergebnis ist grundlegend für eine Theorie der LIEgruppen und kommt in der Quantenmechanik zur Anwendung.

Wir beweisen die BAKER-HAUSDORFF-Formel (3.123) indem wir zeigen, daß beide Seiten in dieser Formel identische Taylorentwicklung bei $t = 0$ haben. Die Ableitungen der linken Seite bei $t = 0$ sind

$$\left. \frac{d^n}{dt^n} e^{tM} N e^{-tM} \right|_{t=0} = (\operatorname{ad}_M)^n N,$$

und diejenigen der rechten Seite

$$\left. \frac{d^n}{dt^n} \exp(t \operatorname{ad}_M) N \right|_{t=0} = \left. \frac{d^n}{dt^n} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\operatorname{ad}_M)^n N \right) \right|_{t=0} = (\operatorname{ad}_M)^n N$$

und die Gleichheit aller Ableitungen beweist die Formel (3.123).

Wir beweisen die BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF-Formel (3.124) für den in der Physik wichtigen Spezialfall, daß beide Matrizen M, N mit ihrem Kommutator vertauschen,

$$[M, [M, N]] = [N, [M, N]] = 0.$$

In diesem Fall vereinfacht sich die allgemeine Formel (3.124) zu

$$e^{tM} e^{tN} = \exp \left(tM + tN + \frac{t^2}{2} [M, N] \right) = e^{t(M+N)} \exp \left(\frac{t^2}{2} [M, N] \right). \quad (3.125)$$

Falls M mit dem Kommutator von M und N vertauscht, dann folgt aus (3.123) die nützliche Formel

$$e^{tM} N = (N + t[M, N]) e^{tM}.$$

Damit finden wir für die Ableitung der linken Seite in (3.125)

$$\frac{d}{dt}(\text{lhs}) = Me^{tM}e^{tN} + e^{tM}Ne^{tN} = (M + N + t[M, N])e^{tM}e^{tN}.$$

Die Ableitung der rechten Seite ist

$$\frac{d}{dt}(\text{rhs}) = (M + N)(\text{rhs}) + (\text{rhs})t[M, N] = (M + N + t[M, N])(\text{rhs}).$$

Offensichtlich erfüllen beide Seiten in (3.125) die gleiche Differentialgleichung. Da zusätzlich beide Seiten für $t = 0$ die Einheitsmatrix ergeben, folgt dann die Behauptung (3.125).

Diagonalisierbare Matrizen

Die Berechnung von Exponentialfunktion ist relativ einfach für diagonalisierbare Matrizen. Eine Matrix M heisst diagonalisierbar, wenn es eine reguläre Transformation S gibt, so daß

$$S^{-1}MS = \tilde{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (3.126)$$

diagonal ist. Die Spalten der diagonalisierenden Transformationsmatrix S sind die Eigenvektoren von M . Mit der

$$f(M) = f(S\tilde{M}S^{-1}) = Sf(\tilde{M})S^{-1}$$

ist es nun relativ einfach, diagonalisierbare Matrizen zu exponentieren,

$$e^{Mt} = e^{S\tilde{M}S^{-1}} = Se^{\tilde{M}t}S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & & \\ 0 & \ddots & 0 & \\ & & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S^{-1}. \quad (3.127)$$

Die Exponentiation reduziert sich auf die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M .

Ersetzt man die Koordinaten ξ durch die (im allgemeinen komplexen) Normalkoordinaten $\tilde{\xi}$ via $S\tilde{\xi}$, dann entkoppeln die Bewegungsgleichungen,

$$\dot{\xi} = M\xi \iff S\dot{\tilde{\xi}} = MS\tilde{\xi} \iff \dot{\tilde{\xi}} = \tilde{M}\tilde{\xi},$$

und die Komponenten von $\tilde{\xi}$ haben eine exponentielle Zeitabhängigkeit

$$\tilde{\xi}_a(t) = e^{\lambda_a t} \tilde{\xi}_a(0).$$

Für diagonalisierbare Matrizen treten bei der Lösung von (3.117) also nur Exponentialfunktionen und keine Polynome auf. Obwohl M eine reelle Matrix ist, sind im Allgemeinen die Eigenwerte λ_k und damit die Lösung $\tilde{r}(t)$ komplex. Aber nach Rücktransformation gewinnt man für eine reelle Anfangsbedingung ξ_0 wieder eine reelle Lösung

$$\xi(t) = e^{Mt} \xi_0.$$

Eine $n \times n$ Matrix M ist diagonalisierbar wenn die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ihres *charakteristischen Polynoms*

$$\begin{aligned} P_M(\lambda) &= \det(\lambda \mathbb{1} - M) = \lambda^n - \operatorname{Sp}(M)\lambda^{n-1} + \dots + (-)^n \det M \\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \end{aligned} \quad (3.128)$$

verschieden sind. Mit λ_k ist auch $\bar{\lambda}_k$ eine Nullstelle von $P_M(\lambda)$, denn das charakteristische Polynom einer reellen Matrix hat reelle Koeffizienten.

Bei einer expliziten Berechnung von $\exp(Mt)$ ist es oft auch hilfreich, sich an den Satz von CAYLEY-HAMILTON zu erinnern, nach dem

$$\begin{aligned} P_M(M) &= (M - \lambda_1 \mathbb{1})(M - \lambda_2 \mathbb{1}) \cdots (M - \lambda_n \mathbb{1}) \\ &= M^n - (\operatorname{Sp} M) M^{n-1} + \dots + (-)^n (\det M) \mathbb{1} = 0 \end{aligned} \quad (3.129)$$

gilt. Also ist die n 'te Potenz einer n -dimensionalen Matrix M immer eine Linearkombination der niedrigeren Potenzen von M . Zum Beispiel hat die schiefsymmetrische infinitesimale Drehmatrix in (3.17),

$$\Omega = \omega \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \omega \hat{\Omega}, \quad \mathbf{n}^2 = 1,$$

das charakteristische Polynom

$$P_\Omega = \lambda^3 + \omega^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \lambda = \lambda^3 + \omega^2 \lambda,$$

und die Identität von CAYLEY-HAMILTON impliziert

$$\Omega^3 = -\omega^2 \Omega \implies \Omega^{2n} = (-)^{n-1} \omega^{2n-2} \Omega^2, \quad \Omega^{2n+1} = (-)^n \omega^{2n} \Omega.$$

Dies führt dann auf

$$\exp(\Omega t) = \mathbb{1} + \hat{\Omega}^2 + \sin \omega t \hat{\Omega} - \cos \omega t \hat{\Omega}^2.$$

Wegen $\hat{\Omega} \mathbf{r} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{r}$ gilt auch

$$e^{\Omega t} \mathbf{r} = (\mathbf{n}, \mathbf{r}) \mathbf{n} - \cos \omega t \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}) + \sin \omega t \mathbf{n} \wedge \mathbf{r},$$

also beschreibt $\exp(\Omega t)$ eine Drehung mit Winkelgeschwindigkeit ω um die Drehachse \mathbf{n} , siehe (2.44). Dies erklärt auch den Namen infinitesimale Drehmatrix für Ω .

Zur weiteren Illustration betrachten noch einmal die Bewegungsgleichungen des 1-dimensionalen Oszillators mit Reibung. Mit (3.101) ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (3.130)$$

Die Eigenwerte dieser Matrix

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2} + \mu, \quad \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2} - \mu, \quad \text{mit} \quad \mu = \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2},$$

sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2$, siehe (3.104). Für $\mu \neq 0$ sind die Eigenwerte verschieden und die Matrix M kann diagonalisiert werden,

$$M = S \tilde{M} S^{-1}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Nun ist es leicht die Matrix tM zu exponentieren,

$$e^{Mt} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} S^{-1} = e^{-\gamma t/2} \left(\cosh \mu t \mathbb{1} + \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \gamma/2 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma/2 \end{pmatrix} \sinh \mu t \right).$$

Wir finden wieder die frühere Lösung (3.108) für den Kriechfall

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t/2} \left\{ \cosh \mu t x_0 + \frac{1}{\mu} (\gamma x_0/2 + v_0) \sinh \mu t \right\} \\ v(t) &= e^{-\gamma t/2} \left\{ \cosh \mu t v_0 - \frac{1}{\mu} (\omega_0^2 x_0 + \gamma v_0/2) \sinh \mu t \right\}. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Den Schwingfall erhalten wir, wenn wir μ durch $i\omega_\gamma$ ersetzen. Deshalb ist für einen Oszillator mit schwacher Dämpfung

$$e^{Mt} = e^{-\gamma t/2} \left(\cos \omega_\gamma t \mathbb{1} + \frac{1}{\omega_\gamma} \begin{pmatrix} \gamma/2 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma/2 \end{pmatrix} \sin \omega_\gamma t \right). \quad (3.132)$$

Nicht-diagonalisierbare Matrizen und Jordan-Normalform

Interessanter ist der aperiodische Grenzfall, für welchen das charakteristische Polynom von

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0 & 0 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0 \end{pmatrix} \equiv D + N$$

eine doppelte Nullstelle bei $-\omega_0$ hat. Die beiden Matrizen D und N vertauschen offensichtlich und N ist nilpotent, $N^2 = 0$. Für die Exponentialfunktion erhalten wir

$$e^{Mt} = e^{Dt+Nt} = e^{Dt} e^{Nt} = e^{Dt} (\mathbb{1} + Nt) = \begin{pmatrix} 1 + \omega_0 t & t \\ -\omega_0^2 t & 1 - \omega_0 t \end{pmatrix} e^{-\omega_0 t},$$

wobei wir benutzen, daß D und N kommutieren. Daraus gewinnen wir sofort die Lösung für den aperiodischen Grenzfall

$$\begin{aligned} x(t) &= \{x_0 + (\omega_0 x_0 + v_0)t\} e^{-\omega_0 t} \\ v(t) &= \{v_0 - (\omega_0 x_0 + v_0)\omega_0 t\} e^{-\omega_0 t} \end{aligned} \quad (3.133)$$

in Übereinstimmung mit (3.113). Im Gegensatz zum Kriech- und Schwingfall sind die beiden Eigenwerte des charakteristischen Polynoms im aperiodischen Grenzfall gleich.

Hat das charakteristische Polynom $P_M(\lambda)$ einer $n \times n$ Matrix M mehrfache Nullstellen, dann ist M im Allgemeinen nicht mehr diagonalisierbar. Das Polynom hat dann die Form

$$P_M(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - M) = \prod_{k=1}^r (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, \quad n_1 + \dots + n_r = n,$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von P_M und die $n_k > 0$ ihre algebraischen Vielfachheiten sind. Wie im diagonalisierbaren Fall heißen die λ_k *Eigenwerte* der Matrix M . Hat λ_k die Multiplizität n_k , so ist auch $\bar{\lambda}_k$ ein Eigenwert derselben Multiplizität, denn das charakteristische Polynom der reellen Matrix M hat reelle Koeffizienten.

Wir erinnern daran, daß eine $n \times n$ -Matrix der Form

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \quad (3.134)$$

JORDAN-Block mit Eigenwert λ heisst. Eine JORDAN-Matrix ist eine quadratische Matrix der Form

$$\tilde{M} = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots \end{array} \right), \quad n_1 + \dots + n_r = n. \quad (3.135)$$

Eine JORDAN-Basis einer linearen Abbildung (Matrix) $M : V \rightarrow V$ ist eine Basis von V , bezüglich der die Matrix von M eine JORDAN Matrix ist, also die JORDAN-Normalform (3.135) hat. Es gilt der

Satz 3 (Existenz einer Jordan-Basis) Sei $M : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung eines endlich-dimensionalen \mathbb{C} -Vektorraumes V . Dann existiert für M eine JORDAN-Basis. Die JORDAN-Matrix \tilde{M} ist eindeutig, bis auf eine Permutation der JORDAN-Blöcke.

Wir finden also eine Koordinatentransformation $\xi = S\tilde{\xi}$ mit regulärer Transformationsmatrix S , so daß in den gestrichenen Koordinaten die Abbildungsmatrix

$$\tilde{M} = S^{-1}MS \quad (3.136)$$

eine JORDAN-Matrix ist. Im diagonalisierbaren Fall heissen die $\tilde{\xi}$ Normalkoordinaten und wir wollen diesen Namen im allgemeineren Fall beibehalten. Wegen der Blockdiagonalform (3.135) von \tilde{M} in Normalkoordinaten ist

$$\exp(Mt) = S e^{\tilde{M}t} S^{-1} = S \begin{pmatrix} \exp(J_{n_1}(\lambda_1)t) & & 0 \\ & \exp(J_{n_2}(\lambda_2)t) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} S^{-1}, \quad (3.137)$$

und es genügt vollauf, $\exp(J_n(\lambda)t)$ zu berechnen. Nun schreiben wir $J_n(\lambda) = \lambda \mathbb{1}_n + J_n(0)$, wobei die Summanden auf der rechten Seite offensichtlich vertauschen, und finden

$$\exp(J_n(\lambda)t) = e^\lambda \exp(J_n(0)t).$$

Da die Matrix $J_n(0)$ offensichtlich nilpotent ist, $J_n^n(0) = 0$, kann sie mit

$$(J_n^m(0))_{ij} = \delta_{i,j-m}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\},$$

leicht exponentiert werden. Wir finden

$$\exp(J_n(\lambda)t) = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.138)$$

Wir fassen zusammen:

Satz 4 In Normalkoordinaten (bezüglich einer JORDAN Basis) hat $\exp(\tilde{M}t)$ die Form (3.137) mit $\exp(J_n(\lambda)t)$ aus (3.138).

Zur Konstruktion einer JORDAN-Basis nutzt man aus, daß

$$(\tilde{M} - \lambda_1 \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & 0 & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2 - \lambda_1) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

ist, oder, da die n_1 -te Potenz von $J_{n_1}(0)$ verschwindet,

$$(\tilde{M} - \lambda_1 \mathbb{1})^{n_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{n_2}^{n_1}(\lambda_2 - \lambda_1) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

gilt. Man sieht sofort, daß die Matrizen $J_{n_k}^{n_1}(\lambda_k - \lambda_1)$, $k = 2, \dots, r$ invertierbar sind. Anstelle von λ_1 hätten wir irgend einen anderen Eigenwert λ_k auszeichnen können mit dem Ergebnis, daß auf den Unterräumen

$$\tilde{V}_k = \{ \tilde{\xi} \in V \mid (\lambda_k \mathbb{1} - \tilde{M})^{n_k} \tilde{\xi} = 0 \} = \text{Kern}(\lambda_k - \tilde{M})^{n_k}$$

die Matrix \tilde{M} gleich $J_{n_k}(\lambda_k)$ ist. Es kann passieren, daß $J_{n_k}(\lambda_k)$ in weitere JORDANblöcke zerfällt und im Extremfall $\lambda_k \mathbb{1}_{n_k}$ ist. Zum Beispiel hat das charakteristische Polynom von $\mathbb{1}_n$ eine n -fache Nullstelle bei $\lambda = 1$ und die Jordan-Matrix ist $\mathbb{1}_n$.

In den ursprünglichen Koordinaten $\xi = S^{-1}\tilde{\xi}$ hat M im Allgemeinen nicht mehr die explizite JORDANform (3.135). Trotzdem können wir natürlich die durch die JORDAN-Zerlegung ausgezeichneten Unterräume auf invariante Weise wie folgt charakterisieren:

$$V_k = S\tilde{V}_k = \text{Kern}(S(\lambda_k - \tilde{M})^{n_k}S^{-1}) = \text{Kern}(\lambda_k - M)^{n_k}.$$

Die Unterräume V_k heißen *verallgemeinerte Eigenräume* der linearen Abbildung M .

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen sind wir nun in der Lage die Lösungen des dynamischen Systems $\dot{\xi} = M\xi$ explizite anzugeben. Für ein ξ_0 im Unterraum V_k ist $S^{-1}\xi_0$ im Unterraum \tilde{V}_k und

$$e^{Mt}\xi_0 = Se^{\tilde{M}t}S^{-1}\xi_0 = Se^{\tilde{M}t}S^{-1}\xi_0 = e^{\lambda_k t}P_{n_k}(t)\xi_0,$$

wobei wir das Matrixpolynom

$$P_{n_k}(t) = S \exp(J_{n_k}(0)t) S^{-1}$$

der Ordnung n_k einführt. Wir haben also gezeigt, daß in in einer beliebigen Basis die Matrix M als Summe von

$$D = S \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{1}_{n_1} & & \\ & \lambda_2 \mathbb{1}_{n_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} S^{-1} \quad \text{und} \quad N = S \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & J_{n_2}(0) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} S^{-1}$$

dargestellt werden kann, wobei

$$[D, N] = 0 \quad \text{und} \quad N^m = 0 \quad \text{mit} \quad m = \max\{n_1, \dots, n_r\} \quad (3.139)$$

gilt. In expliziten Rechnungen ist das Auffinden der JORDAN Basis der schwierigste Teil der Aufgabe. Wir wollen dies an einem einfachen dynamischen System illustrieren.

Beispiel: Gegeben sei folgendes dynamische System

$$\dot{\xi} = M\xi \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.140)$$

Das charakteristische Polynom

$$P_M(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{1} - M) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1) \quad (3.141)$$

hat eine doppelte Nullstelle bei $\lambda = -1$ und eine einfache bei $\lambda = 1$. Also hat M den zweifachen Eigenwert $\lambda_1 = -1$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 1$. Wegen

$$(\mathbb{1} - M) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (-\mathbb{1} - M)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

sind die verallgemeinerten Eigenräume

$$V_1 = \text{span}\{\tilde{\mathbf{e}}_3 = 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\} \quad \text{und} \quad V_2 = \text{span}\{\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_2\}.$$

Damit kennen wir die Transformationsmatrix S , welche die ursprüngliche Basis in die JORDANbasis überführt,

$$\tilde{\mathbf{e}}_a = S_{ba}\mathbf{e}_b \implies S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Transformation auf verallgemeinerte Normalkoordinaten $\xi = S\tilde{\xi}$ erhalten wir die Differentialgleichung

$$\dot{\tilde{\xi}} = \tilde{M}\tilde{\xi}, \quad \text{mit} \quad \tilde{M} = S^{-1}MS.$$

Nach unserem allgemeinen Theorem muß \tilde{M} eine Jordan-Matrix sein, d.h. die Summe einer diagonalen und einer nilpotenten Matrix,

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach der Rücktransformation findet man die entsprechende Zerlegung von M

$$M = D + N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [D, N] = 0, \quad N^2 = 0.$$

Um $\exp(Mt)$ zu berechnen, benutzen wir, daß

$$e^{Mt} = S e^{\tilde{M}t} S^{-1} = S e^{\tilde{D}t} (1 + \tilde{N}t) S^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 2(e^t - e^{-t}) \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}. \quad (3.142)$$

Damit wäre die Differentialgleichung (3.140) für beliebige Anfangsbedingungen gelöst.

Für explizite Rechnungen kann man zum Beispiel auf das algebraischen Computerprogramm Maple zurückgreifen. Mit dem `with(linalg)` Befehl lädt man die in der linearen Algebra gebräuchlichen Funktionen. Definiert man die Matrix M ,

$$M := \text{matrix}(3, 3, [-1, 1, -2, 0, -1, 4, 0, 0, 1])$$

so liefert der Befehl `J:=jordan(M, 'SI')` die JORDAN Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit `S=inverse(SI)` erhält man die Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

welche M in die JORDAN-Normalform bringt, $J = SMS^{-1}$, was mit `multiply(S,M,SI)` nachgeprüft werden kann.

3.4.2 Stabilität von linearen Systemen I

Eine wichtige Frage ist diejenige nach der Stabilität von (Gleichgewichts)Lösungen der Bewegungsgleichungen. Wir werden nun untersuchen, wann die Gleichgewichtslösung $\xi = 0$ des linearen dynamischen Systems

$$\dot{\xi} = M\xi, \quad \xi(0) = \xi_0 \quad (3.143)$$

stabil oder instabil ist. Für die Stabilitätsanalyse zerlegen wir den Vektor $\xi_0 = \xi_{01} + \dots + \xi_{0r}$, wobei ξ_{0k} im verallgemeinerten Eigenraum V_k liegt. Im Gegensatz zu ξ_0 können die ξ_{0k} komplex sein. Dann ist

$$\begin{aligned} \xi(t) = e^{Mt} \xi_0 &= \sum_{k=1}^r e^{\lambda_k t} P_{n_k}(t) \xi_{0k}, \quad \text{wobei} \\ P_{n_k}(t) &= 1 + tN_k + \dots + \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} N_k^{n_k-1} \end{aligned} \quad (3.144)$$

ein matrixwertiges Polynom in t der Ordnung $< n_k$ ist. Daher ist zur Zeit t der quadrierte Abstand des Teilchen vom Ursprung $\xi = 0$ gleich

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = \xi(t) \cdot \xi(t) = \sum_{k,l} e^{(\lambda_k + \lambda_l)t} (P_k(t) \xi_{0k}) \cdot (P_l(t) \xi_{0l}).$$

Hier können die λ_k , P_k und ξ_{0k} komplex sein. Für reelles M ist die Summe aber reell.

Generisch wird für späte Zeiten der Abstand durch die Exponentialfunktionen, also die Eigenwerte λ_k von M , und nicht durch die Polynome bestimmt³. Hat *nur ein Eigenwert*

³Nur wenn *alle* λ_k imaginär sind, bestimmen die polynomialen Anteile das asymptotische Verhalten.

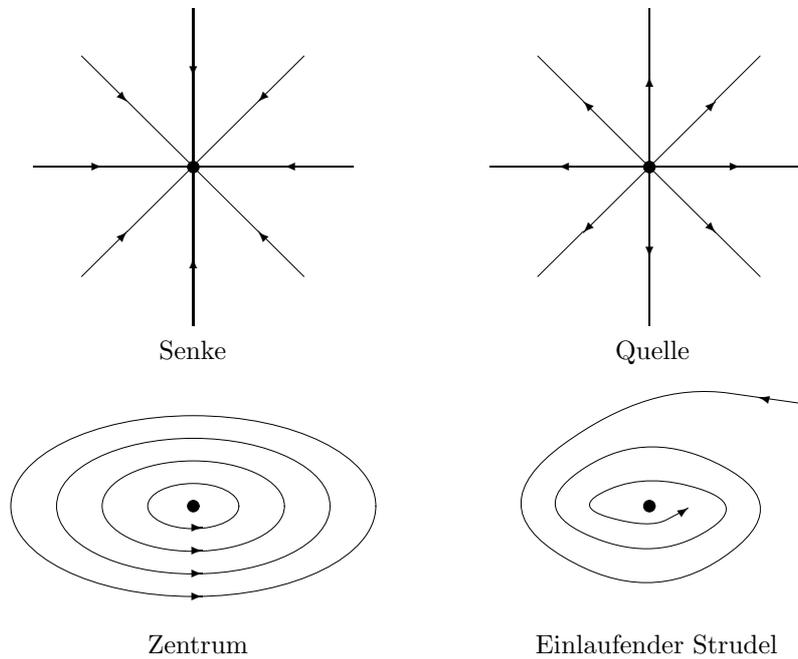


Abbildung 3.12: Asymptotisch stabile, instabile und stabile Gleichgewichtslösung

von M einen positiven Realteil, dann gibt es immer Bahnen auf denen sich das System exponentiell schnell vom Ursprung entfernt. In diesem Fall ist die Gleichgewichtslösung $\xi = 0$ *instabil*. Ist zum Beispiel der Realteil von λ_1 positiv, so entfernen sich alle Teilchen mit $\xi_{01} \neq \mathbf{o}$ exponentiell schnell vom Ursprung weg, siehe Abbildung (3.12).

Sind dagegen die Realteile *aller Eigenwerte* von M negativ, dann ist die Gleichgewichtslösung *asymptotisch stabil*. Alle Lösungen streben exponentiell schnell gegen den Ursprung. Man nennt die Gleichgewichtslösung $\xi = 0$ daher *Attraktor* der Bewegung. Allgemein bezeichnet man für ein vorgegebenes dynamisches System als *Attraktor* eine Teilmenge des ξ -Raumes, der sich das System für große Zeiten mehr und mehr annähert.

Der interessanteste Fall liegt zwischen Stabilität und Instabilität, nämlich wenn alle Eigenwerte rein imaginär sind. Dies ist der Fall für den harmonischen Oszillator ohne Reibung. Ist M diagonalisierbar und damit alle P_k Konstanten, dann ändert sich der Abstand vom Ursprung periodisch in der Zeit. Das Teilchen bleibt in der Umgebung der Gleichgewichtslösung, nähert sich ihr asymptotisch aber nicht an. Diese Bewegungen heissen *stabil*, sind aber nicht *asymptotisch stabil*.

3.5 Erzwungene Schwingungen

Der bisher untersuchte harmonische Oszillator ist ein schwingungsfähiges System mit einer in die Gleichgewichtslage zurücktreibenden linearen Kraft sowie mit energieverbrauchenden

Reibungskräften. Ein solcher Oszillator kann durch eine äußere zeitabhängige Kraft $\mathbf{F}(t)$ 'angetrieben' werden. Dann haben wir die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -V''\mathbf{r} - W\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}(t). \quad (3.145)$$

Die entsprechende Differentialgleichung im $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{r}, \mathbf{v})^T$ -Raum ist

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}, \quad M = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 & m\mathbb{1} \\ -V'' & -W \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.146)$$

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung lässt sich aus folgendem Zusammenhang zwischen den Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi} \quad (3.147)$$

und einer Lösung der inhomogenen Gleichung (3.146) ableiten. Ist $\boldsymbol{\xi}^{(s)}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta} \quad (3.148)$$

und $\boldsymbol{\xi}^{(h)}$ eine Lösung der homogenen Gleichung, dann ist ihre Summe eine neue Lösung der inhomogenen Gleichung,

$$\frac{d}{dt}\{\boldsymbol{\xi}^{(s)} + \boldsymbol{\xi}^{(h)}\} = M\boldsymbol{\xi}^{(s)} + \boldsymbol{\eta} + M\boldsymbol{\xi}^{(h)} = M\{\boldsymbol{\xi}^{(s)} + \boldsymbol{\xi}^{(h)}\} + \boldsymbol{\eta}.$$

Umgekehrt, sind $\boldsymbol{\xi}_1$ und $\boldsymbol{\xi}_2$ zwei beliebige Lösungen der inhomogenen Gleichung, dann löst ihre Differenz die homogene Gleichung. Wir folgern:

Lemma 2 *Ist $\boldsymbol{\xi}^{(h)}$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und $\boldsymbol{\xi}^{(s)}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung, so ist $\boldsymbol{\xi}^{(s)} + \boldsymbol{\xi}^{(h)}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.*

Um eine spezielle Lösung von (3.146) zu finden machen wir den folgenden Separationsansatz

$$\boldsymbol{\xi}(t) = e^{Mt}\boldsymbol{\psi}(t). \quad (3.149)$$

Für ein konstantes $\boldsymbol{\psi}$ wäre $\boldsymbol{\xi}$ eine Lösung der homogenen Gleichung. Der Ansatz (3.149) entspricht einer *Variation der Konstanten* (Anfangsbedingung). Die Zeitableitung von $\boldsymbol{\xi}$ in (3.149) ist

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = Me^{Mt}\boldsymbol{\psi} + e^{Mt}\dot{\boldsymbol{\psi}} = M\boldsymbol{\xi} + e^{Mt}\dot{\boldsymbol{\psi}},$$

und deshalb erfüllt $\boldsymbol{\xi}$ die inhomogene Differentialgleichung genau dann, wenn

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = (e^{Mt})^{-1}\boldsymbol{\eta} = e^{-Mt}\boldsymbol{\eta} \quad (3.150)$$

gilt. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \int_0^t e^{-Ms}\boldsymbol{\eta}(s) + \boldsymbol{\xi}_0$$

mit einer Integrationskonstante ξ_0 . Damit lautet die formale Lösung von (3.148) wie folgt,

$$\xi(t) = \int_0^t e^{M(t-s)} \eta(s) + e^{Mt} \xi_0. \quad (3.151)$$

Die Integrationskonstanten ξ_0 tritt als Anfangsbedingung auf, $\xi_0 = \xi(0)$. Der zweite Term ist die Lösung der homogenen Gleichung mit Startpunkt ξ_0 und der erste Term die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung die für $t = 0$ verschwindet. Wir wollen wieder annehmen, daß V'' und W in M diagonal sind (oder beide gleichzeitig diagonalisiert werden können). Dann entkoppeln die Differentialgleichungen und es genügt den eindimensionalen Fall zu untersuchen, d.h. die Differentialgleichung (3.145) oder (3.146) mit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad \eta = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}. \quad (3.152)$$

Die Rechnungen werden einfacher wenn wir als untere Integrationsgrenze in (3.151) nicht 0 sondern $-\infty$ nehmen. Dies ist äquivalent zu einer Verschiebung von ξ_0 in dieser Formel. Mit $e^{M(t-s)}$ aus (3.132) und η aus (3.146) lautet die spezielle Lösung

$$\int_{-\infty}^t e^{M(t-s)} \eta(s) = \frac{1}{m\omega_\gamma} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-s)/2} \begin{pmatrix} \sin \omega_\gamma(t-s) \\ \omega_\gamma \cos \omega_\gamma(t-s) - \gamma/2 \sin \omega_\gamma(t-s) \end{pmatrix} F(s),$$

mit $\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$. Addieren wir die allgemeine homogenen Lösung (3.111), dann finden wir folgende allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung für eine beliebig zeitabhängige Antriebskraft,

$$x(t) = a e^{-\gamma t/2} \sin(\omega_\gamma t + \varphi_0) + \frac{1}{m\omega_\gamma} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-s)/2} \sin \omega_\gamma(t-s) F(s). \quad (3.153)$$

Zu den wichtigsten Kräften, die einen gedämpften harmonischen Oszillator 'treiben', gehören die periodischen, zum Beispiel

$$F(t) = F_0 \sin \omega t. \quad (3.154)$$

Für diese einfache treibende Kraft ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-s)/2} \sin \omega_\gamma(t-s) F(s) &= \frac{F_0}{2i} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-s)/2} \left[e^{i\omega s} \sin \omega_\gamma(t-s) + \text{kompl. konj.} \right] \\ &= \frac{\omega_\gamma F_0}{2i} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_\gamma^2 - \omega^2 + \gamma^2/4 + i\gamma\omega} + \text{kompl. konj.} \\ &= \frac{\omega_\gamma F_0}{2i} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} + \text{kompl. konj.} \end{aligned}$$

Um zu einer einfacheren Darstellung der inhomogenen Lösung zu kommen schreiben wir

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)^{-1} = b(\omega) e^{-i\delta(\omega)}$$

mit folgender Amplitude und Phase auf der rechten Seite

$$b(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \quad \text{und} \quad \delta(\omega) = \arctan \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.155)$$

Eingesetzt in (3.153) führt dies dann auf folgende allgemeine Lösung für den schwach gedämpften harmonischen Oszillator mit harmonischer Treibkraft (3.153)

$$x(t) = a e^{-\gamma t/2} \sin(\omega_\gamma t + \varphi_0) + \frac{F_0}{m} b(\omega) \sin(\omega t - \delta(\omega)). \quad (3.156)$$

Während des Zeitintervalls $t \leq \tau = 2/\gamma$ schwingt das System ein. Dieser Einschwingvorgang wird durch die homogene Lösung, also die Parameter ω_0 und γ des schwingenden Systems, bestimmt. Nach der *Relaxationszeit* τ strebt die homogene Lösung gegen Null und spielt keine Rolle mehr. Für $t \gg \tau$ verbleibt nur die spezielle Lösung, die eine periodische Bewegung mit der auferlegten Kreisfrequenz ω der treibenden Kraft beschreibt. Die Amplitude der Schwingung ist proportional zur Kraftstärke F_0 und umgekehrt proportional zur trägen Masse des Schwingers.

Resonanzen: Bei vorgegebener Eigenfrequenz ω_0 und Dämpfung γ des Schwingers sind die *Phasenverschiebung* δ und die Amplitude $F_0 b(\omega)/m$ Funktionen der Kreisfrequenz der treibenden Kraft $F_0 \sin \omega t$. Diese Funktionen zeigen in der Umgebung der 'Eigenfrequenzen' ω_0 bzw. ω_γ ein typisches Verhalten, das nun genauer untersucht werden soll:

Die *Phasenverschiebung* δ ist ein Maß für die Verzögerung, mit der die Kraftphase ωt am Oszillator wirksam wird. Wir haben

$$\delta(\omega = 0) = 0, \quad \delta(\omega = \omega_0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \delta(\omega \rightarrow \infty) = \pi. \quad (3.157)$$

Bei $\omega = \omega_0$ ist das Argument von \arctan in (3.155) unendlich. Also ist die Phasenverzögerung $\pi/2$, wenn die aufgezwungene Frequenz ω gleich der ungedämpften Eigenfrequenz ω_0 ist. Für $\omega > \omega_0$ müssen wir bei der Bestimmung von \arctan auf den 'nächsten Zweig' dieser Funktion gehen. Die funktionale Abhängigkeit der Amplitude b von der Kreisfrequenz in (3.155) ist durch eine *Verteilung* mit Maximum ω_r in der Nähe von ω_0 und Breite $\sim \gamma$ gegeben. Es gilt

$$b(\omega = 0) = \frac{1}{\omega_0^2} \quad \text{und} \quad b(\omega \rightarrow \infty) = 0. \quad (3.158)$$

Die Amplitude hat ein Maximum bei derjenigen Kreisfrequenz welche den Nenners von $b(\omega)$ minimiert,

$$\frac{\partial}{\partial \omega^2} ((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2) \Big|_{\omega_r^2} = 2(\omega_r^2 - \omega_0^2) + \gamma^2 = 0.$$

Damit finden wir für die Lage des Maximums ω_r , der sogenannten *Resonanz*, und die Amplitude an der Resonanzstelle die Werte

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2} \leq \omega_\gamma \leq \omega_0 \quad \text{und} \quad b(\omega_r) = \frac{1}{\gamma \omega_\gamma}. \quad (3.159)$$

Den qualitative Verlauf der Amplitudenfunktion ist in Abbildung (3.13) dargestellt.

3.6 Anhang: Matrixfunktionen

In diesem Anhang wollen wir die wichtigsten Eigenschaften von Matrixfunktionen zusammenstellen. Für eine diagonalisierbare $n \times n$ -Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind Matrix-

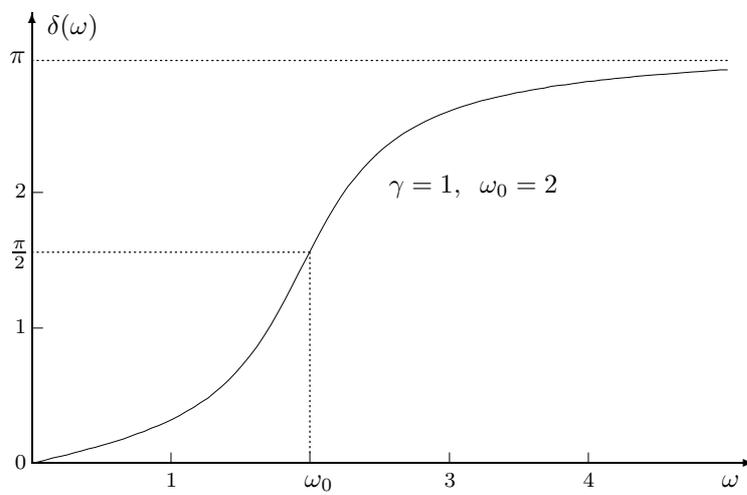
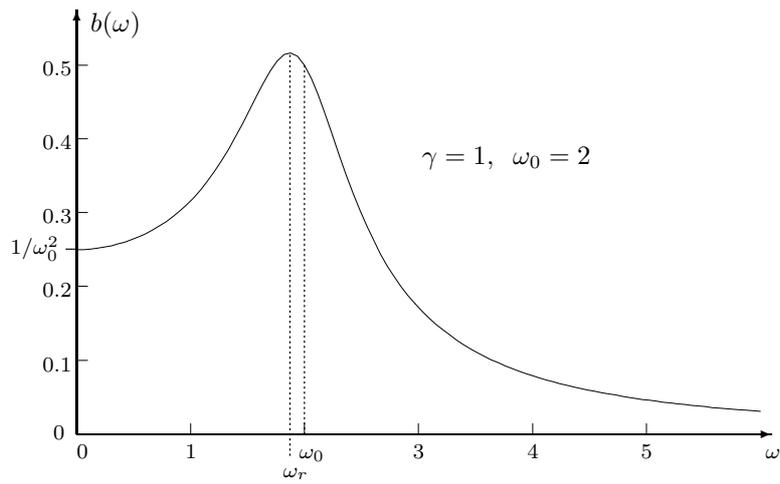


Abbildung 3.13: Amplitude und Phase des getriebenen Oszillators.

funktionen leicht zu berechnen,

$$f(M) = f(S\tilde{M}S^{-1}) = Sf(\tilde{M})S^{-1} = S \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f(\lambda_2) & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Allgemeine Matrizen sind nicht diagonalisierbar. Wir können natürlich immer die JORDANSche Normalform als Ausgangspunkt für eine Berechnung von Matrixfunktionen wählen und diesen Weg haben wir bei der Exponentialfunktion gewählt. Hier möchte ich aber den Residuenkalkül zur Anwendung bringen, welcher von der *Resolvente*

$$R(\lambda) = \frac{1}{\lambda - M}, \quad M \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}), \quad (3.160)$$

der Matrix M Gebrauch macht. Für nicht-diagonalisierbare Matrizen kann man nämlich folgende konstruktive Formel für eine analytische Funktion $f(\lambda)$ benutzen:

$$f(M) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(\lambda) R(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\lambda)}{\lambda - M}. \quad (3.161)$$

Die Integration ist entlang einer Schleife in der komplexen λ -Ebene, die alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms umschließt. Zum Beispiel, für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die wir in (3.139) einführt, ist die *Resolvente*

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda + 1)^{-1} & (\lambda + 1)^{-2} & -2(\lambda + 1)^{-2} \\ 0 & (\lambda + 1)^{-1} & 4(\lambda^2 - 1)^{-1} \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung des Schleifenintegrals in (3.161) erinnern wir uns an folgende bekannte Formel aus der Analysis:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\lambda_0), \quad (3.162)$$

Hier umläuft der geschlossene Integrationsweg den Punkt λ_0 einmal entgegen dem Uhrzeigersinn. Damit finden wir

$$f(M) = \begin{pmatrix} f(-1) & f'(-1) & -2f'(-1) \\ 0 & f(-1) & 2(f(1) - f(-1)) \\ 0 & 0 & f(1) \end{pmatrix}.$$

Insbesondere für $f(\lambda) = \exp(t\lambda)$ findet man das bekannte Resultat (3.142) für $\exp(Mt)$.

Im Folgenden werden wir weitere Eigenschaften der Resolvente besprechen, die Spektralzerlegung eines linearen Operators auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum ableiten und insbesondere die obige Formel (3.161) beweisen. Erinnern wir uns an die KRAMERSche Regel zur Bildung einer inversen Matrix, so folgt sofort, daß die Resolvente meromorph ist. Sie hat

Pole der Ordnung $\leq n$ bei den Nullstellen $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \equiv \sigma(M)$ des charakteristischen Polynoms $P_M(\lambda)$ von M , d.h. bei den Eigenwerten von M . Wir untersuchen nun das Verhalten der Resolvente bei einem Eigenwert den wir der Einfachheit wegen nach $\lambda = 0$ legen.

Die Koeffizienten in der LAURENT-Reihe

$$R(\lambda) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p \lambda^p \quad (3.163)$$

berechnen sich nach der bekannten Formel aus der Funktionentheorie gemäß

$$A_p = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} d\lambda \lambda^{-p-1} R(\lambda). \quad (3.164)$$

Hier ist Γ ein (kleiner) Kreis um den Eigenwert 0, der außer diesem keinen weiteren Punkt des Spektrums $\sigma(M)$ einschließt. Da die Pole maximal die Ordnung n haben ist

$$A_p = 0 \quad \text{für } p < -n.$$

Das Produkt zweier Koeffizientenmatrizen A_p und A_q ist entweder die Nullmatrix oder eine dritte Koeffizientenmatrix:

Lemma 3 Die Entwicklungskoeffizienten der Resolvente erfüllen

$$A_p A_q = (1 - \eta_p - \eta_q) A_{p+q+1}, \quad \text{wobei } \eta_p = \begin{cases} 1 & \text{für } p \geq 0 \\ 0 & \text{für } p < 0. \end{cases} \quad (3.165)$$

Im Beweis benutzen wir die wichtige *Resolventengleichung*

$$\frac{1}{\lambda - M} - \frac{1}{\lambda' - M} = \frac{1}{\lambda - M} - \frac{1}{\lambda' - M} = \{(\lambda' - M) - (\lambda + M)\} \frac{1}{\lambda - M} \frac{1}{\lambda' - M}$$

also

$$R(\lambda) - R(\lambda') = (\lambda' - \lambda) R(\lambda) R(\lambda'). \quad (3.166)$$

Mit dieser Identität folgt

$$\begin{aligned} A_p A_q &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} d\lambda d\lambda' \lambda^{-p-1} \lambda'^{-q-1} R(\lambda) R(\lambda') \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} d\lambda d\lambda' \lambda^{-p-1} \lambda'^{-q-1} \frac{R(\lambda') - R(\lambda)}{\lambda - \lambda'}. \end{aligned}$$

Wählen wir Γ mit größerem Radius als Γ' , dann kann das Linienintegral über Γ' leicht berechnet werden, wenn wir die LAURENT-Entwicklungen für die Resolventen auf der rechten Seite einsetzen und

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} d\lambda' \frac{1}{\lambda'} \frac{\lambda'^{-m}}{\lambda - \lambda'} = \eta_m \lambda^{-m-1}$$

benutzen. Man findet

$$\begin{aligned} A_p A_q &= \frac{1}{2\pi i} \sum_k \oint_{\Gamma} d\lambda \lambda^{k-q-p-2} (\eta_{q-k} - \eta_q) A_k \\ &= (\eta_{-p-1} - \eta_q) A_{p+q+1} = (1 - \eta_p - \eta_q) A_{p+q+1}, \end{aligned}$$

d.h. die Behauptung (3.166) des Lemmas. Daraus folgt unmittelbar, dass die Matrizen A_p paarweise kommutieren.

Dieselben Relationen erlauben uns, alle Matrizen A_p durch

$$A_0 \equiv -S, \quad A_{-1} \equiv P \quad \text{und} \quad A_{-2} \equiv D. \quad (3.167)$$

auszudrücken. In der Tat, wir finden

$$\begin{aligned} A_p A_0 &= -A_{p+1} &\longrightarrow & A_p = -S^{p+1}, \quad p = 0, 2, 3, \dots \\ A_{-1} A_{-1} &= A_{-1} &\longrightarrow & P^2 = P \\ A_{-2} A_{-p} &= A_{-p-1} &\longrightarrow & A_{-p} = D^{p-1}, \quad p = 2, 3, \dots \\ A_0 A_{-1} &= 0 &\longrightarrow & SP = PS = 0 \\ A_{-1} A_{-2} &= A_{-2} &\longrightarrow & DP = PD = D \end{aligned} \quad (3.168)$$

Somit erhalten wir folgende LAURENT-Entwicklung der Resolvente um einen beliebigen Eigenwert $\lambda_i \in \sigma(M)$,

$$R(\lambda) = - \sum_{p=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_i)^p S_i^{p+1} + \frac{P_i}{\lambda - \lambda_i} + \sum_{p=2}^{\infty} (\lambda - \lambda_i)^{-p} D_i^{p-1}. \quad (3.169)$$

Die letzte Reihe bricht spätestens nach $p = n$ ab. P_i heisst der *Eigenprojektor* und D_i die *Eigennilpotente* zum Eigenwert λ_i . Die folgende Relationen sind leicht zu beweisen,

$$\begin{aligned} -(\lambda_i - M)S_i &= -S_i(\lambda_i - M) = 1 - P_i \\ -(\lambda_i - M)P_i &= -P_i(\lambda_i - M) = D_i, \end{aligned} \quad (3.170)$$

wenn man in der Formel

$$(\lambda_i - M)R(\lambda) = \{(\lambda_i - \lambda) + (\lambda - M)\}R(\lambda) = \mathbb{1} + (\lambda_i - \lambda)R(\lambda)$$

das Resultat (3.169) einsetzt und Koeffizienten vergleicht. Nun sind wir in der Lage, daß folgende Lemma zu beweisen

Lemma 4 *Es sei Γ ein positiv orientierter Kreis, der das ganze Spektrum $\sigma(M)$ von M umschließt. Dann ist*

$$\mathbb{1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} d\lambda R(\lambda) = \sum_{i=1}^r P_i, \quad (3.171)$$

wobei P_1, \dots, P_r die Eigenprojektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ von M . Diese erfüllen

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_j. \quad (3.172)$$

Zum Beweis des Lemmas führen wir auf dem Raum der Matrizen eine Norm ein. Für $|\lambda| > \|M\|$ ist dann

$$\frac{1}{\lambda - M} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{M}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{M}{\lambda} + \frac{M^2}{\lambda^2} + \dots\right).$$

Somit ist $R(\lambda) \sim 1/\lambda$ für $\lambda \rightarrow \infty$ und dies führt zur ersten Gleichung in (3.171). Andererseits kann man Γ auf r kleine Kreise Γ_i um λ_i zusammenziehen; dies führt auf

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} d\lambda R(\lambda) = \sum_{i=1}^r P_i.$$

Die Gleichung (3.172) folgt aus der Formel

$$P_i P_j = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} d\lambda d\lambda' R(\lambda) R(\lambda')$$

die man wie im Beweis von Lemma 3 berechnet. Nun folgt der wichtige

Satz 5 (Spektralzerlegung) *Jede Matrix hat die Zerlegung*

$$M = \sum_{i=1}^r (\lambda_i P_i + D_i) = \sum_{i=1}^r (\lambda_i + D_i) P_i, \quad (3.173)$$

wobei P_i der Eigenprojektor und D_i die Eigennilpotente zum Eigenwert λ_i ist, $P_i P_j = \delta_{ij} P_j$ und $D_i P_i = P_i D_i = D_i$.

Der Beweis ist denkbar einfach,

$$M = M \sum P_i = \sum (\lambda_i P_i + (M - \lambda_i) P_i) \stackrel{(3.170)}{=} \sum (\lambda_i P_i + D_i) = \sum (\lambda_i + D_i) P_i.$$

Diese Zerlegung ist identisch zur JORDANSchen Normalform, allerdings in einer beliebigen Basis. Danach ist der Vektorraum V die direkte Summe der Eigenräume $V_i = P_i V$ die invariant unter M sind,

$$M V_i = M P_i V \stackrel{[M, P_i]=0}{=} P_i M V \in V_i.$$

Auf dem Eigenraum V_i reduziert sich M auf $\lambda_i + D_i$ mit einem nilpotenten Operator D_i ,

$$D_i^{n_i} = 0 \quad \text{mit} \quad n_i = \dim V_i.$$

Insbesondere ist $D_i = 0$ für $\dim P_i = 1$, d.h. für einen einfachen Eigenwert. Es sei nun

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n$$

eine ganze Funktion. Wir definieren die entsprechende Matrixfunktion

$$f(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) M^n. \quad (3.174)$$

Auf jedem Eigenraum V_i sind die Potenzen von M einfach auszurechnen,

$$\frac{1}{n!} P_i M^n = \frac{1}{n!} P_i (\lambda_i + D_i)^n = \sum_{p+q=n} P_i \frac{\lambda_i^p D_i^q}{p! q!}.$$

Wir setzen in (3.174) ein und erhalten die *Spektraldarstellung* der Matrixfunktion $f(M)$:

$$f(M) = \sum_i P_i \sum_{p,q} \frac{1}{q!} f^{(p+q)}(\lambda_i) \lambda_i^q \frac{1}{p!} D_i^p = \sum_i \left(f(\lambda_i) P_i + \sum_p^{n_i} \frac{1}{p!} f^{(p)}(\lambda_i) D_i^p \right).$$

Diese Darstellung kann auf alle Funktionen ausgedehnt werden, die in einer Umgebung jedes Eigenwertes hinreichend oft differenzierbar sind. Speziell erhält man für $f(z) = (\lambda - z)^{-1}$ die Partialbruchentwicklung der Resolventen,

$$\frac{1}{\lambda - M} = \sum_{i=1}^r \left(\frac{P_i}{\lambda - \lambda_i} + \frac{D_i}{(\lambda - \lambda_i)^2} + \dots + \frac{D_i^{n_i-1}}{(\lambda - \lambda_i)^{n_i}} \right). \quad (3.175)$$

Mit (3.162) folgt daraus die Darstellung (3.161) für eine (beinahe) beliebige Matrixfunktion.

Kapitel 4

Mehrkörpersysteme

Die für den einzelnen Massenpunkt aufgestellte dynamische Grundgleichung kann auf mehrere Massenpunkte erweitert werden. Ist der Ortsvektor des i -ten Teilchens in einem Inertialsystem \mathbf{r}_i , seine Masse m_i , sein Impuls $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ und die Resultante aller an ihm angreifenden Kräfte \mathfrak{F}_i , dann gilt nach dem zweiten Axiom

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathfrak{F}_i, \quad \mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.1)$$

Sind die Kräfte \mathfrak{F}_i als Funktionen der Orte und Geschwindigkeiten der Massenpunkte sowie der Zeit bekannt, so ist die Bewegung der Punktteilchen durch ihre anfänglichen Orte und Geschwindigkeiten und die Lösung des obigen Gleichungssystems eindeutig bestimmt. Das System enthält $3N$ skalare Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die $3N$ Koordinaten der N Teilchen. Das mathematische Problem der Punktmechanik besteht in der Integration dieses im Allgemeinen gekoppelten nichtlinearen *Differentialgleichungssystems*.

Für ein nicht abgeschlossenes System teilt man die Kräfte in zwei Gruppen auf: in die von Teilchen außerhalb des untersuchten Systems wirkenden *äußeren Kräfte* und die zwischen den Teilchen des Systems wirkenden *inneren Kräfte*. Dabei wird die *Rückwirkung* der Systemteilchen auf die äußeren Teilchen vernachlässigt. Diese Aufteilung ist natürlich etwas willkürlich. Vergrößern wir das System und schließen die vorher als äußere Teilchen betrachteten Massenpunkte ein, so werden äußere Kräfte zu inneren. Verkleinern wir hingegen das System, so können innere Kräfte in äußere übergehen.

Bezeichnet man die Resultante der auf den Massenpunkt i des Systems wirkenden äußeren Kräfte mit $\mathfrak{F}_i^{(a)}$, und die vom Massenpunkt j auf das Teilchen i wirkende Kraft mit \mathfrak{F}_{ij} , so ist die auf i wirkende Gesamtkraft

$$\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i^{(a)} + \sum_{j=1}^N \mathfrak{F}_{ij}, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.2)$$

In der Summe wird das Glied $j = i$ fortgelassen oder \mathfrak{F}_{ii} Null gesetzt, da der Massenpunkt auf sich selbst keine Kraft ausübt. Die äußeren Kräfte werden in der Regel als gegeben vorausgesetzt. Die Grundgleichungen der *Punktmechanik* sind somit die folgenden:

Die NEWTONSchen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathfrak{F}_i^{(a)} + \sum_{j=1}^N \mathfrak{F}_{ij}, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.3)$$

und das Reaktionsprinzip, nach dem

$$\mathfrak{F}_{ij} = -\mathfrak{F}_{ji} \quad (4.4)$$

gilt. Neben der Einteilung in äußere und innere Kräfte wird oft auch zwischen Zwangskräften und eingepägten Kräfte unterschieden. Wir werden später darauf eingehen.

4.1 Erhaltungssätze der Punktmechanik

Ähnlich wie in Abschnitt (3.2) leiten wir hier Bilanzgleichungen für Impuls, Drehimpuls und Energie ab. Für idealisierte abgeschlossene Systeme ohne äußere Kräfte sind diese Größen zeitlich konstant.

4.1.1 Der Impulssatz oder der Schwerpunktsatz

Nach Addition der NEWTONSchen Bewegungsgleichungen (4.3) erhalten wir

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathfrak{F}_i^{(a)} + \sum_{ij} \mathfrak{F}_{ij} \quad (\mathfrak{F}_{ij} = -\mathfrak{F}_{ji}). \quad (4.5)$$

Wegen Actio = Reactio verschwindet die Doppelsumme. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ den *Gesamtimpuls* des Systems, dann finden wir den *Impulssatz*

$$\dot{\mathfrak{P}} = \mathfrak{F}^{(a)}, \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{F}^{(a)} = \sum_i \mathfrak{F}_i^{(a)} \quad (4.6)$$

die Resultante der auf das System wirkenden äußeren Kräfte ist, die äußere Gesamtkraft. Also gilt der

Impulssatz: *Die zeitliche Ableitung des Gesamtimpulses des Systems ist gleich der Summe der auf das System wirkenden äußeren Kräfte.*

Greifen keine äußeren Kräfte an, dann ist der Gesamtimpuls erhalten. Um zu einer anschaulicheren Form des Satzes zu gelangen, führen wir den *Schwerpunkt*¹ ein,

$$\mathfrak{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}, \quad (4.7)$$

wobei M die Gesamtmasse des Systems bezeichnet.

Für konstante Massen m_i ist $\mathfrak{P} = M\dot{\mathfrak{R}}$ und es gilt

$$M\ddot{\mathfrak{R}} = \mathfrak{F}^{(a)}. \quad (4.8)$$

¹Der Begriff Schwerpunkt, oft auch Massenmittelpunkt genannt, geht auf Archimedes zurück.

Schwerpunktsatz: *Der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten mit konstanten Massen bewegt sich so, als ob in ihm die Gesamtmasse des Systems konzentriert wäre und als ob auf ihn die Resultierende der äußeren Kräfte wirke.*

Dieser Satz berechtigt uns, einen ausgedehnten Körper als Massenpunkt zu betrachten, denn der Schwerpunkt des Körpers bewegt sich wie ein Punktteilchen der Masse M unter der Wirkung der von außen angreifenden Gesamtkraft. Bei der Bewegung des Schwerpunktes spielen die inneren Kräfte keine Rolle. Kompensieren sich die äußeren Kräfte gegenseitig, so folgt aus (4.6) und (4.8) der Satz von der

Impulserhaltung: *Verschwindet die Resultierende der äußeren Kräfte, dann ist der Gesamtimpuls des Systems konstant. Für konstante Massen bewegt sich dann (in einem Inertialsystem) der Schwerpunkt geradlinig und gleichförmig.*

Bei vielen Rechnungen ist es vorteilhaft, ein *Schwerpunktsystem* als Koordinatensystem zu wählen, d.h. ein Koordinatensystem dessen Ursprung mit dem Schwerpunkt zusammenfällt und dessen Achsen gegenüber denen eines Inertialsystems nicht rotieren. Für abgeschlossene Systeme ist ein Schwerpunktsystem ein Inertialsystem. Für zwei Massenpunkte m_1 und m_2 teilt der Schwerpunkt die Strecke zwischen den beiden Punkten im umgekehrten Verhältnis zu ihren Massen in zwei Teile, d.h. wegen

$$(m_1 + m_2)\mathfrak{R} = m_1\mathfrak{r}_1 + m_2\mathfrak{r}_2 \implies m_1(\mathfrak{R} - \mathfrak{r}_1) = m_2(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{R})$$

gilt

$$\frac{\|\mathfrak{R} - \mathfrak{r}_1\|}{\|\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{R}\|} = \frac{m_2}{m_1},$$

siehe die folgende Abbildung (4.1). Bei einem Körper von kontinuierlicher Massenverteilung

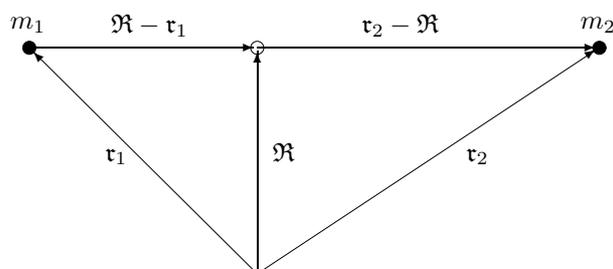


Abbildung 4.1: *Der Schwerpunkt liegt näher bei der größeren Masse.*

denkt man sich diesen in sehr kleine Teile mit Volumen ΔV_i und Massen Δm_i zerlegt. Man kann dann in dem Ausdruck (4.7) für den Schwerpunkt statt der Summe das entsprechende Integral schreiben,

$$\mathfrak{R} = \frac{\sum \mathfrak{r}_i \Delta m_i}{\sum \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\int \mathfrak{r} dm}{\int dm}.$$

Dieses läßt sich nach Einführung der *Massendichte* ρ gemäß

$$dm = \rho dV \tag{4.9}$$

in Volumenintegrale umformen,

$$\mathfrak{R} = \frac{\int \rho \mathbf{r} dV}{\int \rho dV}. \quad (4.10)$$

Sind \mathbf{r}_i und \mathbf{r}'_i die Koordinatentripel des i 'ten Teilchens bezüglich zweier kartesischer Basen in IS und IS' , dann sind diese durch eine Galileitransformation verbunden,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{a} + \mathbf{u}t + R\mathbf{r}'_i \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{u} + R\dot{\mathbf{r}}'_i,$$

so dass die Koordinaten des Schwerpunktes und Gesamtimpulses folgendermaßen transformieren

$$\mathbf{R} = (\mathbf{a} + \mathbf{u}t) + R\mathbf{R}' \quad \text{und} \quad \mathbf{P} = M\mathbf{u} + R\mathbf{P}'.$$

4.1.2 Der Drehimpulssatz

Multiplizieren wir die Bewegungsgleichung (4.3) des i -ten Massenpunktes vektoriell mit dem Ortsvektor \mathbf{r}_i und summieren über alle Teilchen, dann finden wir

$$\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)} + \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \left(\sum_j \mathfrak{F}_{ij} \right). \quad (4.11)$$

Wegen $\dot{\mathbf{t}}_i \wedge \mathbf{p} = 0$ können wir die linke Seite in der Form

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \mathfrak{L}_i,$$

schreiben, wobei \mathfrak{L}_i der Drehimpuls des i 'ten Teilchens ist. Fassen wir nun die Summe der Drehimpulse zum *Gesamtdrehimpuls* zusammen,

$$\mathfrak{L} = \sum_i \mathfrak{L}_i, \quad \mathfrak{L}_i = \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i, \quad (4.12)$$

dann ist die linke Seite von (4.11) die Zeitableitung von \mathfrak{L} . In der Doppelsumme gibt es zu jedem Term $\mathbf{r}_i \wedge \mathfrak{F}_{ij}$ auch den Term $\mathbf{r}_j \wedge \mathfrak{F}_{ji}$. Die Summe beider Terme ist wegen $\mathfrak{F}_{ij} = -\mathfrak{F}_{ji}$ gleich $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \wedge \mathfrak{F}_{ij}$.

Die inneren Kräfte für Punktteilchen sind meistens *Zentralkräfte*. Dann zeigt die vom Massenpunkt j auf den Massenpunkt i wirkende Kraft \mathfrak{F}_{ij} in Richtung der Verbindungslinie der beiden Massenpunkte,

$$\mathfrak{F}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)F(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j),$$

und das Vektorprodukt $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \wedge \mathfrak{F}_{ij}$ verschwindet. Damit ergibt (4.11) den

Drehimpulssatz: *Für Zentralkräfte ist die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpuls gleich der Summe der Drehmomente der äußeren Kräfte,*

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)} \equiv \sum_i \mathfrak{M}_i. \quad (4.13)$$

Bei der Ableitung des Drehimpulssatzes setzten wir voraus, dass die inneren Kräfte zentral sind. Der Satz kann aber im Rahmen der LAGRANGESchen Formulierung der Mechanik unter sehr allgemeinen Voraussetzungen bewiesen werden. Er folgt bereits aus der Isotropie des Euklidischen Raumes, siehe unten. Der Drehimpulssatz ist ein Naturgesetz, dessen Gültigkeitsbereich weit über die NEWTONSche Mechanik hinausgeht.

In einem abgeschlossenen System wirken keine äußeren Kräfte und es gilt der *Drehimpulserhaltungssatz*

$$\dot{\mathcal{L}} = 0, \quad (4.14)$$

die Verallgemeinerung des Flächensatzes auf mehrere Punktteilchen. Bei nicht abgeschlossenen Systemen ist das Schwerpunktsystem im allgemeinen kein Inertialsystem. Trotzdem ist es in Anwendungen oft nützlich, den Drehimpulssatz im Schwerpunktsystem aufzuschreiben. Dabei wollen wir annehmen, dass die Basen im Inertial- und Schwerpunktsystem übereinstimmen. Dann rotieren die Achsen des Schwerpunktsystems nicht und es treten keine Zentrifugal- und Corioliskräfte auf. Im Schwerpunktsystem hat der i 'te Massenpunkt den Ortsvektor \mathbf{r}'_i ,

$$\mathbf{r}_i = \mathfrak{R} + \mathbf{r}'_i \quad \text{mit} \quad \sum_i m_i \mathbf{r}'_i = M \mathfrak{R}' = \mathbf{o}. \quad (4.15)$$

Ersetzen wir im Drehimpuls

$$\mathcal{L} = \sum m_i \mathbf{r}_i \wedge \dot{\mathbf{r}}_i$$

überall \mathbf{r}_i durch $\mathfrak{R} + \mathbf{r}'_i$, multiplizieren aus und benutzen $\sum m_i \mathbf{r}'_i = 0$, dann finden wir

$$\mathcal{L} = \sum_i (\mathfrak{R} + \mathbf{r}'_i) \wedge (m_i \dot{\mathfrak{R}} + m_i \dot{\mathbf{r}}'_i) = M \mathfrak{R} \wedge \dot{\mathfrak{R}} + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \wedge \dot{\mathbf{r}}'_i$$

oder folgende einfache Beziehung zwischen den Drehimpulsen bezüglich der beiden Systeme,

$$\mathcal{L} = \mathfrak{R} \wedge \mathfrak{P} + \mathcal{L}'. \quad (4.16)$$

Mit $\mathfrak{P} = M \dot{\mathfrak{R}}$ und dem Impulssatz (4.6) folgt dann

$$\dot{\mathcal{L}} = \mathfrak{R} \wedge \dot{\mathfrak{P}} + \dot{\mathcal{L}}' = \mathfrak{R} \wedge \mathfrak{F}^{(a)} + \dot{\mathcal{L}}', \quad \mathfrak{F}^{(a)} = \sum_i \mathfrak{F}_i^{(a)}. \quad (4.17)$$

Im Inertialsystem gilt der Drehimpulssatz

$$\dot{\mathcal{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)} = \sum (\mathfrak{R} + \mathbf{r}'_i) \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)} = \mathfrak{R} \wedge \mathfrak{F}^{(a)} + \sum \mathbf{r}'_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)}. \quad (4.18)$$

Aus dem Vergleich der letzten beiden Gleichungen ergibt sich

$$\dot{\mathcal{L}}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)}. \quad (4.19)$$

Wir haben somit den folgenden wichtigen Satz bewiesen: *Der Drehimpulssatz gilt auch im Schwerpunktsystem, d.h. wenn man als Bezugspunkt den Schwerpunkt des Systems wählt und die Achsen parallel den Achsen eines Inertialsystem sind.*

4.1.3 Der Energiesatz

Ähnlich wie beim 1-Körperproblem multiplizieren wir die Bewegungsgleichung (4.3) skalar mit $\dot{\mathbf{r}}_i$ und summieren über alle Massenpunkte,

$$\sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathfrak{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{ij} \mathfrak{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \mathfrak{F}_i^{(a)} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Für konstante träge Massen ist die linke Seite die Zeitableitung der kinetischen Energie,

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2. \quad (4.20)$$

Für die LORENTZkraft ist \mathfrak{F}_i senkrecht zu $\dot{\mathbf{r}}_i$ und entsprechend ist die kinetische Energie konstant. Wir werden diesen Spezialfall von geschwindigkeitsabhängigen konservativen Kräften später behandeln und ihn vorerst ausschließen.

Nun wollen wir versuchen, auch die rechte Seite als Zeitableitung zu schreiben. Kräfte, für die dies möglich ist, besitzen ein *Potential* $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$, das der Gleichung

$$\sum_i \mathfrak{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = -\frac{dV}{dt} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{F}_i = -\nabla_i V, \quad (4.21)$$

genügt, und diese Kräfte heißen *Potentialkräfte*². Der Index i am Gradienten bedeutet, dass die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten des i -ten Massenpunktes zu bilden sind. Notwendig und hinreichend für die (lokale) Existenz eines Potentials sind die Bedingungen an die Kraftkomponenten, die aus der Gleichheit aller gemischten Ableitungen des Potentials folgen. Bezeichnen $\{x_{ai}\}$, $a = 1, 2, 3$, die kartesischen Koordinaten des i -ten Teilchens, dann bedeutet dies

$$\frac{\partial F_{ai}}{\partial x_{bj}} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_{bj} \partial x_{ai}} = \frac{\partial F_{bj}}{\partial x_{ai}} \quad (\mathfrak{F}_i = F_{ai} \mathbf{e}_a). \quad (4.22)$$

Diese Bedingungen bedeuten starke Einschränkungen an die mögliche Form der auf das i 'te Teilchen wirkenden Kraft

$$\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i^{(a)}(\mathbf{r}_i) + \sum_{k \neq i} \mathfrak{F}_{ik}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k).$$

Die auf das Teilchen i wirkende äußere Kraft $\mathfrak{F}_i^{(a)}$ ist unabhängig vom Ort der anderen Teilchen. Sie ist eine Potentialkraft wenn sie wirbelfrei ist, also wenn

$$\nabla_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)} = 0 \quad (\text{keine Summe über } i) \quad (4.23)$$

gilt. Die zwischen zwei Massenpunkten i und k wirkenden inneren Kräfte \mathfrak{F}_{ik} und \mathfrak{F}_{ki} hängen nur von den Ortsvektoren \mathbf{r}_i und \mathbf{r}_k der beiden Teilchen ab, und damit bedeutet (4.22)

$$\frac{\partial}{\partial x_{bj}} \sum_{k \neq i} F_{aik} = \frac{\partial}{\partial x_{ai}} \sum_{k \neq j} F_{bjk}.$$

²Potentialkräfte leisten keine Arbeit und sind deshalb immer konservativ. Die Umkehrung gilt aber nicht: Die Lorentzkraft ist konservativ obwohl sie aus keinem Potential im Ortsraum $V(\mathbf{r})$ abgeleitet werden kann, d.h. sie ist keine Potentialkraft.

Insbesondere für $i = j$ folgt daraus

$$\nabla_i \wedge \mathfrak{F}_{ik} = 0, \quad k \neq i \quad (\text{keine Summe!}) \quad (4.24)$$

und für $i \neq j$

$$\frac{\partial F_{bji}}{\partial x_{ai}} = \frac{\partial F_{aij}}{\partial x_{bj}} \stackrel{A=R}{=} -\frac{\partial F_{aji}}{\partial x_{bj}} \stackrel{(4.24)}{=} -\frac{\partial F_{bji}}{\partial x_{aj}} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_{ai}} + \frac{\partial}{\partial x_{aj}} \right) F_{bji} = 0,$$

wobei wir Actio = Reactio und (4.24) benutzten. Die letzte Differentialgleichung impliziert, dass \mathfrak{F}_{ij} folgende Form haben muß

$$\mathfrak{F}_{ij} = \mathfrak{F}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) = -\mathfrak{F}_{ji}(\mathbf{r}_{ji}), \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j. \quad (4.25)$$

Fassen wir zusammen: die am Teilchen i angreifende äußere Kraft $\mathfrak{F}_i^{(a)}$ kann aus einem Potential abgeleitet werden wenn sie wirbelfrei ist. Die inneren Kräfte \mathfrak{F}_{ij} besitzen ein Potential wenn \mathfrak{F}_{ij} nur von der Differenz $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \equiv \mathbf{r}_{ij}$ abhängt und als Funktion dieser Variable wirbelfrei ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, dann gibt es ein Potential

$$V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = \sum_{\text{Paare}(i,j)} V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) + \sum_i V_i^{(a)}(\mathbf{r}_i), \quad (4.26)$$

so dass (4.21) gilt. Die *Gesamtenergie* des Systems,

$$E = T + V = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \sum_{\text{Paare}(i,j)} V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) + \sum_i V_i^{(a)}(\mathbf{r}_i), \quad (4.27)$$

ist dann eine Konstante der Bewegung, $E = \text{const.}$

Im Allgemeinen ist ein System aber nicht konservativ. Ähnlich wie für das einzelne Teilchen teilen wir die Kräfte dann auf in *Potentialkräfte* $\mathfrak{F}_{\text{Kons}}$, die ein Potential besitzen, und *dissipative Kräfte* $\mathfrak{F}_{\text{Diss}}$, für die dies nicht der Fall ist, auf. Damit erhalten wir den

Energiesatz: Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie eines Systems von Massenpunkten ist gleich der Leistung der dissipativen Kräfte,

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \sum_i \mathfrak{F}_{i \text{ Diss}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \quad (4.28)$$

In der Abwesenheit von dissipative Kräften gilt der Energieerhaltungssatz (4.27).

Die gesamte kinetische Energie kann in zwei Teile zerlegt werden. Bezeichnet \mathfrak{R} den Ort des Schwerpunktes und \mathbf{r}'_i den Ortsvektor des i 'ten Teilchens im Schwerpunktsystem, so ist

$$\mathbf{r}_i = \mathfrak{R} + \mathbf{r}'_i \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathfrak{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i.$$

Damit schreibt sich die kinetische Energie gemäß

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i (m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 + m_i \dot{\mathfrak{R}}^2 + 2m_i \dot{\mathfrak{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}}'_i)$$

Da das letzte Glied der rechten Seite wegen (4.15) offensichtlich verschwindet, folgern wir:

Die gesamte kinetische Energie des Systems setzt sich aus der kinetischen Energie $\frac{1}{2}M\dot{\mathfrak{K}}^2$ der im Schwerpunkt vereinigt gedachten Gesamtmasse M und der Energie der Bewegung der Teile des Systems relativ zum Schwerpunkt zusammen.

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\mathfrak{K}}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i\dot{\mathfrak{r}}_i'^2.$$

Schlussendlich wollen wir noch die Bedingungen an die Potentiale V_{ij} ableiten, so dass neben dem Energiesatz auch noch der Drehimpulssatz gilt.

In der Zeitableitung des Gesamtdrehimpulses

$$\dot{\mathfrak{L}} = \sum_i \mathfrak{r}_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)} + \sum_{ij} \mathfrak{r}_i \wedge \mathfrak{F}_{ij} = \sum_i \mathfrak{r}_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)} - \sum_{i<j} \mathfrak{r}_{ij} \wedge \nabla_i V_{ij}(\mathfrak{r}_{ij}),$$

worin wir Actio = Reactio setzten, tragen die inneren Kräfte nicht bei, wenn

$$0 = \mathfrak{r}_{ij} \wedge \nabla_i V_{ij}(\mathfrak{r}_{ij}) \quad \text{für alle } i, j$$

gilt. Also muß der Gradient von V_{ij} in Richtung von \mathfrak{r}_{ij} zeigen, was bedeutet, dass die Niveauflächen von $V_{ij}(\mathfrak{r}_{ij})$ Kugeloberflächen um $\mathfrak{r}_{ij} = 0$ sind. Deshalb kann V_{ij} nur eine Funktion von $r_{ij} = \|\mathfrak{r}_{ij}\|$ sein. Für ein System mit inneren Potentialkräften gilt also der Drehimpulssatz (4.13), wenn

$$\mathfrak{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij}(r_{ij}) = -\hat{\mathfrak{r}}_{ij} V'_{ij}(r_{ij}), \quad (4.29)$$

wobei

$$\nabla V(r) = \frac{dV(r)}{dr} \nabla r = \hat{\mathfrak{r}} V'(r)$$

benutzt wurde. Actio = Reactio ist erfüllt, falls noch zusätzlich gilt

$$V_{ij}(r) = V_{ji}(r). \quad (4.30)$$

Bezüglich der *Integrale der Bewegungsgleichungen* können wir zusammenfassend folgendes sagen. Unter den drei Integralsätzen für ein abgeschlossenes mechanisches System mit Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = - \sum_j \hat{\mathfrak{r}}_{ij} V'_{ij}(r_{ij}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.31)$$

ergibt der Erhaltungssatz des Schwerpunktes 6 Integrale, der Erhaltungssatz des Drehimpulses 3 Integrale und der Energiesatz 1 Integral. Die maximale Anzahl der allgemein angebbaren Integrale ist 10,

$$\mathfrak{R}, \quad \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{L} \quad \text{und} \quad E.$$

Ein System aus N Punktteilchen hat $6N$ Freiheitsgrade, $3N$ Koordinaten und $3N$ Impulse (oder Geschwindigkeiten) und eine Lösung ist nach Angabe von $6N$ Anfangsbedingungen (lokal) eindeutig bestimmt. Für ein abgeschlossenes 2-Körpersystem, für welches alle Erhaltungssätze gelten, verbleiben nach Berücksichtigung der Integrale der Bewegung effektiv 2 Freiheitsgrade.

4.2 Gekoppelte Pendel

In Abschnitt (3.4) haben wir die Lösungsmethoden für allgemeine lineare Systeme diskutiert, aber bisher nur auf Schwingungen *eines* Massenpunktes angewandt. Wir behandeln jetzt Schwingungen von *zwei* schwingungsfähigen Massen, die miteinander gekoppelt sind. Derartige Schwingungen spielen auch bei elektrischen Messanordnungen eine wichtige Rolle. Man spricht dort von einem primären und einem sekundären Kreis. Der primäre Kreis wird angeregt, der sekundäre schwingt mit, besonders stark dann, wenn *Resonanz* vorliegt. Hier beschäftigen wir uns natürlich mit gekoppelten mechanischen Schwingungen, die vielfach als Modelle für die elektrischen Schwingungen herangezogen werden.

Wir betrachten zwei schwingende Massenpunkte wie in Abbildung (4.2) dargestellt. Es wir-

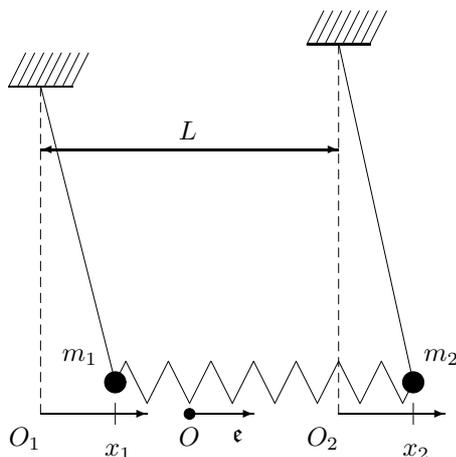


Abbildung 4.2: Zwei gekoppelte Pendel.

ke auf den von der Gleichgewichtslage O_1 in der Entfernung x_1 befindliche Punkt m_1 die harmonische *Rückstellkraft* $-m_1\omega_1^2x_1$ und auf den von O_2 in der Entfernung x_2 befindlichen Punkt m_2 die *Rückstellkraft* $-m_2\omega_2^2x_2$. Dies sind äußere Kräfte, die vom Schwerfeld der Erde herrühren (die Erde wird als nicht zum System gehörend angesehen). Die beiden Massenpunkte seien durch eine Spiralfeder miteinander verbunden, die im ungedehnten Zustand sein soll, wenn m_1 in O_1 und m_2 in O_2 ist. Dieses System können wir annähernd durch zwei lange, über einer Feder verbundene Pendel mit kleinen Auslenkungen verwirklichen. Ist die Federkraft pro Dehnung um eine Längeneinheit gleich k , dann wirkt die Feder auf m_1 mit der Kraft $k(x_2 - x_1)$ und auf m_2 mit $k(x_1 - x_2)$. Diese inneren Kräfte erfüllen das Actio = Reactio Gesetz.

Also lauten die NEWTONschen Bewegungsgleichungen für das gekoppelte System

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -m_1\omega_1^2x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -m_2\omega_2^2x_2 - k(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Je nachdem ob der Kopplungskoeffizient k groß oder klein verglichen mit den $m_i\omega_i^2$ ist, spricht man von starker oder schwacher Kopplung. Die wirkenden Kräfte sind konservativ,

$\partial_1 K_2 = \partial_2 K_1 = k$, mit Potential

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(m_1\omega_1^2 x_1^2 + m_2\omega_2^2 x_2^2 + k(x_1 - x_2)^2).$$

Entsprechend ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant,

$$E = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) + V = \text{konstant.}$$

Bei der Lösungssuche machen wir den üblichen Lösungsansatz

$$x_1 = Ae^{\lambda t} \quad \text{und} \quad x_2 = Be^{\lambda t},$$

welcher, nach Einsetzen in die Bewegungsgleichungen, auf folgende Gleichungen führt,

$$A(\lambda^2 + \omega_1^2 + k/m_1) = Bk/m_1 \quad \text{und} \quad B(\lambda^2 + \omega_2^2 + k/m_2) = Ak/m_2.$$

Hieraus folgt

$$\frac{B}{A} = \frac{\lambda^2 + \omega_1^2 + k/m_1}{k/m_1} = \frac{k/m_2}{\lambda^2 + \omega_2^2 + k/m_2}$$

und damit die *Säkulargleichung*

$$(\lambda^2 + \omega_1^2 + k/m_1)(\lambda^2 + \omega_2^2 + k/m_2) - \frac{k^2}{m_1 m_2} = 0. \quad (4.33)$$

Wir beschränken nun auf den *sympathischen Pendel* zweier gleich langer und gleich schwerer Pendel. Für den sympathischen Pendel gilt

$$\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega_0 \quad \text{und} \quad \frac{k}{m_1} = \frac{k}{m_2} \equiv \kappa. \quad (4.34)$$

Die Lösungen sind einfacher zu konstruieren, wenn wir die neuen Koordinaten

$$R = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \text{und} \quad x = x_2 - x_1. \quad (4.35)$$

eingeführen. R ist der Ort des Schwerpunktes im System (O, \mathbf{e}) in der Abbildung (4.2) und $L + x$ der Abstand zwischen den schwingenden Massenpunkten.

Nach Addition beziehungsweise Subtraktion der beiden Gleichungen in (4.32) ergeben sich die *entkoppelten Gleichungen*

$$\ddot{R} + \omega_0^2 R = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{x} + (\omega_0^2 + 2\kappa)x = 0. \quad (4.36)$$

Der Schwerpunkt der beiden Pendel schwingt mit der Kreisfrequenz ω_0 und ihr Abstand mit der Kreisfrequenz $\omega = (\omega_0^2 + 2\kappa)^{1/2}$,

$$R(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad , \quad x(t) = a \cos(\omega t + \varphi). \quad (4.37)$$

Wir bringen anfänglich m_2 aus seiner Ruhelage nach $x_2 = c$ und lassen beide Pendel ohne Anfangsgeschwindigkeit los,

$$\begin{aligned} x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = c \quad , \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \quad \text{bzw.} \\ R(0) = \frac{1}{2}c, \quad x(0) = c \quad , \quad \dot{R}(0) = \dot{x}(0) = 0. \end{aligned}$$

Für diese Anfangsbedingungen verschwinden die Phasenverschiebungen und $2A = a = c$. Für die Positionen der Pendel bedeutet dies, dass

$$x_1 = \frac{c}{2}(\cos \omega_0 t - \cos \omega t) = c \sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t \sin \frac{\omega + \omega_0}{2} t$$

$$x_2 = \frac{c}{2}(\cos \omega_0 t + \cos \omega t) = c \cos \frac{\omega - \omega_0}{2} t \cos \frac{\omega + \omega_0}{2} t.$$

Die ersten Faktoren auf den rechten Seiten sind für schwache Kopplung $\kappa \ll \omega_0^2$ langsam veränderlich mit der Zeit und die beiden Pendel führen eine *Schwebung* aus: hat die Amplitude von m_1 ihren größten Wert, dann ist diejenige von m_2 Null und umgekehrt, siehe Abbildung (4.3).

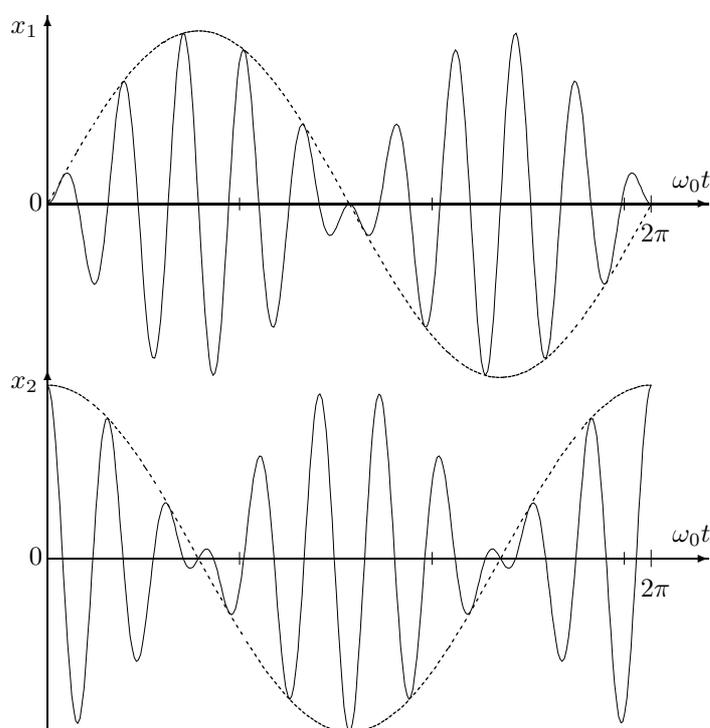


Abbildung 4.3: Die Amplituden des sympathischen Pendels für schwache Kopplung.

Die Energie wechselt periodisch von dem einen zu dem anderen Pendel hinüber.

Werden anfänglich beide Pendel gleich stark im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne aus der Ruhelage entfernt, d.h. wählt man folgende Anfangsbedingungen für $t = 0$

- a) $x_1 = c, x_2 = c, \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ bzw. $R = c, x = 0, \dot{R} = \dot{x} = 0,$
 b) $x_1 = c, x_2 = -c, \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ bzw. $R = 0, x = -2c, \dot{R} = \dot{x} = 0,$

dann findet kein Schweben der Energie statt. Im Fall a) ist $x = 0$ und die beiden Pendel schwingen synchron mit der Kreisfrequenz ω_0 ,

$$x_1 = x_2 = c \cos \omega_0 t.$$

Im Fall b) ruht der Schwerpunkt, $R = 0$, und die Pendel schwingen entgegengesetzt mit der Kreisfrequenz $\omega > \omega_0$,

$$x_1 = -x_2 = c \cos \omega t.$$

Die zwei Schwingungszustände a) und b) heißen *Normalschwingungen* oder *Eigen-* oder *Fundamentalschwingungen* unseres gekoppelten Systems von zwei Freiheitsgraden. Die Frequenzen $\omega_0/2\pi$ und $\omega/2\pi$ sind die zugehörigen *Eigenfrequenzen*. Wir haben früher gesehen, dass ein schwingungsfähiges System von N Freiheitsgraden genau N Fundamentalschwingungen hat.

Nicht ganz so einfach ist die Theorie, wenn die beiden Pendel gegeneinander verstimmt sind, wenn sie also nicht genau gleich lang oder nicht genau gleich schwer sind. Es findet zwar auch Energieaustausch statt, doch derart, dass das angeregte Pendel ein von Null verschiedenes Minimum hat. Nur das ursprünglich ruhende Pendel kommt dann im Verlauf der Bewegung wieder zur Ruhe. Die Energieübertragung ist als Folge der Verstimmung unvollkommen.

4.3 Das Zweikörperproblem

Das Zweikörperproblem ist: Wie bewegen sich zwei Massenpunkte - zum Beispiel die Sonne und die Erde - in ihrem gegenseitigen Kraftfeld. Wir betrachten also das *abgeschlossene* Zweikörperproblem mit zentralen inneren Potentialkräften, so dass Drehimpuls und Energie erhalten sind. In einem Inertialsystem lauten dann die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\nabla_1 V(r_{12}) = -\hat{\mathbf{t}}_{12} V'(r_{12}) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\nabla_2 V(r_{12}) = -\hat{\mathbf{t}}_{21} V'(r_{12}), \end{aligned} \quad (4.38)$$

wobei r_{12} der Abstand zwischen den beiden Teilchen ist. Nach Addition dieser Gleichungen erhalten wir den bekannten *Schwerpunktsatz*,

$$M \ddot{\mathfrak{R}} = 0, \quad M \mathfrak{R} = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2, \quad M = m_1 + m_2, \quad (4.39)$$

nach dem sich der Schwerpunkt geradlinig gleichförmig bewegt oder ruht,

$$\mathfrak{R}(t) = \mathfrak{R}(0) + \dot{\mathfrak{R}}(0)t. \quad (4.40)$$

Dividiert man die Bewegungsgleichung für \mathbf{r}_1 durch m_1 und diejenige für \mathbf{r}_2 durch m_2 und subtrahiert die entsprechenden Differentialgleichungen, dann findet man für die Beschleunigung der Relativkoordinate $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{t}} V'(r) \quad (4.41)$$

wobei die *reduzierte Masse* der beiden Körper auftritt,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.42)$$

Damit ist das Zweikörperproblem auf das Einkörperproblem für die Relativbewegung reduziert. Aus der Lösung $\mathbf{r}(t)$ für die Relativbewegung und $\mathfrak{R}(t)$ in (4.40) können dann mit Hilfe die Umkehrtransformationen

$$\mathbf{r}_1 = \mathfrak{R} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = \mathfrak{R} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r} \quad (4.43)$$

die Bahnkurven $\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)$ berechnet werden.

Auch für allgemeinere Zentralkräfte der Form

$$\mathfrak{F}_{12} = \hat{\mathbf{t}}_{12} K(\mathbf{r}_{12}, \dot{\mathbf{t}}_{12}) = -\mathfrak{F}_{21}, \quad (4.44)$$

kann man das 2-Körperproblem auf ein 1-Körperproblem für die Relativbewegung reduzieren, wie sich leicht zeigen läßt. Dann lautet die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{t}} K(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{t}}), \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_{12}. \quad (4.45)$$

In den meisten physikalisch wichtigen Anwendungen sind die inneren Kräfte aber Potentiale, und wir haben es mit der Gleichung (4.41) zu tun.

Mit (4.43) schreibt sich der erhaltene Gesamtdrehimpuls gemäß

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{R} \wedge \mathfrak{P} + \mu \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{t}} = M \mathfrak{R}(0) \wedge \dot{\mathfrak{R}}(0) + \mu \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{t}}. \quad (4.46)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist der Drehimpuls der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse und der zweite Term der *relative Drehimpuls* $\mathfrak{L}^{\text{rel}} = \mu \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{t}}$. Ein Vergleich mit (4.16) oder eine einfache Rechnung zeigen, dass $\mathfrak{L}^{\text{rel}}$ gleichzeitig der Drehimpuls im Schwerpunktsystem ist. Er ist eine Konstante der Bewegung und damit liegt $\mathbf{r}(t)$ in der Ebene durch $\mathbf{r} = 0$ und senkrecht zum relativen Drehimpuls.

Wir legen \mathbf{e}_3 in Richtung von $\mathfrak{L}^{\text{rel}}$, so dass der Ortsvektor der Relativbewegung $\mathbf{r}(t)$ für alle Zeiten in der x_1-x_2 -Ebene liegt. Wir wählen Kugelkoordinaten, wobei $\theta = \pi/2$ und entsprechend $\sin \theta = 1$ zu setzen ist. Aus (2.109) entnehmen wir

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r, \quad \dot{\mathbf{t}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \ddot{\mathbf{t}} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi.$$

Die Bewegungsgleichungen (4.41) schreiben sich dann folgendermaßen,

$$\mu(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = -V'(r) \quad \text{und} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) = 0. \quad (4.47)$$

Die erhaltene Energie und der erhaltene Drehimpuls der Relativbewegung sind

$$E = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}^{\text{rel}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \mathbf{e}_z \equiv \ell \mathbf{e}_z. \quad (4.48)$$

Die zweite Bewegungsgleichung in (4.47) ist gerade der Flächensatz für die Relativbewegung. Damit können wir $\dot{\varphi}$ in der ersten Differentialgleichung in (4.47) eliminieren und erhalten folgende Bewegungsgleichung für den Abstand der beiden Partikel,

$$\mu \ddot{r} = \frac{\ell^2}{\mu r^3} - V'(r) = -V'_{\text{eff}}(r) \quad \text{mit} \quad V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}. \quad (4.49)$$

V_{eff} heißt *effektives Potential*. Für positives V'_{eff} ist \ddot{r} negativ und die beiden Teilchen ziehen sich an. Für negatives V'_{eff} haben wir es mit einer *Abstoßung* zu tun.

Diese Bewegungsgleichung hat als Integral die konstante Energie der Relativbewegung (4.48),

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r). \quad (4.50)$$

Da das effektive Potential für einen Relativdrehimpuls $\ell \neq 0$ bei $r \rightarrow 0$ über alle Massen anwächst, können sich die beiden Teilchen nicht zu nahe kommen. Man spricht von der *Zentrifugalbarriere*. Bei fester Energie und bei festem Drehimpuls ist der minimale Abstand der beiden Teilchen r_{\min} der kleinste Radius für den

$$E = V_{\text{eff}}(r_{\min}) = V(r_{\min}) + \frac{\ell^2}{2\mu r_{\min}^2}, \quad (4.51)$$

gilt, siehe Abbildung (4.4). Ob es noch weitere Umkehrpunkte gibt, an denen die Geschwin-

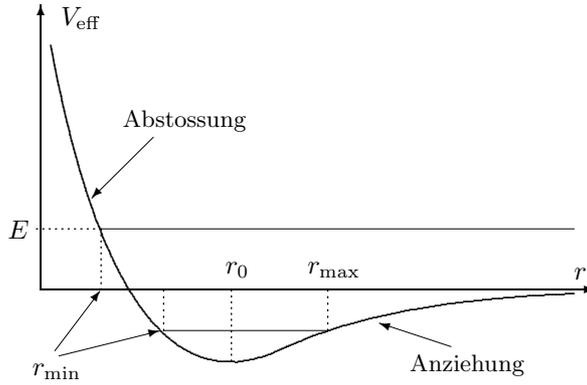


Abbildung 4.4: Für $\ell \neq 0$ können sich die beiden Teilchen nicht beliebig nahe kommen.

digkeit verschwindet, hängt vom Potential $V(r)$ ab. Für ein für große Abstände anwachsendes Potential wird es immer einen größten Abstand zwischen den Teilchen geben. Die beiden Teilchen sind dann aneinander gebunden. Besitzt das effektive Potential ein Extremum bei r_0 , $V'_{\text{eff}}(r_0) = 0$, dann ist $r(t) = r_0$ eine Lösung der Bewegungsgleichung (4.49) mit konstantem Radius und beschreibt eine *Kreisbahn* mit Relativenergie und Relativdrehimpuls

$$E = V_{\text{eff}}(r_0) \quad \text{und} \quad \ell = \mu r_0^2 \dot{\varphi}. \quad (4.52)$$

Die Kreisbahn ist stabil wenn r_0 ein Minimum von V_{eff} ist und andernfalls instabil.

Die Auflösung von (4.50) nach \dot{r} ergibt dann die schon bei der eindimensionalen Bewegung gefundene Lösung,

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r')}} \quad (4.53)$$

allerdings mit einem drehimpulsabhängigen effektiven Potential V_{eff} . Im Schwerpunktsystem ist $\mathfrak{R} = 0$ und entsprechend

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{M} \mathbf{r} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{M} \mathbf{r}, \quad (4.54)$$

und die Bahnen beider Teilchen liegen in ein und derselben Ebene durch den Schwerpunkt mit dem konstanten Normalenvektor $\mathfrak{L}^{\text{rel}}$.

4.3.1 Kepler- und Coulomb-Problem

In der Absicht, die schon bekannten KEPLERSchen Gesetze zu beweisen, postulierte NEWTON sein allgemeines, dem Actio = Reactio-Prinzip genügendes Anziehungsgesetz zwischen je zwei massiven Körpern, gemäß dem der Betrag der Kraft auf jeden der beiden Körper umgekehrt proportional zum Quadrat ihres gegenseitigen Abstands und die Richtung der Kraft längs der Verbindungslinie der beiden Körper ist. Die Kräfte sind also zentrale Zweiteilchenkräfte,

$$\mathfrak{F}_{12} \sim \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}.$$

Das Besondere an diesem Gesetz ist, dass die Kraft auf einen Körper proportional zu dessen (schweren) Masse sein soll,

$$\mathfrak{F}_{12} = -m_1\beta_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}. \quad (4.55)$$

Kein anderes Kraftgesetz hat diese Eigenschaft. Das Phänomen der universellen Anziehung von massiven Körpern heißt *Gravitation*. Die Konstante β_2 muß positiv sein, damit der Körper m_1 von Körper m_2 angezogen wird. Das Actio = Reactio - Gesetz verlangt, dass

$$m_1\beta_2 = m_2\beta_1 \quad \text{oder} \quad \frac{\beta_1}{m_1} = \frac{\beta_2}{m_2} \equiv \gamma,$$

eine universelle Konstante ist. Damit ergibt sich die folgende Form für die *Newtonsche Gravitationskraft*,

$$\mathfrak{F}_{12} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}. \quad (4.56)$$

Die positive universelle Konstante γ heißt *Gravitationskonstante*.

Auch zwischen elektrisch geladenen Körpern wirken Kräfte, die vom Ladungszustand der Körper abhängen. Ladungen mit entgegengesetzten Vorzeichen ziehen sich an, solche mit gleichen Vorzeichen stoßen sich ab. Für zwei kleine Körper, deren Durchmesser klein relativ zu ihrem Abstand ist, ist das Kraftgesetz besonders einfach. Die Experimente zeigen, dass die Kraft zwischen zwei elektrisch geladenen kleinen Teilchen proportional zu den elektrischen Ladungen q_1, q_2 und invers proportional zum Quadrat des Abstands r_{12} der beiden Ladungen ist. Diese *COULOMBkraft* wirkt in Richtung der Verbindungslinie der beiden Ladungen. Damit ergibt sich das folgende Kraftgesetz für zwei Punktladungen

$$\mathfrak{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}. \quad (4.57)$$

Die *Dielektrizitätskonstante* des Vakuums ϵ_0 bestimmt die Stärke der Wechselwirkung; ihr numerischer Wert hängt von der gewählten Maßeinheit für die Ladungen ab³. Im Gegensatz zur Gravitationskraft kann die elektrische Kraft anziehend oder abstoßend sein, je nach relativem Vorzeichen der beiden Ladungen. Während die Gravitation *universell* auf jede Form von Masse und/oder Energie wirkt, erfährt ein neutrales Teilchen keine COULOMBkraft.

³Dies wird im nächsten Semester detailliert erklärt werden.

Die NEWTONSche Gravitationskraft und die COULOMBkraft haben dieselbe funktionale Form: beide sind Zentralkräfte und invers proportional zum Quadrat des gegenseitigen Abstand der beiden Teilchen,

$$\mathfrak{F}_{12} = -\alpha_{12} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \alpha_{12} = \gamma m_1 m_2 \quad \text{bzw.} \quad \alpha_{12} = -q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0. \quad (4.58)$$

Also finden wir folgende NEWTONSchen Bewegungsgleichungen für gravitativ und elektrisch wechselwirkende Körper,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \alpha_{ij} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}, \quad \alpha_{ij} = \gamma m_i m_j - \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0}. \quad (4.59)$$

Links stehen die trägen Massen und rechts die schweren Massen und elektrischen Ladungen. Wir werden wieder annehmen, dass das Äquivalenzprinzip gilt und entsprechend träge und schwere Massen gleichsetzen. Es handelt sich hier um Potentialkräfte, da

$$\mathfrak{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij} \quad \text{mit} \quad V_{ij} = -\frac{\alpha_{ij}}{r_{ij}} \quad (4.60)$$

gilt. Für zwei ungeladene Körper ist

$$V(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad (4.61)$$

das NEWTONSche *Potential*. In der Laborphysik können wir für elektrisch geladene Teilchen die gravitative Kraft vernachlässigen und dann heißt das Potential

$$V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (4.62)$$

COULOMB*potential*. Die NEWTONSche Gravitationskraft und die COULOMBkraft sind konservativ und zentral. Entsprechend sind die Gesamtenergie

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\alpha_{ij}}{r_{ij}} \quad (4.63)$$

und der Gesamtdrehimpuls

$$\mathfrak{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \wedge \dot{\mathbf{r}}_i \quad (4.64)$$

Konstanten der Bewegung.

Für das N -Körperproblem ist für $N > 2$ keine geschlossene Lösung von (4.59) angebar⁴, so dass man auf numerische und/oder Näherungsmethoden angewiesen ist. Bei den Näherungsmethoden geht man davon aus, dass der Hauptbeitrag der Wechselwirkung durch das zunächst als abgeschlossen betrachtete exakt lösbare Zweikörperproblem, zum Beispiel Sonne - Planet (oder Komet), gegeben ist, während die Kräfte der anderen Körper als äußere Störungen betrachtet werden, von denen man die dominanten berücksichtigt.

⁴Abgesehen von einigen sehr speziellen und symmetrischen Konfigurationen, siehe Übungen.

Die Gleichung für die Relativbewegung des Zweiteilchensystems hat mit der reduzierten Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}, \quad M = m_1 + m_2, \quad (4.65)$$

und $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ als Relativvektor von Teilchen 1 zu Teilchen 2 die Form

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.66)$$

Wir legen \mathbf{e}_3 wieder in Richtung des erhaltenen Relativdrehimpulses. Die erhaltene Energie der Relativbewegung ist dann

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r), \quad \text{wobei} \quad V_{\text{eff}} = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r} \quad (4.67)$$

ist. Wir könnten nun versuchen, das Integral in (4.53) für das NEWTONsche oder COULOMBpotential zu berechnen, um die Bewegungsgleichungen zu lösen.

Wir schlagen einen direkteren Weg zur Lösungssuche ein. Für eine Anfangsbedingung $\dot{\varphi}_0 = 0$ verschwindet der erhaltene Drehimpuls $\ell = \mu r^2 \dot{\varphi}$ und $\varphi = \text{const}$ für alle Zeiten. Dann beschreibt die Relativkoordinate eine radiale Bahn. Für $\ell \neq 0$ ist dagegen $\dot{\varphi} = \ell/\mu r^2$ nie Null und $\varphi(t)$ ist eine monotone Funktion der Zeit. Damit dürfen wir φ anstelle von t als neuen Parameter einführen. Dabei ist es bequem den inversen Radius $u = 1/r$ als abhängige Funktion zu betrachten. In den folgenden Formeln bezeichnet der Punkt die Ableitung nach der Zeit und der Strich die Ableitung nach φ . Mit den Identitäten

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{u'}{u^2} \dot{\varphi} = -\frac{\ell}{\mu} u' \quad \text{und} \quad \ddot{r} = \dot{r}' \frac{d\varphi}{dt} = -u'' \frac{\ell^2}{\mu^2} u^2$$

kann die Bewegungsgleichung (4.49) für den Abstand wie folgt umgeformt werden,

$$-\frac{\ell^2}{\mu} u^2 u'' = \frac{\ell^2}{\mu} u^3 - \alpha u^2 \quad \text{bzw.} \quad u'' + u = \frac{\alpha \mu}{\ell^2}. \quad (4.68)$$

Eine spezielle Lösung dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung ist $u = \alpha \mu / \ell^2$ und die *allgemeine Lösung* hat damit die Form

$$u(\varphi) = \frac{\alpha \mu}{\ell^2} \{1 - \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0)\}. \quad (4.69)$$

Die erhaltene *Gesamtenergie* der Bewegung ist

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu} (u'^2 + u^2) - \alpha u \stackrel{(4.69)}{=} \frac{\alpha^2 \mu}{2\ell^2} (\epsilon - 1). \quad (4.70)$$

Wir lösen nach ϵ auf,

$$\epsilon = \left(1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}\right)^{1/2}. \quad (4.71)$$

Es genügt eine Lösung der quadratischen Gleichung für ϵ zu berücksichtigen, da ein Vorzeichenwechsel von ϵ durch eine Verschiebung von φ_0 um π erreicht werden kann. Eingesetzt in (4.69) erhalten wir

$$u(\varphi) = \frac{1}{p} [1 - \epsilon \cos \varphi], \quad \frac{1}{p} = \frac{\alpha \mu}{\ell}, \quad (4.72)$$

wobei wir φ_0 so gewählt haben, dass für $\alpha > 0$ der Radius für $\varphi = \pi$ minimal wird und für $\alpha < 0$ für $\varphi = 0$. Um dies einzusehen berücksichtige man, dass für $\alpha < 0$ auch p negativ ist.

Kegelschnittgeometrie:

Da es vermutlich schon einige Zeit her ist, dass Sie sich mit Kegelschnitten beschäftigt haben, erinnere ich hier an die Parameterdarstellungen der Ellipse, Hyperbel und Parabel.

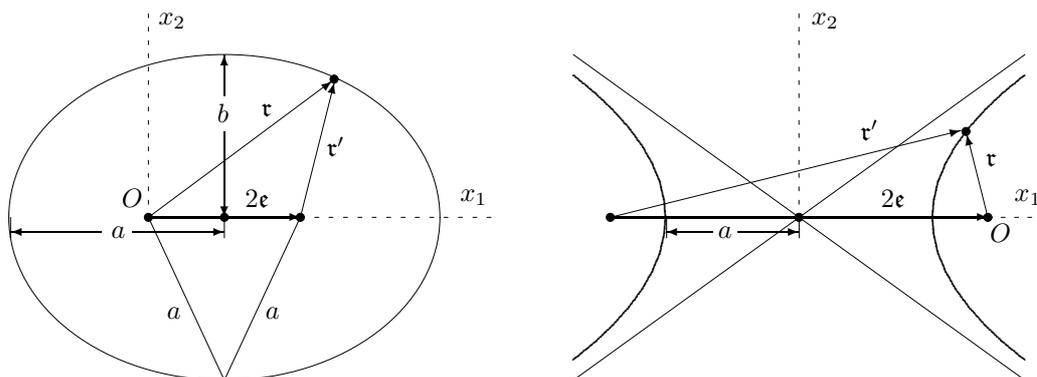


Abbildung 4.5: Zur Beschreibung von Ellipsen und Hyperbeln.

Ellipse: Wir wählen den linken Brennpunkt in Abbildung (4.5) als Koordinatenursprung. Aus der Figur liest man ab:

$$\mathbf{r} = 2\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{r}',$$

Da die Ellipse der geometrische Ort aller Punkte mit $r' + r = 2a$ ist, haben wir ferner

$$r' + r = 2a.$$

Durch Auflösen dieser beiden Gleichungen nach \mathbf{r}' beziehungsweise r' und quadrieren erhalten wir

$$\begin{aligned} r'^2 &= r^2 + 4\epsilon^2 - 4\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \\ r'^2 &= r^2 + 4a^2 - 4ar, \end{aligned}$$

wobei die *lineare Exzentrizität* $e = \|\boldsymbol{\epsilon}\| < a$ als Länge des Vektors $\boldsymbol{\epsilon}$ auftritt. Zieht man diese Gleichungen voneinander ab, so finden wir nach Einführung der *numerischen Exzentrizität* ϵ in $\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon \hat{\boldsymbol{\epsilon}}$,

$$0 = 4 \underbrace{(a^2 - \epsilon^2)}_{=b^2} = 4a(r - \epsilon \mathbf{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}),$$

beziehungsweise die Formel

$$r - \epsilon \mathbf{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{b^2}{a} \equiv p, \quad \text{wobei } 0 \leq \epsilon < 1$$

ist. Der positive Parameter p heißt *Halbparameter*. Damit erhalten wir schlussendlich

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \quad \text{mit } p = (1 - \epsilon^2)a > 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = r\epsilon \cos \varphi. \quad (4.73)$$

Hyperbel: Wir wählen als Koordinatenursprung den rechten Brennpunkt in der Abbildung (4.5) und beschreiben den *rechten Ast* der Hyperbel. Aus der Figur liest man ab:

$$\mathbf{r}' = 2\mathbf{e} + \mathbf{r},$$

Dieser Ast der Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte mit

$$r' - r = 2a.$$

Damit ergeben sich nach Einführung der *linearen Exzentrizität* $e = \|\mathbf{e}\| > a$ die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} r'^2 &= r^2 + 4e^2 + 4\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} \\ r'^2 &= r^2 + 4a^2 + 4ar. \end{aligned}$$

Zieht man diese Gleichungen voneinander ab und eliminiert r , so erhalten wir wieder nach Einführung der *numerischen Exzentrizität* $\epsilon = e/a$ die Formel

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \quad \text{mit} \quad p = (\epsilon^2 - 1)a \equiv \frac{b^2}{a} > 0. \quad (4.74)$$

Wählen wir als Koordinatenursprung den linken Brennpunkt, so findet man ganz analog für denselben *rechten Hyperbelast* die Darstellung

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \quad \text{mit} \quad p = -(\epsilon^2 - 1)a = -\frac{b^2}{a} < 0. \quad (4.75)$$

Offensichtlich ist $0 \leq \epsilon < 1$ für die Ellipse und $\epsilon > 1$ für die Hyperbel. Für $\epsilon = 1$ ergibt sich eine Parabel und für $\epsilon = 0$ ein Kreis.

Gebundene Bahnen

Nun können wir mit den Bahnen (4.72) im NEWTONSchen oder COULOMBpotential vergleichen. Die Relativkoordinate der Bewegung beschreibt einen Kegelschnitt relativ zu einem seiner Brennpunkte. Für eine anziehende Kraft ($\alpha > 0$) ist die Bahn zum Brennpunkt hin gekrümmt und für eine abstoßende Kraft ($\alpha < 0$) vom Brennpunkt weg gekrümmt. Wegen

$$p = \frac{\ell^2}{\alpha\mu} \quad \text{und} \quad \epsilon = \left(1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}\right)^{1/2} \quad (4.76)$$

ist die Bahn eine *Ellipse* für $E < 0$ und eine *Hyperbel* für $E > 0$. Dies bestätigt die frühere Überlegung, nach der gebundene Bewegungen in einem Potential mit $V(r) \leq 0$ negative Energien haben. Für $\alpha < 0$ ist $E > 0$ und es gibt keine gebundenen Bahnen. Für $E = 0$ ist $\epsilon = 1$ und der Relativvektor beschreibt eine *parabolische Bahn*. Für $\epsilon = 0$ verschwindet die Exzentrizität der Ellipse und wir erhalten eine *Kreisbahn*.

Für Ellipsenbahnen gilt das dritte KEPLERSche Gesetz wie man leicht einsieht: Aus der Konstanz des Relativdrehimpulses folgt, dass die von $\mathbf{r}(t)$ pro Zeiteinheit überstrichene Fläche konstant gleich $\ell/2\mu$ ist. Bezeichnet A die Ellipsenfläche und T die Umlaufzeit, dann ist

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\ell}{2\mu}.$$

Mit $p = b^2/a$ folgt

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{\ell}{2\mu} \stackrel{(4.76)}{=} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha p}{\mu}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu a}} \frac{b}{2}.$$

Der Flächensatz impliziert also folgende Relation zwischen T und der großen Halbachse a :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\alpha}{\mu}. \quad (4.77)$$

Insbesondere ist für nur gravitativ gebundene Körper

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2} \frac{m_1 m_2}{\mu} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}. \quad (4.78)$$

Die Massen aller Planeten im Sonnensystem sind klein verglichen mit der Sonnenmasse. Wir dürfen also in guter Näherung M durch m_S ersetzen und dann sind die Konstanten auf der rechten Seite für alle Planeten der Sonne dieselben. Also gilt für zwei Planeten in guter Näherung

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}. \quad (4.79)$$

Dies Beziehung ist das wohlbekannte

Dritte Keplersche Gesetz: *Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.*

In der folgenden Tabelle sind die großen Halbachsen, Umlaufzeiten und Verhältnisse a^3/T^2 für die Planeten im Sonnensystem angegeben:

Planet	a [AE]	T [s]	a^3/T^2 [AE ³ /s ²]
Merkur	0.387	$7.60 \cdot 10^6$	$1.0035 \cdot 10^{-15}$
Venus	0.723	$1.94 \cdot 10^7$	$1.0042 \cdot 10^{-15}$
Erde	1.000	$3.16 \cdot 10^7$	$1.0014 \cdot 10^{-15}$
Mars	1.523	$5.94 \cdot 10^7$	$1.0012 \cdot 10^{-15}$
Jupiter	5.202	$3.74 \cdot 10^8$	$1.0064 \cdot 10^{-15}$
Saturn	9.554	$9.30 \cdot 10^8$	$1.0083 \cdot 10^{-15}$
Uranus	19.218	$2.66 \cdot 10^9$	$1.0031 \cdot 10^{-15}$
Neptun	30.109	$5.20 \cdot 10^9$	$1.0094 \cdot 10^{-15}$
Pluto	39.60?	$7.82 \cdot 10^9$	$1.0155 \cdot 10^{-15}$

Planetendaten zum dritten Keplerschen Gesetz

Bezüglich der Ellipsenbahnen wollen wir noch einen weiteren Satz erwähnen. Die Gesamtenergie kann durch die große Halbachse ausgedrückt werden. Lösen wir nämlich die zweite Gleichung in (4.76) nach der Energie auf und ersetzen ℓ^2 aus der ersten Gleichung, dann erhalten wir mit $p = (1 - \epsilon^2)a$ folgende einfache Formel für die Energie der Relativbewegung,

$$E = -\frac{\alpha}{2a} = \begin{cases} -\gamma m_1 m_2 / 2a & \text{Newtonsche Kraft} \\ +q_1 q_2 / 8\pi \epsilon_0 a & \text{Coulombkraft.} \end{cases} \quad (4.80)$$

Also hängt die Energie im Falle einer Ellipsenbahn nur von der großen Achse ab; allen Ellipsen mit gleichem a (und verschiedener Exzentrizität) entspricht dieselbe Energie.

Im Prinzip kann neben der Bahngleichung auch die Zeitabhängigkeit der Koordinaten r und ϕ bestimmt werden. Aus dem Flächensatz $\ell = \mu r^2 \dot{\varphi}$ folgt nämlich, da $r = r(\varphi)$ schon bekannt ist, die dem Winkel φ entsprechende Zeit,

$$t = \frac{\mu}{\ell} \int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2(\varphi) d\varphi = t(\varphi). \quad (4.81)$$

Die Umkehrfunktion liefert $\varphi = \varphi(t)$, und damit ist mit $r = r(\varphi(t))$ auch der Radius als Funktion der Zeit bestimmt. Das Integral (4.81) kann aber nicht in geschlossener Form angegeben werden.

Ungebundene Bahnen

Ist die Energie der Relativbewegung zweier Körper positiv, so sind diese nicht gebunden. Für sehr frühe und sehr späte Zeiten haben die beiden Körper einen sehr großen ('unendlichen') Abstand. Wir können uns vorstellen, dass sie in sehr großem Abstand mit einer Relativgeschwindigkeit v_{∞} starten. Von Interesse ist die relative Winkelablenkung der Teilchen, der sogenannte *Streuwinkel*. Er ergibt sich aus dem Schnittwinkel $2\varphi_{\infty}$ der Asymptoten, siehe Figur (4.6) zu $\theta = \pi - 2\varphi_{\infty}$. Für den Winkel φ_{∞} divergiert der Radius r in (4.74). Dies ist

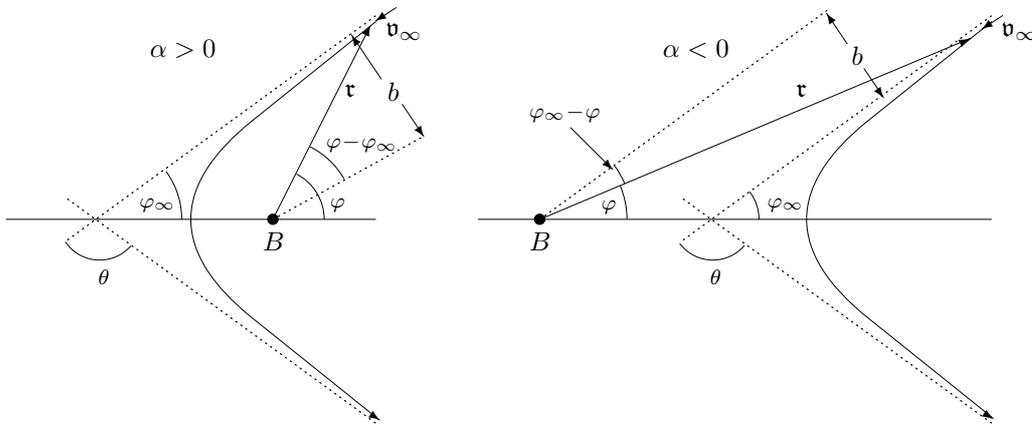


Abbildung 4.6: Rutherfordstreuung.

der Fall für $\epsilon \cos \varphi_{\infty} = 1$. Damit ist

$$\theta = \pi - 2 \arccos \left(\frac{1}{\epsilon} \right). \quad (4.82)$$

Führt man statt E und ℓ neben v_{∞} den Abstand des Ursprungs von der Asymptoten, den sogenannten *Stoßparameter* b als neue Konstante ein, so erhält man für $\alpha > 0$ und nach der L'HOSPITALSchen Regel

$$b = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{\infty}} \{r(\varphi) \sin(\varphi - \varphi_{\infty})\} = p \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{\infty}} \frac{\sin(\varphi - \varphi_{\infty})}{1 - \epsilon \cos \varphi} = \frac{p}{\epsilon} \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{\infty}} \frac{\cos(\varphi - \varphi_{\infty})}{\sin \varphi} = \frac{p}{\epsilon} \frac{1}{\sin \varphi_{\infty}}.$$

Der Stoßparameter b ist diejenige Strecke, um die sich die Teilchen bei kräftefreiem Flug verfehlen würden⁵. Wegen

$$\sin^2 \varphi_\infty = 1 - \cos^2 \varphi_\infty = 1 - \frac{1}{\epsilon^2}$$

finden wir folgenden einfachen Zusammenhang zwischen dem Stoßparameter und den Hyperbelparametern,

$$b = \frac{p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} = \frac{\ell}{\sqrt{2\mu E}} = \frac{\ell}{\mu v_\infty}, \quad (4.83)$$

wobei wir die Relativenergie bei sehr großen Abständen ausgewertet haben, $E = \mu v_\infty^2/2$. Für $\alpha < 0$ findet man exakt dasselbe Resultat. Diese einfache Beziehung gilt auch für allgemeine Zentralfeldpotentiale $V(r)$, siehe unten. Drücken wir in der Formel für die numerische Exzentrizität die Energie E durch v_∞ und den Drehimpuls ℓ gemäß (4.83) durch b und v_∞ aus, dann finden wir

$$\epsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu v_\infty^2 b}{\alpha}\right)^2}. \quad (4.84)$$

Damit ergibt sich für den Cotangens des halben Streuwinkels

$$\cot \frac{\theta}{2} = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{\epsilon} \right) = \tan(\arccos \frac{1}{\epsilon}) = \sqrt{\epsilon^2 - 1} = \frac{\mu v_\infty^2}{|\alpha|} b.$$

Für die COULOMBSTreuung ist $\alpha = -q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$ und wir erhalten

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{8\pi\epsilon_0 E}{|q_1 q_2|} b, \quad E = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2. \quad (4.85)$$

Für die Streuung zweier Himmelskörper aufgrund der NEWTONSchen Gravitationskraft ist $\alpha = \gamma m_1 m_2$ und entsprechend

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{v_\infty^2}{\gamma M} b. \quad (4.86)$$

Wir werden später in diesem Kapitel auf diese Resultate zurückgreifen, wenn wir den Streuquerschnitt für RUTHERFORDSTreuung berechnen werden.

4.4 Zwei-Körper-Zerfall eines Teilchens

Ein Teilchen der Masse m_0 zerfalle in zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2 . Beispiele aus der Kernphysik sind:



Die charakteristischen Größen der am Zerfallsprozess beteiligten Teilchen sind ihre Massen m_i und inneren Energien ϵ_i (Anregungsenergien, Bindungsenergien etc.). Für die Anwendungen sind zwei Koordinatensysteme von besonderer Bedeutung: das *Schwerpunktsystem*, in dem $\mathfrak{R} = 0$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = 0$ gilt, und das *Laborsystem*, in dem der Beobachter ruht.

⁵Die kleine Ellipsenhalbachse und der Stoßparameter werden in der Literatur beide mit b bezeichnet.

Beschreibung des Zerfalls im Schwerpunktsystem

In diesem System ruht das zerfallende Primärteilchen und es gilt $\mathbf{p}_0 = 0$. Aus dem Impulssatz folgt dann, dass $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ und daher

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \quad \text{oder} \quad m_1 \mathbf{v}_1 = -m_2 \mathbf{v}_2. \quad (4.87)$$

Die Energiebilanz lautet

$$\epsilon_0 = \epsilon_1 + \frac{1}{2m_1} p_1^2 + \epsilon_2 + \frac{1}{2m_2} p_2^2, \quad (p_i = \|\mathbf{p}_i\|)$$

oder

$$\epsilon_0 - \epsilon_1 - \epsilon_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p^2 = \frac{1}{2\mu} p^2, \quad \text{wobei} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (4.88)$$

die *reduzierte Masse* der beiden Teilchen im Endzustand ist. Das Schwerpunktsystem ist für theoretische Überlegungen oft vorteilhaft, da in ihm die Formeln in der Regel eine symmetrische und einfache Form annehmen.

Der Zerfall im Laborsystem

Die Größen im Laborsystem, wo die Messungen stattfinden, werden mit einem L gekennzeichnet. In diesem System bewegt sich das zerfallende Teilchen in der Regel mit einer von Null verschiedenen konstanten Geschwindigkeit \mathbf{v}_{L0} . Dies ist dann auch die Geschwindigkeit mit der sich das Schwerpunktsystem relativ zum Laborsystem bewegt, $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{L0}$. Das Laborsystem und Schwerpunktsystem unterscheiden sich also um eine spezielle Galilei-Transformation. Für die Geschwindigkeiten der Sekundärteilchen m_1, m_2 gilt daher im Laborsystem

$$\mathbf{v}_{L1} = \mathbf{u} + \mathbf{v}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_{L2} = \mathbf{u} + \mathbf{v}_2 \stackrel{(4.87)}{=} \mathbf{u} - \frac{m_1}{m_2} \mathbf{v}_1, \quad (4.89)$$

woraus die Beziehung

$$v_1^2 = (\mathbf{v}_{L1} - \mathbf{u})^2 = u^2 + v_{L1}^2 - 2uv_{L1} \cos \theta_L \quad (4.90)$$

folgt. Sie erlaubt, aus Messungen der Geschwindigkeiten $v_{L0} = u$ und v_{L1} und des 'Zerfallswinkels' θ_L des ersten Sekundärteilchens mit der \mathbf{u} -Richtung den *Betrag* der Geschwindigkeit v_1 zu bestimmen. Die Richtung von \mathbf{v}_1 läßt sich durch den Winkel θ_L berechnen. Dazu entnimmt man der Abbildung (4.7) die Beziehung

$$\tan \theta_L = \frac{v_1 \sin \theta}{u + v_1 \cos \theta},$$

die man nach $\cos \theta$ auflösen kann:

$$\cos \theta = -\frac{u}{v_1} \sin^2 \theta_L \pm \cos \theta_L \left(1 - \frac{u^2}{v_1^2} \sin^2 \theta_L \right)^{1/2}. \quad (4.91)$$

Bei der Umrechnung des gemessenen Zerfallswinkels θ_L in das Schwerpunktsystem sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem ob der Scheitel des Winkels θ_L innerhalb oder außerhalb des Kreises mit dem Radius v_1 liegt:

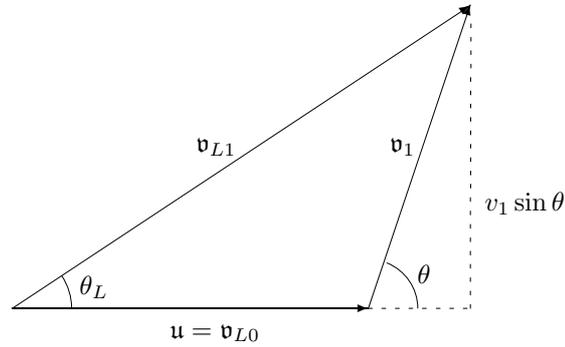


Abbildung 4.7: Der Übergang zwischen Labor- und Schwerpunktsystem.

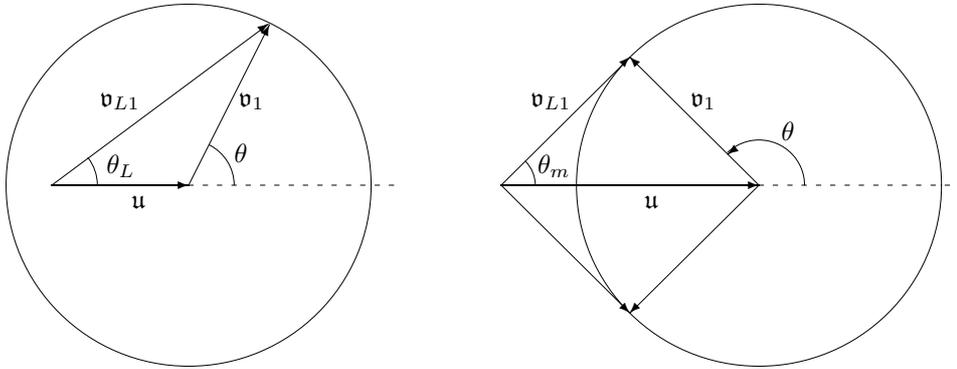


Abbildung 4.8: Die Fälle $u < v_1$ und $u > v_1$ müssen unterschieden werden.

- Für $u < v_1$ liegt der Scheitel innerhalb des Kreises mit Radius v_1 und die Werte von θ_L können im Intervall $[-\pi, \pi]$ liegen. Da $\theta_L = 0$ zu $\theta = 0$ gehört, kommt nur das Plus-Zeichen in (4.91) in Frage:

$$\cos \theta = -\frac{u}{v_1} \sin^2 \theta_L + \cos \theta_L \left(1 - \frac{u^2}{v_1^2} \sin^2 \theta_L \right)^{1/2}. \quad (4.92)$$

- Für $u > v_1$ liegt der Scheitel des Winkels außerhalb des Kreises mit Radius v_1 und der Vektor \mathbf{v}_{L1} schneidet den Kreis an zwei Stellen mit den Winkeln θ_L und θ'_L relativ zu \mathbf{u} , die durch die beiden Lösungen der obigen Gleichung für $\cos \theta$ gegeben sind. Der Zerfallswinkel liegt im Intervall

$$\theta_L \in [-\theta_m, \theta_m], \quad \sin \theta_m = \frac{v_1}{u} < 1. \quad (4.93)$$

Für sehr große Geschwindigkeiten des ersten Teilchens findet im Laborsystem die Streuung vorwiegend in die Vorwärtsrichtung, d.h. in Richtung von $\mathbf{v}_{L1} = \mathbf{u}$ statt.

4.5 Elastische Streuung

In der Atom-, Kern- und Elementarteilchenphysik spielen Streuexperimente und deren theoretische Beschreibung eine sehr wichtige Rolle. Obwohl die hierbei benutzten Methoden und Konzepte aus der Quantenmechanik kommen und in der entsprechenden Vorlesung behandelt werden, lassen sich wichtige Eigenschaften der Streuung schon in der klassischen Mechanik behandeln. Dies trifft insbesondere auf die Anwendung von Energie- und Impulserhaltung zu, deren Gültigkeitsbereich weit über die NEWTONSche Mechanik hinausgeht. Auch läßt sich in der NEWTONSchen Mechanik die RUTHERFORDSche *Formel* für den Wirkungsquerschnitt für die Streuung von elektrisch geladenen Teilchen ableiten.

Charakteristisch für Stöße von Teilchen ist, dass bei ihnen nur während einer begrenzten Zeit τ wirkende Kräfte eine Rolle spielen. Dabei müssen sich die Körper nicht unbedingt berühren; die gegenseitige Wirkung ihrer Kraftfelder genügt ebenfalls, um eine Richtungsänderung herbeizuführen. Man spricht in diesem Fall auch von *Streuung*. Die Änderung des Impulses des Teilchens i folgt aus der NEWTONSchen Bewegungsgleichung,

$$\mathbf{p}_i(\text{nachher}) - \mathbf{p}_i(\text{vorher}) = \int_0^\tau \mathfrak{F}_i dt, \quad (4.94)$$

und ist gleich dem Zeitintegral der Kraft, die während der Streuung wirkt, dem sogenannten *Kraftstoß*. Der Kraftstoß kann aus der gemessenen Geschwindigkeitsänderung bestimmt werden.

Neben den inneren Kräften zwischen den an der Streuung beteiligten Teilchen darf man während der Stoßzeit äußere Kräfte im allgemeinen vernachlässigen. Deshalb kann man das Streuproblem folgendermaßen formulieren:

Gegeben sind die auf die einzelnen Massenpunkte m_i wirkenden Kraftstöße und die Geschwindigkeiten der Massenpunkte vor dem Stoß. Zu bestimmen sind die Geschwindigkeiten nach dem Stoß. Entsprechend kann man den zeitlichen Ablauf der Streuung in drei Stufen einteilen:

- **Anfangszustand:** Zu sehr frühen Zeiten sind die Teilchen weit voneinander entfernt und bewegen sich kräftefrei aufeinander zu.
- **Wechselwirkungsbereich:** Wenn sich die Teilchen hinreichend nahe gekommen sind, üben sie Kräfte aufeinander aus, die sie aus ihrer ursprünglich geradlinig gleichförmigen Bahn ablenken. Dies ist der eigentliche Streuprozess. Seine analytische Beschreibung setzt die Kenntnis der für die Streuung verantwortlichen Wechselwirkung voraus.
- **Endzustand:** Zu späten Zeiten haben die Teilchen den Wechselwirkungsbereich wieder verlassen und bewegen sich kräftefrei voneinander fort.

Die Massen der Körper seien m_i und ihre Geschwindigkeiten (in einem Inertialsystem) vor dem Stoß \mathbf{v}_i . Die Geschwindigkeiten \mathbf{v}'_i nach der Stoß sind durch die Art der Wechselwirkung bestimmt. Ohne die Bewegungsgleichung zu lösen, lassen sich bei gegebenen Anfangsbedingungen Einschränkungen an die möglichen Endzustände allein mit Hilfe der Erhaltungssätze für Energie, Impuls, Drehimpuls und Schwerpunkt ableiten.

Da wir äußere Kräfte vernachlässigen dürfen, gilt in jedem Fall der Impulssatz

$$\mathfrak{P} = \sum \mathbf{p}_i = \sum \mathbf{p}'_i. \quad (4.95)$$

Bei der Formulierung des Energiesatzes sind ergänzende Annahmen notwendig. Bei der *elastischen Streuung* ändern sich die inneren Zustände der Teilchen, zum Beispiel deren innere Energien, nicht. Sie sind vor und nach der Wechselwirkung dieselben. Beispiele für elastische Streuung sind der Stoß zweier Stahlkugeln, die Streuung von Elektronen an Ionen oder die Streuung von Neutronen an Atomkernen. Bei der vollkommen elastischen Streuung ist die kinetische Energie vor und nach dem Stoß gleich,

$$\sum m_i v_i^2 = \sum m_i v_i'^2. \quad (4.96)$$

Dieser Erhaltungssatz für die mechanische Bewegungsenergie gilt nicht mehr, wenn einer der Stoßpartner *unelastisch* ist. Er nimmt beim Zusammenprall kinetische Energie auf und gibt diese nicht vollständig zurück. Der unelastische Körper verändert seinen Zustand (wird angeregt) und kann später durch Abgabe von Strahlung (Wärme) wieder in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehren.

Wir werden hier nur die elastische Streuung behandeln, bei der sich die Identität der Teilchen nicht ändert und für die (4.95) die Beziehung

$$\sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i' \quad (4.97)$$

nach sich zieht.

4.5.1 Streuprozeß im Schwerpunktsystem

Im Schwerpunktsystem verschwindet der Gesamtimpuls und der Schwerpunkt

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) \quad (4.98)$$

sitzt im Ursprung, $\mathfrak{R} = 0$. Neben der Schwerpunktskoordinate führt man noch die *Relativkoordinate* und *Relativgeschwindigkeit* der beiden streuenden Teilchen ein,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2. \quad (4.99)$$

Die Umkehrtransformationen lauten

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathfrak{R} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r} = \mathfrak{R} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathfrak{R} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r} = \mathfrak{R} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Nun seien wieder die ungestrichenen Größen diejenigen der einlaufenden Teilchen ($t \rightarrow -\infty$) und die gestrichenen diejenigen der auslaufenden Teilchen ($t \rightarrow \infty$). Die nichttrivialen Erhaltungssätze *im Schwerpunktsystem* lauten

$$\begin{aligned} \text{Energiesatz:} \quad & \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \mu v'^2 \\ \text{Drehimpulssatz:} \quad & \mu \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = \mu \mathbf{r}' \wedge \mathbf{v}' \end{aligned} \quad (4.101)$$

Die Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten der beiden Teilchen im Schwerpunktsystem folgt sofort aus (4.100) (mit $\mathfrak{R} = 0$):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{m_2}{M} \mathbf{v} = \frac{\mu}{m_1} \mathbf{v} = -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1' &= \frac{m_2}{M} \mathbf{v}' = \frac{\mu}{m_1} \mathbf{v}' = -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{v}_2'. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Setzen wir dies in den Energieerhaltungssatz ein, so finden wir

$$v_1 = v'_1 \quad \text{und} \quad v_2 = v'_2. \quad (4.103)$$

Die kinetische Energie jedes Teilchens ist vor und nach der Streuung die gleiche. Im Schwerpunktsystem gibt es keinen *Energieübertrag*.

Der *Streuwinkel* θ , um den das erste Teilchen (und damit auch das zweite Teilchen) abgelenkt wird, ist

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}'_1}{v_1^2} = \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}'_2}{v_2^2} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{v^2}. \quad (4.104)$$

Er kann auch mit dem Impulsübertrag $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1$ in Verbindung gebracht werden,

$$q^2 = 2m_1^2 v_1^2 (1 - \cos \theta) = 4 m_1^2 v_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.105)$$

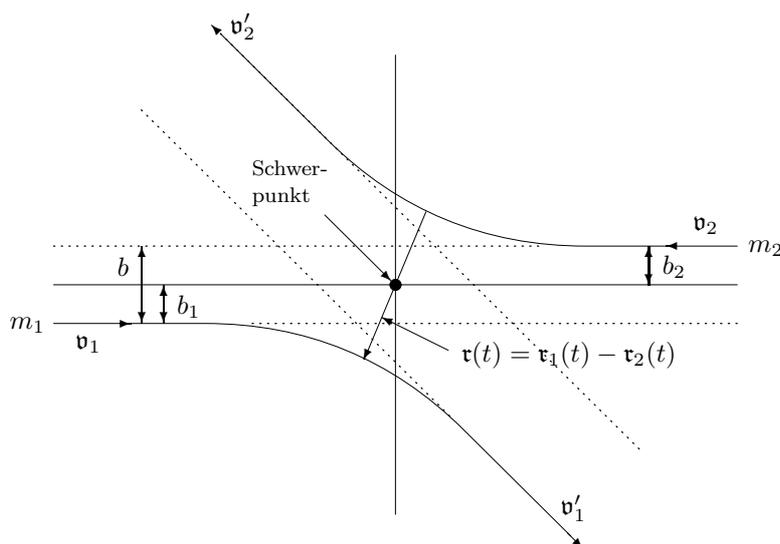


Abbildung 4.9: Zum Stoßparameter.

Für den Betrag ℓ des Drehimpulses im Schwerpunktsystem,

$$\mathcal{L} = m_1 \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{v}_2 = \mu \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} = \mathcal{L}^{\text{rel}}$$

findet man unter Berücksichtigung von Abbildung (4.9)

$$\ell = m_1 v_1 b_1 + m_2 v_2 b_2 = \mu v (b_1 + b_2) = \mu v b, \quad (4.106)$$

eine Beziehung, die schon in (4.83) auftrat. Der *Stoßparameter* b gibt den kürzesten Abstand an, mit dem die beiden Teilchen aneinander vorbeifliegen würden, falls es keine Kräfte zwischen ihnen gäbe. Er mißt den Abstand der Asymptoten an die Bahnen der beiden Teilchen für große negative Zeiten beziehungsweise große positive Zeiten. Um den Ablenkwinkel der

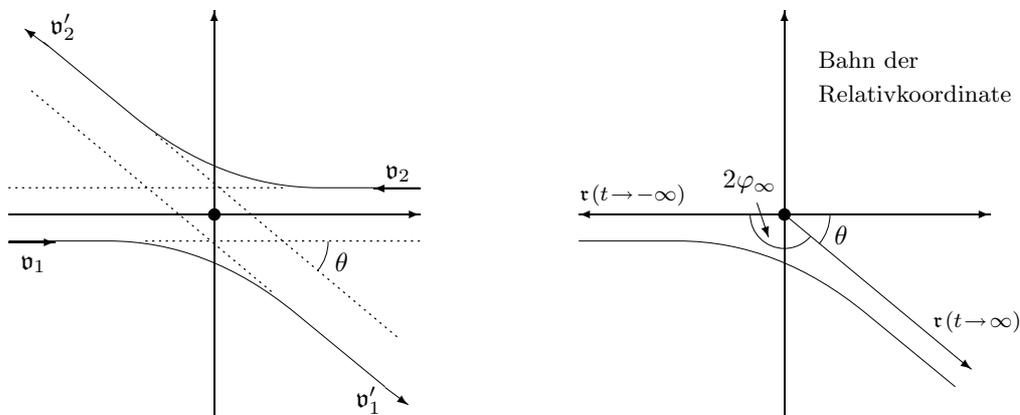


Abbildung 4.10: Streuwinkel versus φ_∞ .

Relativkoordinate $\mathbf{r}(t)$ mit dem Streuwinkel in Verbindung zu bringen betrachte man die Abbildung (4.10).

Offensichtlich ist (θ ist positiv)

$$\theta + 2\varphi_\infty = \pi \quad \text{oder} \quad \theta = |\pi - 2\varphi_\infty|. \quad (4.107)$$

Aus der Formel (4.50) für die konstante Energie der Relativbewegung und unter Verwendung von $\mu r^2 \dot{\varphi} = \ell$ finden wir folgende Formel für die Variation des Radius r mit dem Winkel φ :

$$\frac{2}{\mu}(E - V_{\text{eff}}) = \dot{r}^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \dot{\varphi}^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \left(\frac{\ell}{\mu r^2}\right)^2.$$

Diese lösen nach $d\varphi/dr$ auf und integrieren über den Radius. Den Winkel φ_∞ zwischen der Asymptoten und dem Punkt der größten Annäherung ist dann

$$\varphi_\infty = \frac{\ell}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2} \left[\frac{1}{2} \mu v^2 - V(r') - \frac{\ell^2}{2\mu r'^2} \right]^{-1/2}, \quad (4.108)$$

wobei wir die erhaltene Energie durch ihren Wert $\mu v^2/2$ für große Abstände der beiden Teilchen ersetzen. Bei der größten Annäherung verschwindet die radiale Geschwindigkeit, so dass der minimale Abstand r_{\min} über

$$E = V_{\text{eff}}(r_{\min})$$

berechnet werden kann. Ersetzen wir noch den Drehimpuls durch den Stoßparameter gemäß (4.106), dann finden wir schlussendlich den Streuwinkel

$$\theta = \left| \pi - 2b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2\mu V(r)}{p^2} \right]^{-1/2} \right|. \quad (4.109)$$

Hier haben wir noch den (asymptotischen) Impuls eines gestreuten Teilchens im Schwerpunktsystem,

$$p \equiv m_1 v_1 = m_2 v_2 = \mu v$$

eingeführt. Dies ist die grundlegende Formel zur Berechnung des Streuwinkels θ als Funktion vom Betrag p der Schwerpunktimpulse der beiden Teilchen im Anfangs- und Endzustand und vom Stoßparameter b .

4.5.2 Wirkungsquerschnitte

Bei den Experimenten zur Untersuchung von Streuprozessen hat man es in der Regel zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht mit einem einzelnen Projektilteilchen zu tun, dass an einem isolierten Targeilchen gestreut wird, sondern man hat, im Schwerpunktsystem, zwei sich entgegenkommende Strahlen mit vielen Teilchen, die zwar alle annähernd die gleiche Energie haben, deren relative Stoßparameter aber statistisch verteilt sind. Eine solche experimentelle Situation kann man folgendermaßen quantitativ beschreiben: Es sei j die

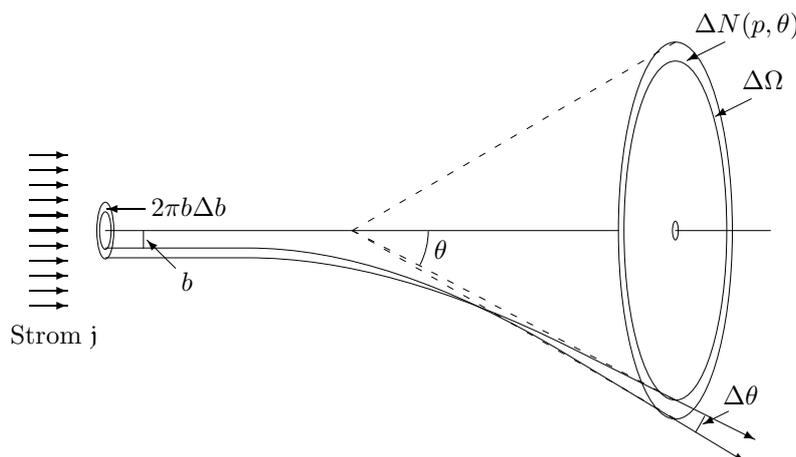


Abbildung 4.11: Zur Definition des Streuquerschnitts.

senkrecht zur Strahlrichtung gemessene *Stromdichte* der von einer Seite einfallenden Teilchen, also die Anzahl der Teilchen pro Flächen- und Zeiteinheit. Es sei $\Delta N(p, \theta)$ die Anzahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit und pro Targeilchen in das kegelförmige und bezüglich der durch den Punkt $\mathfrak{R} = 0$ gehenden (verlängerten) Strahlachse rotationssymmetrischen Raumwinkelsegment $[\theta, \theta + \Delta\theta]$ gestreut werden. Diese Anzahl wird vom Impulsbetrag p und dem Streuwinkel θ abhängen sowie der als räumlich und zeitlich konstant angenommenen Stromdichte proportional sein,

$$\Delta N(p, \theta) = \Delta\sigma(p, \theta)j. \quad (4.110)$$

Wir erhalten den *Streuquerschnitt*

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta N}{j} = \frac{\text{Anzahl Teilchen, die pro Sekunde in } \Delta\Omega \text{ gestreut werden}}{\text{Anzahl Teilchen, die pro Sekunde und } m^2 \text{ einfallen}} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\Omega} \Delta\Omega.$$

Nach dem Übergang zu Differentialquotienten heißt $d\sigma/d\Omega$ *differentieller Wirkungsquerschnitt* für die Streuung von Teilchen am Potential $V(r)$ in das Winkelintervall $[\theta, \theta + d\theta]$.

Der Name hat folgenden geometrischen Hintergrund:

Der Streuwinkel ist eine Funktion des Stoßparameters, gegeben durch die sogenannte *Deflektionsfunktion* $\theta(b)$. Daher gehört zu dem Winkelintervall $d\theta$ ein Intervall db , siehe Abbildung (4.11). Die Anzahl dN ist daher gegeben durch

$$dN = 2\pi b db j, \quad (4.111)$$

woraus dann

$$d\sigma = 2\pi b db \quad (4.112)$$

folgt. Danach ist der Streuquerschnitt ein kreisförmiger Ring mit Radius b und 'Dicke' db . Mit $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (4.113)$$

Die Betragsstriche sind erforderlich, da generisch die Deflektionsfunktion $\theta(b)$ monoton abnimmt: wird b größer so wird θ kleiner (weit entfernte Teilchen werden weniger gestreut als nahe) und die Ableitung des Stoßparameters nach dem Winkel θ ist in den meisten Fällen negativ. Da aber $d\sigma/d\Omega$ positiv sein muß, benötigt man die Betragsstriche. Sollte aber zu *einem* gegebenen Winkel θ *verschiedene* Stoßparameter $b_i(\theta)$ gehören, dann erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(p, \theta) = \sum_i \frac{b_i(p, \theta)}{\sin\theta} \left| \frac{db_i(p, \theta)}{d\theta} \right|. \quad (4.114)$$

Schließlich ist der *totale Wirkungsquerschnitt* definiert als das Integral

$$\sigma_{\text{tot}}(p) = \int \frac{d\sigma(p, \theta)}{d\Omega} d\Omega. \quad (4.115)$$

Alle Teilchen, die innerhalb der Fläche σ_{tot} ankommen, werden gestreut. Bei einem Festkörper, an dem die Teilchen abprallen, ist gewöhnlich σ_{tot} gleich der Querschnittsfläche.

Als einfaches Beispiel untersuchen wir den Stoß zweier *harter Kugeln* mit Radien $R/2$. Das Potential ist gegeben durch eine unendlich hohe Stufe am Abstand $r_{\text{min}} = R$,

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r > R \\ \infty & \text{für } r \leq R, \end{cases} \quad (4.116)$$

und mit (4.109) erhalten wir den Streuwinkel

$$\theta = \pi - 2 \int_R^\infty \frac{bdr}{r^2 \sqrt{1 - b^2/r^2}} = \pi - 2 \arcsin\left(\frac{b}{R}\right).$$

Daraus ergibt sich

$$b = R \cos \frac{\theta}{2} \quad (4.117)$$

und ein isotroper Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R \cos \frac{\theta}{2}}{\sin\theta} \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{R^2}{4}. \quad (4.118)$$

Nach Integration über den vollen Raumwinkel ergibt sich schließlich der totale Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\text{tot}} = 4\pi \frac{R^2}{4} = \pi R^2, \quad (4.119)$$

d.h. der totale Wirkungsquerschnitt ist gleich dem geometrischen Querschnitt der Wechselwirkungskugel.

4.5.3 Rutherford Streuung

Wir betrachten die elastische Streuung von elektrisch geladenen Teilchen. Ein Beispiel wäre die Streuung von α -Teilchen am COULOMBfeld eines Kerns mit der Ladung Ze . Wenn der Kern keinen Spin besitzt und das α -Teilchen ebenfalls Spin 0 hat, heißt sie RUTHERFORDstreuung. Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Teilchen mit Spin 0 an Kernen ohne Spin kann klassisch oder quantenmechanisch berechnet werden, was zum selben Ergebnis führt. Die RUTHERFORDsche Streuformel ist eine der wenigen Gleichungen, die ohne Änderung in der Quantenmechanik gelten und auf diese Tatsache war RUTHERFORD außerordentlich stolz⁶.

In (4.85) haben wir bereits den Streuwinkel für das COULOMBpotential

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r},$$

als Funktion der Energie und des Stossparameters bestimmt. Die Deflektionsfunktion hat die explizite Form

$$b = \frac{|\alpha|}{2E} \cot \frac{\theta}{2}, \quad (4.120)$$

welche auf

$$b \frac{db}{d\theta} = -2 \left(\frac{\alpha}{4E} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}}$$

führt. Dividiert man durch $\sin \theta$ und berücksichtigt $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$, so erhält man folgenden differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung von α -Teilchen an Kernen,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (4.121)$$

Der Parameter α ist proportional zum Produkt der Ladungen der am Streuprozess beteiligten Teilchen. Diese Formel von RUTHERFORD ist unabhängig vom Vorzeichen von α , d.h. der Wirkungsquerschnitt ist identisch für gleich und ungleich geladene Teilchen. Sie wurde im Schwerpunktsystem abgeleitet. Bei schweren Targetteilchen ist sie auch im Laborsystem annähernd gültig; sonst muß auf das Laborsystem umgerechnet werden.

Der totale Wirkungsquerschnitt divergiert und die Divergenz kommt von großen Stoßparametern oder kleinen Streuwinkeln. Dies hat mit der langen Reichweite der COULOMBkraft zu tun, ist jedoch für praktische Fälle ohne Bedeutung, da realistische Ladungen immer abgeschirmt sind.

⁶RUTHERFORD verachtete komplizierte Theorien und pflegte zu sagen, eine Theorie taue nur dann etwas, wenn auch eine Bardame sie verstehen kann (Gamov, *My World Line*, Viking, New York, 1979).

4.5.4 Transformation ins Laborsystem

Bei Experimenten ruht im allgemeinen eines der Teilchen (Target) vor dem Stoß im Laborsystem, d.h. der Schwerpunkt bewegt sich. Die Teilchen der Sorte 1 seien die Projektile und diejenigen der Sorte 2 die ruhenden Targetteilchen. Man muß also den in Relativkoordinaten berechneten Wirkungsquerschnitt zuerst ins Laborsystem umrechnen, bevor man ihn mit experimentellen Daten vergleichen kann. Dazu erinnern wir uns an den Zusammenhang zwischen dem Streuwinkel im Laborsystem θ_L und demjenigen im Schwerpunktsystem θ : Wir brauchen in der Abbildung (4.7) nur \mathbf{v}_{L1} durch \mathbf{v}'_{L1} zu ersetzen und berücksichtigen, dass die Geschwindigkeit \mathbf{u} des Schwerpunktes parallel zur Strahlrichtung verläuft. Damit ergibt sich

$$\tan \theta_L = \frac{v'_1 \sin \theta}{u + v'_1 \cos \theta}. \quad (4.122)$$

Wegen (4.102) ist

$$v_1 = v'_1 = \frac{\mu}{m_1} v,$$

wobei v die Relativgeschwindigkeit der Teilchen vor der Streuung (oder mit (4.101) auch nach der Streuung) ist. Da das Targetteilchen im Labor ruht, gilt mit (4.100) auch noch

$$0 = \mathbf{v}_{L2} = \mathbf{u} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{v} \quad \text{bzw.} \quad u = \frac{\mu}{m_2} v, \quad \mathbf{u} = \mathfrak{R}.$$

Damit können wir (4.122) umformen,

$$\tan \theta_L = \frac{\sin \theta}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta}. \quad (4.123)$$

Dies ist eine implizite Darstellung der Funktion $\theta_L(\theta)$, die jedem Winkel θ im Schwerpunktsystem den entsprechenden Winkel θ_L im Laborsystem zuordnet.

Um eine Relation für den Wirkungsquerschnitt abzuleiten müssen wir berücksichtigen, dass die Zahl der in ein gegebenes Raumwinkelelement gestreuten Teilchen in beiden Systemen gleich sein muß,

$$2\pi j \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta = 2\pi j \frac{d\sigma_L}{d\Omega_L} \sin \theta_L d\theta_L. \quad (4.124)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt im Laborsystem ist also

$$\frac{d\sigma_L}{d\Omega_L} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{\sin \theta}{\sin \theta_L} \frac{d\theta}{d\theta_L}. \quad (4.125)$$

Wir betrachten noch einige Spezialfälle:

- $m_1 \ll m_2$: Dann ist $\theta \sim \theta_L$ und der Wirkungsquerschnitt ist in beiden Systemen etwa gleich.
- $m_1 = m_2$: Dann ist $\tan \theta_L = \tan \theta/2$, d.h. $\theta_L = \theta/2$ und

$$\frac{d\sigma_L}{d\Omega_L}(\theta_L) = 4 \cos \theta_L \frac{d\sigma}{d\Omega}(2\theta_L). \quad (4.126)$$

Bei gleichen Massen stehen die Impulse der beiden Teilchen nach einem elastischen Streuvorgang im Laborsystem senkrecht aufeinander. Bei gleichen Massen $m_1 = m_2 = m$ ist nämlich die reduzierte Masse $\mu = m/2$ und wegen (4.100)

$$\mathbf{v}_{L1} = \mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_{L2} = \mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v}.$$

Es folgt

$$\mathbf{v}_{L1} \cdot \mathbf{v}_{L2} = u^2 - \frac{v^2}{4}$$

und damit ist der Winkel zwischen den beiden Geschwindigkeiten vor und nach der Streuung gleich. Vor dem Stoß verschwindet aber \mathbf{v}_{L2} , also auch $\mathbf{v}_{L1} \cdot \mathbf{v}_{L2} = 0$ nach dem Stoß.

Falls man annimmt, dass im Schwerpunktsystem alle Streuwinkel möglich sind, gilt dies im Laborsystem nur für $m_1 < m_2$, denn bei $m_1 > m_2$ gibt es einen maximalen Wert für θ_L , der sich aus der Gleichung

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\sin \theta}{m_1/m_2 + \cos \theta} = 0$$

ergibt und den Wert $\sin \theta_{L\max} = m_2/m_1$ hat.

4.6 Bemerkungen zum Dreikörperproblem

Das Dreikörperproblem hat eine lange Geschichte und viele Anwendungen [5]. Schon NEWTON verwandte viel Mühe auf das Studium des Systems Sonne, Erde und Mond. Seit etwa 1750 haben sich bedeutende Mathematiker wie etwa EULER, LAGRANGE oder POINCARÉ daran versucht. Auch eine der von MITTAG-LEFFLER für den schwedischen KÖNIG OSCAR formulierten Preisfragen war eine Version des Mehr-Körperproblems:

Gegeben sei ein System von beliebigen vielen Massenpunkten, die sich gemäß dem NEWTONSchen Kraftgesetz anziehen. Gesucht ist eine konvergente Reihendarstellung der Koordinaten eines jeden Körpers in einer Variablen, die eine bekannte Funktion der Zeit ist.

Obwohl POINCARÉ das Problem nicht lösen konnte, gewann er den ausgeschriebenen Preis. Nach POINCARÉ, in den 1920ern, löste K.F. SUNDMAN die Preisfrage für drei Massen⁷. Er fand die Lösung in Form einer zu allen Zeiten konvergenten Reihe [6]. Allerdings konvergiert seine Reihe extrem langsam und ist daher von geringem praktischen Wert.

Beim allgemeinen Dreikörperproblem wechselwirken drei Körper mit Massen m_1, m_2 und m_3 an den Orten $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ und \mathbf{r}_3 über die früher diskutierte NEWTONSche Gravitationskraft. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\gamma m_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} - \gamma m_3 \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3} \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\gamma m_1 \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} - \gamma m_3 \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 &= -\gamma m_1 \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} - \gamma m_2 \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3}. \end{aligned} \tag{4.127}$$

⁷und gewann einen von der französischen Akademie der Wissenschaften ausgeschriebenen Preis.

Falls wir Dreierstöße ausschließen und falls die Gesamtenergie des Systems negativ ist, können die Bewegungen der drei Körper klassifiziert werden. Dann gibt es nur folgende mögliche 'Endstadien' für die drei Körper:

- Die Bewegung ist beschränkt, d.h. der Abstand $r_{ij}(t)$ zwischen zwei beliebigen Körpern ist endlich für alle Zeiten.
- Zwei Massen bilden ein enges *Binärsystem* und der Abstand des dritten Körpers von diesem System strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen unendlich.
- Es bildet sich eine oszillierende Lösung bei der sich zwei Körper periodisch sehr nahe kommen und weit voneinander entfernen, d.h. es gibt ein Paar ij mit $\limsup_{t \rightarrow \infty} r_{ij}(t) = \infty$ und $\liminf_{t \rightarrow \infty} r_{ij}(t) < \infty$.

Ist die Gesamtenergie positiv, dann gibt es weitere Lösungsklassen. Zum Beispiel können die Abstände zwischen allen Körpern für große Zeiten gegen Unendlich streben.

4.6.1 Exakte Lösungen

Die ersten Versuche zum Verständnis des Dreikörpersystems zielten auf das Auffinden von expliziten Lösungen. EULER fand 1767 kollineare periodische Bahnen, bei denen die drei Körper längs einer rotierenden Linie oszillieren. Fünf Jahre später konstruierte LAGRANGE periodische Lösungen, bei denen die drei Körper zu allen Zeiten die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden, welches seine Größe periodisch ändert.

Kollineare Kegelschnittlösungen

Bei den einfachen *kollinearen Kegelschnittlösungen* sind die drei Körper zu jedem Zeitpunkt auf einer Geraden angeordnet, und diese Gerade rotiert um eine zu ihr senkrechte Achse durch den Massenmittelpunkt. Die Verhältnisse der Abstände von je zwei Massenpunkten sind dabei konstant, im Gegensatz zu den Einzelabständen, welche sich ändern können. Nur bei den einfachen kollinearen Kreisbahnlösungen sind auch die Einzelabstände konstant. Setzen wir nun $\mathbf{r}_{21} = \boldsymbol{\varepsilon}$, dann ist

$$\mathbf{r}_{32} = \lambda \mathbf{r}_{21} \equiv \lambda \boldsymbol{\varepsilon} \implies \mathbf{r}_{31} = \mathbf{r}_{32} + \mathbf{r}_{21} = (1 + \lambda) \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.128)$$

mit einem noch zu bestimmenden konstanten Faktor λ . Wir legen nun den Ursprung des Bezugssystems in den Schwerpunkt, so dass

$$\sum m_i \mathbf{r}_i = 0 \quad (4.129)$$

gilt. Sind die Körper wie in Abbildung (4.12) angeordnet, dann ist die Konstante λ positiv. Mit Hilfe von (4.128,4.129) findet man für die Ortsvektoren im Schwerpunktsystem

$$\begin{aligned} M \mathbf{r}_1 &\stackrel{(4.129)}{=} -(m_2 + m_3) \mathbf{r}_{21} - m_3 \mathbf{r}_{32} = -(m_2 + m_3 + \lambda m_3) \boldsymbol{\varepsilon} \\ M \mathbf{r}_2 &\stackrel{(4.129)}{=} m_1 \mathbf{r}_{21} - m_3 \mathbf{r}_{32} = (m_1 - \lambda m_3) \boldsymbol{\varepsilon} \\ M \mathbf{r}_3 &\stackrel{(4.129)}{=} m_1 \mathbf{r}_{21} + (m_1 + m_2) \mathbf{r}_{32} = ((1 + \lambda) m_1 + \lambda m_2) \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.130)$$

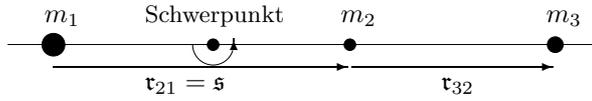


Abbildung 4.12: Anordnung der Massen.

Diese Konfiguration soll um den gemeinsamen Schwerpunkt rotieren. Nun können wir die Ortsvektoren \mathbf{r}_i und relativen Ortsvektoren \mathbf{r}_{ij} in (4.127) alle durch den Relativvektor \mathbf{s} ersetzen und erhalten

$$\ddot{\mathbf{s}} = -\gamma\mu_i(\lambda, m_i)\frac{\mathbf{s}}{s^3}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.131)$$

mit den effektive Massen

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{M}{(1+\lambda)^2} \frac{(1+\lambda)^2 m_2 + m_3}{m_2 + (1+\lambda)m_3} \\ \mu_2 &= \frac{M}{\lambda^2} \frac{\lambda^2 m_1 - m_3}{m_1 - \lambda m_3} \\ \mu_3 &= \frac{M}{\lambda^2(1+\lambda)^2} \frac{\lambda^2 m_1 + (1+\lambda)^2 m_2}{(1+\lambda)m_1 + \lambda m_2}. \end{aligned}$$

Offensichtlich müssen diese effektiven Massen gleich sein,

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu.$$

Diese drei (abhängigen) Bedingungen sind genau dann erfüllt, wenn λ eine Nullstelle von

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (m_1 + m_2)\lambda^5 + (3m_1 + 2m_2)\lambda^4 + (3m_1 + m_2)\lambda^3 \\ &\quad - (m_2 + 3m_3)\lambda^2 - (2m_2 + 3m_3)\lambda - (m_2 + m_3) \end{aligned} \quad (4.132)$$

ist. Da nur ein Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenfolge des Polynoms $P(\lambda)$ vorhanden ist, kann nach der DESCARTESschen Vorzeichenregel höchstens eine positive reelle Wurzel auftreten. Nach derselben Regel hat das Polynom entweder 4, 2 oder gar keine negative reelle Wurzeln. Für eine Massenanzordnung wie in der Abbildung (4.12) hat aber nur die positive Wurzel eine physikalische Bedeutung. Für gegebene drei Massen sind dann durch zyklische Vertauschung der Körper zwei weitere Konfigurationen möglich:

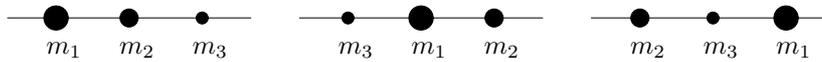


Abbildung 4.13: Anordnung der Massen.

Ist λ eine Nullstelle des Polynoms (4.132), so liegt mit (4.131) ein reduziertes Zweikörperproblem vor,

$$\ddot{\mathbf{s}} = -\gamma\mu\frac{\mathbf{s}}{s^3}, \quad (4.133)$$

dessen Lösung die Relativbewegung der kollinearen Massenpunkte bezüglich des gemeinsamen Schwerpunktes ergibt. Bei der Lösung des Keplerproblems haben wir gesehen, dass \mathfrak{s} eine Ellipse mit einem der Brennpunkte im Ursprung überstreicht,

$$s(\varphi) = \frac{C^2}{\gamma\mu} \frac{1}{1 - \epsilon \cos \varphi}, \quad \text{mit } C = s^2 \dot{\varphi} = \text{konst.}$$

Kollineare Kreisbahnen: Verschwindet nun die numerische Exzentrizität ϵ der Relativbewegungen, dann ist s konstant und die drei Massen bewegen sich kollinear auf *Kreisbahnen* um den gemeinsamen Schwerpunkt. Insbesondere für gleiche Massen $m_i = m$ ist

$$\lambda = 1, \quad \mu = \frac{5}{4}m, \quad \mathfrak{r}_2 = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_3 = -\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{s}$$

und man findet folgende Beziehung zwischen dem Radius s und der Umlaufzeit

$$\frac{s^3}{T^2} = \frac{5}{4} \frac{\gamma m}{4\pi^2} = \frac{5}{12} \frac{\gamma M}{4\pi^2}.$$

Kollineare Ellipsenbahnen: Der Relativvektor $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}_{21}$ bewegt sich auf einer Ellipse unter Einhaltung des Flächensatzes. Mit Hilfe der Formeln (4.130), worin λ die positive Nullstelle des Polynoms fünften Grades (4.132) ist, können dann die Positionen der drei kollinearen Körper im Schwerpunktsystem bestimmt werden. Zum Beispiel, für

$$m_1 = 3m, \quad m_2 = 2m \quad \text{und} \quad m_3 = m$$

ist $\lambda \sim 0.7801$ und mit (4.130) folgt

$$\mathfrak{r}_1 \sim -0.63 \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{r}_2 \sim 0.37 \mathfrak{s} \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_3 \sim 1.15 \mathfrak{s}.$$

Die drei Körper bewegen sich auf ähnlichen Ellipsen, d.h. Ellipsen mit der gleichen Exzentrizität aber im Allgemeinen verschiedenen Halbachsen. Deren große Halbachsen liegen auf *einer* Geraden und ihre Brennpunkte im Schwerpunkt des Systems. Wegen $\sum m_i \mathfrak{r}_i = 0$ können die Mittelpunkte der Ellipsen nicht alle auf derselben Seite des Schwerpunktes liegen.

Für $m_3 \ll m_{1,2}$ handelt es sich um das ausgiebig studierte *ingeschränkte Dreikörperproblem*. Der Probekörper m_3 stört die Bewegungen der schweren Körper kaum und diese bewegen sich auf Ellipsenbahnen um einander. Der sehr leichte Körper m_3 kann in drei Punkten verbleiben, je nachdem, in welcher Reihenfolge man die drei Körper anordnet.

Dreieckslösungen

Das von drei beliebigen Massenpunkten gebildete Dreieck ist dann eine strenge Lösung des Dreikörperproblems, wenn das Dreieck dauernd sich selbst ähnlich und gleichseitig bleibt. Um dies einzusehen führen wir wieder die relativen Ortsvektoren ein,

$$\mathfrak{s}_1 \equiv \mathfrak{r}_{32}, \quad \mathfrak{s}_2 \equiv \mathfrak{r}_{13}, \quad \mathfrak{s}_3 \equiv \mathfrak{r}_{21}, \quad \text{mit} \quad \mathfrak{r}_{ij} = \mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_j, \quad (4.134)$$

die offensichtlich zu Null addieren,

$$\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2 + \mathfrak{s}_3 = 0. \quad (4.135)$$

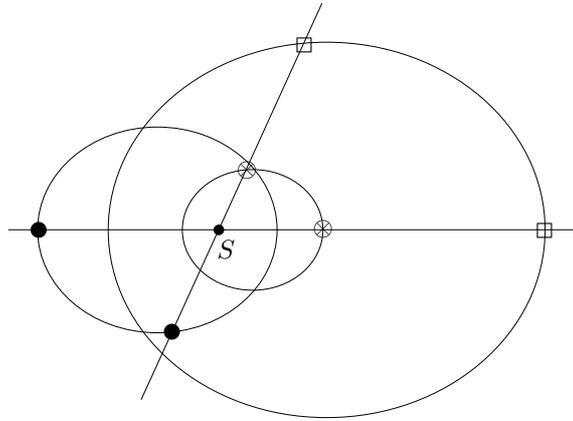


Abbildung 4.14: EULERSche Lösungen. \bullet : m_1 , \otimes : m_2 , \square : m_3

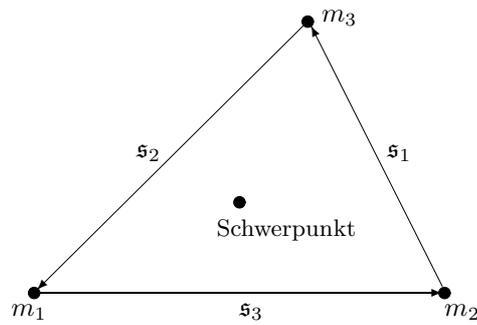


Abbildung 4.15: Zu den LAGRANGESchen Lösungen des Dreikörperproblems.

Die zugehörige Umkehrtransformation lautet

$$\mathbf{r}_i = -\frac{1}{M}\epsilon_{ijk}m_j\mathfrak{s}_k. \quad (4.136)$$

Nach einer kurzen Rechnung findet folgende Bewegungsgleichungen für die \mathfrak{s}_i ,

$$\ddot{\mathfrak{s}}_i = -\gamma M \frac{\mathfrak{s}_i}{s_i^3} + \gamma m_i \sum_{j=1}^3 \frac{\mathfrak{s}_j}{s_j^3}. \quad (4.137)$$

Nun folgen wir LAGRANGE und setzen die 3 Körper auf die Eckpunkte eines *gleichseitigen Dreiecks*. Wegen $s_1 = s_2 = s_3$ und (4.135) verschwindet dann der letzte Term in (4.137) und die Bewegungsgleichungen für die relativen Ortsvektoren entkoppeln,

$$\ddot{\mathfrak{s}}_i = -\gamma M \frac{\mathfrak{s}_i}{s_i^3}. \quad (4.138)$$

Die Vektoren \mathfrak{s}_i verbinden also die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks und liegen gleichzeitig auf drei Ellipsen. Dann handelt es sich um drei Kopien einer Ellipse welche in einer raumfesten Ebene liegen und um $2\pi/3$ gegeneinander verdreht sind. Wir legen \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 in die Bahnebene und finden

$$\mathfrak{s}_k = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \left(\mathbf{e}_1 \cos\left(\varphi + \frac{2k\pi}{3}\right) + \mathbf{e}_2 \sin\left(\varphi + \frac{2k\pi}{3}\right) \right), \quad k = 1, 2, 3$$

Man findet für die Ortsvektoren im Schwerpunktsystem

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} N_{23} \{ \mathbf{e}_1 \cos(\varphi + \varphi_{23}) + \mathbf{e}_1 \sin(\varphi + \varphi_{23}) \} \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} N_{31} \{ \mathbf{e}_1 \cos(\varphi + \varphi_{31}) + \mathbf{e}_2 \sin(\varphi + \varphi_{31}) \}, \\ \mathbf{r}_3 &= \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} N_{12} \{ \mathbf{e}_1 \cos(\varphi + \varphi_{12}) + \mathbf{e}_2 \sin(\varphi + \varphi_{12}) \} \end{aligned}$$

wobei die Massenverhältnisse $\alpha_i = m_i/M$ zwischen 0 und 1 liegen, und die Normierungsfaktoren und Winkel

$$N_{jk} = \sqrt{\alpha_j^2 + \alpha_k^2 + \alpha_j \alpha_k} \quad \text{und} \quad N_{jk} \exp(\varphi_{jk}) = \alpha_k z^j - \alpha_j z^k, \quad z = e^{2\pi i/3}$$

eingeführt haben. Die Ortsvektoren \mathbf{r}_i durchlaufen also Ellipsen mit Brennpunkten im Schwerpunkt. Alle drei Ellipsen besitzen die gleiche numerische Exzentrizität, haben im Allgemeinen aber verschiedene Halbachsen. Die große Halbachse der Ellipse 1 ist gegenüber der \mathbf{e}_1 -Richtung um φ_{23} gedreht, die große Halbachse der Ellipse 2 um φ_{31} und diejenige der Ellipse 3 um φ_{12} .

Für *gleiche Massen* vereinfachen sich die Formeln sehr, da

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad N_{23} = N_{31} = N_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

sind und entsprechend

$$\phi_{31} = \phi_{23} + \frac{2\pi}{3} \quad \text{und} \quad \phi_{12} = \phi_{31} + \frac{2\pi}{3}$$

gilt. Das gleichseitige Dreieck hat also seinen Mittelpunkt im Schwerpunkt und entsprechend haben alle drei Ortsvektoren zu allen Zeiten dieselbe Länge. Für gleiche Massen sind die drei Ellipsen kongruent und um 120° gegeneinander verdreht.

4.6.2 Numerische Integration des ebenen Dreikörperproblems

Neben den besprochenen exakten Lösungen gibt es nur noch wenige explizit angebbare Lösungen. Das Dreikörperproblem ist nicht integrabel⁸. Will man die Bewegungsgleichungen für beliebige Anfangsorte und Geschwindigkeiten der drei Körper lösen, so ist man gezwungen die Bewegungsgleichungen numerisch zu integrieren. Kommen sich die Massenpunkte nicht zu nahe, so kann man die Differentialgleichungen mühelos zum Beispiel mit MAPLE, MATHEMATICA, MATLAB, SCILAB oder OCTAVE lösen. Kommen sich mindestens

⁸Diese Eigenschaft wird am Ende der Vorlesung besprochen werden.

zwei Körper sehr nahe oder treffen sie sich sogar, dann müssen die NEWTONSchen Bewegungsgleichungen regularisiert werden. Dies geschieht durch eine geschickte Transformation der Zeit- und Raumvariablen. Für Interessierte verweise ich auf den lehrreichen Artikel von GRUNTZ und WALDVOGEL [7].

Beim ebenen Dreikörperproblem bewegen sich alle Massenpunkte in einer Ebene. Wir legen die Basisvektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 in diese Ebene, so dass

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{e}_2 + y_2\mathbf{e}_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{e}_3 + y_3\mathbf{e}_3.$$

Das System hat offensichtlich $3 \times 4 = 12$ Freiheitsgrade. Um das gekoppelte Differentialgleichungssystem mit Scilab zu lösen, definieren wir die Funktion $\text{Xdot}=\text{xdot3k}(t, X)$, welche als file `xdot3k.sci` abgespeichert wird, wie folgt:

```
function Xdot=xdot3k(t,X)
global m1 m2 m3 // die Massen der drei Körper
x1=X(1:2); x2=X(5:6); x3=X(9:10);
d1=(x2-x3)/norm(x2-x3)^3; d2=(x3-x1)/norm(x3-x1)^3; d3=(x1-x2)/norm(x1-x2)^3;
Xdot(1:2)=X(3:4); Xdot(5:6)=X(7:8); Xdot(9:10)=X(11:12);
Xdot(3:4)=-m2*d3+m3*d2;
Xdot(7:8)=-m3*d1+m1*d3;
Xdot(11:12)=-m1*d2+m2*d1;
endfunction
```

Hierin ist X ein Spaltenvektor der die Orte und Geschwindigkeiten der 3 Körper enthält. Wir wählen Einheiten, so dass die Gravitationskonstante $\gamma = 1$ wird. Nun rufen wir in SCILAB den Integrator `ode` und einige einfache Befehle auf, um die Orbits der drei Körper zu berechnen und darzustellen

```
t=linspace(0,10,10000);
global m1 m2 m3; m1=5; m2=3; m3=4;
x10=[1;-1]; x20=[1;3]; x30=[-2;-1]; xp0=[0;0]; //Anfangsbedingungen
u=ode([x10;xp0;x20;xp0;x30;xp0],0,t,xdot3k);
plot2d([u(1,:)';u(5,:)';u(9,:)'],[u(2,:)';u(6,:)';u(10,:)'])
```

Wir haben die Massen

$$m_1 = 5, \quad m_2 = 3, \quad m_3 = 4$$

und die sogenannten *pythagoräischen Anfangsdaten*

$$t = 0: \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}_3 = -2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$$

für die Anfangsorte gewählt. Die drei Körper seien anfänglich in Ruhe,

$$t = 0: \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Der Schwerpunkt liegt für alle Zeiten im Ursprung. Bei der numerischen Integration der Systems (4.127) kann diese Bedingung zu jeder Zeit nachgeprüft werden. Zur Zeit $t = 15.8299$ kommen sich die Massen m_1 und m_3 sehr nahe. Die Geschwindigkeiten bei diesem Beinahe-Zusammenstoß werden sehr groß und danach wird die Genauigkeit der numerischen Integration schlecht.

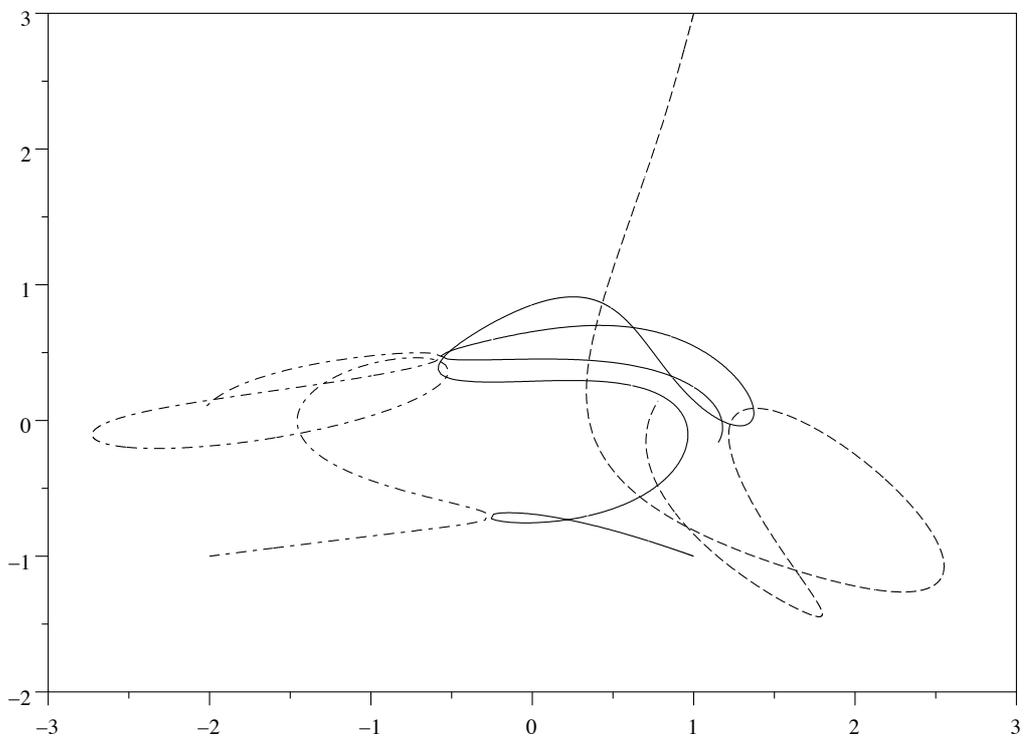


Abbildung 4.16: *Orbits für $t \leq 10$. durchgezogen: m_1 , gestrichelt: m_2 , Strichpunkt: m_3*

Kapitel 5

Starre Körper

5.1 Bewegungen des starren Körpers

Wir erhalten den starren Körper aus dem im vorangehenden Kapitel behandelten System von N Massenpunkten, indem wir die Abstände zwischen den Massenpunkten festhalten und N sehr groß wählen. Für die Konstanz der Abstände sorgen innere Kräfte \mathfrak{F}_{ij} , von denen wir annehmen, daß sie zentrale Potentialkräfte sind. Zu \mathfrak{F}_{ij} gehört also ein Potential $V_{ij}(r_{ij})$, welches etwa wie in Abbildung (5.1) aussehen sollte, falls es für die Konstanz des Abstands zwischen dem i -ten und j -ten Massenpunkt verantwortlich sein soll¹.

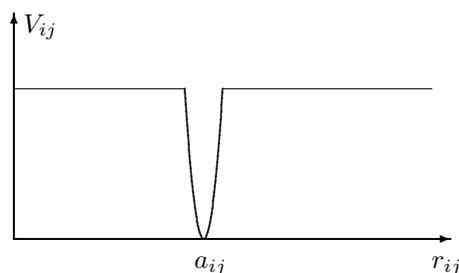


Abbildung 5.1:

Durch das Festhalten der Abstände, $r_{ij} = a_{ij}$, wird der Körper starr und behält seine Form bei. Es wird sich herausstellen, daß unter gewissen Umständen ein ausgedehnter Körper wie ein Massenpunkt behandelt werden kann. Wir haben davon schon mehrfach Gebrauch gemacht, etwa bei der Behandlung des Keplerproblems.

Das Festhalten der Abstände der den starren Körper bildenden N Massenpunkte schränkt

¹Hier sei nur bemerkt, daß es den idealen starren Körper in diesem Sinne in der Natur nicht gibt: er würde eine unendlich schnelle Signalübertragung gestatten.

die Bewegungen der Massenpunkte stark ein. Für das allgemeine N -Körperproblem benötigen wir $3N$ Funktionen der Zeit um die zeitliche Entwicklung des Systems im Ortsraum vollständig zu beschreiben. Für den starren Körper sind es sehr viel weniger: seine Lage ist durch die Lage dreier beliebiger seiner Punkte vollständig bestimmt, die nicht in einer Geraden liegen. Die Bedingung, daß der gegenseitige Abstand zweier Punkte je konstant sein muß, ergibt 3 Gleichungen zwischen den 9 Koordinaten der 3 Punkte. Es sind also nur 6 Koordinaten voneinander unabhängig, mit anderen Worten:

Der frei bewegliche starre Körper hat 6 Freiheitsgrade.

Um die Lage des starren Körpers im Raum festzulegen, wählen wir zuerst im Körper einen beliebigen Punkt O' . Er besitzt 3 Freiheitsgrade. Ein anderer Punkt A kann sich nur noch auf einer Kugeloberfläche um den Punkt O' bewegen. Das ergibt zwei weitere Freiheitsgrade. Ein dritter, außerhalb der Geraden durch O' und A liegender Punkt kann nunmehr um $\overline{O'A}$ als Achse nur eine Kreisbahn beschreiben. Wird der dieser Bewegung entsprechende Winkel angegeben, so ist die Lage aller Punkte des Körpers bestimmt.

Wird der starre Körper in einem Punkt festgehalten, so sprechen wir von einem *Kreisel*; dieser besitzt nur noch die 3 Freiheitsgrade der Drehungen um den festgehaltenen Punkt. Werden zwei Punkte festgehalten, so sind nur noch Drehungen um eine die beiden Punkte verbindende Achse erlaubt. Es handelt sich dann um ein *physikalisches Pendel* mit 1 Freiheitsgrad.

5.1.1 Translationen des starren Körpers

Mit unseren Annahmen an die inneren Kräfte können wir gemäß Abschnitt (3.2) die Schwerpunktsbewegung abspalten, ähnlich wie beim 2-Körperproblem. Die Bewegung des Schwerpunktes ist gleich der Bewegung eines fiktiven Partikels mit der Masse M des starren Körpers, siehe Abbildung (5.2).

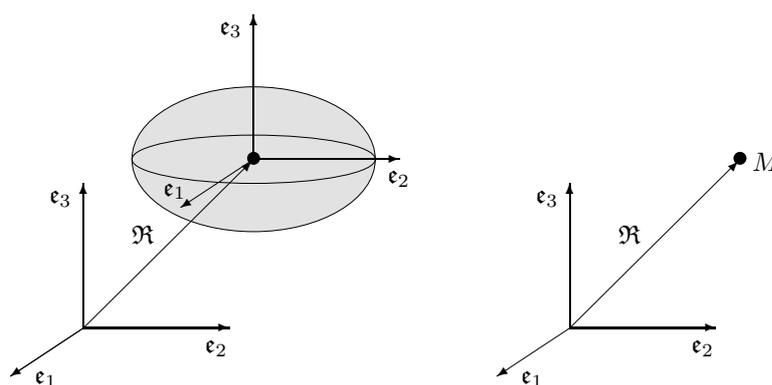


Abbildung 5.2: Zur Bewegung des Schwerpunktes

Die Impulsänderung dieses fiktiven Teilchens ist gleich der Summe der angreifenden äußeren

Kräfte,

$$M\ddot{\mathfrak{R}} = \mathfrak{F}^{(a)}, \quad (5.1)$$

seine Drehimpulsänderung gleich dem von allen äußeren Kräften erzeugten Drehmoment,

$$\dot{\mathfrak{L}}_{\text{trans}} \equiv \frac{d}{dt}(\mathfrak{R} \wedge \mathfrak{P}) = \mathfrak{R} \wedge \mathfrak{F}^{(a)} \quad (5.2)$$

und die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung ist

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2}M\dot{\mathfrak{R}}^2. \quad (5.3)$$

Kann die auf das i -te Teilchen wirkende äußere Kraft aus einem Potential abgeleitet werden, $\mathfrak{F}_i^{(a)} = -\nabla_i V_i^{(a)}(\mathbf{r}_i)$, dann gilt auch der der Energieerhaltungssatz für die Schwerpunktsbewegung,

$$E_{\text{trans}} = T_{\text{trans}} + V^{(a)} = \text{const.} \quad \text{mit} \quad V^{(a)} = \sum V_i^{(a)}. \quad (5.4)$$

Ist die Summe der äußeren Kräfte Null, dann bewegt sich der Schwerpunkt gleichmäßig geradlinig.

5.1.2 Drehbewegungen

Da die Bewegung des Schwerpunktes separat behandelt werden kann, genügt es vollkommen, die Bewegung des starren Körpers im *Schwerpunktsystem* zu untersuchen. Der Ursprung dieses Systems ist der Schwerpunkt und die Achsen sind parallel zu den Achsen in einem Inertialsystem, siehe Abbildung (5.2). In Abwesenheit von äußeren Kräften ist das Schwerpunktsystem ein Inertialsystem. Der Gesamtdrehimpuls \mathfrak{L} ist gleich dem Drehimpuls der Schwerpunktsbewegung $\mathfrak{L}_{\text{trans}}$ plus dem Drehimpuls im Schwerpunktsystem $\mathfrak{L}_{\text{rot}}$. Die Gesamtenergie E ist die Energie der Schwerpunktsbewegung E_{trans} plus diejenige im Schwerpunktsystem E_{rot} , siehe Abschnitt (4.1).

Wegen der eingeschränkten Bewegungsmöglichkeit der Konstituenten eines starren Körpers lassen sich die Ausdrücke für die kinetische Energie und den Drehimpuls im Schwerpunktsystem vereinfachen. Starr sein heißt ja, daß wir im Körper einen Ursprung O' und eine kartesische Basis \mathbf{e}'_a markieren können und das relativ zu diesem System die Koordinaten aller Teilchen des starren Körpers zeitlich konstant sind. Man läßt den Ursprung O' dieses Systems zweckmäßig mit dem Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) zusammenfallen². Das so konstruierte Koordinatensystem ist das am Schwerpunkt verankerte *körperfeste System*. Es ist nicht identisch mit dem Schwerpunktsystem. Die Basisvektoren des Schwerpunktsystems sind *fest* gegenüber den Achsen eines Inertialsystems während die Achsen im körperfesten System mit dem starren Körper rotieren.

Also haben wir zwei Bezugssysteme:

- Das *Schwerpunktsystem* mit dem Ursprung im Schwerpunkt und einem raumfesten Dreibein \mathbf{e}_a als Basis. Bei Abwesenheit von äußeren Kräften ist dies ein Inertialsystem. Ein Punkt des starren Körpers hat in diesem System zeitabhängige Koordinaten, $x_a = x_a(t)$.

²Wird ein Punkt des starren Körpers festgehalten, so wählt man diesen als Ursprung O' , siehe unten.

- Das *körperfeste Koordinatensystem* mit dem Ursprung ebenfalls im Schwerpunkt und gegenüber dem Schwerpunktsystem mit-rotierenden Basisvektoren $\mathbf{e}'_a(t)$. Jeder Punkt des starren Körpers hat zeitunabhängige Koordinaten x'_a bezüglich der mitrotierenden Basis.

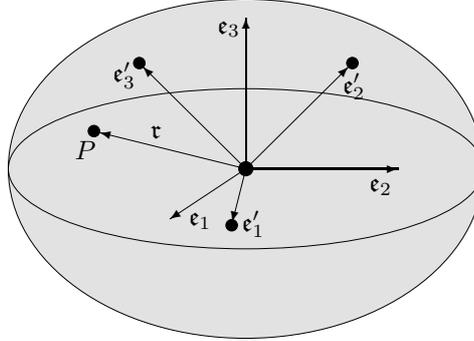


Abbildung 5.3: Ein starrer Körper bezüglich des Schwerpunktsystems und des am Schwerpunkt verankerten körperfesten Koordinatensystems.

Wir entwickeln den Ortsvektor eines Punktes im starren Körper bezüglich der beiden Basen,

$$\mathbf{r}(t) = x_a(t)\mathbf{e}_a = x'_a\mathbf{e}'_a(t). \quad (5.5)$$

Die Basisvektoren $\mathbf{e}'_a(t)$ des körperfesten Systems beschreiben eine Drehung im Schwerpunktsystem genauso wie die Koordinaten $x_a(t)$ im Schwerpunktsystem eine Drehung gegenüber denjenigen im körperfesten System beschreiben,

$$\mathbf{e}'_a(t) = \mathbf{e}_b R_{ba}(t), \quad \text{oder} \quad x_a(t) = R_{ab}(t)x'_b. \quad (5.6)$$

Wir haben früher bewiesen, daß die infinitesimalen Drehungen Ω, Ω' in

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= [\dot{R}(t)R^{-1}(t)]_{ab} x_b(t) \equiv \Omega_{ab}(t) x_b(t) \\ \dot{\mathbf{e}}'_a(t) &= \mathbf{e}'_b(t) [R^{-1}(t)\dot{R}(t)]_{ba} \equiv \mathbf{e}'_b(t) \Omega'_{ba}(t) \end{aligned} \quad (5.7)$$

antisymmetrisch sind. Des weiteren ist

$$\Omega' = R^{-1}\Omega R,$$

wobei alle auftretenden Matrizen zeitabhängig sind³.

Damit nehmen die Geschwindigkeiten bezüglich der beiden Systeme die einfache Form

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_a \Omega_{ab} x_b = \mathbf{e}'_a \Omega'_{ab} x'_b \quad (5.8)$$

an. Parametrisieren wir die schiefsymmetrische infinitesimale Drehung Ω wie früher gemäß $\Omega_{ab} = -\epsilon_{abc}\omega_c$, was sich in Matrixform folgendermaßen schreibt,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \Omega' = \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_3 & \omega'_2 \\ \omega'_3 & 0 & -\omega'_1 \\ -\omega'_2 & \omega'_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

³Um die Notation einfach zu halten, werden wir diese t -Abhängigkeit nicht immer explizit machen.

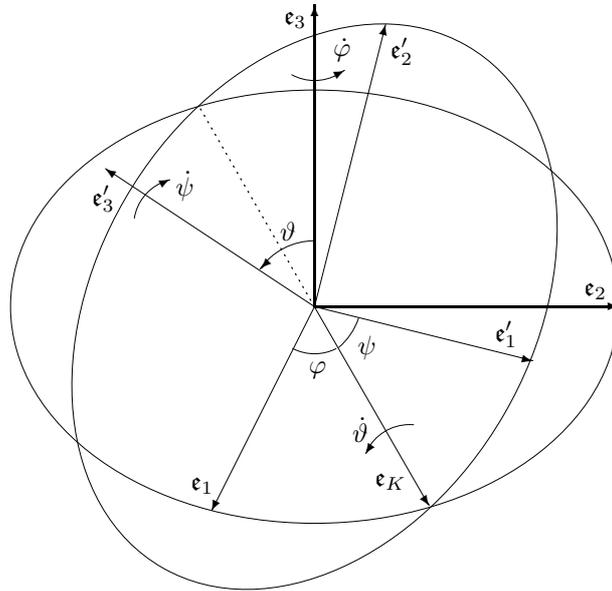


Abbildung 5.4: *Eulersche Winkel*

und führen den Drehvektor

$$\mathbf{w} = \omega_a \mathbf{e}_a = \omega'_a \mathbf{e}'_a, \quad \omega_a = R_{ab} \omega'_b$$

ein, dann hat der Punkt des starren Körpers mit Ortsvektor \mathbf{r}_i die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{w} \wedge \mathbf{r}_i. \quad (5.10)$$

Je nach Situation ist es vorteilhaft die rechte Seite im Schwerpunktsystem oder im körperfesten System auszuwerten.

5.1.3 Eulersche Winkel

Jede Drehung ist durch die drei *Eulerschen Winkel* φ , ψ und ϑ , die die Richtung der Achsen des körperfesten Systems relativ zu einem Inertialsystem festlegen, bestimmt. Zur Definition der EULERSchen Winkel betrachten wir die Abbildung (5.4). Die von \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 aufgespannte Ebene und die von \mathbf{e}'_1 und \mathbf{e}'_2 aufgespannte Ebene schneiden sich in der *Knotenlinie* K ; ihrer Richtung wird der Einheitsvektor \mathbf{e}_K zugeordnet. Die Winkel sind dann folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \varphi &: \text{Winkel zwischen } x_1\text{-Achse und } K \\ \psi &: \text{Winkel zwischen } K \text{ und der } x'_1\text{-Achse} \\ \vartheta &: \text{Winkel zwischen } x_3 \text{ und } x'_3 \text{ Achse.} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Jede Drehung der Inertialbasis in die körperfeste Basis kann also in drei Schritten vorgenommen werden:

1. einer Drehung um die \mathbf{e}_3 -Achse mit dem Winkel φ ,
2. einer anschließenden Drehung um die neue \mathbf{e}_1 Achse mit dem Winkel ϑ ,
3. und einer darauffolgenden Drehung um die neue \mathbf{e}_3 Achse mit Winkel ψ .

Die erste Drehung um $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ mit dem Winkel φ transformiert nach (2.44) die Basisvektoren gemäß

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi \quad , \quad \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 \sin \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \varphi \quad , \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3.$$

Die zweite Drehung um \mathbf{e}'_1 mit Winkel ϑ gemäß

$$\mathbf{e}''_1 = \mathbf{e}'_1 \quad , \quad \mathbf{e}''_2 = \mathbf{e}'_2 \cos \vartheta + \mathbf{e}'_3 \sin \vartheta \quad , \quad \mathbf{e}''_3 = -\mathbf{e}'_2 \sin \vartheta + \mathbf{e}'_3 \cos \vartheta,$$

und die dritte um \mathbf{e}''_3 mit Winkel ψ

$$\mathbf{e}'''_1 = \mathbf{e}''_1 \cos \psi + \mathbf{e}''_2 \sin \psi \quad , \quad \mathbf{e}'''_2 = -\mathbf{e}''_1 \sin \psi + \mathbf{e}''_2 \cos \psi \quad , \quad \mathbf{e}'''_3 = \mathbf{e}''_3$$

Diese drei Drehungen definieren nach (5.6) entsprechende Drehmatrizen $R(\mathbf{e}_3, \varphi)$, $R(\mathbf{e}_1, \vartheta)$ und $R(\mathbf{e}_3, \psi)$ und führen, da die Gesamtdrehung als Produkt der drei Drehungen definiert wurde, auf die Drehmatrix

$$\begin{aligned} R(\varphi, \vartheta, \psi) &= R(\mathbf{e}_3, \varphi)R(\mathbf{e}_1, \vartheta)R(\mathbf{e}_3, \psi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \sin \psi & -\sin \varphi \cos \vartheta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \sin \psi & \cos \varphi \cos \vartheta \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & -\cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi & \sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Die erste Drehung steht links, die zweite in der Mitte und die dritte rechts. Diese Reihenfolge rührt daher, daß in (5.6) die Drehmatrix von rechts auf die Basisvektoren wirkt.

Jede Bewegung des starren Körpers im Schwerpunktsystem ist durch die Zeitabhängigkeit der EULERSchen Winkel gegeben. Zu jedem Zeitpunkt ist dies eine Drehung um die Achse, definiert durch den momentanen Drehvektor \mathbf{w} (Vektor der Winkelgeschwindigkeit). Der Betrag ω von \mathbf{w} bestimmt wie schnell um diese Achse gedreht wird. Mit Hilfe von (5.7) können wir nun die infinitesimalen Drehungen Ω oder äquivalent dazu die Komponenten \mathbf{w} im Schwerpunktsystem beziehungsweise im körperfesten System berechnen. Wir finden folgenden Zusammenhang zwischen dem Komponenten des Drehvektors \mathbf{w} einerseits und den Eulerschen Winkeln und deren Zeitableitungen andererseits,

$$(\omega_a) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \dot{\vartheta} + \sin \varphi \sin \vartheta \dot{\psi} \\ \sin \varphi \dot{\vartheta} - \cos \varphi \sin \vartheta \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} + \cos \vartheta \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad , \quad (\omega'_a) = \begin{pmatrix} \cos \psi \dot{\vartheta} + \sin \psi \sin \vartheta \dot{\varphi} \\ -\sin \psi \dot{\vartheta} + \cos \psi \sin \vartheta \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Die drei speziellen Drehungen, bei denen jeweils zwei EULERSche Winkel festgehalten werden, haben die Form,

$$\begin{aligned} d\varphi = d\psi = 0 & : \quad \mathbf{w}_\vartheta = \dot{\vartheta} \mathbf{e}_K \\ d\psi = d\vartheta = 0 & : \quad \mathbf{w}_\varphi = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3 \\ d\vartheta = d\varphi = 0 & : \quad \mathbf{w}_\psi = \dot{\psi} \mathbf{e}'_3. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Im ersten Fall drehen wir um die Knotenlinie, also um den Vektor

$$\mathbf{e}_K = \cos \psi \mathbf{e}'_1 - \sin \psi \mathbf{e}'_2, \quad (5.15)$$

im zweiten Fall um die \mathbf{e}_3 -Achse und im dritten um die \mathbf{e}'_3 -Achse.

5.2 Rotationsenergie und Trägheitstensor

Es ist zu vermuten, daß das Trägheitsverhalten eines starren Körpers, der ja eine unveränderliche Gestalt hat, nicht nur von seiner Gesamtmasse M bestimmt wird, sondern auch von Größen, in welche die relative Lage und die Massenzahlen der einzelnen Massenpunkte des Körpers eingehen. Wir werden sehen, daß zusätzlich zu M nur sechs solcher von der Gestalt und Massenverteilung des starren Körpers abhängigen Zahlen nötig sind, um seine Trägheitseigenschaften vollständig in einem beliebigen körperfesten Koordinatensystem zu beschreiben.

Für die kinetische Energie im Schwerpunktsystem finden wir mit (5.10) den einfachen Ausdruck

$$T_{\text{rot}} \equiv \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\mathbf{w} \wedge \mathbf{r}_i)^2. \quad (5.16)$$

Die gesamte kinetische Energie des starren Körpers ist dann die Summe aus der kinetischen Energie T_{trans} seiner Schwerpunktsbewegung und der Energie T_{rot} der Drehbewegung seiner Konstituenten um den gemeinsamen Schwerpunkt, $T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}$. Wir werten T_{rot} im körperfesten KS mit den kartesischen Koordinaten x'_a aus. Wegen

$$(\mathbf{w} \wedge \mathbf{r})^2 = \sum_{ab} (r^2 \delta_{ab} - x'_a x'_b) \omega'_a \omega'_b,$$

schreibt sich die kinetische Energie der Rotation wie folgt

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{ab} \Theta'_{ab} \omega'_a \omega'_b, \quad \text{wobei} \quad \Theta'_{ab} = \sum_i m_i (r_i^2 \delta_{ab} - x'_{ia} x'_{ib}) \quad (5.17)$$

offenbar die Trägheit des starren Körpers gegenüber Drehungen beschreibt. Diese Trägheit ist also nicht wie bei der Translationsbewegung einzelner Massenpunkte durch *eine* Zahl, nämlich die träge Masse, charakterisiert, sondern man benötigt auch die Lagen der Massenpunkte bezüglich des Ursprungs und hat die neun Größen Θ'_{ab} zu bilden, von denen allerdings nur sechs voneinander unabhängig sind. Wir nennen deshalb Θ'_{ab} den *Trägheitstensor* des starren Körpers.

Zur Verdeutlichung stellen wir den Trägheitstensor noch in Matrixschreibweise dar,

$$(\Theta'_{ab}) = \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}', \quad (5.18)$$

wobei der Strich bedeutet, daß die Koordinaten im körperfesten System gemeint sind. Er ist ein Tensor, da er sich bei Transformationen des Koordinatensystems wie das Produkt zweier Vektoren verhält, was sich aus seiner Definition (5.17) ergibt.

Man kann die kinetischen Energie natürlich auch im Schwerpunktsystem auswerten. Das entsprechende Resultat lautet

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{ab} \Theta_{ab} \omega_a \omega_b, \quad \text{mit} \quad \Theta_{ab} = \sum_i m_i (r_i^2 \delta_{ab} + x_{ia} x_{ib}).$$

Die beiden Koordinatensysteme sind über eine t -abhängige Drehung verbunden, $x_a = R_{ac} x'_c$, so daß

$$\Theta_{ab}(t) = R_{ac}(t) R_{ad}(t) \Theta'_{cd} \quad \text{bzw.} \quad \Theta(t) = R(t) \Theta' R^T(t). \quad (5.19)$$

Im Schwerpunktsystem ist der Trägheitstensor zeitabhängig, da die Drehungen zeitabhängig sind. Deshalb ist es meist vorteilhaft im körperfesten System zu rechnen.

Für einen Festkörper bestehend aus etwa 10^{24} Teilchen sind in einem makroskopisch kleinen aber mikroskopisch großen Volumen ΔV mit einem Durchmesser von $\sim 10^{-6}$ cm etwa 10^5 Atome enthalten. Wie in Abschnitt (4.1.1) gehen wir deshalb von der diskreten zur makroskopisch kontinuierlichen Beschreibung des starren Körpers über und ersetzen die Massen im kleinen Volumen ΔV_i durch $\rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i$, wobei $\rho(\mathbf{r}_i)$ die mittlere Massendichte im betrachteten Volumenelement ist. Dann ist der Trägheitstensor durch folgendes Integral über das Volumen des starren Körpers gegeben,

$$\Theta'_{ab} = \int_{V'} d^3 r' \rho(\mathbf{r}') (r'^2 \delta_{ab} - x'_a x'_b). \quad (5.20)$$

Das Element Θ'_{11} nennt man *Trägheitsmoment* der Massenverteilung um die \mathbf{e}'_1 -Achse; entsprechend Θ'_{22} und Θ'_{33} . Für die nichtdiagonalen Elemente sind die Namen *Trägheitsprodukte*, *Zentrifugalmomente* oder *Deviationsmomente* im Gebrauch.

Wenn das Schwerpunktsystem relativ zum Laborsystem eine Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{R}} = u_a \mathbf{e}_a$ aufweist, dann beträgt die gesamte kinetische Energie im Laborsystem

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M u_a u_a + \frac{1}{2} \Theta_{ab} \omega_a \omega_b = \frac{1}{2} M u_a u_a + \frac{1}{2} \Theta'_{ab} \omega'_a \omega'_b.$$

Bei einem Objekt, das am Boden entlangrollt, gibt es einen geometrischen Zusammenhang zwischen u und ω . So ist für eine Rad mit Radius R die Geschwindigkeit des Schwerpunktes gleich ωR . In solchen Fällen kann die kinetische Energie auch über ω allein ausgedrückt werden.

Wenn ein rotationssymmetrischer Körper, zum Beispiel ein homogener Kreiszyylinder, eine Rampe mit Neigung θ herunterrollt, können wir seine Beschleunigung aus der Energieerhaltung berechnen. Es zeige \mathbf{e}'_3 in Richtung der Symmetrieachse des Körpers, welche mit der

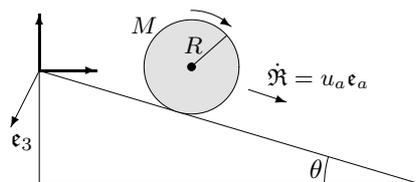


Abbildung 5.5: Zylinder, der eine geneigte Ebene herunterrollt

Drehachse übereinstimme. Dann ist die kinetische Energie der Rotation

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2}C\omega^2, \quad (5.21)$$

wobei r_i der Abstand des Massenelementes m_i von der Drehachse bezeichnet. Wir werden später sehen, wie das Trägheitsmoment $C \equiv \Theta_{33}$ zu berechnen ist. Ist u der Betrag der Schwerpunkts­geschwindigkeit, dann ist für einen rollenden Zylinder $\omega = u/R$ und deshalb

$$T = \frac{1}{2}C\omega^2 + \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{R^2} + M\right)u^2.$$

In einem kurzen Zeitintervall dt verändert sich dann die kinetische Energie um

$$dT = \left(\frac{C}{R^2} + M\right)udu.$$

Eine entsprechende Änderung erfährt auch die potentielle Energie im Schwerfeld. Während dt legt der rollende Zylinder eine Strecke udt parallel zur Oberfläche der schiefen Ebene zurück, was mit einer Verringerung der Höhe um $-u \sin \theta dt$ verbunden ist. Also folgt

$$dV = -Mgu \sin \theta dt.$$

Mit der Energieerhaltung $d(T + V) = 0$ gilt dann

$$\left(\frac{C}{R^2} + M\right)udu - Mgu \sin \theta dt = 0,$$

also

$$\frac{du}{dt} = \frac{MR^2}{C + MR^2} g \sin \theta.$$

Für einen homogene Zylinder ist $C = \frac{1}{2}MR^2$ und für eine homogene Kugel $2MR^2/5$, so daß

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{\text{Kreiszyliner}} = \frac{2}{3}g \sin \theta \quad \text{und} \quad \left.\frac{du}{dt}\right|_{\text{Kugel}} = \frac{5}{7}g \sin \theta.$$

Interessanterweise hängen diese Ergebnisse weder von der Masse des Zylinders oder der Kugel noch von ihren Radien ab. Die Notwendigkeit des Aufbringens von kinetischer Energie der Rotation führt immer zu einer geringeren translatorischen Beschleunigung, als wenn das Objekt einfach reibungsfrei die schiefe Ebene hinunterrutscht. Die Rotationsträgheit wirkt effektiv wie eine Art Bremse für die Bewegung.

In den zwanziger Jahren verwendete man Motorgeneratoren mit großen Schwungrädern, die ILGNER-Umformer, zum Abfangen von Lastspitzen in Walzwerken und bei Fördermaschinen. 1924 lieferte die AEG einen ILGNER-Umformer, dessen Schwungrad einen Durchmesser von 4 m, eine Breite von 1 m und ein Gewicht von 50 t hatte. Das Trägheitsmoment von $C = 193\,760 \text{ kg m}^2$ kam demjenigen eines Kreisrings mit demselben Radius nahe, da für einen Kreisring mit Radius R gilt

$$C = \sum m_i r_i^2 \stackrel{r_i \equiv R}{=} MR^2 = 200\,000 \text{ kg m}^2$$

Die maximale Drehzahl des Schwungrads betrug 750 rpm (revolutions per minute, Umdrehungen je Minute), was einem maximalen Energieinhalt von

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}C\omega^2 = 0.5 \cdot 193\,760 \cdot (2\pi \cdot 750/60)^2 \text{J} = 5.9810^8 \text{ J} \sim 166 \text{ kWh}$$

entspricht. Ein weiteres eindruckvolles Beispiel eines Schwungradenergiespeichers befindet sich am National Magnetic Laboratory des MIT. Dort gibt es zwei Schwungräder, jedes mit einer Masse von 77 t und einem Radius von 2.4 m. Die Umdrehungsgeschwindigkeit jedes der Schwungräder liegt bei 390 rpm. Die Schwungräder am MIT können in guter Näherung als homogene Scheiben behandelt werden, so daß jedes Rad ein Trägheitsmoment von

$$C = \frac{1}{2}MR^2 \sim 2 \times 10^5 \text{ kg m}^2$$

hat. 390 rpm entsprechen etwa 40 rad/s und man errechnet für jedes Rad eine kinetische Rotationsenergie von

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}C\omega^2 \sim 1.6 \times 10^8 \text{ J} \sim 44 \text{ kWh.}$$

Die Räder sind so konzipiert, daß sie in 5 s von 390 auf 300 rpm abgebremst werden können um als Kraftquelle zu dienen. Dem entspricht eine Leistungsausbeute von etwa 15 MW.

Nicht unerwähnt bleiben soll die Verwendung des Schwungrades bei Spielzeugen wie zum Beispiel Kreisel, Jo-Jo und Diabolo. Bevor die handelsüblichen Trockenbatterien auf dem Markt waren, wurden Spielzeugautos neben Speicherfedern vorwiegend mit Schwungradenergiespeichern angetrieben.

5.2.1 Eigenschaften des Trägheitstensors, Beispiele

Der Trägheitstensor hat folgende Eigenschaften:

- Es handelt sich um einen symmetrischen Tensor. Damit kann er auf *Hauptachsen* transformiert werden, d.h. es gibt ein körperfestes kartesisches Basissystem, die Hauptachsen des Tensors, in dem er Diagonalgestalt hat:

$$(\Theta'_{ab}) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Die reellen Eigenwerte A, B und C heißen *Hauptträgheitsmomente*.

- Die Hauptträgheitsmomente sind nichtnegativ und genügen der Ungleichung

$$A + B \geq C \quad (5.23)$$

und zyklisch. Dies folgt unmittelbar nach Transformation auf die Hauptachsen,

$$A + B = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + 2z_i'^2) \quad \text{und} \quad C = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2).$$

Die Ungleichung (5.23) wird zu einer Gleichung genau dann, wenn der starre Körper in einer Ebene senkrecht zur dritten Hauptachse liegt. Die Gleichung

$$A + B = C \quad \text{für flache Objekte} \quad (5.24)$$

ist als *Theorem der senkrechten Achsen* bekannt.

Als einfaches Beispiel betrachten wir eine homogene Scheibe mit Masse M und Radius R und berechnen ihr Trägheitsmoment in Bezug auf eine Rotationsachse in Richtung eines Durchmessers, sagen wir der \mathbf{e}_1 - Achse in der Abbildung (5.6).

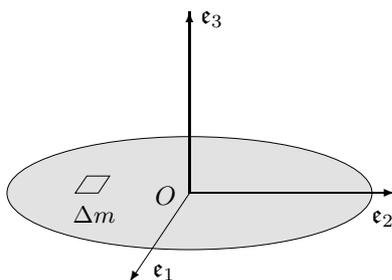


Abbildung 5.6: Ein flacher Körper, für den $C = A + B$ gilt.

Wir wissen, daß das Trägheitsmoment in Bezug auf jeden Durchmesser denselben Wert hat. Das Trägheitsmoment C bei Rotation der Scheibe um die Achse senkrecht zur Scheibe durch ihren Mittelpunkt ist leicht zu berechnen: Ist ρ die Flächenmassendichte der Scheibe, so folgt

$$C = \rho \int_0^R r'^2 \underbrace{r' dr' d\varphi'}_{dx'_1 dx'_2} = \frac{\pi}{2} \rho R^4 = \frac{1}{2} MR^2.$$

Damit können wir ansetzen

$$A + B = 2A = C = \frac{1}{2} MR^2 \implies A = \frac{1}{4} MR^2.$$

- Der Trägheitstensor ist additiv, d.h. er ist die Summe der Trägheitstensoren seiner Teile, freilich bezogen auf den gleichen Punkt.
- Im Allgemeinen unterscheiden sich die Trägheitstensoren im mitbewegten und raumfesten System. Sind aber alle Hautträgheitsmomente gleich, $A = B = C$, so ist $\Theta' = A\mathbb{1}$ und entsprechend

$$\Theta = R\Theta'R^T = \Theta' = A\mathbb{1}.$$

Insbesondere haben starre Körper mit $A = B = C$ auch im Schwerpunktsystem einen zeitunabhängigen Trägheitstensor. Sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich, $A = B \neq C$, dann ist

$$\Theta = \Theta' = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \iff R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. der Trägheitstensenoren im mitbewegten und raumfesten System sind genau dann gleich, wenn der Körper um die dritte Achse mit Hauptträgheitsmoment C dreht. Beim Beweis benutzt man die allgemeine Beziehung (5.19) zwischen den Trägheitstensenoren Θ und Θ' . Die Forderung nach Gleichheit der Trägheitstensenoren lautet dann $\Theta'R = R\Theta = R\Theta'$. Mit der obigen Form für die Matrix Θ' folgt dann, daß R eine Drehung um die dritte Achse sein muß. Wir haben diese Eigenschaft schon früher bei der Behandlung des die schiefe Ebene hinunterrollenden Zylinders benutzt, siehe (5.21).

Oft benötigt man den Trägheitstensor Θ'^c bezüglich eines Punktes $\mathfrak{R} + \mathbf{c}$, der gegenüber dem Schwerpunkt um den Vektor \mathbf{c} verschoben ist.

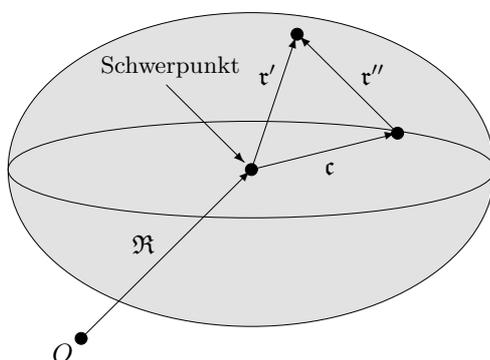


Abbildung 5.7: Zum STEINERSchen Satz.

Es gilt der *Steinersche Satz*

$$\Theta'_{ab}{}^c = \Theta'_{ab} + M(c^2\delta_{ab} - c_a c_b). \quad (5.25)$$

Daraus folgt, daß das Trägheitsmoment eines Körpers um eine Achse durch den beliebigen Punkt O gleich seinem Trägheitsmoment um die parallele Achse durch den Schwerpunkt ist, vermehrt um $M s^2$, wobei s der Abstand der beiden Achsen ist. Das Trägheitsmoment wird bei fester Achsenrichtung minimal wenn die Achse durch den Schwerpunkt geht.

Der Beweis von (5.25) ist einfach: Gemäß Abbildung (5.7) ist $x''_a = x'_a - c_a$ und entsprechend gilt

$$\Theta'_{ab}{}^c = \sum m_i (x''_{ip} x''_{ip} \delta_{ab} - x''_{ia} x''_{ib}) = \sum m_i (x'_{ip} x'_{ip} \delta_{ab} - x'_{ia} x'_{ib}) + M(c^2 \delta_{ab} - c_a c_b),$$

wobei wir wieder einmal von $\sum m_i x'_{ia} = 0$ Gebrauch machten. Wir legen nun \mathbf{e}'_1 in die Rotationsachse. Liegt der Schwerpunkt in der Rotationsachse, dann ist das Trägheitsmoment Θ'_{11} . Geht sie durch $\mathfrak{R} + \mathbf{c}$, dann ist das Trägheitsmoment gleich $\Theta'_{11} + M(c_2^2 + c_3^2)$. Aber $s^2 \equiv c_2^2 + c_3^2$ ist genau das Quadrat des Abstands der beiden Drehachsen voneinander.

Für Körper mit Symmetrieachsen ist es oft möglich die Hauptachsen und Trägheitsmomente explizit anzugeben. In der folgenden Abbildung haben wir einige typische Beispiele skizziert.

Die Körper haben eine homogene Massendichte ρ , eine Gesamtmasse M und die angegebenen Trägheitsmomente beziehen sich auf den Schwerpunkt. Die Größen A, B und C sind die Hauptträgheitsmomente um die in der Abbildung (5.8) eingezeichneten Achsen 1, 2 und 3.

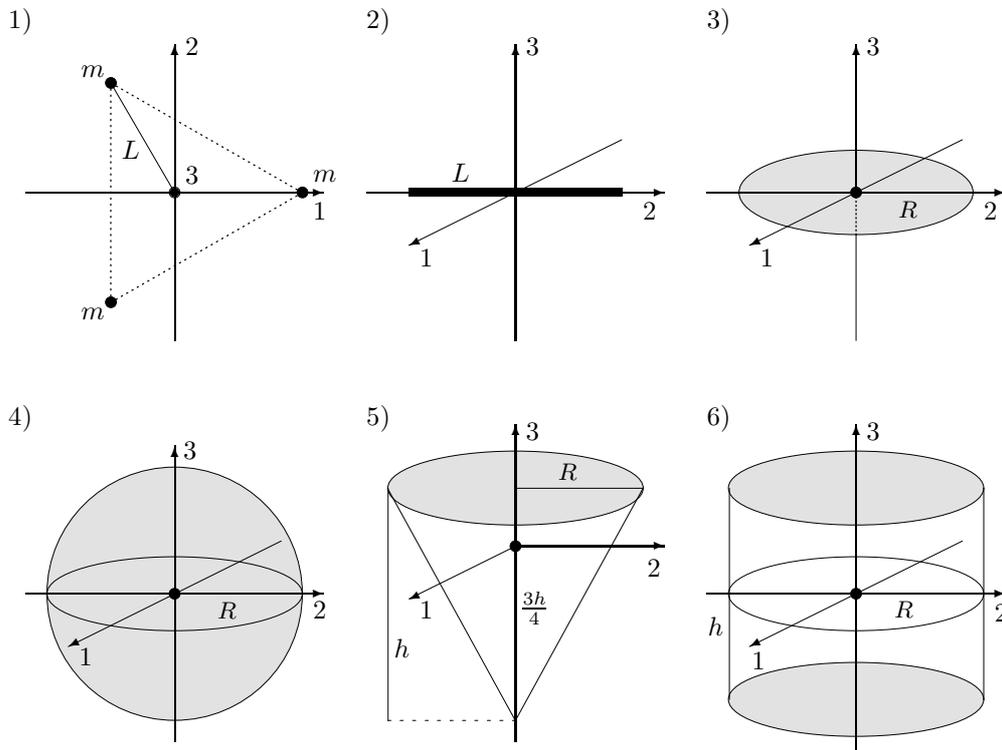


Abbildung 5.8: Zu den Trägheitsmomenten ausgewählter Körper.

1. Drei gleichschwere Massenpunkte an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks:

$$(A, B, C) = \frac{ML^2}{2}(1, 1, 2).$$

2. Dünner Stab der Länge L :

$$(A, B, C) = \frac{ML^2}{12}(1, 0, 1).$$

3. Dünne Scheibe mit Radius R :

$$(A, B, C) = \frac{MR^2}{4}(1, 1, 2).$$

4. Vollkugel mit Radius R :

$$(A, B, C) = \frac{2MR^2}{5}(1, 1, 1).$$

5. Gerader Kreiskegel mit Grundfläche πR^2 und Höhe h :

$$(A, B, C) = \frac{3MR^2}{20} \left(1 + \frac{h^2}{4R^2}, 1 + \frac{h^2}{4R^2}, 2 \right).$$

6. Gerader Kreiszylinder mit Radius R und Höhe h :

$$(A, B, C) = \frac{MR^2}{12} \left(3 + \frac{h^2}{R^2}, 3 + \frac{h^2}{R^2}, 6 \right).$$

7. Kubus mit Kantenlänge L :

$$(A, B, C) = \frac{ML^2}{6} (1, 1, 1).$$

8. Quader mit Kantenlängen L_1, L_2, L_3 :

$$(A, B, C) = \frac{M}{12} (L_2^2 + L_3^2, L_1^2 + L_3^2, L_1^2 + L_2^2).$$

Wir skizzieren die Berechnung des Trägheitsmomentes A für den Kreiskegel. Wir setzen den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt, so daß die Kegeloberfläche durch die Gleichung

$$r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{R}{h} \left(z + \frac{3h}{4} \right) \quad (5.26)$$

definiert ist. Bei konstanter Massenbelegung ist die Kegelmasse

$$M = \rho \cdot V = \frac{\pi}{3} \rho h R^2.$$

Wir berechnen zuerst den Beitrag einer Schicht mit konstantem z zum Trägheitsmoment A ,

$$\rho \int (y^2 + z^2) r' dr' d\varphi = \rho \int (r'^2 \sin^2 \varphi + z^2) r' dr' d\varphi = \rho \pi \left(\frac{r^4}{4} + z^2 r^2 \right),$$

wobei wir die obere Integrationsgrenze r aus (5.26) eingesetzt haben. Die anschließende Integration über z von $-3h/4$ bis $h/4$ ergibt

$$\rho \pi \frac{R^2 h}{80} (4R^2 + h^2).$$

Mit dem obigen Ausdruck für die Masse des Kreiskegels erhalten wir folgende Hauptträgheitsmomente bezüglich des Schwerpunktes,

$$A = B = \frac{3M}{80} (4R^2 + h^2),$$

wie in der obigen Liste angegeben. Verschieben wir die Drehachse 1 parallel zu sich selbst bis sie durch den Kegelspitze geht, dann ist nach dem STEINERSchen Satz das entsprechende Trägheitsmoment

$$A = \frac{3MR^2}{20} \left(1 + \frac{4h^2}{R^2} \right).$$

Für alle angebenen Körper mit Ausnahme des Quaders sind mindestens zwei Hauptträgheitsmomente gleich. Solche Körper nennt man *symmetrische Kreisel*. Für einen symmetrischen Kreisel mit $A = B$ vereinfacht sich die kinetische Energie der Rotation,

$$T_{\text{rot}} = \frac{A}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{C}{2} (\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi})^2. \quad (5.27)$$

Sind alle drei Hauptträgheitsmomente voneinander verschieden, dann spricht man vom *unsymmetrischen Kreisel*, sind dagegen alle drei gleich, dann handelt es sich um den *Kugelkreisel*. Die Vollkugel oder der Kubus sind Kugelkreisel. Für $A = B = C$ ist die Rotationsenergie

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Theta'_{ab} \omega'_a \omega'_b = \frac{A}{2} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2 \cos \vartheta \dot{\varphi} \dot{\psi}) \quad (5.28)$$

5.3 Drehimpuls und kräftefreie symmetrische Kreisel

Wir sehen uns jetzt den Drehimpulssatz genauer an. Im allgemeinen ist der Trägheitstensor nur im körperfesten Koordinatensystem konstant, so daß es notwendig ist, die Bewegungsgleichung, d.h. in erster Linie die Zeitableitung des Drehimpulses $\mathfrak{L}_{\text{rot}}$ auf das körperfeste System umzurechnen.

Der Drehimpuls des Kreisels bezüglich seines Schwerpunktes ist

$$\mathfrak{L}_{\text{rot}} = \sum m_i \mathbf{r}_i \wedge \dot{\mathbf{r}}_i, \quad (5.29)$$

und kann mit Hilfe von $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{w} \wedge \mathbf{r}_i$ und

$$\mathbf{r} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{r}) = \sum_{ab} \mathbf{e}_a (r^2 \delta_{ab} - x_a x_b) \omega_b = \sum_{ab} \mathbf{e}'_a (r'^2 \delta_{ab} - x'_a x'_b) \omega'_b$$

wie folgt geschrieben werden,

$$\mathfrak{L}_{\text{rot}} = \mathbf{e}_a \Theta_{ab} \omega_b = \mathbf{e}'_a \Theta'_{ab} \omega'_b. \quad (5.30)$$

Die Komponenten des Drehimpulses im Schwerpunkt- bzw. mitrotierenden System hängen linear von den Kreisfrequenzen ab,

$$L_a = \Theta_{ab} \omega_b \quad \text{und} \quad L'_a = \Theta'_{ab} \omega'_b, \quad L_a = R_{ab}(t) L'_b(t). \quad (5.31)$$

5.3.1 Poinsot-Darstellung der Trägheitsdrehbewegung

Sind die äußeren Kräfte von der Winkelgeschwindigkeit und das Drehmoment von der Translationsgeschwindigkeit unabhängig, so lassen sich Translations- und Drehbewegung gesondert behandeln. Wir beschäftigen uns hier hauptsächlich mit der letzteren. Wir betrachten zunächst den im Raum frei beweglichen starren Körper oder den im Schwerpunkt unterstützten Kreisel im homogenen Schwerfeld. In beiden Fällen verschwindet das Drehmoment bezüglich des Schwerpunktes. Wenn wir auch den Luftwiderstand und die Reibung vernachlässigen, haben wir das Problem des *kräftefreien Kreisels* vor uns. Für einen kräftefreien Kreisel ist die kinetische Energie der Rotation konstant,

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega_a \Theta_{ab} \omega_b = \frac{1}{2} \omega'_a \Theta'_{ab} \omega'_b \quad (5.32)$$

und die Spitze von \mathbf{w} liegt auf dem beweglichen POINSOTSchen Energieellipsoid,

$$\mathcal{E}(t) = \{ \omega_a | \omega_a \Theta_{ab}(t) \omega_b = 2T_{\text{rot}} \},$$

das kongruent zum Trägheitsellipsoid \mathcal{E}_0 ist

$$\mathcal{E}(t) = R(t) \mathcal{E}_0, \quad \mathcal{E}_0 = \{ \omega'_b | \omega'_b \Theta'_{ab} \omega'_b = 2T_{\text{rot}} \}.$$

Aus der Erhaltung des Drehimpulses im Schwerpunktsystem und

$$\mathbf{w} \cdot \mathfrak{L}_{\text{rot}} = 2T_{\text{rot}} = \text{const.}, \quad (5.33)$$

folgt, daß die Spitze des Drehvektors \mathbf{w} auch noch in einer invariablen Ebene liegt welche senkrecht zu $\mathfrak{L}_{\text{rot}}$ ist, siehe die Abbildung (5.9).

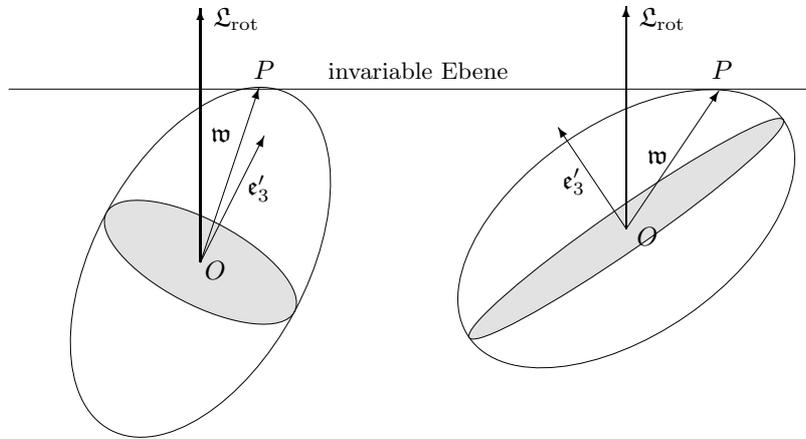


Abbildung 5.9: Zur POINSONSchen Darstellung der Bewegung für den verlängerten und abgeplatteten Trägheitsellipsoid. ϵ'_3 zeigt in Richtung der Figurenachse.

Wir zeigen nun, daß die invariable Ebene und der POINSONSche Ellipsoid genau einen gemeinsamen Punkt haben und sich deshalb in diesem Punkte berühren müssen. Dazu nehmen wir an, daß \mathfrak{w} und \mathfrak{m} beide in der Schnittmenge von Ebene und Ellipsoid liegen,

$$\mathfrak{w}, \mathfrak{m} \in \text{invariabler Ebene} \cap \mathcal{E}(t),$$

und beweisen, daß dann $\mathfrak{w} = \mathfrak{m}$ gelten muß. Es seien ω_a und m_a die zu \mathfrak{w} und \mathfrak{m} gehörigen Koordinatentripel. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\omega_a - m_a)\Theta_{ab}(\omega_b - m_b) &= \omega_a\Theta_{ab}\omega_b - 2\omega_a\Theta_{ab}m_b + m_a\Theta_{ab}m_b \\ &\stackrel{(5.33)}{=} 2T_{\text{rot}} - 2\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{L}_{\text{rot}} + 2T_{\text{rot}} = 0. \end{aligned}$$

Sind alle Hauptträgheitsmomente positiv, so ist Θ invertierbar und damit folgt in der Tat $\mathfrak{w} = \mathfrak{m}$. Die Spitze von \mathfrak{w} ist der Berührungspunkt zwischen invariabler Ebene und Energieellipsoid. Die Größe der Winkelgeschwindigkeit ist durch den Abstand zwischen dem festen Punkt O und dem Berührungspunkt P gegeben. Der Berührungspunkt hat als Punkt auf der Drehachse die Geschwindigkeit Null, und die Bewegung von \mathfrak{w} kann deshalb durch das Abrollen des Energieellipsoids auf der invariablen Ebene erhalten werden. Der kräftefreie Kreisel bewegt sich so, daß das körperfeste POINSONSche Ellipsoid auf der invariablen Ebene abrollt, ohne zu gleiten. Man nennt die Bahn, welche die Spitze von \mathfrak{w} auf der invariablen Ebene beschreibt die *Spurbahn*, die entsprechende Bahn auf dem Energieellipsoid bezeichnet man als *Polbahn*.

5.3.2 Kräftefreie symmetrische Kreisel

Für den symmetrischen Kreisel sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich, zum Beispiel $A = B$. Der körperfeste Basisvektor ϵ'_3 zeige in Richtung der Figurenachse des symmetrischen Kreisels, also in Richtung der dritten Hauptachse mit Hauptträgheitsmoment C .

Wegen $A = B$ ist der Trägheitse ellipsoid \mathcal{E}_0 rotationssymmetrisch. Beim Abrollen des Ellipso-
ids auf der invariablen Ebene entstehen deshalb Kreise, d.h. \mathfrak{w} hat einen konstanten Betrag
und beschreibt einen Kegel um \mathfrak{L} , der als *Spurkegel* oder *Rastpolkegel* bezeichnet wird. Die
Bewegung der Symmetrieachse des Kreisels nennt man *Nutation*. \mathfrak{w} beschreibt einen Kegel
um diese Symmetrieachse, der als *Gangpolkegel* bezeichnet wird.

Wir wählen \mathbf{e}_3 in Richtung des konstanten Drehimpulses $\mathfrak{L}_{\text{rot}}$,

$$\mathfrak{L}_{\text{rot}} = \ell \mathbf{e}_3 \quad \text{bzw.} \quad L_a = \ell \delta_{a3}. \quad (5.34)$$

Dann finden wir für die (zeitabhängigen) Komponenten des Drehimpulses im körperfesten
System

$$(L'_a) = (L_b R_{ba}) \stackrel{(5.34)}{=} (\ell R_{3a}) = \ell \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi \\ \sin \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

Der Zusammenhang zwischen den Komponenten des Drehvektors und denjenigen des Dre-
himpulses ist $L'_a = \Theta'_{ab} \omega'_b$ und hat ausgeschrieben folgende Form

$$\begin{aligned} \ell \sin \vartheta \sin \psi &= A \omega'_1 = A \cos \psi \dot{\vartheta} + A \sin \psi \sin \vartheta \dot{\varphi} \\ \ell \sin \vartheta \cos \psi &= A \omega'_2 = -A \sin \psi \dot{\vartheta} + A \cos \psi \sin \vartheta \dot{\varphi} \\ \ell \cos \vartheta &= C \omega'_3 = C \dot{\psi} + C \cos \vartheta \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\cos \psi$ und die zweite mit $\sin \psi$ und bilden die
Differenz der entstehenden Gleichungen, so erhalten wir $A \dot{\vartheta} = 0$, oder

$$\vartheta = \vartheta_0 = \text{const.} \quad (5.37)$$

Benutzen wird dies wieder in den ersten beiden Gleichungen, so ergibt sich $\ell = A \dot{\varphi}$, also

$$\varphi(t) = \frac{\ell}{A} t + \varphi_0. \quad (5.38)$$

Setzen wir diese Resultate für φ und ϑ in die letzte Gleichung in (5.36) ein, dann folgt

$$\psi(t) = \ell t \cos \vartheta_0 \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \psi_0. \quad (5.39)$$

Deshalb sind für den kräftefreien symmetrischen Kreisel alle EULERSchen Winkel, und damit
die Drehung vom Schwerpunktsystem ins körperfeste System, als Funktionen der Zeit be-
stimmt. Das körperfeste System dreht sich um das raumfeste, wobei der Winkel ϑ_0 zwischen
 \mathbf{e}_3 und \mathbf{e}'_3 konstant bleibt. Die Winkel φ und ψ nehmen linear mit der Zeit zu.

Wie schaut die Bewegung *im Schwerpunktsystem* aus? In diesem System sind die Kompo-
nenten des Drehimpulses fest. Mit (5.13) erhalten wir den Drehvektor

$$\begin{aligned} \mathfrak{w} = \omega_a \mathbf{e}_a &= \ell \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) (\mathbf{e}_1 \sin \varphi(t) - \mathbf{e}_2 \cos \varphi(t)) \\ &+ \ell \left(\frac{\cos^2 \vartheta_0}{C} + \frac{\sin^2 \vartheta_0}{A} \right) \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (5.40)$$

wobei wir (5.13) und (5.37-5.39) benutzten. Der Drehvektors \mathfrak{w} hat die quadrierte Länge

$$\omega^2 = \ell^2 \left(\frac{\sin^2 \vartheta_0}{A^2} + \frac{\cos^2 \vartheta_0}{C^2} \right) \quad (5.41)$$

und schließt mit der raumfesten Drehimpulsachse einen konstanten Winkel ein,

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{w} = \omega \cos \angle(\mathbf{w}, \mathbf{e}_3) = \ell \left(\frac{\sin^2 \vartheta_0}{A} + \frac{\cos^2 \vartheta_0}{C} \right).$$

Dies ist der analytische Beweis, daß die momentane Drehachse einen geraden Kreiskegel, den so-*genannten Rastpolkegel*, um die feste Drehimpulsachse beschreibt. Die Winkelgeschwindigkeit der Drehachse auf diesem Kegel ist $\dot{\varphi} = \ell/A$, wie man aus (5.40) ablesen kann.

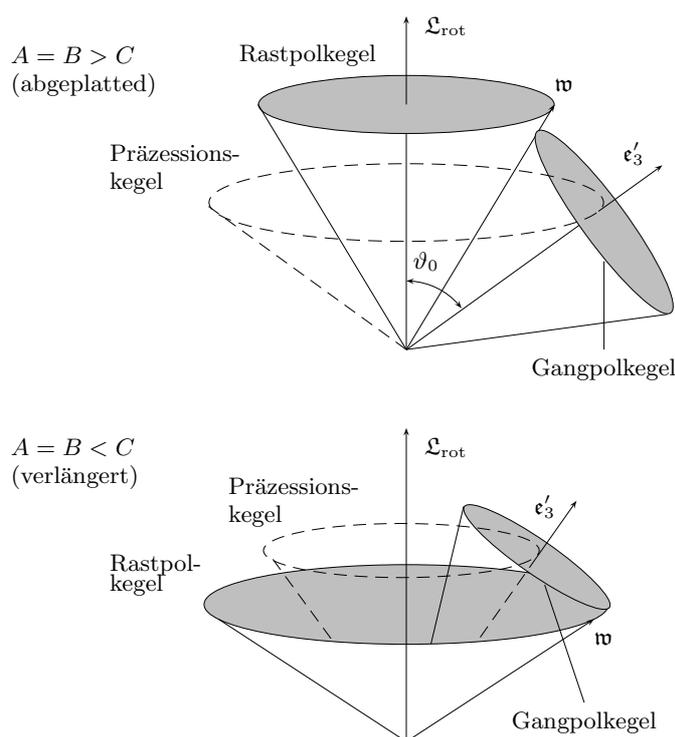


Abbildung 5.10: *Bewegungsverhältnisse des freien symmetrischen Kreisels: Die momentane Drehachse, gegeben durch \mathbf{w} , bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ auf dem Rastpolkegel um die raumfeste Drehimpulsachse, während die Figurenachse mit derselben Winkelgeschwindigkeit auf dem Präzessionskegel um die Drehimpulsachse präzediert. Im körperfesten Bezugssystem beschreibt die momentane Drehachse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω den Gangpolkegel um die Figurenachse \mathbf{e}'_3 .*

Die körperfeste \mathbf{e}'_3 -Achse, die Symmetrieachse des Körpers, hat im raumfesten Schwerpunktsystem die Darstellung

$$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_b R_{b3} = \sin \vartheta_0 (\mathbf{e}_1 \sin \varphi - \mathbf{e}_2 \cos \varphi) + \cos \vartheta_0 \mathbf{e}_3,$$

und nimmt gegen die raumfeste Drehimpulsachse den konstanten Winkel ϑ_0 ein. Sie beschreibt damit einen Kegel, den man als *Präzessionskegel* bezeichnet. Die konstante Winkelgeschwindigkeit der Figurenachse um die Drehimpulsachse ist ebenfalls $\dot{\varphi} = \ell/A$. Die

Vektoren \mathbf{e}'_3 , \mathbf{w} und $\mathfrak{L}_{\text{rot}}$ liegen wegen

$$\mathfrak{L}_{\text{rot}} = A\mathbf{w} + (C - A)\omega'_3\mathbf{e}'_3$$

in einer Ebene, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ um den Drehimpulsvektor dreht. Für abgeplattete Rotationskörper mit $A > C$ liegt der Drehvektor \mathbf{w} zwischen Drehimpulsvektor und Symmetrieachse. Für verlängerte Rotationskörper mit $A < C$ liegt die Figuren- achse zwischen Drehimpulsvektor und momentaner Drehachse, siehe Abbildung (5.10).

Wie sieht nun die Bewegung *im körperfesten System* aus. Wir entwickeln den Drehvektor nach der körperfesten Basis und erhalten

$$\mathbf{w} = \omega'_a\mathbf{e}'_a = \frac{\ell}{A}\sin\vartheta_0(\mathbf{e}'_1\sin\psi(t) + \mathbf{e}'_2\cos\psi(t)) + \frac{\ell}{C}\cos\vartheta_0\mathbf{e}'_3. \quad (5.42)$$

Vom mitbewegten Bezugssystem aus betrachtet, umkreist \mathbf{w} die Figuren- achse auf dem *Gang- polkegel* mit konstanter Kreisfrequenz $-\dot{\psi}$. Figuren- achse und \mathbf{w} schließen einen festen Winkel ein. Für den Drehimpuls erhalten wir

$$\mathfrak{L}_{\text{rot}} = \ell\sin\vartheta_0(\sin\psi\mathbf{e}'_1 + \cos\psi\mathbf{e}'_2) + \ell\cos\vartheta_0\mathbf{e}'_3. \quad (5.43)$$

Im körperfesten System rotiert also auch $\mathfrak{L}_{\text{rot}}$ mit der konstanten Kreisfrequenz $(-\dot{\psi})$ auf einem Kegel, dessen Achse mit der Figuren- achse \mathbf{e}'_3 zusammenfällt. Die einfache Bewegung der gleichförmigen Rotation um eine feste Achse tritt nur auf, wenn die Richtung von $\mathfrak{L}_{\text{rot}}$ mit einer Hauptachse zusammenfällt. Dagegen ist die allgemeine Bewegungsform die Präzession.

Für den kräftefreien *Kugelkreisel* ist $(\Theta'_{ab}) = A\mathbb{1}_3$, und wegen

$$\mathfrak{L}_{\text{rot}} = A\mathbf{w}$$

ist \mathbf{w} konstant. Die Drehachse fällt dauernd mit der raumfesten Drehimpuls- achse zusammen und alle Punkte des Körpers beschreiben einen Kreis mit konstanter Umlaufgeschwindigkeit.

Die obige Beschreibung der Bewegung vom Standpunkt des sich auf dem Kreisel befindlichen Beobachters ist gerade im Fall der Erde angemessen. Die momentane Rotations- achse fällt nach der besprochenen EULERSchen Theorie mit der Figuren- achse der Erde nicht zusammen, sondern führt eine *Nutation* um sie aus. Wenn man den Durchstoßpunkt der Figuren- achse bzw. der Drehachse der Erde durch die Erdoberfläche *geometrischen Nordpol* bzw. *kinema- tischen Nordpol* nennt, so läßt sich auch sagen, der kinematische Nordpol beschreibt um den geometrischen Nordpol einen Kreis. Die (reguläre) Präzession oder Nutation erfolgt nach (5.42) mit der Winkelgeschwindigkeit

$$-\dot{\psi} = \ell\cos\vartheta_0\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) = \omega'_3\left(\frac{C}{A} - 1\right),$$

oder, da für die Erde

$$\frac{C - A}{A} \sim \frac{1}{300} \quad \text{und} \quad \omega'_3 = \frac{2\pi}{\text{Tag}}$$

ist, etwa mit der EULERSchen Periode von

$$T = \frac{2\pi}{\omega'_3} \frac{A}{|C - A|} \sim 300 \text{ Tagen.}$$

Tatsächlich wandert der kinematische Nordpol mit der durchschnittlichen Umlaufzeit 433 Tage (CHANDLERSche Periode) auf einer spiralförmigen Bahn innerhalb eines Kreises von 10 m Radius im Sinne der Erddrehung. Die Verlängerung der Periode läßt sich durch die elastische Deformation der Erde (und nicht mit dem von Sonne und Mond erzeugten Drehmoment) erklären.

5.4 Eulersche Gleichungen und Stabilitätsanalyse

Im System mit dem Ursprung im Schwerpunkt gilt der Drehimpulssatz,

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{L}_{\text{rot}} = \mathbf{e}'_a \Theta'_{ab} \dot{\omega}'_b + \dot{\mathbf{e}}'_a \Theta'_{ab} \omega'_b = \mathbf{e}'_a (\Theta'_{ab} \dot{\omega}'_b + (\Omega' \Theta')_{ab} \omega'_b) = \mathfrak{M}.$$

Wir entwickeln das Drehmoment nach der körperfesten Basis, $\mathfrak{M} = M'_a \mathbf{e}'_a$, und legen die Basisvektoren \mathbf{e}'_a in die Hauptachsenrichtungen. Dann nehmen diese Gleichungen folgende elegante Form an:

$$A \dot{\omega}'_1 + (C - B) \omega'_2 \omega'_3 = M'_1 \quad (5.44)$$

$$B \dot{\omega}'_2 + (A - C) \omega'_3 \omega'_1 = M'_2 \quad (5.45)$$

$$C \dot{\omega}'_3 + (B - A) \omega'_1 \omega'_2 = M'_3. \quad (5.46)$$

Diese EULERSchen *Kreiselgleichungen* sind nichts anderes als die Bilanzgleichungen für die Komponenten des Drehimpulses im mitrotierenden Hauptachsensystem des Körpers, angeheftet am Schwerpunkt. Hat man aus diesem gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungssystem die zeitliche Entwicklung der Kreisfrequenzen ω'_a bestimmt, so kann man im Prinzip die EULERSchen Winkel aus

$$(\omega'_a) = \begin{pmatrix} \cos \psi \dot{\vartheta} + \sin \psi \sin \vartheta \dot{\varphi} \\ -\sin \psi \dot{\vartheta} + \cos \psi \sin \vartheta \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

berechnen und die Drehung des Kreisels bestimmen.

Die gleichförmige Rotation um eine Hauptachse ist offenbar eine Lösung der EULERSchen Gleichungen für den *freien Kreisel*. Wir untersuchen jetzt, ob diese einfachen Lösungen stabil unter kleinen Störungen sind. Seien also $\omega'_2, \omega'_3 \ll \omega'_1$. Nehmen wir nun an, dies sei für die gesamte Bewegung erfüllt, so können wir die kleinen Größen zweiter Ordnung in den EULERSchen Kreiselgleichungen vernachlässigen. Dann folgt zunächst

$$A \dot{\omega}'_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \omega'_1 = \text{const.} \quad (5.47)$$

Damit reduzieren sich die EULERSchen Gleichungen für die kleinen Komponenten des Drehvektors auf ein lineares Differentialgleichungssystem,

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}'_2 \\ \dot{\omega}'_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix}, \quad M = \omega'_1 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{B}(C - A) \\ \frac{1}{C}(A - B) & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix M sind

$$\lambda_{\pm} = \pm \omega'_1 \left(\frac{(C - A)(A - B)}{BC} \right)^{1/2}.$$

Sie sind offensichtlich imaginär für

$$A < \min(B, C) \quad \text{oder} \quad A > \max(B, C) \quad (5.48)$$

und reell für

$$\min(B, C) < A < \max(B, C). \quad (5.49)$$

Im ersten Fall ist die (linearisierte) Drehung um die erste Hauptachse stabil, im zweiten Fall instabil. Damit haben wir den Satz:

Stabilität der Drehungen um die Hauptachsen: *Die Rotation eines freien Kreisels um eine Hauptträgheitsachse ist stabil, wenn es sich um eine Achse mit minimalen oder maximalen Trägheitsmoment handelt. Ist die Achse diejenige mit dem mittleren Trägheitsmoment, so ist die Drehung instabil.*

Insbesondere hat die Figurenachse beim *symmetrischen* Kiesel immer einen stabilen Charakter.

5.5 Kräftefreie unsymmetrische Kreisel

Wir legen die Basisvektoren \mathbf{e}'_a in Richtung der Hauptachsen des starren Körpers. Für den kräftefreien Kiesel sind die kinetische Energie und der Drehimpuls der Drehbewegung um den Schwerpunkt konstant,

$$\begin{aligned} 2T_{\text{rot}} &= A\omega_1'^2 + B\omega_2'^2 + C\omega_3'^2 = \text{const.} \\ \ell^2 &= \mathfrak{L}_{\text{rot}}^2 = A^2\omega_1'^2 + B^2\omega_2'^2 + C^2\omega_3'^2 = \text{const.} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Stellt man die EULERSchen Kieselgleichungen für die Bewegung eines freien Kreisels (Annahme: $A < B < C$) neben die Gleichungen für Ableitungen der JACOBISchen elliptischen Funktionen

$$\begin{aligned} \dot{\omega}'_1 + \frac{C-B}{A} \omega'_2 \omega'_3 &= 0 & \text{cn}'(u, k) + \text{sn}(u, k) \text{dn}(u, k) &= 0 \\ \dot{\omega}'_2 - \frac{C-A}{B} \omega'_1 \omega'_3 &= 0 & \text{sn}'(u, k) - \text{cn}(u, k) \text{dn}(u, k) &= 0 \\ \dot{\omega}'_3 + \frac{B-A}{C} \omega'_1 \omega'_2 &= 0 & \text{dn}'(u, k) + k^2 \text{sn}(u, k) \text{cn}(u, k) &= 0, \end{aligned} \quad (5.51)$$

wobei $' = d/du$ ist, so liegt es nahe, folgenden Lösungsansatz für die Komponenten des Drehvektors im körperfesten System zu wählen

$$\begin{aligned} \omega'_1(t) &= \alpha_1 \text{cn}(\mu(t-t_0), k) \\ \omega'_2(t) &= \alpha_2 \text{sn}(\mu(t-t_0), k) \\ \omega'_3(t) &= \alpha_3 \text{dn}(\mu(t-t_0), k) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Die JACOBISchen elliptischen Funktionen sind *normiert*,

$$\text{sn}^2 + \text{cn}^2 = k^2 \text{sn}^2 + \text{dn}^2 = 1 \quad (5.53)$$

und erfüllen die Anfangsbedingungen

$$\operatorname{dn}(0, k) = \operatorname{cn}(0, k) = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{sn}(0, k) = 0. \quad (5.54)$$

Trägt man den Lösungsansatz (5.52) in die EULERSchen Kreisgleichungen ein, so erhält man folgende notwendigen Bedingungen an die Koeffizienten α_a und μ :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3} &= \frac{C - B}{A} \\ \mu \frac{\alpha_2}{\alpha_3 \alpha_1} &= \frac{C - A}{B} \\ \mu k^2 \frac{\alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2} &= \frac{B - A}{C}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Multiplizieren wir je zwei dieser Gleichungen, dann finden wir

$$\alpha_1^2 = \frac{\mu^2 k^2 BC}{(C - A)(B - A)} \quad , \quad \alpha_2^2 = \frac{\mu^2 k^2 AC}{(C - B)(B - A)} \quad , \quad \alpha_3^2 = \frac{\mu^2 AB}{(C - A)(C - B)}. \quad (5.56)$$

Es verbleiben noch die 2 Integrationskonstanten μ und k . Wir bestimmen sie, indem wir die Erhaltungssätze für die kinetische Energie und $\mathcal{L}_{\text{rot}}^2$ bei $t = t_0$ auswerten:

$$\begin{aligned} 2T_{\text{rot}} &\stackrel{(5.54)}{=} A\alpha_1^2 + C\alpha_3^2 = \frac{ABC\mu^2}{(C - A)(C - B)(B - A)} \left[(C - B)k^2 + (B - A) \right] \\ \ell^2 &\stackrel{(5.54)}{=} A^2\alpha_1^2 + C^2\alpha_3^2 = \frac{ABC\mu^2}{(C - A)(C - B)(B - A)} \left[(C - B)Ak^2 + (B - A)C \right]. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Dividiert man die erste durch die zweite Gleichung dann gewinnt man eine Gleichung nur für k^2 und findet

$$k^2 = \frac{B - A}{C - B} \left[\frac{2T_{\text{rot}}C - \ell^2}{\ell^2 - 2AT_{\text{rot}}} \right] \quad , \quad \mu^2 = \frac{C - B}{ABC} \left[\ell^2 - 2AT_{\text{rot}} \right]. \quad (5.58)$$

$$\alpha_1^2 = \frac{2T_{\text{rot}}C - \ell^2}{A(C - A)} \quad , \quad \alpha_2^2 = \frac{2T_{\text{rot}}C - \ell^2}{B(C - B)} \quad , \quad \alpha_3^2 = \frac{\ell^2 - 2T_{\text{rot}}A}{C(C - A)}. \quad (5.59)$$

Mit den Formeln (5.50) für die Energie und den Drehimpuls folgt sofort

$$\begin{aligned} 2T_{\text{rot}}C - \ell^2 &= (C - A)A\omega_1'^2 + (C - B)B\omega_2'^2 \geq 0 \\ \ell^2 - 2T_{\text{rot}}A &= (B - A)B\omega_2'^2 + (C - A)C\omega_3'^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (5.60)$$

oder daß die Quadrate k^2 und μ^2 , und mit (5.56) auch die Quadrate α_a^2 , positiv sind. Damit sind die Konstanten μ, k , und α_a alle reell.

Weiter unten werden wir sehen, daß $\operatorname{sn}(u, k)$ und $\operatorname{cn}(u, k)$ periodisch mit Periode $4K$ und $\operatorname{dn}(u, k)$ periodisch mit Periode $2K$ sind, wobei K das vollständige Integral erster Art ist,

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (5.61)$$

Die Periodizität der Lösung in μt entspricht in der physikalischen Zeit t eine Periodizität

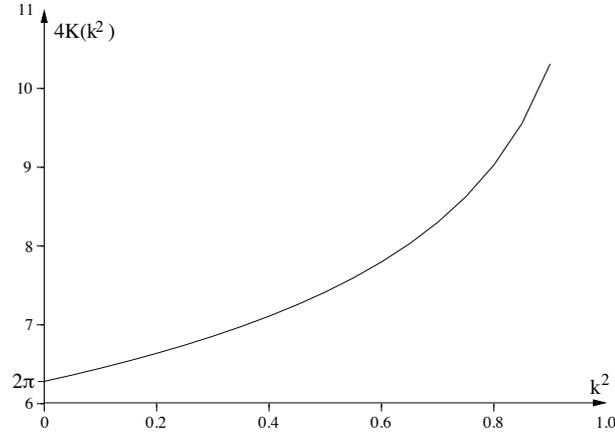


Abbildung 5.11: Das vollständige elliptische Integral erster Art.

der Periodenlänge

$$T = \frac{4K}{\mu} = 4K \sqrt{\frac{ABC}{(C-B)(\ell^2 - 2AT_{\text{rot}})}}.$$

Nach Ablauf der Zeit $T = 4K/\mu$ kehrt der Drehvektor $\mathbf{w}(t)$ im körperfesten System wieder in seine Ausgangslage zur Zeit t_0 zurück. Im Fall des symmetrischen Kreisels ($A = B$) verschwindet nach (5.58) der Modulus k der JACOBI'schen elliptischen Funktionen. Diese entarten dann zu Kreisfunktionen und wir erhalten die früheren Resultate für den kräftefreien symmetrischen Kreisel.

5.5.1 Die elliptischen Funktionen von Jacobi und Theta-Funktionen

Die elliptischen Funktionen von JACOBI sind doppelt periodische Verallgemeinerungen der trigonometrischen Funktionen. Wegen

$$\text{cn}(u, k) = \sqrt{1 - \text{sn}^2(u, k)} \quad \text{und} \quad \text{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(u, k)} \quad (5.62)$$

lautet die Differentialgleichung für sn

$$\frac{d \text{sn}}{du} = \sqrt{(1 - \text{sn}^2)(1 - k^2 \text{sn}^2)} \quad \text{oder} \quad du = \frac{d \text{sn}}{\sqrt{(1 - \text{sn}^2)(1 - k^2 \text{sn}^2)}}. \quad (5.63)$$

Damit ist u als Funktion von sn durch ein elliptisches Integral erster Gattung, nämlich durch

$$u = \int_0^{\text{sn}(u)} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} \stackrel{y = \sin \theta}{=} \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad \text{sn}(u) = \sin \phi, \quad (5.64)$$

gegeben. Dabei haben wir stillschweigend $0 < k < 1$ vorausgesetzt. Noch etwas expliziter: die elliptischen Funktionen von JACOBI können als Inverse des elliptischen Integrals erster Gattung,

$$u(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad \text{mit } k \in [0, 1], \quad (5.65)$$

wie folgt definiert werden:

$$\text{sn}(u, k) = \sin \phi, \quad \text{cn}(u, k) = \cos \phi \quad \text{und} \quad \text{dn}(u, k) = \sqrt{1 - (k \sin \phi)^2}. \quad (5.66)$$

Insbesondere für $k = 0$ und $k = 1$ sind es die wohlbekannteren Kreis- und Hyperbelfunktionen,

$$\begin{aligned} \text{sn}(u, 0) &= \sin u, & \text{cn}(u, 0) &= \cos u, & \text{dn}(u, 0) &= 1 \\ \text{sn}(u, 1) &= \tanh u, & \text{cn}(u, 1) &= \text{dn}(u, 1) = 1/\cosh u. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Die Konstanten

$$K = K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad \text{und} \quad K' = K(k'), \quad (5.68)$$

wobei k' das Komplement des Modulus k ist, $k^2 + k'^2 = 1$, spielen eine ähnliche Rolle wie $\pi/2$ für die Kreisfunktionen Sinus und Cosinus, und treten in den Verwandlungsformeln für die JACOBI'schen Funktionen auf:

	$u + K$	$u + iK'$	$u + K + iK'$	$u + 2K$	$u + 2iK'$	$u + 2K + 2iK'$
sn	$\text{cn } u / \text{dn } u$	$1 / k \text{sn } u$	$\text{dn } u / k \text{cn } u$	$-\text{sn } u$	$\text{sn } u$	$-\text{sn } u$
cn	$-k' \text{sn } u / \text{dn } u$	$-i \text{dn } u / k \text{sn } u$	$-ik' / k \text{cn } u$	$-\text{cn } u$	$-\text{cn } u$	$\text{cn } u$
dn	$-k' / \text{dn } u$	$-i \text{cn } u / \text{sn } u$	$ik' \text{sn } u / \text{cn } u$	$\text{dn } u$	$-\text{dn } u$	$-\text{dn } u$

Die Tabelle ist so zu verstehen, daß man, um zum Beispiel $\text{cn}(u + K + iK')$ durch eine Funktion von u auszudrücken, in die zweite Zeile und dritte Spalte eingeht und dann

$$\text{cn}(u + K + iK') = -i \frac{k'}{k \text{cn}(u)}$$

findet. Die Nullstellen, Pole und primitiven Perioden der elliptischen Funktionen sind bei

	Nullstellen	Pole	primitive Perioden
sn	$2nK + 2imK'$	$2nK + (2m + 1)iK'$	$4K, 2iK'$
cn	$(2n + 1)K + 2imK'$	$2nK + (2m + 1)iK'$	$4K, 2K + 2iK'$
dn	$(2nK + 1) + (2m + 1)iK'$	$2nK + (2m + 1)iK'$	$2K, 4iK'$

wobei n und m alle ganzen Zahlen durchlaufen. Es gelten folgende *Additionstheoreme*,

$$\begin{aligned} \text{sn}(u + v) &= \frac{\text{sn}(u)\text{cn}(v)\text{dn}(v) + \text{sn}(v)\text{cn}(u)\text{dn}(u)}{1 - k^2 \text{sn}^2(u)\text{sn}^2(v)} \\ \text{cn}(u + v) &= \frac{\text{cn}(u)\text{cn}(v) - \text{sn}(u)\text{sn}(v)\text{dn}(v)\text{dn}(u)}{1 - k^2 \text{sn}^2(u)\text{sn}^2(v)} \\ \text{dn}(u + v) &= \frac{\text{dn}(u)\text{dn}(v) - k^2 \text{sn}(u)\text{sn}(v)\text{cn}(u)\text{cn}(v)}{1 - k^2 \text{sn}^2(u)\text{sn}^2(v)}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

welche für $k = 0$ in die bekannten Additionstheoreme für die Sinus- und Cosinus-Funktionen übergehen. Die Taylorentwicklungen bei $u = 0$ bis zur Ordnung 3 lauten

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u, k) &= u - (1 + k^2) \frac{u^3}{3!} + \dots \\ \operatorname{cn}(u, k) &= 1 - \frac{u^2}{2!} + \dots \\ \operatorname{dn}(u, k) &= 1 - k^2 \frac{u^2}{2!} + \dots\end{aligned}\tag{5.70}$$

Bekannter als die meromorphen JACOBISchen Funktionen sind die analytischen *Thetafunktionen*

$$\begin{aligned}\vartheta_1(v) &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1/2)^2} e^{(2n-1)i\pi v} \\ &= 2q^{1/4} \sin i\pi v \prod_1^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n} e^{2i\pi v})(1 - q^{2n} e^{-2i\pi v})\end{aligned}\tag{5.71}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_2(v) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n-1/2)^2} e^{(2n-1)i\pi v} \\ &= 2q^{1/4} \cos i\pi v \prod_1^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n} e^{2i\pi v})(1 + q^{2n} e^{-2i\pi v})\end{aligned}\tag{5.72}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_3(v) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2ni\pi v} \\ &= \prod_1^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1} e^{2i\pi v})(1 + q^{2n-1} e^{-2i\pi v})\end{aligned}\tag{5.73}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_0(v) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2ni\pi v} \\ &= \prod_1^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n-1} e^{2i\pi v})(1 - q^{2n-1} e^{-2i\pi v})\end{aligned}\tag{5.74}$$

Die Verwandlungstabelle für die Thetafunktionen hat die Form

	$v + \frac{1}{2}$	$v + \frac{\tau}{2}$	$v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$	$v + 1$	$v + \tau$	$v + 1 + \tau$
ϑ_1	ϑ_2	$iA\vartheta_0$	$A\vartheta_3$	$-\vartheta_1$	$-B\vartheta_1$	$B\vartheta_1$
ϑ_2	$-\vartheta_1$	$A\vartheta_3$	$-iA\vartheta_0$	$-\vartheta_2$	$B\vartheta_2$	$-B\vartheta_2$
ϑ_3	ϑ_0	$A\vartheta_2$	$iA\vartheta_1$	ϑ_3	$B\vartheta_3$	$B\vartheta_3$
ϑ_0	ϑ_3	$iA\vartheta_1$	$A\vartheta_2$	ϑ_0	$-B\vartheta_0$	$-B\vartheta_0$

In dieser Tabelle haben wir

$$q = e^{i\pi\tau}, \quad A = e^{-i\pi(\tau/4+v)} \quad \text{und} \quad B = e^{-i\pi(\tau+2v)}$$

gesetzt. Die folgende Tabelle enthält die Nullstellen der Thetafunktionen und die zugehörigen

Werte von $e^{2i\pi v}$:

	v	$e^{2i\pi v}$
ϑ_1	$m + n\tau$	q^{2n}
ϑ_2	$(m + \frac{1}{2}) + n\tau$	$-q^{2n+1}$
ϑ_3	$(m + \frac{1}{2}) + (n + \frac{1}{2})\tau$	$-q^{2n+1}$
ϑ_0	$m + (n + \frac{1}{2})\tau$	q^{2n+1}

Wie oben durchlaufen m und n in der Tabelle alle ganzen Zahlen. Der Zusammenhang zwischen den Thetafunktionen und JACOBI's elliptischen Funktionen ist

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(2Kv) &= \frac{\vartheta_3(0) \vartheta_1(v)}{\vartheta_2(0) \vartheta_0(v)} \\ \operatorname{cn}(2Kv) &= \frac{\vartheta_0(0) \vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0) \vartheta_0(v)} \\ \operatorname{dn}(2Kv) &= \frac{\vartheta_0(0) \vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0) \vartheta_0(v)} \end{aligned} \quad (5.75)$$

Das vollständige Integral erster Gattung hat die Darstellung

$$K = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2(0) \quad \text{und} \quad iK' = \tau K. \quad (5.76)$$

Der Modulus und sein Komplement sind gegeben durch

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} \quad \text{und} \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}, \quad (5.77)$$

so daß $k^2 + k'^2 = 1$ ist. Für weitere Eigenschaften der doppelperiodischen Funktionen sn , cn und dn verweise ich auf die Literatur [8]. In den Abbildungen 5.12 und (5.13) sind die elliptischen Funktionen von JACOBI für einige Werte von k geplottet. Der dabei benutzte

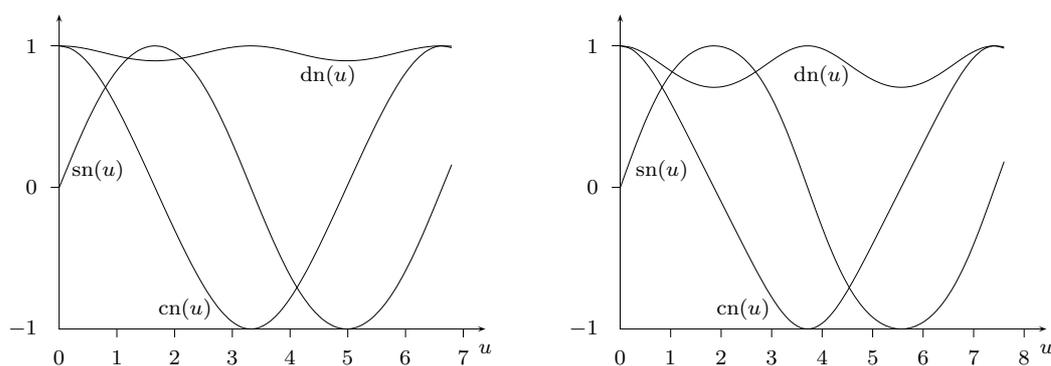


Abbildung 5.12: sn , cn und dn für $k^2 = 0.2$ und $4K = 6.6385$ (links) und für $k^2 = 0.5$ und $4K = 7.4163$ (rechts).

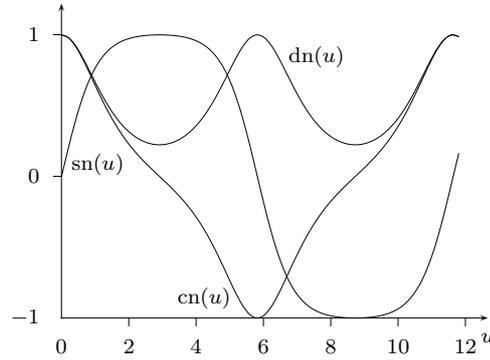


Abbildung 5.13: sn , cn und dn für $k^2 = 0.95$ und $4K = 11.6333$.

SCILAB-Code lautet:

```
x=0:0.2:8; y=real(%sn(x,0.2));
z=(1-y.*y)**(1/2); w=(1-0.2*y.*y)**(1/2);
X=[x;x;x]; Y=[y;z;w];
plot2d(X',Y');
```

5.5.2 Trägheitsdrehbewegung in den Eulerschen Winkeln

Wir wählen wieder \mathbf{e}_3 in Richtung des konstanten Drehimpulses, $\mathfrak{L}_{\text{rot}} = \ell \mathbf{e}_3$, und benutzen die Relationen (5.36), also

$$(L'_a) = \ell \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi \\ \sin \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\omega'_1 \\ B\omega'_2 \\ C\omega'_3 \end{pmatrix} \quad (5.78)$$

zwischen den Komponenten des Drehimpulses und denjenigen des Drehvektors im körperfesten System. Wir finden

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{C\omega'_3}{\ell} = \frac{C\alpha_3}{\ell} \operatorname{dn}(\mu(t-t_0), k) = \sqrt{\frac{C(\ell^2 - 2AT_{\text{rot}})}{\ell^2(C-A)}} \operatorname{dn}(\mu(t-t_0), k) \\ \tan \psi &= \frac{A\omega'_1}{B\omega'_2} = \frac{A\alpha_1}{B\alpha_2} \frac{\operatorname{cn}(\mu(t-t_0), k)}{\operatorname{sn}(\mu(t-t_0), k)} = \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}} \frac{\operatorname{cn}(\mu(t-t_0), k)}{\operatorname{sn}(\mu(t-t_0), k)}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Im Grenzfall $A = B$, d.h. für den symmetrischen Kreisel erhalten wir

$$\ell \cos \vartheta = \sqrt{\frac{C(\ell^2 - 2AT_{\text{rot}})}{C-A}} \cos \mu(t-t_0) \quad \text{und} \quad \tan \psi = \tan \mu(t-t_0).$$

Also ist $\psi = \mu t + \psi_0$. Berücksichtigt man noch (5.58) mit $A = B$ so finden wir die früheren Resultate (5.37) und (5.39) für den symmetrischen Kreisel.

Die Funktionen auf den rechten Seiten in (5.79) sind periodisch mit der Periode $2K$. $\operatorname{cn}/\operatorname{sn}$ hat Nullstellen bei $(2n+1)K$ und Pole bei $2nK$. Danach sind die EULERSchen Winkel ψ

und ϑ periodisch in der Zeit t . Den dritten EULERSchen Winkel $\varphi(t)$ bestimmt man, indem man ω'_1 in

$$(\omega'_a) = \begin{pmatrix} \cos \psi \dot{\vartheta} + \sin \psi \sin \vartheta \dot{\varphi} \\ -\sin \psi \dot{\vartheta} + \cos \psi \sin \vartheta \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (5.80)$$

mit $\sin \psi$ und ω'_2 mit $\cos \psi$ multipliziert und die resultierenden Gleichungen addiert,

$$\sin \psi \omega'_1 + \cos \psi \omega'_2 = \sin \vartheta \dot{\varphi}.$$

Wir lösen nach $\dot{\varphi}$ auf, erweitern mit $\ell^2 \sin \vartheta$ und erhalten dann

$$\dot{\varphi} = \ell \frac{\ell \sin \vartheta \sin \psi \omega'_1 + \ell \sin \vartheta \cos \psi \omega'_2}{\ell^2 \sin^2 \vartheta} \stackrel{(5.78)}{=} \ell \frac{A\omega_1'^2 + B\omega_2'^2}{A^2\omega_1'^2 + B^2\omega_2'^2} = \ell \frac{A\alpha_1^2 \operatorname{cn}^2 + B\alpha_2^2 \operatorname{sn}^2}{A^2\alpha_1^2 \operatorname{cn}^2 + B^2\alpha_2^2 \operatorname{sn}^2},$$

wobei wir bei der letzten Gleichung für die Winkelgeschwindigkeiten die Lösungen (5.52) einsetzen. Benutzen wir die Beziehung $\operatorname{sn}^2 + \operatorname{cn}^2 = 1$ und die Formeln (5.56) für die Konstanten α_1 und α_2 , so finden wir schlußendlich

$$\dot{\varphi} = \ell \frac{(C - B) + (B - A) \operatorname{sn}^2}{A(C - B) + C(B - A) \operatorname{sn}^2}. \quad (5.81)$$

Für den symmetrischen Kreisel mit $A = B$ erhalten wir wieder das Resultat $\varphi = \ell t/A + \varphi_0$ in (5.38). Für den unsymmetrischen Kreisel ergibt die unbestimmte Integration über die Zeit

$$\varphi(t) = \ell \int \frac{(C - B) + (B - A) \operatorname{sn}^2(\mu(t' - t_0), k)}{A(C - B) + C(B - A) \operatorname{sn}^2(\mu(t' - t_0), k)} dt'.$$

Der Winkel $\varphi(t)$ mit der sich die Knotenlinie in der raumfesten 1 – 2-Ebene dreht kann zerlegt werden in einen konstanten Anteil φ_0 , einen zeitproportionalen Anteil $\varphi_1 t$ und eine periodischen Anteil,

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_{\text{per}}(t).$$

Während sich $\varphi_1 t$ in der Zeitspanne $T' = 2\pi/\varphi_1$ um den vollen Winkel 2π ändert, ist die Periode T von φ_{per} gleich derjenigen von $\dot{\varphi}$, also

$$T = \frac{2K}{\mu} = 2K \sqrt{\frac{ABC}{(C - B)(\ell^2 - 2AT_{\text{rot}})}}.$$

Sie ist kommensurabel mit den Perioden der EULERSchen Winkel ϑ und ψ , hingegen im allgemeinen nicht mit T' . Das hat zur Folge, daß der asymmetrische Kreisel im allgemeinen nicht mehr in eine vorgegebene Anfangslage zurückkehrt.

Wir berechnen, wie sich die Drehmatrix (5.12), welche die raumfeste in die körperfeste Basis überführt, ändert, wenn $t \rightarrow t + T$ geht. Wegen

$$\varphi \longrightarrow \varphi + T\varphi_1, \quad \vartheta \longrightarrow \vartheta \quad \text{und} \quad \psi \longrightarrow \psi - \pi$$

folgt

$$\begin{aligned} R_3(\varphi)R_1(\vartheta)R_3(\psi) &\stackrel{t \rightarrow T+t}{=} R_3(T\varphi_1 + \varphi)R_1(\vartheta)R_3(\psi - \pi) \\ &= -R_3(T\varphi_1)R_3(\varphi)R_1(\vartheta)R_3(\psi), \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$R(\varphi, \vartheta, \psi) \xrightarrow{t \rightarrow t+T} -R_3(T\varphi_1)R(\varphi, \vartheta, \psi). \quad (5.82)$$

Als Beispiel betrachten wir einen Quader mit Kantenlängen $L_1 = 3 \text{ cm}$, $L_2 = 2 \text{ cm}$ und $L_3 = 1 \text{ cm}$ und einer Massendichte von 2 g/cm^3 . Dieser hat die Hauptträgheitsmomente

$$(A, B, C) = \text{diag}(5, 10, 13) \text{ g cm}^2. \quad (5.83)$$

Neben den Hauptträgheitsmomenten geben wir die kinetische Energie und den Drehimpuls der Rotation vor. Wir messen ℓ in gcm^2/s , T_{rot} in gcm^2/s^2 und die Zeit in s. Anstelle der Energie und des Drehimpulses können wir nach (5.58) auch den Modulus k und μ vorgeben. Gemäß unseren Resultaten lauten die Lösungen

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{C\alpha_3}{\ell} \text{dn} \\ \tan \psi &= \sqrt{\frac{A(C-B) \text{cn}}{B(C-A) \text{sn}}} \\ \dot{\varphi} &= \ell \frac{(C-B) + (B-A) \text{sn}^2}{A(C-B) + C(B-A) \text{sn}^2}, \end{aligned} \quad (5.84)$$

wobei

$$\mu^2 = \frac{(C-B)(C-A)}{AB} \alpha_3^2, \quad k^2 = \frac{A}{C} \frac{B-A}{C-B} \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2}, \quad \ell^2 = A^2 \alpha_1^2 + C^2 \alpha_3^2. \quad (5.85)$$

Für die Darstellung der numerischen Resultate ist es hilfreich $\mu = c \cdot K(k^2)$ zu wählen, so daß die Komponenten von \mathfrak{w} im körperfesten System eine feste Periode haben. Wir wählen $c = 1$ und äquivalent dazu $\mu = K(k^2)$. Dann ist die Periode 4. In der numerischen Berechnung gibt man neben μ und den Hauptträgheitsmomenten noch k und $t_0 = 0$ an. Daraus sind (bis auf φ_0) alle Elemente der Bewegung des freien Kreisels bestimmt:

$$(A, B, C, \mu, k, t_0 = 0) \longrightarrow K(k) \longrightarrow \alpha_a \longrightarrow \ell.$$

In der folgenden Abbildung (5.14) sind einige typische Bewegungen der EULERSchen Winkel während des Zeitintervalls $[t, t+T]$ für verschiedene Parameter geplottet. Neben den Werten für die Hauptträgheitsmomente in (5.83) haben wir auch die Bewegung des Kreisels für die Werte

$$(A, B, C) = \text{diag}(5, 25, 29) \text{ g cm}^3$$

untersucht.

Der Abbildung entnehmen wir, daß sich der Winkel ϑ zwischen dem raumfesten Drehimpuls und der dritten Hauptachsenrichtung \mathbf{e}'_3 wie erwartet periodisch mit der Periode T ändert. Der Winkel ψ nimmt während der Zeitspanne T um π ab. Der Kiesel dreht sich also mit der Kreisfrequenz π/T im Uhrzeigersinn um die bewegliche \mathbf{e}'_3 -Achse. Hätten wir $A > C$ gewählt, so würde er in die entgegengesetzte Richtung drehen. Wenn sie Bewegungen des unsymmetrischen kräftefreien Kreisels für verschiedene Parameter studieren wollen, so dürfte der folgende SCILAB/MATLAB-CODE von Nutzen sein⁴:

⁴// steht vor Kommentaren.

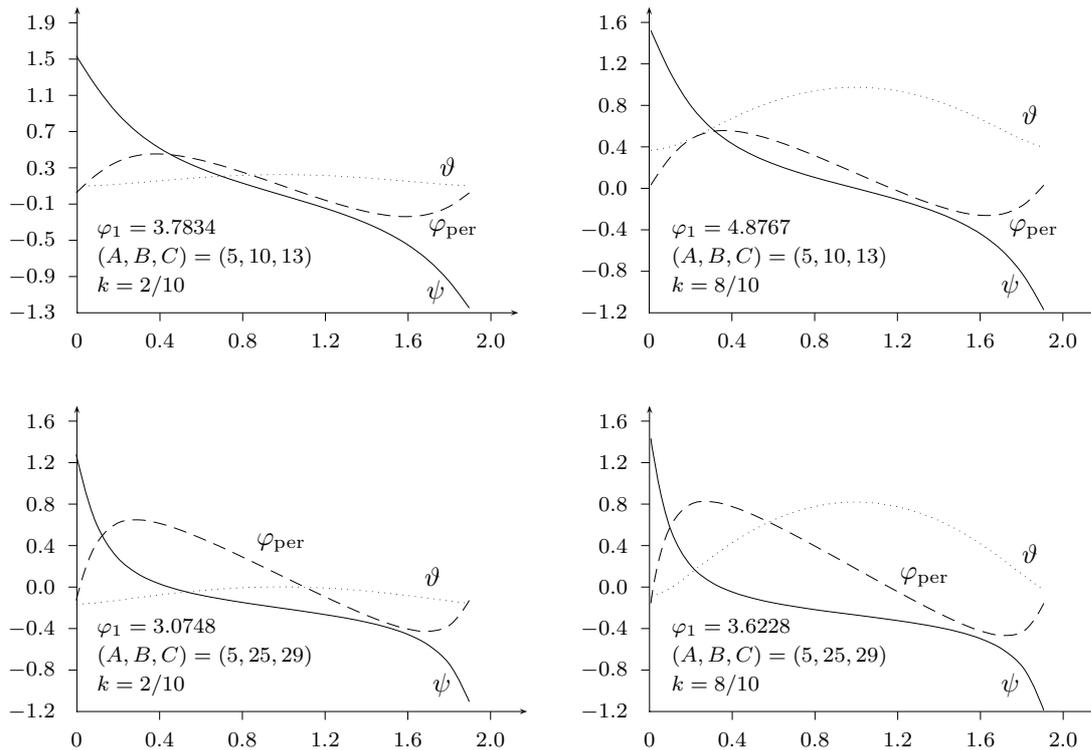


Abbildung 5.14: Die Zeitentwicklung der Eulerschen Winkel für verschiedene Hauptträgheitsmomente und Werte von k . Die oberen zwei Abbildungen gehören zu $(A, B, C) = (5, 10, 13)$ und die unteren zu $(A, B, C) = (5, 25, 29)$. Jeweils eingetragen ist die Steigung φ_1 des zeitproportionalen Anteils $\varphi_1 t$ zu $\varphi(t)$. Der Winkel ϑ ist periodisch und $\psi(0) - \psi(T) = \pi$.

SCILAB-Code zum Studium der Kreiselbewegung:

```

a=5;b=13;c=13;k=2/10; //  $\beta = \alpha_1/\alpha_3$ 
beta=sqrt(c*(c-b)/(a*(b-a)))*k;
ks=k*k;
// Vollständiges ell. Integral
K=%k(ks);
//  $\alpha_3, \alpha_1$  und  $\ell$ 
aldrei=sqrt(a*b/((c-b)*(c-a)))*K;
aleins=beta*aldrei;
ell=sqrt(a**2*aleins**2+c**2*aldrei**2);
// Koeffizienten berechnen
apsi=sqrt(a*(c-b)/(b*(c-a)));
atheta=c*aldrei/ell;
// Die Zeitpunkte berechnen
x=0.01:0.03:1.99;
// elliptische Funktionen und Winkel  $\psi, \vartheta$ 
sn=real(%sn(K*x,ks));
cn=sign((1-x)).*(1-sn.*sn)**(1/2);
u=apsi*cn./sn;
psi=atan(u);
dn=(1-ks*sn.*sn)**(1/2);

```

```

w=atheta*dn;
theta=acos(w);
// Lösung der Differentialgleichung für φ
deff(' [ydot]=f(t,y) ', ' ydot=ell*((c-b) +(b-a)*(real(%sn(K*t,ks))**2) ./...
(a*(c-b)+c*(b-a)*(real(%sn(K*t,ks))**2) ');
phi=ode(0,0,x,f);
// Berechnung des periodischen Anteils von φ
[min,max]=size(x);
xmin=x(min);xmax=x(max);
phimin=phi(min);phimax=phi(max);
steigung=(phimax-phimin)/(xmax-xmin);
phip=phi-steigung*x;
// Vorbereitung der Ausgabe
X=[x;x;x];Y=[psi;theta;phip];
// Figur setzen und plotten
xsetech([0,0,0.5,0.5]);
plot2d(X',Y');
// Beschriftung
xstring(0.1,-1.2,' '(A,B,C)=(5,10,13), k=8/10' ');
// Zur nachträglichen Bearbeitung
xset();

```

5.6 Der schwere symmetrische Kreisel I

Als weiteres Beispiel für die Anwendung der Methoden der Dynamik starrer Körper betrachten wir die Bewegung eines symmetrischen Kreisels, der sich in einem Gravitationsfeld befindet und von dem ein Punkt auf der Symmetrieachse im Raum fixiert ist. Einen solchen schweren Kreisel bezeichnet man als *LAGRANGE-Kreisel*. Eine Vielzahl physikalischer Systeme vom Kinderkreisel bis zu komplizierten gyroskopischen Navigationsinstrumenten werden durch einen schweren symmetrischen Kreisel näherungsweise beschrieben. Sowohl wegen seiner praktischer Anwendungen als auch wegen der Illustration der entwickelten Verfahren verdient die Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels eine ausführliche Erläuterung. In diesem Abschnitt werden die Konstanten der Bewegung abgeleitet. Die Bewegungsformen des Kreisels werden dann später im Rahmen des LAGRANGE-Formalismus diskutiert.

Wir wählen als Ursprung des Koordinatensystems den Stützpunkt anstelle des Schwerpunktes. Der Ortsvektor des Schwerpunktes sei

$$\mathfrak{R} = s\mathbf{e}'_3 \quad (5.86)$$

Wir wollen hier den symmetrischen Kreisel untersuchen mit $A = B \neq C$ wobei A, B und C die Hauptträgheitsmomente bezüglich des Stützpunktes seien. Das Moment C bezüglich dieses Punktes ist gleich dem Moment C bezüglich des Schwerpunktes. Die beiden Hauptträgheitsmomente A und B sind nach dem Satz von STEINER gleich denjenigen bezüglich des Schwerpunktes plus $M s^2$.

Ganz analog wie in Abschnitt (5.4) zeigt man, daß auch für den gestützten Kreisel die

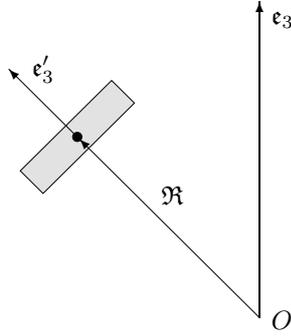


Abbildung 5.15: Der schwere symmetrische Kreisel.

Eulerschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\mathcal{L}}_{\text{rot}} = \mathfrak{M} \quad (5.87)$$

gelten, wobei sich hier der Drehimpuls und das Drehmoment der äußeren Kräfte auf den ruhenden Stützpunkt beziehen. Der dritte Basisvektor \mathbf{e}_3 zeige nach oben. Dann berechnet sich das vom homogenen Schwerfeld herrührende Drehmoment gemäß

$$\mathfrak{M} = \sum \mathbf{r}_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)} = -g \sum m_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{e}_3 = -g \left(\sum m_i \mathbf{r}_i \right) \wedge \mathbf{e}_3 = -gM\mathfrak{R} \wedge \mathbf{e}_3. \quad (5.88)$$

Also steht \mathfrak{M} senkrecht auf \mathbf{e}_3 und senkrecht auf \mathbf{e}'_3 . Entsprechend ist $\mathbf{e}_3 \cdot \mathcal{L}_{\text{rot}} = L_3$ eine Konstante der Bewegung,

$$\dot{L}_3 = 0 \quad \text{oder} \quad L_3 = \text{const.} \quad (5.89)$$

Für den schweren symmetrischen Kreisel ist aber auch die Komponente des Drehimpulses in Richtung der zeitabhängigen Figurenchse \mathbf{e}'_3 konstant:

$$\dot{L}'_3 + \underbrace{(B - A)\omega'_1\omega'_2}_{=0} \stackrel{(5.46)}{=} M'_3 = 0.$$

Damit ergibt sich die weitere Konstante der Bewegung

$$\dot{L}'_3 = 0 \quad \text{oder} \quad L'_3 = \text{const.} \quad (5.90)$$

Neben L_3 und L'_3 ist auch die Energie des Kreisels zeitunabhängig. Diese ist die Summe der kinetischen Energie der Drehbewegung um den Stützpunkt und der potentiellen Energie im konstanten Schwerfeld,

$$\begin{aligned} E &= T + V = \text{const.} \\ T &= \frac{1}{2}A(\omega_1'^2 + \omega_2'^2) + \frac{1}{2}C\omega_3'^2 \\ V &= g \sum m_i \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{r}_i = gM\mathbf{e}_3 \cdot \mathfrak{R} = Mgs \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_3. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Wiederum benutzen wir EULERwinkel, um die Orientierung des körperfesten Systems \mathbf{e}'_a bezüglich des Raumfesten Systems \mathbf{e}_a festzulegen. Mit $L'_3 = C\omega'_3$ schreibt sich wegen (5.13) die erste Konstante der Bewegung gemäß

$$L'_3 = C(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi}). \quad (5.92)$$

Die zweite Konstante der Bewegung kann wie folgt berechnet werden,

$$L_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathcal{L}_{\text{rot}} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_a L'_a = R_{3a} L'_a = A(R_{31}\omega'_1 + R_{32}\omega'_2) + C\omega'_3 R_{33}.$$

Der letzte Term ist proportional zu L'_3 und der erste ist leicht zu berechnen, wenn man $AR_{33}\omega'_3$ addiert und wieder subtrahiert. Man findet

$$L_3 = A\omega_3 + (C - A) \cos \vartheta \omega'_3 = A \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} + L'_3 \cos \vartheta. \quad (5.93)$$

Die kinetische Energie des symmetrischen Kreisels haben wir früher in (5.27) berechnet. Mit $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_3 = \cos \vartheta$ ist auch die potentielle Energie als Funktion des EULERwinkels ϑ bekannt, so daß

$$E = \frac{A}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi})^2 + Mgs \cos \vartheta. \quad (5.94)$$

Für die weitere Diskussion des schweren symmetrischen Kreisels ist es vorteilhaft, den LAGRANGESchen Formalismus zu benutzen. Diesen werden wir in den folgenden Kapiteln kennenlernen.

Kapitel 6

Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

Für viele mechanische Systeme sind die NEWTONSchen Axiome nicht unmittelbar anwendbar, da *Zwangs-* oder *Nebenbedingungen* zu *Zwangskräften* führen, welche die (naiven) NEWTONSchen Bewegungsgleichungen modifizieren. Das Problem besteht darin, dass wir in der Regel die Zwangsbedingungen, nicht aber die Zwangskräfte kennen. Die Zwangskräfte können wir im allgemeinen nicht explizit angeben, da sie von der tatsächlichen Bewegung abhängen. In diesem Kapitel geben wir ein Verfahren an, durch das die Zwangskräfte bei gegebenen Zwangsbedingungen bestimmt werden können. Die dabei auftretenden Probleme können anhand des sphärischen Pendels illustriert werden.

6.1 Zwangskräfte und sphärisches Pendel

Die Bewegungen der Massenpunkte eines *idealen* starren Körpers sind räumlich eingeschränkt, da die relativen Abstände von je zwei Massenpunkten des Körpers konstant sind. Diese Einschränkung der Bewegung wird durch ein (unrealistisches) Potential wie in (5.1) mit unendlich tiefer und unendlich schmaler Potentialmulde erreicht. Die mathematischen Gleichungen $r_{ij} = a_{ij} = \text{const.}$, welche die Einschränkung der Bewegung der Punkte eines starren Körpers ausdrücken, nennt man *Zwangs-* oder *Nebenbedingungen*. Allgemeiner nennt man Bedingungen, die dem Bewegungsablauf eines Systems von Massenpunkten oder Körpern geometrische Einschränkungen auferlegen, *Zwangs-* oder *Nebenbedingungen*. Systeme mit Zwangsbedingungen sind zum Beispiel das Fadenpendel, bei dem der Abstand der Pendelmasse vom Aufhängepunkt fixiert ist, eine auf einem Draht gleitende Perle oder eine auf einer Fläche rollende Kugel.

Für die Einschränkung der Bewegung sorgt eine Kraft, die man *Zwangskraft* nennt. Sie ist für die Bindung des Massenpunktes oder Körpers an eine bestimmte Fläche oder Kurve im Raum verantwortlich. Beispielsweise tritt beim Rollen einer Kugel auf einem waagrechten

Tisch eine der Schwerkraft entgegengerichtete, betragsmäßig aber gleich große Zwangskraft auf, welche die Schwerkraft kompensiert und die Bewegung auf die Tischebene einschränkt. Die Zwangskraft steht senkrecht auf der Fläche oder Kurve, an welche die Bewegung gebunden ist¹. Sie kann bei starren, unveränderlichen Bindungen keine Arbeit leisten, und dies wird beim *Prinzip der virtuellen Arbeit* ausgenutzt. In Körpern können neben den *äußeren Zwangsbedingungen* noch zusätzliche Bindungen der Massenpunkte untereinander auftreten, wie im starren Körper, die zu *inneren Zwangskräften* führen.

Es ist zu beachten, dass auch die Anfangsbedingungen im Einklang mit den Beschränkungen gestellt werden müssen. Mathematisch bedeutet dies, dass die $6N$ Anfangsgrößen $\mathbf{r}_i(0)$ und $\mathbf{v}_i(0)$ nicht mehr unabhängig voneinander frei wählbar sind.

6.1.1 Das sphärische Pendel

Auf einen Massenpunkt der Masse m wirke die Schwerkraft $\mathfrak{F} = m\mathbf{g}$ mit $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$. Als *Zwangsbedingung* sei vorgeschrieben, dass sich der Massenpunkt auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R bewege. Wir haben es also mit einem *sphärischen Pendel* zu tun, d.h. der

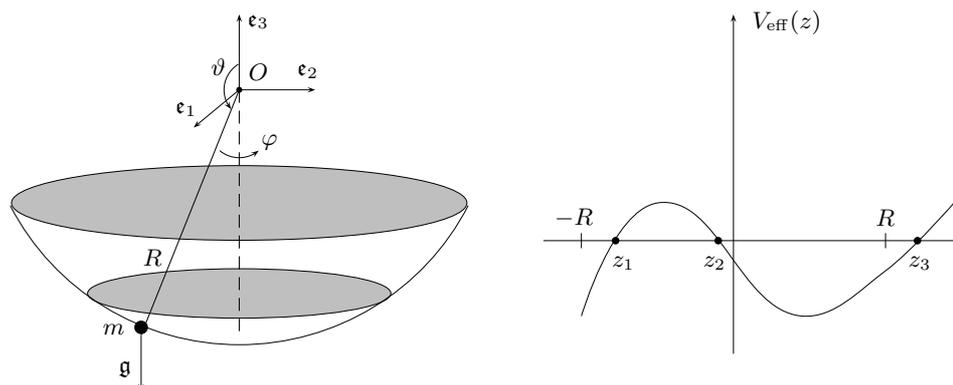


Abbildung 6.1: *Sphärisches Pendel*

Bewegung eines Pendels mit einem 'masselosen' Stab der Länge R . Als Koordinatenursprung O wählen wir den Aufhängepunkt des Pendels, so dass die (idealisierte) Nebenbedingung

$$F(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2 - R^2 = 0 \quad (6.1)$$

vorliegt. Es gilt also für die gesuchte Bahnkurve

$$F(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{r}^2(t) - R^2 = 0. \quad (6.2)$$

Wir leiten diese Nebenbedingung einmal beziehungsweise zweimal nach der Zeit ab,

$$\dot{F}(\mathbf{r}(t)) = 2\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = 0 \quad (6.3)$$

$$\ddot{F}(\mathbf{r}(t)) = 2\dot{\mathbf{r}}^2(t) + 2\mathbf{r}(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t) = 0. \quad (6.4)$$

¹Diese plausible Annahme folgt nicht aus den Axiomen.

Aus (6.2) und (6.3) ergeben sich für den Anfangsort \mathbf{r}_0 und die Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 folgende Bedingungen

$$\mathbf{r}_0^2 - R^2 = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = 0. \quad (6.5)$$

Dies sind zwei unabhängige Beziehungen zwischen zunächst 6 freien Anfangswerten \mathbf{r}_0 und \mathbf{v}_0 . Die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ hängt also nur von 4 der 6 Anfangswerte ab. Die beiden Bedingungen (6.5) drücken aus, dass zur Zeit $t = 0$ der Massenpunkt auf der Kugeloberfläche liegt und im Punkt \mathbf{r}_0 eine zu \mathbf{r}_0 senkrechte Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 hat, welche also tangential zur Kugeloberfläche gerichtet ist. Da die Lösung

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0$$

der NEWTONSchen Bewegungsgleichung $m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g}$ im konstanten Schwerfeld im Widerspruch zu (6.2) ist, muß diese Bewegungsgleichung so abgeändert werden, dass die Lösung der neuen, noch zu findenden Bewegungsgleichung mit der Nebenbedingung (6.2) verträglich ist. Dazu schreiben wir vorläufig

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathfrak{Z} \quad (6.6)$$

mit *Zwangskraft* \mathfrak{Z} . Diese wird von der Stange auf den Körper ausgeübt und zeigt in Richtung des Aufhängepunktes,

$$\mathfrak{Z} = 2\lambda(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} = \lambda(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\nabla F.$$

Hier ist λ eine noch unbekannte Funktion, die für den richtigen Betrag von \mathfrak{Z} sorgen muß, so das die Lösung von

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + 2\lambda\mathbf{r} \quad (6.7)$$

mit (6.2) verträglich ist. Wir erwarten, dass für das sphärischen Pendel λ negativ sein wird, da die Zwangskraft von m nach O zeigt. Die skalare Funktion $\lambda(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ heißt *LAGRANGEScher Multiplikator*.

Wir multiplizieren diese Bewegungsgleichung skalar mit \mathbf{r} und benutzen die aus der Nebenbedingung folgende Beziehung (6.4) zwischen Beschleunigung, Geschwindigkeit und Ort, um die Beschleunigung in der resultierenden Gleichung zu eliminieren,

$$m\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{r} \cdot \mathbf{g} + 2\lambda\mathbf{r}^2 = -m\dot{\mathbf{r}}^2.$$

Diese Gleichung kann nach dem Multiplikator aufgelöst werden. Da $\mathbf{r}^2 = R^2$ konstant ist, finden wir

$$2\lambda = -\frac{m}{R^2}(\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{g}) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{Z} = -\frac{m}{R^2}(\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{g})\mathbf{r}. \quad (6.8)$$

Die Zwangskraft hängt von der tatsächlichen Bewegung und der trägen Masse des Pendels ab. Sie kompensiert die Komponente der Schwerkraft in Fadenrichtung und wirkt der Zentrifugalkraft entgegen. Setzt man die Zwangskraft wieder in (6.6) ein, so entsteht die λ -freie Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} - \frac{1}{R^2}(\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{g})\mathbf{r}. \quad (6.9)$$

Für eine weitere Vereinfachung der Bewegungsgleichung kann man versuchen, Konstanten der Bewegung zu finden. Da die Zwangskraft senkrecht zur Kugeloberfläche und damit senkrecht zur Geschwindigkeit steht, leistet sie keine Arbeit am Pendel und es ist zu erwarten, dass für das System (6.9) die Energie erhalten ist. Zum Beweis multiplizieren wir (6.7) skalar mit $\dot{\mathbf{r}}$ und erhalten

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \dot{T} = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{r}} + 2\lambda\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

Wegen der Nebenbedingung (6.2), aus welcher (6.3) folgt, verschwindet der letzte Term und es gilt

$$E = T + V = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 - m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} = \text{const.} \quad (6.10)$$

In (6.9) können wir damit die Geschwindigkeit durch die Energie und den Ort des Pendels ersetzen, und dies führt auf die einfachere Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathfrak{Z}, \quad \mathfrak{Z} = -\frac{m}{R^2} \left(\frac{2E}{m} + 3\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} \right) \mathbf{r}. \quad (6.11)$$

Die Zwangskraft hängt bei festen Anfangswerten also nur noch von \mathbf{r} ab.

Ohne Schwerkraft wäre die dann alleine wirkende Zwangskraft zentral und der Drehimpuls erhalten. Das Drehmoment der Schwerkraft hat keine Komponente in die Richtung von \mathbf{g} , also in Richtung von \mathbf{e}_3 , und wir erwarten, dass die dritte Komponente ℓ des Drehimpulses erhalten ist. In der Tat, wegen

$$\dot{\ell} = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{L}) = \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{p}}) = m\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{g}) = -mg\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{e}_3) = 0$$

ist

$$\ell = m(xy\dot{y} - y\dot{x}) = \text{const.} \quad (6.12)$$

Nach Wahl von Kugelkoordinaten (2.106) nehmen die beiden Erhaltungssätze (6.10) und (6.12) folgende einfache Form an,

$$\begin{aligned} E &= \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + gmR\cos\theta \\ \ell &= mR^2\sin^2\theta\dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Es ist zweckmäßig, anstatt des Winkels θ die Höhe z einzuführen,

$$z \equiv R\cos\theta \quad \text{mit} \quad dz = -R\sin\theta d\theta = -\sqrt{R^2 - z^2} d\theta.$$

Folglich ist der erhaltene Drehimpuls

$$\ell = m(R^2 - z^2)\dot{\varphi}, \quad \text{und damit} \quad \dot{\varphi} = \frac{\ell}{m(R^2 - z^2)}. \quad (6.14)$$

Eliminieren wir $\dot{\varphi}$ in der Energie (6.13), so ergibt sich

$$\frac{2E}{m} = \frac{R^2}{R^2 - z^2} \left(\dot{z}^2 + \frac{\ell^2}{m^2 R^2} \right) + 2gz,$$

oder aufgelöst nach dem vertikalen Anteil der Geschwindigkeit \dot{z} ,

$$\dot{z} = \frac{1}{R} \sqrt{V_{\text{eff}}(z)} \quad \text{mit} \quad V_{\text{eff}}(z) = \frac{2}{m} (E - gmz)(R^2 - z^2) - \frac{\ell^2}{m^2}. \quad (6.15)$$

Aus dieser Differentialgleichung für $z(t)$ läßt sich auf bekannte Weise die Zeit t als Funktion von z berechnen,

$$t = R \int^z \frac{du}{\sqrt{V_{\text{eff}}(u)}} = t(z). \quad (6.16)$$

Die Umkehrfunktion ergibt die Höhe $z(t)$ als Funktion der Zeit und damit den Winkel $\theta(t)$. Nun läßt sich auch φ als Funktion der Zeit berechnen, da gemäß (6.14) und (6.15) gilt

$$\frac{d\varphi}{dz} = \dot{\varphi} \frac{dt}{dz} = \frac{\ell}{m(R^2 - z^2)} \frac{R}{\sqrt{V_{\text{eff}}(z)}},$$

und damit

$$\varphi = \frac{\ell R}{m} \int^z \frac{du}{R^2 - u^2} \frac{1}{\sqrt{V_{\text{eff}}(u)}}. \quad (6.17)$$

Die Gleichungen (6.16) und (6.17) geben die Lösung des Problems, da sie die Winkel θ und φ als Funktionen der Zeit bestimmen. Natürlich treten in der Lösung noch zwei Integrationskonstanten auf, entsprechend den in diesen Formeln auftretenden unbestimmten Integralen. Diese Integrale sind, da das effektive Potential $V_{\text{eff}}(z)$ ein Polynom dritten Grades ist, elliptische Integrale.

Nur für positive Werte von V_{eff} ist \dot{z} in (6.15) reell. Wenn die Konstanten der Bewegung einer wirklichen Bewegung entsprechen sollen, so muß es also im Intervall $[-R, R]$ zwei Werte $z_1 < z_2$ geben, zwischen denen V_{eff} positiv ist, wie in der Abbildung (6.1) angedeutet. Da für $\ell \neq 0$ das Potential bei $\pm R$ negativ ist, kann das Pendel den Nord- oder Südpol nicht erreichen, wenn der Drehimpuls ungleich Null ist. Es gilt also

$$-R < z_1 \leq z \leq z_2 < R \quad (\ell \neq 0).$$

Für $z_1 = R \cos \theta_1$ und $z_2 = R \cos \theta_2$ verschwindet V_{eff} und diese Werte definieren zwei Breitenkreise, zwischen denen der Massenpunkt hin und her pendelt. Wenn die Integration in (6.16) oder (6.17) an eine dieser Grenzen gelangt, dann muß sie zugleich mit dem Vorzeichen von $\sqrt{V_{\text{eff}}}$ umkehren, um im Reellen und Positiven zu bleiben. Zwischen zwei aufeinander folgenden Umkehrstellen vergeht je ein Viertel der vollen Schwingungsdauer²

$$\frac{T}{4} = R \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{V_{\text{eff}}(z)}}. \quad (6.18)$$

Die Schwingung ist aber keine räumlich periodische wie beim ebenen Pendel, sondern eine mit einer langsamen Präzession. Da $\dot{\varphi}$ nach (6.14) nie verschwinden kann³ ändert sich φ nur in eine Richtung: es nimmt entweder stets zu oder ab.

²Dass es nicht die Hälfte sein kann, sieht man sofort im Grenzfall $\ell = 0$ des ebenen Pendels.

³Wir wollen $\ell \neq 0$ annehmen. Für $\ell = 0$ ist die Schwingungsebene des Pendels fest und wir haben es mit dem einfacheren ebenen Pendel zu tun.

Die Bewegung ist im allgemeinen nicht periodisch. Der Winkel θ_1 kehrt nach der Zeit T zwar wieder zurück, aber φ ändert sich nicht um 2π sondern um

$$2\pi + \Delta\varphi = \frac{4\ell R}{m} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(R^2 - z^2)\sqrt{V_{\text{eff}}(z)}}. \quad (6.19)$$

Der Präzessionswinkel $\Delta\varphi$ verschwindet im allgemeinen nicht.

Für die numerische Behandlung des sphärischen Pendels kehren wir zu den Bewegungsgleichungen (6.9) in Kugelkoordinaten zurück,

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - \sin\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2 &= \frac{g}{R} \sin\theta \\ \ddot{\varphi} + 2\cot\theta \dot{\varphi}\dot{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Zur Umwandlung in ein System erster Ordnung definieren wir die Variablen $(u_1, u_2, u_3, u_4) = (\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ und erhalten

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_3 \\ \dot{u}_2 &= u_4 \\ \dot{u}_3 &= \frac{g}{R} \sin u_1 + u_4^2 \sin u_1 \cos u_1 \\ \dot{u}_4 &= -2u_3 u_4 \cot u_1. \end{aligned}$$

In SCILAB definieren wir das zu dieser Differentialgleichung gehörende Vektorfeld,

```
function Xdot=sphpendel(t,X)
Xdot(1)=X(3); Xdot(2)=X(4);
Xdot(3)=sin(X(1))*(981/R+cos(X(1))*X(4)*X(4));
Xdot(4)=-2*X(3)*X(4)*cotg(X(1));
endfunction
```

und speichern es im File SPHPENDEL.SCI ab. Diesen rufen wir dann in der folgenden Routine⁴, welche die Differentialgleichung numerisch löst und die Lösung plottet, auf:

```
getf('sphpendel.sci');
t=linspace(0.01,1,500);
global R; R=10// Pendellaenge in cm
/**Anfangsbedingungen [theta,dottheta,phi,dotphi]
u0=[%pi-0.5;0;0;2];
u=ode(u0,0,t,sphpendel);
/**plotten von theta(t), phi(t)
xbasc();plot2d([t',t'],[u(1,:)'],u(2,:)');
/**plotten von theta(phi)
//xbasc();plot2d(u(2,:)'],u(1,:)');
/**plotten der Kurve r(t)
//x=sin(u(1,:)).*cos(u(2,:));
//y=sin(u(1,:)).*sin(u(2,:));
//z=cos(u(1,:));
//xbasc();param3d1(x',y',list(z',4),160,70,"x@y@z",[2 4])
```

⁴gespeichert unter SPHPENDEL.PRG

In der Abbildung (6.2) haben wir die numerische Lösung für ein sphärisches Pendel der Länge 10 cm skizziert. In der ersten Figur ist der Winkel θ als Funktion von φ geplottet und in der zweiten die Zeitabhängigkeit der beiden Winkel. Die untere Figur enthält die Raumkurve $\mathbf{r}(t)$ des Pendels. Für die gewählten Anfangsbedingungen

$$(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})(t = 0) = \left(\pi - \frac{1}{2}, 0, 0, 3\right)$$

sind die Erhaltungsgrößen, Umkehrpunkte, Periodendauer und Präzessionswinkel:

$$\begin{aligned} \frac{E}{m} &= -8505.653 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2} & , & \quad \frac{\ell}{m} = 68.955 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \\ z_1 &= -9.90105048 \text{ cm} & , & \quad z_2 = -8.77582560 \text{ cm} \\ T &\sim 0.64513 \text{ sec} & , & \quad \Delta\varphi \sim 0.1711 \text{ rad.} \end{aligned}$$

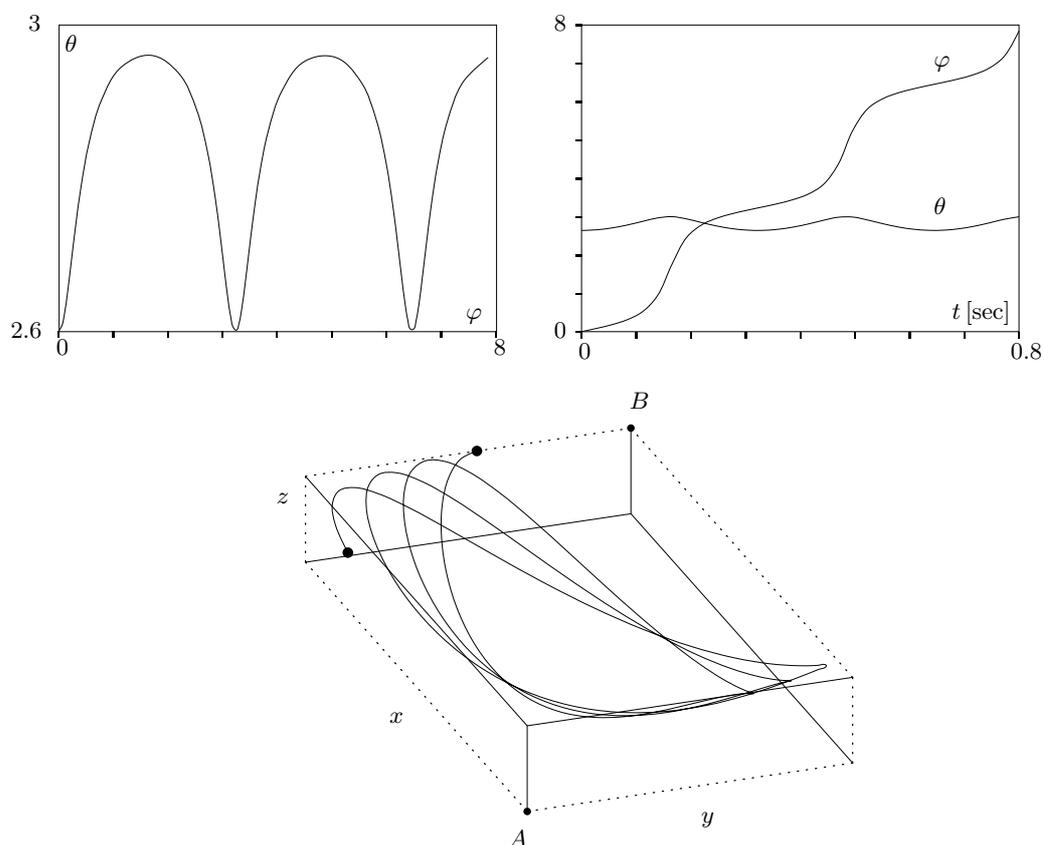


Abbildung 6.2: Die Bewegung des sphärischen Pendels der Länge 10 cm mit den im Text angegebenen Anfangsbedingungen. Die kartesischen Koordinaten der Punkte A und B (in cm) sind $A = (-4.8, 2.69, -9.90)$ und $B = (4.8, -2.42, -8.78)$.

6.2 Holonome und anholonome Nebenbedingungen

Der Massenpunkt hat einen Freiheitsgrad, wenn er an eine Gerade oder eine Kurve gebunden ist, zwei Freiheitsgrade, wenn er gezwungen ist, in einer Ebene oder Fläche zu bleiben; der im Raum frei bewegliche Massenpunkt hat drei Freiheitsgrade. Zwei Massenpunkte, die über eine starre Stange verbunden sind haben fünf Freiheitsgrade und die Massenpunkte eines starren Körpers haben 6 Freiheitsgrade. Allgemeiner haben N Massenpunkte, die durch s Bedingungen zwischen ihren Koordinaten gekoppelt sind, $f = 3N - s$ Freiheitsgrade. Wir wollen nun die möglichen Formen von zulässigen Nebenbedingungen untersuchen und mathematische Voraussetzungen für sie formulieren.

Nebenbedingungen, die als Einschränkungen der Koordinaten in Form von impliziten Gleichungen

$$F_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, s < 3N, \quad (6.21)$$

vorliegen, heißen *holonom*. Alle anderen Zwangsbedingungen heißen *anholonom*. Ist beispielsweise ein Massenpunkt dadurch in seiner Bewegung eingeschränkt, dass er sich im Innern einer Kugel vom Radius R aufhalten muß, gilt die Zwangsbedingung

$$\mathbf{r}^2 \leq R^2.$$

Hierbei handelt es sich um eine anholonome Zwangsbedingung, da die Einschränkung der Koordinaten durch eine Ungleichung gegeben ist. Neben holonomen Zwangsbedingungen können Zwangsbedingungen auch in einer differentiellen Form

$$\mathfrak{A}_1(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 + \dots + \mathfrak{A}_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_N = \mathfrak{A}_i d\mathbf{r}_i \equiv A = 0 \quad (6.22)$$

vorliegen, wobei wir der Einfachheit wegen die Koeffizienten \mathfrak{A}_i als von der Zeit unabhängig angenommen wurden. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden: Wenn die linke Seite von (6.22) das vollständige Differential einer Funktion F ist,

$$A = dF = \nabla_1 F \cdot d\mathbf{r}_1 + \dots + \nabla_N F \cdot d\mathbf{r}_N,$$

dann können wir (6.22) sofort integrieren und erhalten eine holonome Bedingung der Form (6.21),

$$A = dF = 0 \iff F = \text{const.} \quad (6.23)$$

Ist aber die linke Seite von (6.22) kein vollständiges Differential, so kann sie erst integriert werden, wenn das Problem schon gelöst ist. Die Zwangsbedingung (6.22) ist dann anholonom.

Wir können leicht ein notwendiges Kriterium für die Holonomität der differentiellen Zwangsbedingung (6.22) angeben, da diese Bedingung genau dann holonom ist, wenn A ein Potential F besitzt. Hier dürfen wir unsere früheren Resultate in Abschnitt (4.1.3) benutzen, nach denen A ein Potential besitzt, wenn die Komponenten von \mathfrak{A}_i die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial A_{ai}}{\partial x_{bj}} = \frac{\partial A_{bj}}{\partial x_{ai}}$$

erfüllen. Erfüllt A diese Bedingungen nicht, so ist die Zwangsbedingung anholonom.

Ein typisches Beispiel für eine nicht-holonome oder anholonome Bedingung ist die Einschränkung für die Bewegung eines Schlittschuhs auf einer ebenen Eisfläche. Als vereinfachtes Modell für den Schlittschuh nehmen wir eine (kurze) Gerade, die wir als Massenpunkt

mit einem inneren Freiheitsgrad, dem Einstellwinkel φ der Kufe, ansehen können. Die Bewegung des Schlittschuhs ist offensichtlich dadurch eingeschränkt, dass sie nur in Kufenrichtung erfolgen kann,

$$\dot{y} - \tan \varphi \dot{x} = 0 \quad \text{bzw.} \quad dy - \tan \varphi dx = 0, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}.$$

Diese Bedingung ist anholonom, da $\partial_y \tan \varphi$ nicht Null ist.

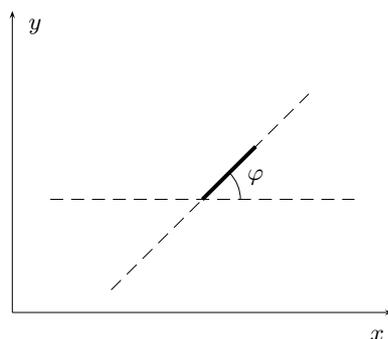


Abbildung 6.3: Zu anholonomen Zwangsbedingungen

Eine weitere Unterscheidung der Zwangsbedingungen wird nach ihrer Zeitabhängigkeit vorgenommen. Ist die Zwangsbedingung eine explizite Funktion der Zeit, so heisst sie *rheonom*, andernfalls *skleronom*. Beispielsweise handelt es sich bei (6.1) um eine skleronome, holonome Zwangsbedingung, während ein mathematisches Pendel mit zeitlich veränderlicher Fadenlänge eine rheonome, holonome Zwangsbedingung beinhaltet.

Einen wichtigen Unterschied zwischen holonom-skleronomen und holonom-rheonomen Nebenbedingungen sieht man wie folgt: Für Bahnkurven eines Massenpunktes, welcher eine holonome Bedingung (6.21) erfüllt, gilt

$$\frac{dF}{dt} = \nabla F \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad (6.24)$$

für $\mathbf{r}(t)$ identisch in t . Für holonom-skleronome Nebenbedingungen fehlt der letzte Term und die Geschwindigkeit des Teilchen ist immer orthogonal zu der Normalenrichtung ∇F , also tangential zu der *zeitunabhängigen* Niveaufäche $F(\mathbf{r}) = 0$ der die Nebenbedingung definierenden Funktion F . Für rheonome holonome Nebenbedingungen braucht die Geschwindigkeit nicht tangential zur Niveaufäche von $F(t, \mathbf{r})$ zu sein. Analoge Aussagen gelten auch für Mehrteilchensysteme.

Jetzt müssen wir uns noch Gedanken machen, wann s holonome Nebenbedingungen F_1, \dots, F_s unabhängig sind. Für stetig differenzierbare F_α ist eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Unabhängigkeit, dass

$$\text{Rang} \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_{ai}} \right)_{\substack{\alpha=1, \dots, s; \\ i=1, \dots, N \\ a=1, 2, 3}} = s$$

ist, also dürfen nicht alle s -reihigen Unterdeterminanten der $3N \times s$ -Funktionalmatrix identisch verschwinden.

6.3 Lagrange-Gleichungen 1. Art und d'Alembert-Prinzip

Wir fassen unsere bisherige Diskussion zu folgendem Ergebnis zusammen: Liegen s *unabhängige* holonome Nebenbedingungen der Form

$$F_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, s < 3N, \quad (6.25)$$

vor, so bewegen sich die N Massenpunkte auf einer durch diese Bedingungen definierte $(3N - s)$ -dimensionalen, im \mathbb{R}^{3N} eingebetteten Hyperfläche. Die zugehörigen Bewegungsgleichungen für die N Massenpunkte lauten

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathfrak{F}_i(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) + \mathfrak{Z}_i(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N), \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.26)$$

wobei die Zwangskräfte

$$\mathfrak{Z}_i = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) \nabla_i F_{\alpha}(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (6.27)$$

zu den eingepprägten Kräften \mathfrak{F}_i zu addieren sind. Die Funktionen λ_{α} sind LAGRANGESche Multiplikatoren. Demnach sind die $3N + s$ Funktionen x_{ai}, λ_{α} aus den s Zwangsbedingungen (6.25) und den $3N$ Bewegungsgleichungen (6.26,6.27), d.h. den LAGRANGE-Gleichungen *erster Art*,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \nabla_i F_{\alpha} \quad (6.28)$$

zu bestimmen. Auch in einem lokalen Inertialsystem können die Zwangskräfte (im Gegensatz zu den \mathfrak{F}_i) von den Massen m_i abhängen.

Wie bei den Kräften kann man wieder zwischen äußeren und inneren Nebenbedingungen unterscheiden. Eine *äußere Nebenbedingung* hängt nur von den Koordinaten *eines* Massenpunktes ab, $F_{\alpha} = F_{\alpha}(t, \mathbf{r}_i)$, eine *innere Nebenbedingung* ist eine Bedingung an die relativen Positionen der Massenpunkte und hängt von deren Koordinaten ab, $F = F(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$. Entsprechend unterscheidet man dann auch zwischen äußeren und inneren Zwangskräften.

Wir führen nun eine *virtuelle Verrückung* $\delta \mathbf{r}_i$ der Teilchenpositionen ein, bei denen sich die Kräfte und Zwangsbedingungen nicht ändern. Virtuelle Verrückungen bewirken demnach, dass eine kinematisch mögliche Bahn in eine andere überführt wird. Die virtuellen Verrückungen müssen in der durch die holonomen Zwangsbedingungen definierten Fläche bleiben, also muß gelten

$$0 = F_{\alpha}(t, \mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N + \delta \mathbf{r}_N) = \underbrace{F_{\alpha}}_{=0} + \sum_i \nabla_i F_{\alpha} \cdot \delta \mathbf{r}_i \implies \sum_i \mathfrak{Z}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (6.29)$$

Die Zwangskräfte leisten keine Arbeit bei virtuellen Verrückungen. Somit folgt aus (6.28) das D'ALEMBERTSche Prinzip der virtuellen Verrückungen

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathfrak{F}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (6.30)$$

Die Summe der eingepprägten Kraft \mathfrak{F}_i und der Trägheitskraft $-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ leistet bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit. Die Zwangskräfte treten indirekt in Erscheinung, da sie die virtuellen Verrückungen gemäß (6.29) einschränken.

6.3.1 Energiesatz

Wir nehmen an, dass die eingepprägten Kräfte konservativ sind, so dass sie sich als Gradient eines Potentials $V(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ darstellen lassen,

$$\mathfrak{F}_i = -\nabla_i V.$$

Die LAGRANGESchen Gleichungen erster Art lauten dann

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\nabla_i V + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \nabla_i F_{\alpha}. \quad (6.31)$$

Die skalare Multiplikation mit $\dot{\mathbf{r}}_i$ mit anschließender Summation über i führt dann auf

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = -\sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla_i V + \sum_i \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \nabla_i F_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Betrachten wir in einer Nebenrechnung die Ableitung der Zwangsbedingung $F_{\alpha} = 0$ bezüglich der Zeit,

$$\frac{dF_{\alpha}}{dt} = \sum_i \nabla_i F_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} = 0,$$

so ergibt eine Multiplikation mit λ_{α} und eine Summation über alle α

$$\sum_i \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \nabla_i F_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = -\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t}.$$

Benutzen wir noch

$$\frac{dV}{dt} = \sum_i \nabla_i V \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial V}{\partial t}$$

so finden wir den *Energiesatz*

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t}. \quad (6.32)$$

Die Energie ist demnach erhalten, wenn das Potential V nicht explizit von der Zeit abhängt und die holonomen Zwangsbedingungen skleronom sind.

Wir wollen ein illustratives und nur scheinbar paradoxes Beispiel diskutieren⁵. Dazu betrachten wir zwei Massenpunkte, die über eine Feder mit Federkonstante $k > 0$ verbunden sind. Beide Massenpunkte bewegen sich auf einer in einem Inertialsystem I ruhenden Kugel mit Radius R . Dann gelten in diesem Bezugssystem die skleronom holonomen äußeren Nebenbedingungen

$$F_1 = \mathbf{r}_1^2 - R^2 = 0 \quad \text{und} \quad F_2 = \mathbf{r}_2^2 - R^2 = 0.$$

Mit

$$\nabla_1 F_1 = 2\mathbf{r}_1, \quad \nabla_2 F_2 = 2\mathbf{r}_2$$

⁵Aus M. Heil und F. Kitzka, Grundkurs Theoretische Mechanik, Teubner Studienbücher Physik, 1984.

sind die Zwangskräfte

$$\mathfrak{Z}_1 = 2\lambda_1 \mathbf{r}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{Z}_2 = 2\lambda_2 \mathbf{r}_2.$$

Damit lauten die LAGRANGESchen Gleichungen erster Art

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + 2\lambda_1 \mathbf{r}_1 \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + 2\lambda_2 \mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Ein Beobachter, der von einem Inertialsystem I' , das sich mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{u} bezüglich I bewegt, die beiden Massenpunkte beobachtet, stellt fest, dass die beiden Massenpunkte den rheonomen Nebenbedingungen

$$F'_1 = (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{u}t)^2 - R^2 = 0 \quad \text{und} \quad F'_2 = (\mathbf{r}'_2 + \mathbf{u}t)^2 - R^2 = 0$$

unterliegen, d.h. er findet die Zwangskräfte

$$\mathfrak{Z}'_1 = \lambda'_1 \nabla'_1 F'_1 = 2\lambda'_1 (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{u}t) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Z}'_2 = \lambda'_2 \nabla'_2 F'_2 = 2\lambda'_2 (\mathbf{r}'_2 + \mathbf{u}t).$$

Entsprechend sind seine um die Zwangskräfte erweiterten NEWTONSchen Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}'_1 &= -k(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) + 2\lambda'_1 (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{u}t) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}'_2 &= -k(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1) + 2\lambda'_2 (\mathbf{r}'_2 + \mathbf{u}t). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Der Beobachter im Inertialsystem I stellt fest, dass der Energieerhaltungssatz $T + V = \text{const.}$ gilt, in Übereinstimmung mit (6.32). Dagegen findet der Beobachter in I' , obwohl sein System ebenfalls ein Inertialsystem ist,

$$\frac{d}{dt}(T' + V') = -2\lambda'_1 \mathbf{u} \cdot (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{u}t) - 2\lambda'_2 \mathbf{u} \cdot (\mathbf{r}'_2 + \mathbf{u}t) \neq 0, \quad (6.35)$$

wiederum in Übereinstimmung mit (6.32). Offensichtlich haben wir ein mathematisch korrektes Ergebnis erhalten. Andererseits sollte der Energieerhaltungssatz in jedem Inertialsystem gelten, wenn er in einem Inertialsystem gilt. Wo liegt die Auflösung dieses scheinbaren Widerspruchs?

6.3.2 Elimination der Lagrangeschen Multiplikatoren

Die rheonomen, holonomen Zwangsbedingungen und LAGRANGESchen Gleichungen erster Art seien vorgegeben. Um die Multiplikatoren λ_α zu eliminieren bilden wir die zweite Zeitableitung der Nebenbedingungen, Hierbei entstehen Gleichungen, in denen die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{r}}_i$ nur linear vorkommen. In der Tat, mit

$$0 = \dot{F}_\alpha = \sum_{i=1}^N \nabla_i F_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \quad (6.36)$$

indem wir für die zweite Zeitableitung

$$0 = \ddot{F}_\alpha = \sum_{i=1}^N \nabla_i F_\alpha \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i - f_\alpha, \quad (6.37)$$

wobei der letzte Term

$$f_\alpha = - \sum_{i,a,j,b} \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial x_{ia} \partial x_{jb}} \dot{x}_{ia} \dot{x}_{jb} - 2 \sum_{i,a} \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial t \partial x_{ia}} \dot{x}_{ia} - \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial t^2}$$

von der Zeit, den Orten und den Geschwindigkeiten der Massenpunkte abhängt. Nun benutzen wir die Bewegungsgleichungen (6.28) um die Beschleunigungen in (6.37) durch die Kräfte zu ersetzen,

$$\sum_i \nabla_i F_\alpha \frac{1}{m_i} \left(\mathfrak{F}_i + \sum_{\beta=1}^s \lambda_\beta \nabla_i F_\beta \right) = f_\alpha. \quad (6.38)$$

Wir erhalten ein lineares, inhomogenes Gleichungssystem für die LAGRANGESchen Multiplikatoren λ_β , dessen Koeffizienten von den Orten und Geschwindigkeiten der Teilchen, aber nicht von deren Beschleunigungen abhängen. Die Anzahl Gleichungen ist gleich der Anzahl von Unbekannten λ_β . Da für unabhängige Nebenbedingungen die quadratische Matrix

$$a_{\alpha\beta} = \sum_i \nabla_i F_\alpha \nabla_i F_\beta$$

den Rang s hat und damit invertierbar ist, können aus (6.38) die LAGRANGESchen Multiplikatoren

$$\lambda_\alpha(t, \mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i), \quad \alpha = 1, \dots, s, \quad (6.39)$$

berechnet werden. Die so bestimmten Multiplikatoren können nun in die rechte Seite von (6.28) eingesetzt werden, so dass wir die Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha(t, \mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) \nabla_i F_\alpha \quad (6.40)$$

erhalten. Sie werden mit den üblichen Verfahren untersucht, wobei die auftretenden Integrationskonstanten durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Es ist jedoch darauf zu achten, dass die gewählten Anfangsbedingungen mit den Nebenbedingungen verträglich sind. Zur Anfangszeit (die wir willkürlich als 0 wählen) muß für alle $\alpha = 1, \dots, s$ gelten

$$\begin{aligned} 0 &= F_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \Big|_{t=0}, \\ 0 &= \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla_i F_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \Big|_{t=0} + \frac{\partial F_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)}{\partial t} \Big|_{t=0}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Ist die Lösung bekannt, so können die LAGRANGESchen Multiplikatoren und damit auch die Zwangskräfte nachträglich berechnet und interpretiert werden.

Kapitel 7

Lagrangesche Mechanik

Häufig ist man gar nicht an der Berechnung der Zwangskräfte interessiert. Dann ist es wesentlich bequemer, eine Formulierung der Mechanik zu wählen, bei der diese aus den Bewegungsgleichungen eliminiert werden. Im folgenden werden wir sehen, daß diese Elimination der Zwangskräfte von den LAGRANGE-Gleichungen erster Art zu den LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art führt.

7.1 Verallgemeinerte Koordinaten

Bei $3N$ Koordinaten x_{ia} und s holonomen Zwangsbedingungen sind nur

$$f = 3N - s \quad (7.1)$$

Koordinaten voneinander unabhängig. Wir nennen f die Anzahl *Freiheitsgrade* des mechanischen Systems. Wir wählen nun f geeignete verallgemeinerte Koordinaten q^1, \dots, q^f , so daß diese die Lage des mechanischen Systems festlegen,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t, q^1, \dots, q^f), \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.2)$$

und die holonomen Zwangsbedingungen identisch erfüllt sind

$$F_\alpha(t, \mathbf{r}_1(t, q^1, \dots, q^f), \dots, \mathbf{r}_N(t, q^1, \dots, q^f)) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, s. \quad (7.3)$$

Als Beispiel betrachten wir die rheonome, holonome Zwangsbedingung, daß sich ein Massenpunkt auf der Oberfläche einer in z -Richtung bewegten Kugel mit Radius R bewegt. Die Nebenbedingung für dieses in z -Richtung bewegte sphärische Pendel ist

$$F(t, \mathbf{r}) = (\mathbf{r} - z_0(t)\mathbf{e}_3)^2 - R^2 = 0. \quad (7.4)$$

Hierbei beschreibt das gegebene $z_0(t)$ die verschiebbare Position des Aufhängepunktes der Kugel. Das System besitzt 2 Freiheitsgrade und entsprechend 2 verallgemeinerte Koordinaten, die man mit den Winkeln ϑ und φ der Kugelkoordinaten um den Aufhängepunkt des

Pendels identifizieren kann,

$$\begin{aligned}x(t, \vartheta, \varphi) &= R \sin \vartheta \cos \varphi \\y(t, \vartheta, \varphi) &= R \sin \vartheta \sin \varphi \\z(t, \vartheta, \varphi) &= R \cos \vartheta + z_0(t)\end{aligned}\tag{7.5}$$

Die Nebenbedingung (7.4) ist damit identisch erfüllt, wenn R die Pendellänge ist. Wie schon bei früheren Systemen, zum Beispiel dem starren Körper, haben die verallgemeinerten Koordinaten nicht die Dimension einer Länge. Im vorliegenden Fall sind die Winkel ϑ und φ dimensionslos.

Nun wollen wir das D'ALEMBERTSche Prinzip, nach dem die Summe der eingprägten und Trägheitskräfte bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit leisten,

$$\sum_{i=1}^N (\mathfrak{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0,\tag{7.6}$$

in verallgemeinerte Koordinaten umschreiben. Für die virtuellen Verrückungen lesen wir wegen $\delta t = 0$ ab:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j.\tag{7.7}$$

Damit ergibt sich für die Arbeit, die von den Kräften \mathfrak{F}_i bei virtuellen Verrückungen geleistet wird

$$\delta A_1 = \sum_{i=1}^N \mathfrak{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^f \mathfrak{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j = \sum_{j=1}^f \left(\sum_{i=1}^N \mathfrak{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \right) \delta q^j.$$

Hier führen wir die *verallgemeinerten Kräfte*

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathfrak{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j}\tag{7.8}$$

ein. Dann vereinfacht sich der Ausdruck für die von den eingprägten Kräften geleistete Arbeit zu

$$\delta A_1 = \sum_{j=1}^f Q_j \delta q^j.\tag{7.9}$$

Entsprechend erhalten wir für die Arbeit, die von den Trägheitskräften bei virtueller Verrückungen verrichtet wird

$$\delta A_2 = - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \stackrel{(7.7)}{=} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^f m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j.\tag{7.10}$$

In einer Nebenrechnung untersuchen wir

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \right) = \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} + \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j}.\tag{7.11}$$

Einerseits erhalten wir für den letzten Faktor

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} = \sum \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^k \partial q^j} \dot{q}^k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q^j} \quad (7.12)$$

und andererseits gilt wegen

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (7.13)$$

auch

$$\frac{\partial}{\partial q^j} \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^j \partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^j \partial t}. \quad (7.14)$$

Vergleichen wir die Resultate (7.14) und (7.12), so folgt die Identität

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j}. \quad (7.15)$$

Die totale Zeitableitung von $\partial \mathbf{r}_i / \partial q^j$ ist also gleich der partiellen Ableitung der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_i$ nach der verallgemeinerten Koordinate q^j . Dies setzen wir in (7.11) ein, mit dem Resultat

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \right) = \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} + \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j},$$

so daß (7.10) übergeht in

$$\delta A_2 = - \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j=1}^f \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \right) \delta q^j + \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j=1}^f \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} \delta q^j. \quad (7.16)$$

Mit (7.9) und (7.16) schreibt sich das D'ALEMBERT-Prinzip der virtuellen Verrückungen $\delta A_1 + \delta A_2 = 0$ gemäß

$$\sum_{j=1}^f \left\{ \sum_{i=1}^N \left[m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} \right] - Q_j \right\} \delta q^j = 0. \quad (7.17)$$

Es gilt in dieser Form noch ganz allgemein. Wichtig ist die Spezialisierung auf *holonome Zwangsbedingungen*. Dann sind die virtuellen Verrückungen δq^j der verallgemeinerten Koordinaten beliebig, und es folgt aus dem D'ALEMBERTSchen Prinzip (7.17)

$$\sum_{i=1}^N \left[m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} \right] = Q_j. \quad (7.18)$$

Die beiden Terme auf der linken Seite lassen sich nun leicht mit der kinetischen Energie des Systems in Verbindung bringen. Dazu differenzieren wir diese nach den verallgemeinerten Koordinaten,

$$\frac{\partial T}{\partial q^j} = \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j},$$

und nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}^j} \stackrel{(7.13)}{=} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j}.$$

Damit lautet das D'ALEMBERTSche Prinzip

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} - Q_j = 0. \quad (7.19)$$

In dieser Form gilt das Prinzip für beliebige eingeprägte Kräfte. Für Potentialkräfte kann es allerdings noch eleganter formuliert werden.

7.2 Lagrange-Funktion

Für Potentialkräfte $\mathfrak{F}_i = -\nabla_i V$ vereinfachen sich die verallgemeinerten Kräfte zu

$$Q_j = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} = - \frac{\partial V}{\partial q^j}. \quad (7.20)$$

Um die verallgemeinerten Kräfte zu bestimmen, ersetzt man also die \mathbf{r}_i im Potential $V(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ durch die verallgemeinerten Koordinaten,

$$V(t, q^1, \dots, q^f) = V\left(t, \mathbf{r}_1(t, q^1, \dots, q^f), \dots, \mathbf{r}_N(t, q^1, \dots, q^f)\right),$$

und bildet den Gradient bezüglich der q^j . Damit vereinfacht sich das D'ALEMBERTSche Prinzip zu

$$\sum_{j=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q^j} (T - V) \right) \delta q^j = 0. \quad (7.21)$$

Wir haben benutzt, daß V nicht von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}^j abhängt. Mit der Definition der in der theoretischen Physik äußerst wichtigen *LAGRANGE-Funktion*

$$L(t, q^1, \dots, q^f, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^f) = T(t, q^1, \dots, q^f, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^f) - V(t, q^1, \dots, q^f) \quad (7.22)$$

folgt dann

$$\sum_{j=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} \right) \delta q^j = 0. \quad (7.23)$$

Für ein konservatives System mit holonomen Zwangsbedingungen, der Regelfall in den folgenden Betrachtungen, erhalten wir die *LAGRANGE-Gleichungen 2. Art*,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0. \quad (7.24)$$

Diese LAGRANGE-Gleichungen ersetzen die NEWTONSchen Bewegungsgleichungen. Es sind f gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren vollständige Lösung die Kenntnis von $2f$ Anfangsbedingungen erfordert. Die holonomen Zwangsbedingungen tauchen in den Bewegungsgleichungen nicht mehr auf.

In der NEWTONSchen Mechanik sind Impuls und Kraft, also vektorielle Objekte, die primären Größen. In der LAGRANGESchen Mechanik sind es Energie, Arbeit, LAGRANGE-Funktion sowie die noch einzuführende Wirkung, also skalare Objekte. Dies ist ein großer Vorteil bei der Untersuchung von Symmetrien und der Konstruktion von Erhaltungsgrößen. Der LAGRANGE-Formalismus ist auch für klassische Feldtheorien von sehr großer Bedeutung. Darüber hinaus spielt er eine wichtige Rolle bei der Quantisierung von physikalischen Systemen¹. Die elegante und mächtige LAGRANGESche Formulierung ist aus der modernen theoretischen Physik nicht mehr wegzudenken.

7.2.1 Rollpendel, zyklische Koordinaten

Wir wollen hier etwas üben, wie man üblicherweise mechanische Probleme mit Hilfe des LAGRANGE-Formalismus löst. Wir setzen zuerst holonome Zwangsbedingungen und konservative Kräfte voraus. Die Lösungsmethode besteht aus fünf Teilschritten:

- Formuliere die Zwangsbedingungen.
- Finde die verallgemeinerten Koordinaten.
- Stelle die LAGRANGE-Funktion $L = T - V$ auf.
- Leite die LAGRANGE-Gleichungen ab und löse sie.
- Transformiere zurück auf die ursprünglichen 'anschaulichen' Koordinaten.

Der letzte Schritt ist nicht immer notwendig und auch nicht immer möglich.

Wir wollen folgende Aufgaben mit Hilfe des LAGRANGE-Formalismus lösen: Wir betrachten

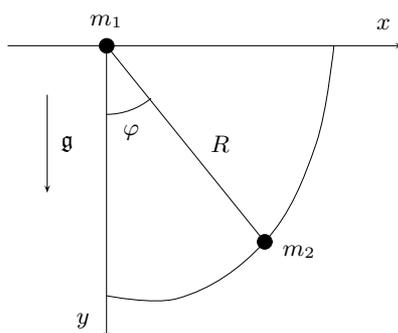


Abbildung 7.1:

ein Rollpendel der Länge R . Die Masse m_1 bewege sich reibungsfrei entlang einer horizontalen Geraden. Welche Bahnen beschreiben die Massen m_1 und m_2 unter dem Einfluß des Schwerfeldes?

¹So machen die Pfadintegrale wesentlichen Gebrauch von der LAGRANGE-Funktion.

Als Gerade wählen wir die x -Achse wie in der Abbildung (7.1) angedeutet. Es liegen vier holonom-skleronome Zwangsbedingungen vor:

$$\begin{aligned} 0 &= z_1 = z_2 \\ 0 &= y_1 = 0 \\ 0 &= (x_1 - x_2)^2 + y_2^2 - R^2. \end{aligned}$$

Es bleiben $6 - 4 = 2$ Freiheitsgrade übrig. Als verallgemeinerte Koordinaten wählen wir x_1 und φ . Mit den Transformationsformeln

$$x_2 = x_1 + R \sin \varphi, \quad y_2 = R \cos \varphi \quad (7.25)$$

lautet die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} (R^2 \dot{\varphi}^2 + 2R \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi),$$

und die potentielle Energie

$$V = -m_2 g R \cos \varphi.$$

Dies ergibt folgende LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} (R^2 \dot{\varphi}^2 + 2R \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 R g \cos \varphi. \quad (7.26)$$

Wir sehen, daß L nicht von x_1 abhängt. Dies führt uns allgemeiner auf die Definition einer *zyklischen Koordinate*:

$$q^j \text{ zyklisch} \iff \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \equiv p_j = \text{const.} \quad (7.27)$$

Für kartesische Koordinaten ist

$$\nabla_{\dot{\mathbf{r}}_i} L = \nabla_{\dot{\mathbf{r}}_i} T = \nabla_{\dot{\mathbf{r}}_i} \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \dot{\mathbf{r}}_k^2 = m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{p}_i$$

der Impuls des i 'ten Teilchens. Entsprechend heißt p_j der verallgemeinerte Impuls zur Koordinate q^j oder auch der zu q^j (*kanonisch*) *konjugierte Impuls*. Es folgt also, daß der zu einer zyklischen Koordinate konjugierte Impuls zeitunabhängig ist. Jede zyklische Koordinate führt automatisch auf einen Erhaltungssatz. Man sollte deshalb die verallgemeinerte Koordinaten so wählen, daß möglichst viele von ihnen zyklisch sind.

Für ein Rollpendel ist x_1 zyklisch. Der erhaltene konjugierte Impuls ist

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 R \dot{\varphi} \cos \varphi = \text{const.}$$

Er ist gleich dem Gesamtimpuls des Systems in Richtung der x -Achse. Wir lösen nun nach der Geschwindigkeit \dot{x}_1 auf,

$$\dot{x}_1 = \frac{p_1}{M} - \mu_2 R \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \mu_2 = \frac{m_2}{M},$$

und integrieren

$$x_1(t) = x_1(0) + \frac{p_1}{M} t - \mu_2 R (\sin \varphi(0) - \sin \varphi(t)) \quad (7.28)$$

gesetzt wurde. Anfänglich sei der erste Massenpunkt bei $x_1 = 0$ und der zweite Massenpunkt hänge senkrecht nach unten. Der erste Massenpunkt bewege sich nach links und der Winkel φ nehme zu. Wir wählen die Anfangsbedingungen so, daß die Lösung eine einfache Form hat:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0 & , & \quad \dot{x}_1(0) = -\mu_2 R \omega_0 \\ \varphi(0) &= 0 & , & \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Daraus folgt zunächst

$$p_1 = 0 \quad \text{und} \quad c = 0.$$

Mit diesen Anfangsbedingungen schwingt der erste Massenpunkt um seine Ruhelage,

$$x_1(t) = -\mu_2 \sin \varphi(t). \quad (7.30)$$

Mit den Transformationsformeln (7.25) folgt für den zweiten Massenpunkt

$$x_2(t) = \frac{m_1}{M} R \sin \varphi(t) \quad \text{und} \quad y_2(t) = R \cos \varphi(t).$$

Wegen

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \quad a = \frac{m_1}{M} R, \quad b = R$$

bewegt sich dieser auf einer Ellipse mit der horizontalen Halbachse $a = m_1 R / M$ und der vertikalen Halbachse $b = R > a$. Für $m_2 \ll m_1$ geht dies über in die Schwingung eines Pendels mit festem Aufhängepunkt.

Wir haben das Problem noch nicht vollständig gelöst, da wir die Zeitabhängigkeit des Winkels φ noch nicht kennen. Wir haben aber noch eine weitere LAGRANGE-Gleichung für φ zur Verfügung. Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 R (R \dot{\varphi} + \dot{x}_1 \cos \varphi) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 R (R \ddot{\varphi} + \ddot{x}_1 \cos \varphi - \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi) \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_2 R (\dot{x}_1 \dot{\varphi} + g) \sin \varphi \end{aligned}$$

lautet die entsprechende LAGRANGE-Gleichung 2. Art

$$R \ddot{\varphi} + \ddot{x}_1 \cos \varphi + g \sin \varphi = 0. \quad (7.31)$$

Für kleine Werte des Winkels φ können wir

$$\cos \varphi \sim 1 \quad \text{und} \quad \sin \varphi \sim \varphi$$

setzen, wodurch sich (7.31) zu

$$R \ddot{\varphi} + \ddot{x}_1 + g \varphi = 0$$

vereinfacht. Aus (7.30) lesen wir ab

$$\ddot{x}_1 = -\mu_2 (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \sim -\mu_2 \ddot{\varphi}.$$

Dies ergibt für den Winkel φ folgende linearisierte Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R} \frac{M}{m_1} \varphi \sim 0.$$

Mit den gewählten Anfangsbedingungen (7.29) ist die Lösung

$$\varphi(t) = \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t, \quad \omega^2 = \frac{g}{R} \frac{M}{m_1}. \quad (7.32)$$

Numerische Lösung: Wir wollen die soeben abgeleitete Lösung der linearisierten Gleichung mit der numerischen Lösung vergleichen. Diese erhält man, indem man die nichtlineare Differentialgleichung für den Winkel,

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\sin \varphi}{1 - \mu_2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{g}{R} + \mu_2 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \right)$$

mit Anfangswerten $\varphi(0)$ und $\dot{\varphi}(0)$ löst und in

$$x_1(t) = x_1(0) + \frac{p_1}{M} t + \mu_2 R (\sin \varphi(0) - \sin \varphi(t))$$

einsetzt. Um die geplottete numerische und linearisierte Lösungen zu erhalten, haben wir

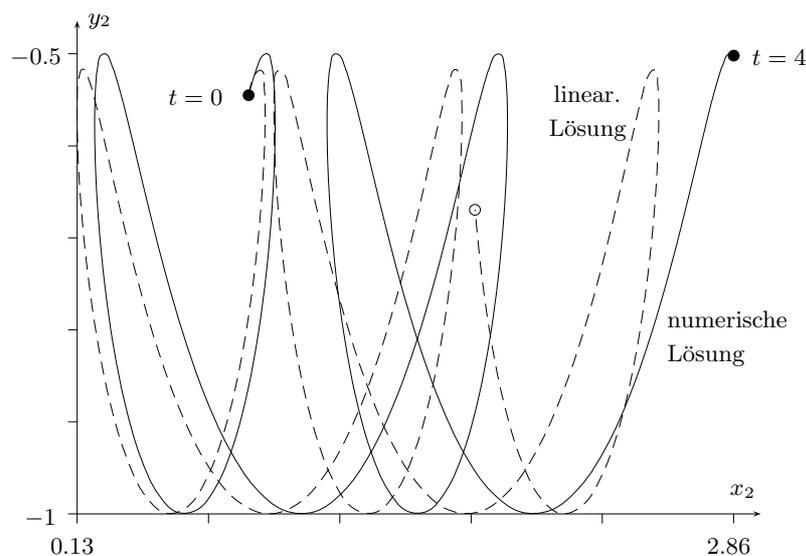


Abbildung 7.2: Die Bewegung des Massenpunktes m_2 für die im Text angegebenen Parameter und Anfangsbedingungen.

die nichtlineare Differentialgleichung für den Winkel φ in ein System erster Ordnung umgewandelt und im File kugelpendel.sci abgespeichert:

```
function phidot=kugelpendel(t,phi)
phidot(1)=phi(2);
sinus=sin(phi(1));cosinus=cos(phi(1));
```

```

phidot(2)=-sinus/(M-m2*cosinus^2)*(m2*cosinus*phi(2)^2+9.81*M/R)
endfunction

```

Die numerische Berechnung der Bahn von m_2 und deren graphische Darstellung wird von der Routine `kugelpendel.prg` geleistet:

```

getf('kugelpendel.sci');
p1=1.5; // Gesamtimpuls des Systems
x10=[0,0]; // Anfangsort/geschwindigkeit von m1: [x10,dotx10]
phi0=[1;1]; // Anfangswinkel/geschwindigkeit von m2: [phi0,dotphi0]
m2=1;M=3; // Massen in kg
R=1; // Länge des Pendelstabes in m
omega=sqrt(9.81*M/((M-m2)*R)); // Frequenz der linearisierten Lösung
t=linspace(0,4,100);
// Lösung für phi in linearer Näherung
philin=phi0(1)*cos(omega*t)+phi0(2)/omega*sin(omega*t);
// numerische Lösung für phi
phi=ode(phi0,0,t,kugelpendel);
x1=x10(1)+p1/M*t+m2*R/M*(sin(phi0(1))-sin(phi(1,:))); // numerisch
x1l=x10(1)+p1/M*t+m2*R/M*(sin(phi0(1))-sin(philin)); // linearisiert
// Bewegung des zweiten Körpers
x2=x1+R*sin(phi(1,:));
y2=-R*cos(phi(1,:));
x2l=x1l+R*sin(philin);
y2l=-R*cos(philin);
xbasc();
plot2d([x2',x2l'],[y2',y2l']);

```

In der obigen Figur (7.2) haben wir also folgende Parameter (in MKS-Einheiten) gewählt:

$$p_1 = 1.5, \quad m_2 = 2, \quad M = 3 \quad \text{und} \quad R = 1.$$

Die anfänglichen Orte und Geschwindigkeiten sind

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0, \quad \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 1.$$

Für die gewählten Anfangsbedingungen schwingt $\varphi(t)$ zwischen 1 und -1 hin und her. Da die Linearisierung der Differentialgleichung nur für $\varphi \ll 1$ begründet werden kann, ist es doch bemerkenswert, dass die Lösung der linearisierten Gleichung für frühe Zeiten der numerischen Lösung relativ genau folgt.

7.2.2 Homogenität der Zeit und Energieerhaltung

Im LAGRANGESchen Formalismus ist es relativ einfach, einen Zusammenhang herzustellen zwischen der Struktur des Euklidischen Raumes und der Zeit einerseits und den erhaltenen Größen andererseits. Diesen werden wir nun systematisch ableiten.

Wir nennen ein System *zeitlich homogen*, wenn sich seine Eigenschaften als invariant gegenüber Zeitverschiebungen erweisen. Die Ergebnisse von Messungen sind dann unabhängig vom Zeitpunkt der Messung. Dies bedeutet aber, daß die LAGRANGE-Funktion L des Systems

nicht explizit von der Zeit abhängen kann. Wir werden sehen, daß die Invarianz bezüglich einer Verschiebung des Zeitursprungs,

$$L(t) = L(t + \tau) \implies \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (7.33)$$

auf eine Erhaltungsgröße führt, die mit der Energie des Systems identifiziert werden kann. Wegen $\partial L / \partial t = 0$ hat man nämlich

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^j} \ddot{q}^j \right) \stackrel{(7.24)}{=} \sum_j \left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^j} \ddot{q}^j \right\} \\ &= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j \right) = \frac{d}{dt} \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Definieren wir die Funktion

$$H(q, \dot{q}) = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L \quad (7.35)$$

so folgt für Systeme, deren LAGRANGE-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, die zeitliche Konstanz dieser Funktion,

$$H(q^1, \dots, q^f, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^f) = \text{const.} \quad (7.36)$$

Sei nun $L = T - V$, mit T homogen quadratisch in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten. Wir erinnern daran, daß $F(x_1, \dots, x_n)$ homogen vom Grade m heisst, wenn

$$F(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m F(x_1, \dots, x_n) \quad (7.37)$$

gilt. Dann gilt der EULERSche Satz

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j} x_j = mF, \quad (7.38)$$

welcher leicht aus (7.37) folgt, wenn man diese Gleichung nach λ ableitet und dann $\lambda = 1$ setzt. Sei ferner das Potential V unabhängig von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}^j . Dann ist die zeitunabhängige Funktion H in (7.35) gleich

$$H = \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} (T - V) \dot{q}^j - T + V = T + V = E, \quad (7.39)$$

also die *Energie* des Systems. In diesem Fall ist (7.36) der *Energiesatz*.

7.3 Kreisel im Lagrange Formalismus

Wenn ein Kreisel nicht frei ist, empfiehlt sich der Übergang von den EULERSchen zu den LAGRANGESchen Gleichungen. Naheliegende verallgemeinerte Koordinaten sind die Eulerschen Winkel. Wählen wir das körperfeste kartesische System ϵ'_a in Richtung der Hauptachsen,

dann schreibt sich wegen (5.17) und (5.13) die kinetische Energie des unsymmetrischen Kreisels gemäß

$$\begin{aligned}
T &= \frac{A}{2}\omega_1'^2 + \frac{B}{2}\omega_2'^2 + \frac{C}{2}\omega_3'^2 \\
&= \frac{A}{2}(\sin\psi \sin\vartheta\dot{\varphi} + \cos\psi\dot{\vartheta})^2 + \frac{B}{2}(\cos\psi \sin\vartheta\dot{\varphi} - \sin\psi\dot{\vartheta})^2 \\
&\quad + \frac{C}{2}(\cos\vartheta\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2.
\end{aligned} \tag{7.40}$$

Dieser Ausdruck ist homogen quadratisch in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten. Für eine Potentialkraft mit Potential $V(\varphi, \vartheta, \psi)$ führt die LAGRANGE-Funktion $L = T - V$ auf die LAGRANGE-Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} &= Q_\vartheta \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= Q_\psi
\end{aligned} \tag{7.41}$$

mit den verallgemeinerten Kräften

$$Q_\varphi = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = M'_\varphi, \quad Q_\vartheta = -\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = M'_\vartheta, \quad Q_\psi = -\frac{\partial V}{\partial \psi} = M'_\psi. \tag{7.42}$$

Diese sind die Komponenten des Drehmoments um die raumfeste 3-Achse, die Knotenlinie und die körperfeste 3-Achse. Die Energie $E = T + V$ des Kreisels ist eine Konstante der Bewegung.

In welcher Beziehung stehen die LAGRANGE-Gleichungen zu den EULER-Gleichungen? Betrachte die dritte LAGRANGE-Gleichung. Wegen

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = C\omega_3' \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = A\omega_1'\omega_2' - B\omega_2'\omega_1'$$

ist die LAGRANGE-Gleichung für ψ identisch zur dritten EULER-Gleichung

$$C\dot{\omega}_3' - (A - B)\omega_1'\omega_2' = M'_\psi.$$

Die erste und die zweite EULER-Gleichung erhält man ebenfalls, allerdings nicht unmittelbar als LAGRANGE-Gleichungen für φ und ϑ , weil diese die 'falschen' \mathfrak{M} -Komponenten haben.

Für den *freien unsymmetrischen* Kreisel ist die kinetische Energie gleich der LAGRANGE-Funktion, $T = L$, und entsprechend ist der Winkel φ eine *zyklische Koordinate*. Der zugehörige zeitlich erhaltene konjugierte Impuls

$$\begin{aligned}
p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \sin\psi \sin\vartheta A\omega_1' + \cos\psi \sin\vartheta B\omega_2' + \cos\vartheta C\omega_3' \\
&= R_{31}L_1' + R_{32}L_2' + R_{33}L_3' = L_3
\end{aligned}$$

ist gleich dem Drehimpuls um die raumfeste 3-Achse.

7.3.1 Schwere symmetrische Kreisel II

Für symmetrische Kreisel vereinfacht sich die kinetische Energie der Rotation (7.40) zu

$$T = \frac{A}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi})^2. \quad (7.43)$$

Im Abschnitt (5.6) haben wir die potentielle Energie des gestützten symmetrischen Kreisels im Schwerfeld berechnet. Damit ergibt sich folgende LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{A}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi})^2 - Mgs \cos \vartheta, \quad (7.44)$$

wobei A, A, C die Hauptträgheitsmomente des symmetrischen Kreisels bezüglich des ruhenden Stützpunktes sind. Offensichtlich sind φ und ψ zyklische Koordinaten. Die entsprechenden zeitlich konstanten konjugierten Impulse sind

$$p_\psi = C(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi}) \equiv L'_3 \quad \text{und} \quad p_\varphi = A \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} + L'_3 \cos \vartheta \equiv L_3. \quad (7.45)$$

Sie sind gleich den erhaltenden Drehimpulsen um die Figurenachse und die 3-Achse. Da die LAGRANGE-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt und da T homogen-quadratisch in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten ist, ist nach (7.36) die *Energie*

$$E = \frac{A}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi})^2 + Mgs \cos \vartheta, \quad (7.46)$$

eine Konstante der Bewegung. Mit (7.45) kann man $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ zu Gunsten von L_3 und L'_3 aus der Energie eliminieren,

$$E = \frac{A}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{(L_3 - \cos \vartheta L'_3)^2}{2A \sin^2 \vartheta} + \frac{L'_3{}^2}{2C} + Mgs \cos \vartheta \quad (7.47)$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung für ϑ . Führt man die Variable

$$u = \cos \vartheta$$

ein, so erhält man für $u(t)$ die Differentialgleichung

$$\dot{u}^2 = f(u), \quad (7.48)$$

$$f(u) = \frac{2}{A} \left(E - \frac{L'_3{}^2}{2C} - Mgsu \right) (1 - u^2) - \left(\frac{L_3 - L'_3 u}{A} \right)^2. \quad (7.49)$$

Das kubische Polynom $f(u)$ ist negativ für $u = \pm 1$ und positiv für $u \rightarrow \infty$. Die Variable u liegt definitionsgemäß im Intervall $[-1, 1]$ und deshalb muß das kubische Polynom $f(u)$ in diesem Intervall positive Werte annehmen, damit (7.48) eine reelle Lösung hat. Das Polynom hat daher zwei Nullstellen $u_1 \leq u_2$ in diesem Intervall und die Bewegung ist auf den Bereich $u_1 \leq u \leq u_2$ beschränkt. Die dritte Nullstelle von f ist ebenfalls reell und größer als 1, siehe Abbildung (7.3).

Die Lösung ist als elliptisches Integral darstellbar,

$$t = \int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{f(u')}}. \quad (7.50)$$

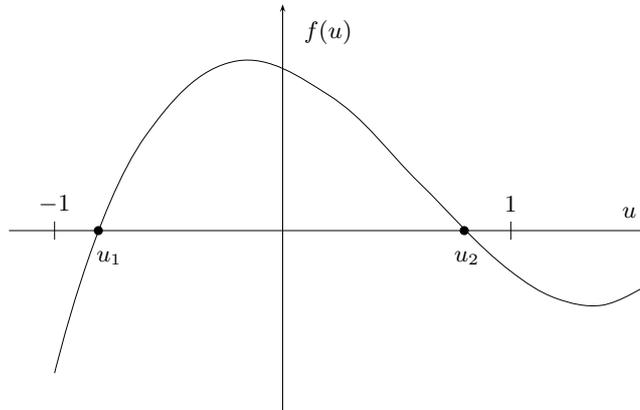


Abbildung 7.3: Das kubische Polynom (7.49).

Die Figurenachse pendelt zwischen den Werten $\vartheta_1 = \arccos u_1$ und $\vartheta_2 = \arccos u_2$ hin und her und $\vartheta(t)$ beschreibt die *Nutation* des schweren Kreisels, d.h. das 'Nicken' der Figuren- achse gegenüber der raumfesten \mathbf{e}_3 -Achse.

Die Winkelgeschwindigkeit der Knotenlinie ergibt sich nach (7.45) zu

$$\dot{\varphi} = \frac{L_3 - L'_3 \cos \vartheta}{A \sin^2 \vartheta}. \quad (7.51)$$

Sie ändert bei der Bewegung ihr Vorzeichen, wenn $u_3 = L_3/L'_3 = \cos \vartheta_3$ im Bereich $u_1 < u_3 < u_2$ liegt. Der Durchstoßpunkt der Figurenachse beschreibt dann auf der Einheitskugel eine Kurve der in Abbildung (7.4c) skizzierten Art. Diese Kurve wird der *Locus* der Figurenachse genannt. Liegt aber ϑ_3 nicht zwischen ϑ_1 und ϑ_2 , dann ergibt sich ei-

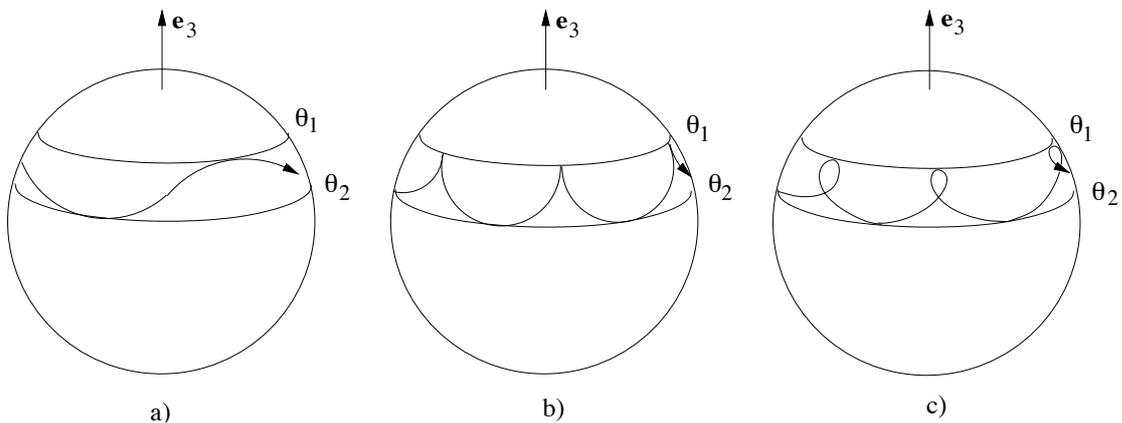


Abbildung 7.4: Der Locus der Figurenachse des schweren symmetrischen Kreisels.

ne Kurve wie in Abbildung (7.4a). Die Bewegung der Figurenachse des schweren Kreisels in φ -Richtung bezeichnet man als *Präzession*. Im allgemeinen hat man eine Überlagerung von Präzession und Nutation. Wählt man die Bedingungen so, daß $u_1 = u_2$ gilt, dann ist $\vartheta = \text{konstant}$ und $\dot{\varphi} = \text{konstant}$. Diese nutationsfreie Bewegung des Kreisels bezeichnet man

als *reguläre Präzession*. Die reguläre Präzession ist beim schweren Kreisel (im Gegensatz zum Fall des kräftefreien symmetrischen Kreisel) ein *partikuläre* Bewegungsform desselben.

Ähnlich wie für den unsymmetrischen kräftefreien Kreisel, kann die Lösung für den symmetrischen kräftefreien durch elliptische Funktionen ausgedrückt werden. Für ein weitergehendes Studium von Kreiseln verweise ich auf die Literatur [9].

7.4 Eichtransformationen

Wir nehmen an es gäbe ein verallgemeinertes Potential $V = V(t, q, \dot{q})$ als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und *Geschwindigkeiten*, so daß sich die verallgemeinerten Kräfte (7.8) wie folgt schreiben lassen,

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial V}{\partial q^j}. \quad (7.52)$$

Dann folgt aus (7.19)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} - Q_j \right) \delta q^j &= \sum_{i=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial V}{\partial q^j} \right) \delta q^j \\ &= \sum_{i=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} \right) \delta q^j = 0 \end{aligned}$$

mit der LAGRANGE-Funktion

$$L(t, q, \dot{q}) = T(t, q, \dot{q}) - V(t, q, \dot{q}). \quad (7.53)$$

Für holonome Zwangsbedingungen sind die virtuellen Verrückungen δq^j beliebig und es folgen die LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0. \quad (7.54)$$

Das verallgemeinerte Potential kann nicht beliebig gewählt werden. Um dies einzusehen, wenden wir die Kettenregel auf (7.52) an,

$$Q_j = \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 V}{\partial q^k \partial \dot{q}^j} \dot{q}^k + \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^k + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{q}^j} - \frac{\partial V}{\partial q^j}. \quad (7.55)$$

Da die verallgemeinerten Kräfte (7.8) nicht von den Beschleunigungen abhängen sollen, darf das Potential V höchstens linear von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}^j abhängen. Es muß deshalb die Form

$$V(t, q, \dot{q}) = U(t, q) + \sum_{k=1}^f B_k(t, q) \dot{q}^k \quad (7.56)$$

haben. Dies führt auf verallgemeinerten Kräfte der Gestalt

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q^j} + \frac{\partial B_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial B_j}{\partial q^k} - \frac{\partial B_k}{\partial q^j} \right) \dot{q}^k, \quad (7.57)$$

die höchstens linear von den Geschwindigkeiten abhängen.

Wir betrachten nun den einfachen Fall eines Punktteilchens, das keine Nebenbedingungen erfüllt, so daß die kartesischen Koordinaten als verallgemeinerte Koordinaten gewählt werden dürfen. Dann gehen die verallgemeinerten Kräfte (7.57) über in Komponenten der Kraft bezüglich einer kartesischen Basis,

$$F_a = -\frac{\partial U}{\partial x_a} + \frac{\partial B_a}{\partial t} + \sum_{b=1}^3 \left(\frac{\partial B_a}{\partial x_b} - \frac{\partial B_b}{\partial x_a} \right) \dot{x}_b. \quad (7.58)$$

Für $B_a = 0$ ist dies offensichtlich eine Potentialkraft.

Wir betrachten nun die LORENTZ-Kraft auf eine bewegte Ladung q im elektromagnetischen Feld im SI-Einheitensystem,

$$\mathfrak{F} = q\mathfrak{E} + q\mathbf{v} \wedge \mathfrak{B} \implies F_a = qE_a + q\epsilon_{abc}\dot{x}_b B_c. \quad (7.59)$$

Die elektrische Feldstärke \mathfrak{E} und die magnetische Induktion \mathfrak{B} lassen sich aus dem skalaren Potential φ und dem Vektorpotential \mathfrak{A} gewinnen

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} &\iff E_a = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_a} - \frac{\partial A_a}{\partial t} \\ \mathfrak{B} = \nabla \wedge \mathfrak{A} &\iff B_a = \epsilon_{abc} \frac{\partial A_c}{\partial x_b}. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Wir setzen dies in die Formel (7.59) für die Komponenten der LORENTZ-Kraft ein,

$$F_a = -q\frac{\partial\varphi}{\partial x_a} - q\frac{\partial A_a}{\partial t} + q\left(\frac{\partial A_b}{\partial x_a} - \frac{\partial A_a}{\partial x_b}\right)\dot{x}_b. \quad (7.61)$$

Der Vergleich mit (7.58) führt auf die Identifikationen

$$U = q\varphi \quad \text{und} \quad B_a = -qA_a.$$

Demnach lautet die LAGRANGE-Funktion eines geladenen (nichtrelativistischen) Teilchens im elektromagnetischen Feld

$$L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - q\varphi(t, \mathbf{r}) + q\mathfrak{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (7.62)$$

Es stellt sich nun die Frage, ob verschiedene LAGRANGE-Funktionen zu denselben Bewegungsgleichungen führen können, oder ob L eindeutig bestimmt ist. Wir werden nun zeigen, daß es verschiedene LAGRANGE-Funktionen gibt, die zu denselben Bewegungsgleichungen Anlass geben. Dazu untersuchen wir die Transformation

$$L'(t, q, \dot{q}) = L(t, q, \dot{q}) + \frac{dF(t, q)}{dt}, \quad (7.63)$$

wobei $F = F(t, q)$ eine beliebige Funktion der Zeit und Koordinaten darstellt, so daß

$$L'(t, q, \dot{q}) = L(t, q, \dot{q}) + \sum_{k=1}^f \frac{\partial F}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (7.64)$$

gilt. Die partiellen Ableitungen der neuen LAGRANGE-Funktion nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten und Koordinaten sind

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial F}{\partial q^j} \quad , \quad \frac{\partial L'}{\partial q^j} = \frac{\partial L}{\partial q^j} + \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial t},$$

und führen schließlich zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L'}{\partial q^j} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} + \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 F}{\partial q^k \partial q^j} \dot{q}^k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q^j} \\ &\quad - \frac{\partial L}{\partial q^j} - \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q^k} \dot{q}^k - \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial t} \stackrel{(7.54)}{=} 0. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Es wurde benutzt, daß man die zweiten partiellen Ableitungen bei zweimal differenzierbaren Funktionen vertauschen darf. Man kann also die LAGRANGE-Funktion der mechanischen *Eichtransformation* (7.63) unterziehen, ohne daß sich die Bewegungsgleichungen ändern. Demnach sind alle durch (7.63) miteinander verbundenen LAGRANGE-Funktionen als gleichberechtigt anzusehen. Man nennt die Abbildung $L \rightarrow L'$ eine *Eichtransformation* mit Eichfunktion F . Oft sagt man auch, L und L' seien *eich-äquivalente* LAGRANGE-Funktionen.

So ist zum Beispiel die LAGRANGE-Funktion L in (7.62) eich-äquivalent zu

$$\begin{aligned} L'(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - q\varphi'(t, \mathbf{r}) + q\mathfrak{A}'(t, \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad \text{mit} \\ \varphi' &= \varphi + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - \nabla \lambda, \end{aligned} \quad (7.66)$$

wobei wir $F = -q\lambda$ gesetzt haben. Die eich-transformierten Potentiale φ' und \mathfrak{A}' geben Anlaß zu derselben LORENTZ-Gleichung wie die ursprünglichen Potentiale φ und \mathfrak{A} . Dies sollte sie nicht erstaunen, da (φ, \mathfrak{A}) und $(\varphi', \mathfrak{A}')$ zu demselben elektrischen Feld und zu derselben magnetischen Induktion führen.

Das folgende einfache Beispiel zeigt, daß neben einer Standard-LAGRANGE-Funktion L weitere LAGRANGE-Funktionen existieren können, die nicht eich-äquivalent zu L sind, aber auf dieselben Bewegungsgleichungen führen. So erhält man die einfache Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (7.67)$$

sowohl aus der Standard-LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - x^2)$$

als auch aus folgenden LAGRANGE-Funktionen:

$$\begin{aligned} \hat{L}_1 &= 2 \frac{\dot{x}}{x} \arctan \frac{\dot{x}}{x} - \log(x^2 + x^2) \\ \hat{L}_2 &= \frac{1}{3} \dot{x}^4 + 2\dot{x}^2 x^2 - x^4 \\ \hat{L}_3 &= \frac{1}{x^2} (\dot{x}^2 + x^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Diese sind nicht eich-äquivalent zu L . Es gibt keine Funktionen $F_i(t, q)$, $i = 1, 2, 3$, für die $\hat{L}_i = L + \dot{F}_i$ gilt. Zum Beispiel führt \hat{L}_2 auf die Bewegungsgleichung

$$f(x, \dot{x})(\ddot{x} + x) = 0, \quad f(x, \dot{x}) = 4(x^2 + \dot{x}^2) \geq 0,$$

welche die ursprüngliche Gleichung (7.67) impliziert.

7.5 Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen

Die Bewegungsgleichungen in NEWTONSchen Mechanik sind unter *Punkttransformationen*

$$q^j \longrightarrow Q^j = Q^j(t, q) \quad \text{mit} \quad \det \left(\frac{\partial Q^j}{\partial q^k} \right) \neq 0, \quad (7.68)$$

nicht forminvariant. So lauten für die Zentralkraftbewegung die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten nicht

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{und} \quad mr^2\ddot{\varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (\text{falsch!}),$$

wie man es bei Forminvarianz erwarten würde, sondern

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{und} \quad mr(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0,$$

siehe (2.105). Die LAGRANGE-Gleichungen sind dagegen *forminvariant*, behalten also ihre Form unter Punkttransformationen bei. Um dies zu beweisen, gehen wir von den LAGRANGE-Gleichungen in den alten Koordinaten aus und rechnen sie in die neuen Koordinaten um. Mit

$$\dot{q}^j = \sum_{k=1}^f \frac{\partial q^j}{\partial Q^k} \dot{Q}^k + \frac{\partial q^j}{\partial t} \quad \text{folgt} \quad \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{Q}^k} = \frac{\partial q^j}{\partial Q^k}. \quad (7.69)$$

Die LAGRANGE-Funktion in den neuen Koordinaten Q erhalten wir durch Einsetzen der inversen Punkttransformation $q^j = q^j(t, Q)$ in die alte LAGRANGE-Funktion

$$L'(t, Q, \dot{Q}) = L[q(t, Q), \dot{q}(t, Q, \dot{Q}), t]. \quad (7.70)$$

Demnach ändern LAGRANGE-Funktionen zwar ihre Form, nicht aber ihren Wert. Mit den Umrechnungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial Q^j} &= \sum_{k=1}^f \left[\frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial Q^j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^j} \right] \\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}^j} &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{Q}^j} \stackrel{(7.69)}{=} \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k}{\partial Q^j} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}^j} &= \sum_{k=1}^f \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) \frac{\partial q^k}{\partial Q^j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^j} \right], \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die schon früher bewiesene Tatsache benutzten, daß die Zeitableitung von $\partial q^k / \partial Q^j$ gleich der partiellen Ableitung von q^k nach Q^j ist, folgt dann

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}^j} - \frac{\partial L'}{\partial Q^j} = \sum_{k=1}^f \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} \right] \frac{\partial q^k}{\partial Q^j},$$

oder, da für eine Punkttransformation die Ableitungsmatrix $(\partial q^k / \partial Q^j)$ invertierbar ist, daß

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}^j} - \frac{\partial L'}{\partial Q^j} = 0 \iff \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \quad (7.71)$$

ist. Wenn die LAGRANGE-Gleichungen in einem Koordinatensystem erfüllt sind, so sind sie es auch in jedem anderen. Die Gleichungen sind unter Punkttransformationen *forminvariant*. Wegen der im Allgemeinen verschiedenen Gestalt der LAGRANGE-Funktionen ist das explizite Aussehen der Bewegungsgleichungen natürlich von den Koordinaten abhängig. Die Forminvarianz ist sehr nützlich, da sie oft eine mühelose Aufstellung der Bewegungsgleichungen in beliebigen (zulässigen) Koordinatensystemen, zum Beispiel auch in beschleunigten Bezugssystemen, ermöglicht.

7.6 Symmetrien und Erhaltungsgrößen: Noether-Theorem

Im Abschnitt (7.2.1) haben wir bereits gesehen, daß die kanonisch konjugierten Impulse

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \quad (7.72)$$

von zyklischen Koordinaten q^j Erhaltungsgrößen sind. Es folgt unmittelbar, daß Symmetrien Erhaltungssätze nach sich ziehen: Wenn ein mechanisches System unter der Verschiebung einer Koordinate q^j invariant ist (eine Symmetrie aufweist), so kann diese Koordinate nicht in der Lagrangefunktion auftreten und ist daher zyklisch. Der zugehörige Impuls p_j bildet dann eine Erhaltungsgröße. Somit liefern Symmetrien zyklische Koordinaten und damit die Erhaltung der entsprechenden Impulse. Die Ausarbeitung dieser Beobachtung ist der Inhalt des Theorems von EMMY NOETHER², das wir jetzt besprechen werden.

Wie soeben diskutiert, sind Koordinaten, deren Verschiebung

$$q^j \longrightarrow q'^j = q^j + \alpha, \quad (7.73)$$

die LAGRANGE-Funktion nicht ändern,

$$\begin{aligned} L(t, q^1, \dots, q^{j-1}, q^j + \alpha, q^{j+1}, \dots, q^f, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^i, \dots, \dot{q}^f) \\ = L(t, q^1, \dots, q^{j-1}, q^j, q^{j+1}, \dots, q^f, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^i, \dots, \dot{q}^f) \end{aligned}$$

zyklisch, und die entsprechenden Impulse sind Erhaltungsgrößen. Man sagt dann, L sei *translationsinvariant* bezüglich der verallgemeinerten Richtung q^j , oder auch L sein *invariant* bezüglich der Transformation

$$q'^j = q^j + \alpha, \quad q'^k = q^k \quad \text{für } k \neq j.$$

Man kommt so ganz natürlich auf die Idee, daß allgemein das Auftreten von Konstanten der Bewegung mit Transformationseigenschaften von L zusammenhängt. In der Tat ist es EMMY NOETHER gelungen, einen solchen allgemeinen Zusammenhang herzustellen. Um diesen einzusehen, untersuchen wir Koordinatentransformationen

$$q^j \longrightarrow q'^j = q'^j(t, q, \alpha), \quad j = 1, \dots, f, \quad (7.74)$$

die invertierbar

$$q^j = q^j(t, q', \alpha) \quad (7.75)$$

²Genau genommen, gibt es zwei Theoreme von E. Noether, welche sich auf Symmetrien beziehen.

und in dem kontinuierlichen Parameter α stetig differenzierbar sein müssen. Für $\alpha = 0$ sollen die neuen Koordinaten q' in die alten übergehen,

$$q'^j(t, q, \alpha = 0) = q^j. \quad (7.76)$$

Beispiele für solche Koordinatentransformationen sind die Galilei-Transformationen. Wir ersetzen die alten Koordinaten durch die neuen und finden die LAGRANGE-Funktion in den neuen Koordinaten,

$$L(t, q, \dot{q}) = L\left[t, q(t, q', \alpha), \frac{d}{dt}q(t, q', \alpha)\right] \equiv L'(t, q', \dot{q}', \alpha), \quad (7.77)$$

Wir berechnen die partielle Ableitung von L' nach dem Parameter α , wobei die Variablen q'^j, \dot{q}'^j festgehalten werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial \alpha} &= \sum_{j=1}^f \left[\frac{\partial L}{\partial q^j} \frac{\partial q^j(t, q', \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{d}{dt} q^j(t, q', \alpha) \right\} \right] \\ &\stackrel{(7.54)}{=} \sum_{j=1}^f \left[\left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right\} \frac{\partial q^j(t, q', \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} q^j(t, q', \alpha) \right\} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial q^j(t, q', \alpha)}{\partial \alpha} \right]. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Diese Identität gilt für alle Werte von α . Sie vereinfacht sich für $\alpha = 0$, da wegen (7.76) dann die neuen Koordinaten gleich den alten sind.

Interessant sind für uns Koordinatentransformationen, welche die LAGRANGE-Funktion invariant lassen

$$L(t, q, \dot{q}) \stackrel{(7.77)}{=} L'(t, q', \dot{q}', \alpha) \stackrel{\text{Invarianz}}{=} L(t, q', \dot{q}') \quad (7.79)$$

Wegen der zweiten Gleichung hängt L' bei festgehaltenen q' und \dot{q}' nicht von α ab. Dies darf man nicht aus der ersten Gleichung schließen: Ändern wir α bei festgehaltenen q' und \dot{q}' , so ändern sich im allgemeinen die alten Koordinaten q^j und alten Geschwindigkeiten \dot{q}^j und damit $L(t, q, \dot{q})$. Aber wegen der Invarianz von L verschwindet die linke Seite in (7.78) und es folgt sofort das bedeutende

Satz von Emmy Noether: *Die Funktion*

$$I(t, q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial q^j(t, q', \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (7.80)$$

ist eine Erhaltungsgröße, wenn die LAGRANGE-Funktion unter der kontinuierlichen, stetig differenzierbaren Koordinatentransformation (7.74) invariant ist. Zu jeder Transformation (7.74), welche L nicht ändert, gehört eine Konstante der Bewegung.

Der zu einer zyklischen Koordinate gehörende Erhaltungssatz folgt sofort aus (7.80) mit $q'^j = q^j + \alpha$.

Verallgemeinerungen: Man erhält auch eine Erhaltungsgröße, wenn die LAGRANGE-Funktion L unter den Transformationen (7.74) in eich-äquivalente LAGRANGE-Funktionen übergeht,

$$L'(t, q', \dot{q}', \alpha) = L\left[t, q(t, q', \alpha), \frac{d}{dt}q(t, q', \alpha)\right] = L(t, q', \dot{q}') + \frac{d}{dt}F(t, q', \alpha). \quad (7.81)$$

In dieser allgemeineren Situation lautet die Erhaltungsgröße

$$I = \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial q^j(t, q', \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F(t, q', \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}. \quad (7.82)$$

Die Gleichungen (7.80) sind ein Spezialfall dieser Gleichung.

7.6.1 Isotropie des Raumes und Drehimpulserhaltung

Man nennt ein System *räumlich isotrop*, wenn sich die Eigenschaften des Systems bei beliebigen Drehungen nicht ändern. Die LAGRANGE-Funktion eines räumlich isotropen Systems sollte invariant sein unter gleichzeitiger Drehung der Positionen aller Teilchen. Zum Beispiel ist die LAGRANGE-Funktion

$$L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(t, r), \quad r = |\mathbf{r}| \quad (7.83)$$

für ein Punktteilchen in einem rotationssymmetrischen Potential invariant unter Drehungen um den Ursprung,

$$\mathbf{r} = R_\alpha \mathbf{r}', \quad R = R_\alpha \in SO(3), \quad (7.84)$$

wie man leicht sieht,

$$L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = L'(t, \mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', \alpha) \equiv L\left\{t, R_\alpha \mathbf{r}', \frac{d}{dt}(R_\alpha \mathbf{r}')\right\} = L(t, \mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}').$$

Hier könnte man zum Beispiel für α einen der drei EULER-Winkel wählen. Nach dem NOETHER-Theorem ist

$$I = m\dot{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \alpha} (R_\alpha \mathbf{r}') \Big|_{\alpha=0}$$

zeitunabhängig. Für R_α wählen wir nun eine Drehung um die Achse in Richtung von \mathbf{e} mit Winkel α . Dann ist³

$$I = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}) = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) = \mathbf{e} \cdot \mathcal{L}. \quad (7.85)$$

Ist L invariant unter Drehungen um beliebige Achsen, dann sind alle $\mathbf{e} \cdot \mathcal{L}$ Erhaltungsgrößen, daß heißt alle Komponenten des Drehimpulses. Insbesondere sind für die drehinvariante LAGRANGE-Funktion (7.72) alle Komponenten des Drehimpulses,

$$L_1, L_2, L_3 \quad (7.86)$$

Konstanten der Bewegung.

³setze $\mathbf{w} = \mathbf{e}$ in (5.10)

Wie man leicht beweist, ist für ein N -Körpersystem die LAGRANGE-Funktion

$$L = \sum \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \sum_{i < j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (7.87)$$

ebenfalls drehinvariant, also invariant unter

$$\mathbf{r}_i = R_\alpha \mathbf{r}'_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.88)$$

d.h. unter gleichzeitiger Drehung aller N Teilchen. Die zugehörige Erhaltungsgröße findet man ganz analog wie für ein Punktteilchen. Es ist der gesamte Drehimpuls,

$$\mathfrak{L} = \sum_{i=1}^N \mathfrak{L}_i, \quad \mathfrak{L}_i = \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i. \quad (7.89)$$

Ist die LAGRANGE-Funktion nur invariant unter Rotationen um die z -Achse, dann ist L_3 eine Konstante der Bewegung, nicht aber L_1 oder L_2 . Dies erklärt zum Beispiel, warum für den schweren symmetrischen Kreisel die Drehimpulse L_1 und L_2 nicht erhalten sind. Dagegen wird auch für den schweren *unsymmetrischen* Kreisel die Komponente L_3 des Drehimpulses in Richtung der Schwerebeschleunigung eine erhaltene Größe sein.

7.6.2 Homogenität des Raumes und Impulserhaltung

Ein System heißt *räumlich homogen*, wenn seine Eigenschaften unabhängig vom Ort sind, d.h., wenn eine Verschiebung des gesamten Systems die Meßergebnisse nicht ändert. Gleiche Messungen an identischen Systemen im Abbeanum und Max-Wien-Platz sollten gleiche Resultate ergeben. Das ist z.B. dann der Fall, wenn die auftretenden Kräfte nur von den Teilchenabständen abhängen. Zum Beispiel ist die LAGRANGE-Funktion (7.87) invariant unter gleichzeitiger Verschiebung aller N Teilchen um einen konstanten Vektor,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{a}. \quad (7.90)$$

Wählen wir für \mathbf{a} eine Verschiebung um die Länge α in Richtung von \mathbf{e} , so ist die zugehörige Erhaltungsgröße in (7.80) gleich

$$I = \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{d\alpha} (\mathbf{r} + \alpha \mathbf{e}) \Big|_{\alpha=0} = \mathbf{e} \cdot \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{e} \cdot \mathfrak{P}. \quad (7.91)$$

Damit sind alle drei Komponenten des gesamten Impulses \mathfrak{P} ,

$$P_1, P_2, P_3 \quad (7.92)$$

erhaltene Größen. Ist das System zum Beispiel nur invariant bezüglich Translationen in die x -Richtung, dann ist nur der Impuls in diese Richtung eine Konstante der Bewegung. Dies ist der Grund dafür, daß beim Rollpendel nur der Impuls in die x -Richtung erhalten ist.

Die erstaunlichen Beziehungen zwischen Symmetrien der Raumzeit und Erhaltungssätzen

Homogenität der Zeit	\iff	Energieerhaltungssatz
Homogenität des Raumes	\iff	Impulserhaltungssatz
Isotropie des Raumes	\iff	Drehimpulserhaltungssatz

sind keinesfalls auf die nichtrelativistische Mechanik beschränkt. Sie gelten zum Beispiel auch in relativistischen (Quanten)Feldtheorien.

Kapitel 8

Hamiltonsches Prinzip

In diesem Kapitel lernen wir ein neues Prinzip der klassischen Mechanik kennen, welches sich den bisher diskutierten Prinzipien von NEWTON und D'ALEMBERT als zumindest ebenbürtig erweist. Die Gesetze der klassischen Mechanik lassen sich aus zwei Typen von *Variationsprinzipien* ableiten. Beim differentiellen Prinzip von D'ALEMBERT wird ein *momentaner* Zustand des Systems mit kleinen virtuellen Verrückungen aus diesem Zustand verglichen. Beim integralen Prinzip von HAMILTON wird eine tatsächlich durchlaufene Bahn des Systems mit einer kleinen virtuellen Abweichung von dieser Bahn verglichen. Wie beim Prinzip von D'ALEMBERT ist das Ergebnis auch hier die Bewegungsgleichung.

8.1 Variationsrechnung

In der Differentialrechnung besteht eine einfache Aufgabe darin, die stationären Punkte einer Funktion $y(x)$ zu bestimmen. Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines stationären Punktes an der Stelle $x = a$ ist $y'(a) = 0$. Hinreichende Bedingungen dafür, daß es sich um ein Minimum oder Maximum handelt, sind $y''(a) > 0$ bzw. $y''(a) < 0$. Die Variationsrechnung beschäftigt sich mit einem ähnlichen, allerdings schwierigeren Problem: Gesucht ist eine Funktion $y(x)$, für die ein bestimmtes Integral über eine Funktion dieser Funktion (ein Funktional) einen extremalen Wert annimmt.

Der Name *Variationsrechnung* wurde zum ersten Mal von L. EULER im Jahre benutzt. Damit bezeichnete er die neue Methode, aus der er selbst sehr virtuos mögliche Folgerungen zog. Heute wird der Begriff Variationsrechnung in einem breiteren Sinn verwendet. Gegenstand der Variationsrechnung sind das Aufsuchen von Minima, Maxima und Sattelpunkten (also kritischer Punkte) einer Funktion

$$F : M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} = \{\text{reelle Zahlen}\}.$$

In den Anwendungen ist M eine Menge von Zahlen, Funktionen, Wegen, Kurven, Flächen, Feldern, usw. Extremalprobleme spielen nicht nur in der theoretischen Physik eine wichtige Rolle, sondern zum Beispiel auch in der Wirtschaft, Regelungstechnik oder Spieltheorie. Ei-

nes der klassischen Probleme der Variationsrechnung war die isoperimetrische Aufgabe, d.h. das Aufsuchen derjenigen geometrischen Figur größter Fläche bei gegebenem Umfang. Eine wichtige Anwendung findet die Variationsrechnung im FERMATSchen Prinzip, nach dem ein Lichtstrahl denjenigen Weg nimmt, auf dem die benötigte Zeit minimal ist. Das FERMATSche Prinzip wurde von ERNST ABBE geschickt benutzt, um optische Geräte zu berechnen.

Die Geburt der modernen Variationsrechnung wird gewöhnlich auf jenen Tag des Juni 1696 gelegt, als das Problem der *Brachystochrone* durch JOHANN BERNOULLI gestellt wurde (siehe unten). Seit 1732 setzte sich EULER systematisch mit Extremalproblemen auseinander. Er fand notwendige Bedingungen für ein Extremum von einfachen Funktionalen und erhob die Variationsrechnung zu einer eigenständigen mathematischen Disziplin. Er stellte das *Prinzip der kleinsten Wirkung* auf eine fundierte Grundlage. LAGRANGE entwickelte die Methoden zur systematischen Behandlung einer großen Klassen von Variationsproblemen. Diese wurden von LEGENDRE und JACOBI fortentwickelt und weiter verallgemeinert. Das Prinzip der kleinsten Wirkung spielte in den späteren Arbeiten von HAMILTON eine wesentliche Rolle.

Für eine spezielle Klasse von Funktionalen, das heißt von Funktionen, deren Argumente Funktionen sind, entdeckte L. EULER eine erste notwendige Bedingung, welche ein Extremum des Funktionals erfüllen muß. Sie trägt heute den Namen EULER-Gleichung. Diese Gleichung entspricht der Bedingung $f'(x) = 0$ für das Extremum x einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. EULER betrachtete folgende *Aufgabenstellung der Variationsrechnung*: Suche eine Funktion $y(x)$, für die das Integral

$$F[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (8.1)$$

extremal ist. Der Integrand f ist eine Funktion der unabhängigen Variablen x , der abhängigen Variablen y und deren Ableitung $y' = dy/dx$. An den Grenzen x_1 und x_2 sind die Werte y_1 und y_2 vorgeschrieben. Das Integral F nimmt für verschiedene Kurven $y(x)$ zwischen $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ im allgemeinen verschiedene Werte an. Wir nehmen nun an, das Funktional habe einen extremalen Wert für $y(x)$, d.h. die Kurve $y(x)$ sei ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt von F . Nun vergleichen wir mit dem Wert des Funktionals für benachbarte Kurven $y(x) + \delta y(x)$, wobei $\delta y(x)$ infinitesimal klein sein soll für alle x zwischen x_1 und x_2 , siehe Abbildung (8.1). Wir definieren

$$\delta f = f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y'). \quad (8.2)$$

Das Symbol δ bedeutet *Variation*. δf ist der Zuwachs von f wenn man an der festen Stelle x von der Kurve $y(x)$ zur Vergleichskurve $y(x) + \delta y(x)$ übergeht. Offenbar ist dann $\delta x = 0$. Weiterhin gilt

$$\delta y' = \frac{d}{dx}(y + \delta y) - \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \delta y, \quad (8.3)$$

und die Symbole δ und d/dx vertauschen. Da δy infinitesimal klein ist, folgt aus (8.2)

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'.$$

Nun ist $y(x)$ ein stationärer 'Punkt' von F , wenn das Integral längs y in erster Näherung gleich demjenigen längs $y + \delta y$ ist,

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx \stackrel{(8.3)}{=} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx}(\delta y) \right] dx = 0.$$

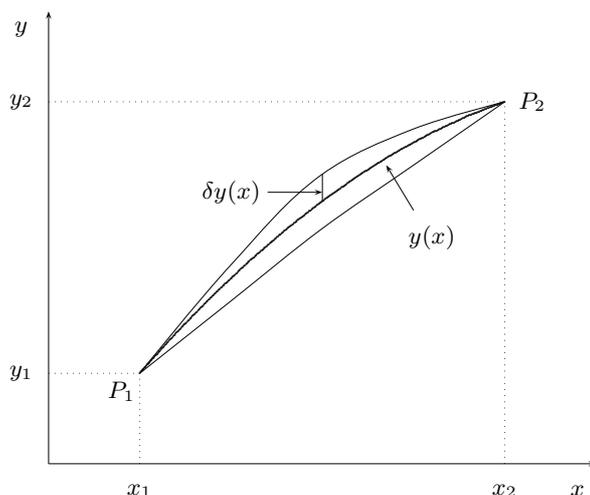


Abbildung 8.1: Unter allen differenzierbaren Kurven, die von P_1 nach P_2 laufen, wird diejenige gesucht, die das Integral F extremal macht.

Der zweite Summand läßt sich durch partielle Integration umformen,

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \delta y \, dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2}. \quad (8.4)$$

Hier verschwinden die Randterme, weil an den beiden Endpunkten x_1 und x_2 nach Voraussetzung $\delta y = 0$ ist. Die Stationarität von F bedingt also

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \delta y(x) \, dx = 0. \quad (8.5)$$

Die Gleichung muß für beliebige Deformationen δy der Kurve y verschwinden. Dies impliziert, daß der Ausdruck in eckigen Klammern Null sein muß,

$$\frac{\partial f}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'(x)} \equiv \frac{\delta F}{\delta y(x)} = 0. \quad (8.6)$$

Diese Gleichung stellt die gesuchte notwendige Bedingung an $y(x)$ dar. Eine Funktion y , die diese Differentialgleichung erfüllt, heißt Extremale. In der Menge der Extremalen ist dann die Minimal- oder Maximalkurve enthalten, falls sie existiert. Die Gleichung (8.6) heißt die zum Variationsproblem gehörige EULER-Gleichung.

8.1.1 Geodätische Linien

Wir wollen den oft als selbstverständlich angesehenen Sachverhalt beweisen, daß die gerade Linie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene darstellt. Das Linienelement ist in kartesischen Koordinaten durch $ds^2 = dx^2 + dy^2$ gegeben, also ist die Länge der

Kurve $x \rightarrow y(x)$ gleich

$$s = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Soll y ein Minimum von s sein, so muß die EULER-Gleichung (8.6) mit $f = (1 + y'^2)^{1/2}$ erfüllt sein, also

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{1 + y'^2} \right] = 0,$$

oder

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const.},$$

gelten, was $y' = \text{const.}$ nach sich zieht. Die minimierende Kurve ist eine Gerade durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) .

Das Linienelement auf der *Oberfläche einer Kugel* vom Radius R ist

$$ds = R \sqrt{d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2}. \quad (8.7)$$

Wir wollen φ als Funktion von ϑ so bestimmen, daß s stationär ist. Also müssen wir die EULER-Gleichung für $f = R(1 + \varphi_\vartheta^2 \sin^2 \vartheta)^{1/2}$ lösen, d.h.

$$\frac{d}{d\vartheta} \left[\frac{\varphi_\vartheta \sin^2 \vartheta}{(1 + \varphi_\vartheta^2 \sin^2 \vartheta)^{1/2}} \right] = 0.$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern ist gleich einer Konstanten c . Die resultierende Differentialgleichung für $\varphi(\vartheta)$ hat die Lösung

$$\varphi = a - \arcsin(k \cot \vartheta) \quad \text{mit} \quad c = -\frac{k}{\sqrt{1 + k^2}} \implies Rk \cot \vartheta = R \sin(a - \varphi).$$

Zur Interpretation dieser Bedingung schreiben wir sie in kartesische Koordinaten um. Nach Multiplikation mit $\sin \vartheta$ ergibt sich

$$Rk \cos \vartheta = R \sin \vartheta (\sin a \cos \varphi - \cos a \sin \varphi) \quad \text{bzw.} \quad kz = x \sin a - y \cos a.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel, die folglich die Kugeloberfläche in einem Großkreis schneidet. Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf der Kugeloberfläche ist einer der beiden Bögen auf dem Großkreis durch diese Punkte.

8.1.2 Die Brachystochrone

In diesem von JOHANN BERNOULLI gestellten Problem ist diejenige Kurve gesucht, auf der ein Körper unter dem Einfluß der Schwerkraft und ohne Reibung von einem gegebenen Punkt zu einem zweiten Punkt in der kürzesten (brachyistos) Zeit (chronos) gleitet. Die gesuchte Kurve, die sogenannte Brachystochrone, ist eine Zykloide.

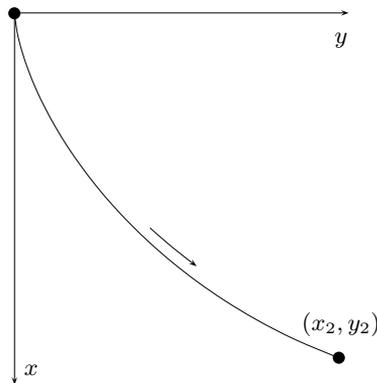


Abbildung 8.2: Die Zykloide löst das Brachystochronenproblem von J. Bernoulli

Der Massenpunkt soll am Anfang im Ursprung ruhen, der Endpunkt sei (x_2, y_2) . Bei diesem Problem ist es bequem, die y -Achse nach rechts zu legen und x nach unten zu messen. Aus dem Energiesatz folgt

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2gx},$$

wobei v die Geschwindigkeit des Massenpunktes längs seiner Bahn ist und g die Fallbeschleunigung bezeichnet. Wegen

$$v dt = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

schreibt sich der Energiesatz gemäß

$$\sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{2gx} dt.$$

Die vom fallenden Körper benötigte Zeit ist gegeben durch das Integral

$$T = \int dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_2} x^{-1/2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

und diese gilt es zu minimieren. Die entsprechende EULER-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{x(1 + y'^2)}} = 0.$$

und eine erste Integration führt auf die einfache Differentialgleichung

$$\frac{y'^2}{x(1 + y'^2)} = c \quad \text{bzw.} \quad y' = \frac{x}{\sqrt{x/c - x^2}}.$$

Die weitere Integration ergibt dann

$$y = a \arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \sqrt{2ax - x^2} + c', \quad \text{wobei} \quad a = 1/2c \quad (8.8)$$

ist. Die neue Integrationskonstante c' muß Null sein, damit y bei $x = 0$ verschwindet. Diese Gleichung stellt eine *Zykloide* über der y -Achse mit einer Spitze im Ursprung dar. Die Konstante a muß so gewählt werden, daß die Zykloide durch den Punkt (x_2, y_2) geht.

8.1.3 Mehrere abhängige oder/und unabhängige Variable

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die bisherigen Resultate auf Systeme mit mehr als einer abhängigen Variablen y oder/und mit mehr als einer unabhängigen Variablen x sowie auf Variationsprobleme, bei denen die Funktion f von höheren Ableitungen $y^{(n)}$ von y abhängt.

Mehrere abhängige Variablen: Wir wollen voraussetzen, daß der Integrand f des Integralen

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, \dots, y_N, y'_1, \dots, y'_N) dx, \quad (8.9)$$

welches ein Maximum oder Minimum annehmen soll, eine Funktion einer unabhängigen, aber mehrerer abhängiger Variablen ist. In der Mechanik wäre die unabhängige Variable die Zeit t und die abhängigen Variablen die (verallgemeinerten) Koordinaten q^i . Wir suchen nun Funktionen $y_1(x), \dots, y_N(x)$, für die das Funktional mit festen Randbedingungen

$$y_i(x_1) = y_{i1} \quad \text{und} \quad y_i(x_2) = y_{i2}, \quad i = 1, \dots, N \quad (8.10)$$

stationär wird. Die Bedingung dafür ist wie oben

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx = 0, \quad (8.11)$$

nur ist jetzt

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \delta y_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y'_1} \delta y'_1 + \frac{\partial f}{\partial y'_2} \delta y'_2 + \dots = \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \delta y'_i,$$

wobei wir wieder von der EINSTEINSCHEN Summenkonvention Gebrauch machten. Bei der Berechnung des Integralen (8.11) formen wir wieder die Summanden der zweiten Gruppe durch partielle Integration um, und erhalten

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right] \delta y_i dx + \left[p_i \delta y_i \right]_{x_1}^{x_2}, \quad \text{wobei} \quad p_i = \frac{\partial f}{\partial y'_i}$$

gesetzt wurde. Bei festgehaltenen Anfangs- und Endpunkten verschwindet der letzte Term. Das Funktional ist stationär bezüglich beliebiger Variationen δy_i der Funktionen y_i , wenn die EULER-Gleichungen

$$\frac{\delta F}{\delta y_i(x)} = \frac{\partial f}{\partial y_i(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i(x)} = 0 \quad (8.12)$$

gelten. Es handelt sich um N gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die N gesuchten Funktionen $y_1(x), \dots, y_N(x)$, die unter Berücksichtigung der *Randbedingungen* (8.10) zu lösen sind. Diese Verallgemeinerung ist für die Beschreibung mehrerer Massenpunkte notwendig.

Mehrere Argumente: Wir betrachten nun den Fall, daß mehrere Argumente x_1, \dots, x_M anstelle von x vorliegen. Gesucht ist demnach eine Funktion $y = y(x_1, \dots, x_M)$, die das Funktional

$$F[y(\dots)] = \int_B d^M x f\left(x_1, \dots, x_M, y(x_1, \dots, x_M), \frac{\partial y(x_1, \dots, x_M)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y(x_1, \dots, x_M)}{\partial x_M}\right) \quad (8.13)$$

extremal macht. Hierbei sei die Funktion $y = y(x_1, \dots, x_M)$ auf dem Rande des Integrationsgebietes B fest vorgegeben. Aus der Stationaritätsbedingung

$$\frac{\delta F[y(\dots)]}{\delta y(x_1, \dots, x_M)} = 0$$

folgt dann die EULER-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \sum_{i=1}^M \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial (\partial y / \partial x_i)} = 0. \quad (8.14)$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die gesuchte Funktion $y(x_1, \dots, x_M)$. Eine mögliche Anwendung für diese Verallgemeinerung der Variationsrechnung wäre etwa die Ausdehnung einer dehnbaren Membran oder einer Seifenhaut im Schwerfeld der Erde, die längs einer Kurve in der $x_1 - x_2$ -Ebene eingespannt ist. Hierbei konkurrieren Schwerkraft und Oberflächenspannung miteinander und die Gleichgewichtskonfiguration wird durch ein Minimum der Summe der beiden potentiellen Energien bestimmt.

Die beiden Verallgemeinerungen (8.9) und (8.13) können auch miteinander kombiniert werden. Dann enthält das Funktional mehrere Funktionen, die jeweils von mehreren Variablen abhängen. Diese relativ allgemeine Form des Funktionals,

$$F = \int_B d^M x f\left(x_a, y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_a}\right), \quad y_i = y_i(x, \dots, x_M), \quad i = 1, \dots, N, \quad (8.15)$$

benötigt man in Feldtheorien.

Höhere Ableitungen: Falls das Funktional höhere Ableitungen von $y(x)$ enthält, wie z.B.

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x), y''(x)) dx, \quad (8.16)$$

dann treten auch höhere Ableitungen in der EULER-Gleichung auf. Die Extremalbedingung

$$\frac{\delta F[y(\cdot)]}{\delta y(x)} = 0 \quad (8.17)$$

führt zum Beispiel für das Funktional (8.16) auf die Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'(x)} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''(x)} = 0. \quad (8.18)$$

Es handelt sich hierbei offensichtlich um eine gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung für $y(x)$. Die üblichen Randbedingungen $y(x_i) = y_i$ für die Funktion y legen diese nun nicht mehr eindeutig fest. Um auf die EULER-Gleichung (8.18) zu kommen, muß man

mehrfach partiell integrieren, wobei zusätzliche Randterme auftreten. Diese verschwinden, wenn die weiteren Randbedingungen

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y(x)} \right|_{x_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

gefordert werden.

8.2 Isoperimetrische Probleme

In Anwendungen tritt oft das Problem auf, bei dem ein Integral stationär sein soll, während gleichzeitig ein oder mehrere Integrale, in denen dieselben Variablen vorkommen, konstant zu halten sind. Ein bekanntes Beispiel ist die Aufgabe, diejenige ebene geschlossene Kurve vorgegebener Länge zu finden, die eine möglichst große Fläche einschließt. Nach diesem Beispiel heißen solche Probleme *isoperimetrische Probleme*. Solche Nebenbedingungen oder Zwangsbedingungen können mit der Lagrangeschen Methode der unbestimmten Multiplikatoren bestimmt werden. Man sucht einen stationären Wert von

$$F = \int f dx, \quad f = f(x, y_i, y'_i), \quad y_i = y_i(x), \quad i = 1, \dots, N, \quad (8.19)$$

wobei die s Nebenbedingungen

$$F_1 = \int f_1 dx = c_1, \dots, F_s = \int f_s dx = c_s \quad (8.20)$$

gelten soll. Sämtliche Integranden enthalten dieselben Variablen, und die Grenzen sind gleich bei allen Integralen. Nun führen wir s konstante LAGRANGESche Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ein, deren Werte wir vorerst unbestimmt lassen. Offenbar ist mit F auch

$$F^* = F + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_s F_s \quad (8.21)$$

stationär, und zwar wegen (8.20) für jede Wahl der Multiplikatoren λ_i . Wir stehen also vor einem ganz ähnlichen Problem wie früher, nämlich ein einziges Integral extremal zu machen, nur mit einem abgeänderten Integranden. F muß durch

$$F^* = \int f^* dx, \quad f^* = f + \sum_{i=1}^s \lambda_i f_i \quad (8.22)$$

ersetzt werden. Eine notwendige Bedingung für die Stationarität von F^* ist

$$\sum_{i=1}^N \int \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f^*}{\partial y'_i(x)} - \frac{\partial f^*}{\partial y_i(x)} \right) \delta y_i(x) dx = 0. \quad (8.23)$$

Hier können wir nicht ohne weiteres den Übergang zu den EULERSchen Gleichungen machen, weil die δy_i nicht mehr beliebig sind; die Variation muß mit (8.20) verträglich sein. Doch nun kommt uns zu Hilfe, daß die Multiplikatoren λ_i noch beliebig gewählt werden können. Diese lassen sich tatsächlich so bestimmen¹, daß (8.23) die EULERSchen Gleichungen

$$\frac{\partial f^*}{\partial y^i(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f^*}{\partial y'_i(x)} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (8.24)$$

¹L. Page, *Introduction to Theoretical Physics*, third edition, D. van Nostrand Co., New York 1952

nach sich zieht. Nach dem Lösen dieser Gleichungen erscheinen die konstanten, aber zunächst unbekanntes λ_i als Parameter in den Extremalen. Man kann sie mit Hilfe der Bedingungen (8.20) eliminieren, und dann erhalten sie oft eine unmittelbare physikalische Bedeutung.

Als Beispiel betrachten wir das klassische isoperimetrische Problem: Gesucht ist diejenige ebene geschlossene Kurve, die eine möglichst große Fläche begrenzt. Wir fragen also nach einer Funktion $r(\varphi)$ für welche die Fläche

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi$$

maximal ist, während der Umfang

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi, \quad r' = \frac{dr}{d\varphi},$$

fest vorgegeben ist. Es gilt also, das Funktional $F = \int f^* d\varphi$ mit

$$f^* = \frac{1}{2} r^2 + \lambda \sqrt{r^2 + r'^2}, \quad (8.25)$$

zu minimieren. Die entsprechende EULER-Gleichung lautet

$$r + \frac{\lambda r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} - \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{\lambda r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \right] = 0.$$

Führen wir die Ableitung aus, dann folgt unmittelbar

$$\frac{rr'' - 2r'^2 - r^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gerade die Krümmung der Kurve. Diese muß konstant sein und folglich ist die Kurve ein Kreis mit dem Radius λ .

8.3 Hamiltonsches Prinzip

Wir stellen nun ein Variationsprinzip auf, dessen EULER-Gleichungen die LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art sind. Hierzu betrachten wir das Zeitintegral der LAGRANGE-Funktion als Funktional der Bahnkurve

$$S[q^1(\cdot), \dots, q^f(\cdot)] \equiv S[q(\cdot)] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q^1(t), \dots, q^f(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^f(t)) dt. \quad (8.26)$$

Dieses Funktional wird als *Wirkung* oder *Wirkungsfunktional* bezeichnet. Da die LAGRANGE-Funktion die Dimension einer Energie hat, ist die Dimension der Wirkung

$$[S] = \text{Zeit} \cdot \text{Energie} = \text{kg m}^2/\text{s}.$$

Wir untersuchen nun das HAMILTONSche Prinzip, nach dem für die klassisch erlaubten Bahnen die Wirkung stationär sein soll

$$\frac{\delta S[q(\cdot)]}{\delta q^i(t)} = 0, \quad i = 1, \dots, f. \quad (8.27)$$

Hierbei sind die Variationen dadurch eingeschränkt, daß Anfangs- und Endpunkte festgehalten werden,

$$q^i(t_1) = q_1^i \quad \text{und} \quad q^i(t_2) = q_2^i, \quad i = 1, \dots, f. \quad (8.28)$$

Nach Abschnitt (8.1.3) führt das HAMILTONSche Prinzip auf die EULER-Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q^i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i(t)} = 0, \quad i = 1, \dots, f, \quad (8.29)$$

welche gleich den LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art sind. Deshalb bezeichnet man (8.29) oft auch als EULER-LAGRANGE-Gleichungen.

Das Prinzip von HAMILTON besagt demnach, daß aus der Menge aller möglichen Bahnkurven diejenige realisiert ist, welche die Wirkung (8.26) stationär macht. Es spielt dabei keine Rolle, ob es sich beim Extremum um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt. In der Regel wird die Wirkung minimal. Daher kommt der Name *Prinzip der kleinsten Wirkung*. Gelegentlich aber ist S nicht minimal.

Zur Festlegung der Lösungen der EULER-LAGRANGE-Gleichungen braucht es $2f$ Integrationskonstanten. Dies können die f Anfangsorte und f Anfangsgeschwindigkeiten sein oder aber die Koordinaten zur Zeit t_1 und zur Zeit t_2 , wie in (8.28). Im ersten Fall spricht man von einem *Anfangswertproblem*, im zweiten Fall von einem *Randwertproblem*. Das HAMILTONSche Prinzip führt auf ein Randwertproblem. Dies macht es auf den ersten Blick etwas unanschaulich. Es widerspricht sogar unserem Kausalgefühl, da die Bewegung nicht nur aus einem Anfangszustand, sondern aus Vergangenheit und *Zukunft* abgeleitet wird. Die Äquivalenz mit den anderen Prinzipien der Mechanik beweist aber die Kausalität.

Für die praktische Lösung von Problemen bringt das HAMILTONSche Prinzip keine Vorteile, da dessen konkrete Anwendung wieder auf die EULER-LAGRANGE-Gleichungen (8.29) führt. Es faßt aber die Mechanik von Systemen mit holonomen Zwangsbedingungen in einer kompakten und prägnanten Form zusammen. Das HAMILTONSche Prinzip ist an Einfachheit und Ökonomie kaum mehr zu überbieten. Die Natur sucht unter allen denkbaren Bewegungen diejenige aus, die ihr Ziel mit der kleinsten Wirkung, also mit geringstem Aufwand, erreicht.

In der nichtrelativistischen Mechanik ist die LAGRANGE-Funktion die Differenz von kinetischer und potentieller Energie. Im Unterschied zur kinetischen oder potentiellen Energie ist die LAGRANGE-Funktion aber keine physikalische Meßgröße. Sie ist eine mathematische Hilfsgröße, die derart definiert wurde, um aus ihr die Bewegungsgleichungen abzuleiten.

Unter Eichtransformationen (7.63) ändert sich die Wirkung gemäß

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt L'(t, q(t), \dot{q}(t)) = S + F(t_2, q(t_2)) - F(t_1, q(t_1)). \quad (8.30)$$

Da bei der Variation der Bahnkurven deren Endpunkte sowie Anfangs- und Endzeit fest sind, ist das HAMILTONSche Prinzip invariant unter Eichtransformationen,

$$\frac{\delta S'[q(\cdot)]}{\delta q^i(t)} = \frac{\delta S[q(\cdot)]}{\delta q^i(t)}. \quad (8.31)$$

Die Wirkungen S und S' haben also insbesondere die gleichen stationären Bahnkurven.

Die Frage nach der Bedeutung des HAMILTONSchen Prinzips läßt sich wie folgt beantworten:

- Prinzipien der stationären Wirkung sind allgemeine Prinzipien der Physik, die zum Beispiel auch in der Elektrodynamik oder Gravitationsphysik auftreten.
- Es ist als fundamentales Prinzip anzusehen, da aus ihm die LAGRANGE-Gleichungen erster und zweiter Art folgen.
- Die Variationsgleichung

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (8.32)$$

ist unabhängig von den gewählten Koordinaten, hat also eine von den Koordinaten unabhängige Bedeutung.

- Für einige weitere Entwicklungen der klassischen Mechanik, zum Beispiel die Theorie von HAMILTON und JACOBI oder die Analogie zwischen Mechanik und geometrischer Optik, ist die im HAMILTONSchen Prinzip auftretende Wirkung S von zentraler Bedeutung.
- Die Wirkung ist auch eine sehr wichtige Größe in der Quantenphysik. Die sogenannte Pfadintegral-Quantisierung macht wesentlichen Gebrauch von ihr.

8.4 Anhang: Differenziation in ∞ -dimensionalen Räumen.

Erst sehr viel später, gegen Ende des 19. Jahrhunderts, als der Begriff der Differenziation auf unendlich-dimensionale Räume verallgemeinert wurde², erhielt die Variationsrechnung in der Mathematik eine solide Basis.

Banach-Räume: In der Regel legt man einen *reellen Vektorraum* E mit einem Längenbegriff oder einer Norm zugrunde. Eine *Norm* ist eine Abbildung $E \rightarrow [0, \infty)$ mit den Eigenschaften

$$\|\lambda y\| = |\lambda| \|y\|, \quad \|y + z\| \leq \|y\| + \|z\|, \quad \|y\| = 0 \implies y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad y, z \in E. \quad (8.33)$$

Ein Vektorraum, versehen mit einer Norm $\|\cdot\|$ heißt *normierter Raum*. Ein vollständiger normierter Raum, d.h. ein normierter Vektorraum, in dem jede CAUCHY-Folge konvergiert, heißt *BANACH-Raum*. Für die Physik relevante Beispiele von BANACH-Räumen sind:

- Die *Euklidischen Räume* \mathbb{R}^n mit den Normen

$$\|y\|_p = \left(\sum_{a=1}^n |y_a|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (8.34)$$

Für $p = 2$ ist $\|y\|_2$ die Länge des Maßstabes y , der am Anfang der Vorlesung bei der Diskussion von Raumzeit-Strukturen wichtig war.

²unter anderem von VOLTERRA, HADAMARD und dessen Schüler FRÉCHET, GÂTEAUX, HILBERT

- Die *Folgenräume* $l_p(\mathbb{R})$: $l_p(\mathbb{R})$ ist der Vektorraum aller Folgen $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen y_n , für die

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p < \infty, \quad 1 \leq p < \infty$$

gilt. Versehen mit den Normen

$$\|y\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (8.35)$$

sind die Folgenräume vollständig, also BANACH-Räume. Die Folgenräume spielen in der Matrizenmechanik von W. HEISENBERG eine ganz wichtige Rolle.

- Die LEBESGUE-Räume: Für jede reelle Zahl $p \geq 1$ sei

$$\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ meßbar, } |f|^p \text{ summierbar}\}.$$

\mathcal{L}_p ist ein reeller Vektorraum und

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (8.36)$$

eine Halbnorm auf \mathcal{L}_p . Sie definiert eine Norm auf $L_p = \mathcal{L}_p/N$, wo N den Unterraum aller Funktionen von \mathcal{L}_p bezeichnet, die fast überall Null sind. Für $n = 1$ sind die Elemente von $\mathcal{L}_p(\mathbb{R})$ Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und können als Bahnen von Punktteilchen in \mathbb{R} interpretiert werden. Dies deutet bereits die Relevanz der BANACH-Räume L_p für die klassische Mechanik an. Diese Räume spielen in der Wellenmechanik von E. SCHRÖDINGER eine herausragende Rolle.

Fréchet-Ableitung: Nach diesem kurzen Exkurs über unendlich-dimensionale Vektorräume kehren wir zu den Ableitungen zurück. Die Verallgemeinerung des Begriffs des totalen Differentials führt zum Begriff der FRÉCHET-Ableitung einer Funktion von einem Banachraum in einen anderen Banachraum. In den meisten Anwendungen ist der Bildraum gleich \mathbb{R} :

Definition: Es seien $(E, \|\cdot\|)$ ein Banach Raum und $M \subset E$ eine offene, nichtleere Teilmenge. Dann heißt eine Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann in einem Punkt $y \in M$ differenzierbar, wenn es eine stetige lineare Abbildung $F'_y : E \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt

$$F(y+h) - F(y) = F'_y(h) + o(y, h) \quad (8.37)$$

für alle $h \in E, y+h \in M$. Dabei hat die Funktion $h \rightarrow o(y, h) \in \mathbb{R}$ die Eigenschaften

$$o(y, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(y, h)|}{\|h\|} = 0. \quad (8.38)$$

Die FRÉCHET-Ableitung F'_y ist ein Element aus $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, das heißt aus dem Dualraum E' von E . Falls F in allen Punkten von M differenzierbar ist, so heißt F auf M differenzierbar. Man nennt die Abbildung F' , welche jedem Punkt $y \in M$ die Ableitung F'_y von F im Punkt y zuordnet, die Ableitung von F . Falls $F' : M \rightarrow E'$ eine stetige Abbildung ist, so heißt F stetig differenzierbar auf M oder von der Klasse \mathcal{S}^1 .

Man kann zeigen, daß es höchstens eine stetige lineare Abbildung $F'_y \in E'$ gibt, so daß die Gleichung (8.33) gilt. Für $E = \mathbb{R}^n$ kann man die Ableitung F'_y in kanonischer Weise mit der JACOBI-Matrix der Abbildung F im Punkte y identifizieren,

$$F'_y = \left(\frac{\partial F}{\partial y_a} \right)_y.$$

Die FRÉCHET-Ableitung ist eine *lineare Operation*,

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G', \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (8.39)$$

Die Ableitung erfüllt die *Kettenregel*: Es seien $U \subset E$ und $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}$ offene, nicht-leere Mengen und $F : U \rightarrow V_1$ sowie $G : V_1 \rightarrow V_2$ stetig differenzierbar. Dann ist auch

$$G \circ F : U \rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}$$

stetig differenzierbar, und es gilt für alle $y \in U \subset E$

$$(G \circ F)'_y = G'_{F(y)} \circ F'_y. \quad (8.40)$$

Wir wollen dies beweisen: F differenzierbar heißt

$$F(y+h) - F(y) = F'_x(h) + o_1(x, h), \quad \forall h \in B_{r_1}, \quad y+h \in U_1,$$

und entsprechend, da G in $z = F(y)$ differenzierbar ist,

$$G(z+k) - G(z) = G'_z(k) + o_2(z, k), \quad \forall k \in B_{r_2}, \quad z+k \in U_2.$$

Hier ist B_{r_1} die 'Kugel' mit Radius r_1 um den Ursprung in E und B_{r_2} die offene 'Kugel' mit Radius r_2 um den Ursprung in \mathbb{R} . Da F insbesondere stetig ist, können wir zu gegebenem $r_2 > 0$ ein $r_1 > 0$ so wählen, daß die erste Relation und überdies $F(B_{r_1}) \subset B_{r_2}$ gelten. Dann erhalten wir für alle $h \in B_{r_1}$:

$$\begin{aligned} (G \circ F)(y+h) - (G \circ F)(y) &= G[F(y+h)] - G[F(y)] \\ &= G[F(y) + F'_y(h) + o_1(y, h)] - G[F(y)] \\ &= G'_{F(y)}(F'_y(h) + o_1(y, h)) + o_2\{F(y), F'_y(h) + o_1(y, h)\} \\ &= (G'_{F(y)} \circ F'_y)(h) + G'_{F(y)} \circ o_1(y, h) + o_2\{F(y), F'_y(h) + o_1(y, h)\}. \end{aligned}$$

Eine kurze Rechnung zeigt, daß

$$o(y, h) \equiv G'_{F(y)} \circ o_1(y, h) + o_2\{F(y), F'_y(h) + o_1(y, h)\}$$

die Eigenschaften (8.38) besitzt, da o_1 und o_2 diese Eigenschaften haben und weil $G'_{F(y)}$ und F'_y stetige lineare Abbildungen sind. Dies beweist die Differenzierbarkeit von $G \circ F$ und bestimmt den Wert der Ableitung zu

$$(G \circ F)'_y = G'_{F(y)} \circ F'_y \in E'.$$

Gâteaux-Ableitung: Die Verallgemeinerung des Begriffs der partiellen Ableitung einer Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ führt dagegen zum Begriff des GÂTEAUX-Differentials $\delta F_y(h)$:

Definition: Es sei E ein normierter Raum. Gilt für die Abbildung $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle y :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{F(y + \epsilon h) - F(y)}{\epsilon} - \delta F(y, h) \right| = 0 \quad \forall h \in E$$

mit einer Abbildung $\delta F(y, \cdot) : E \rightarrow \mathbb{R}$, die bezüglich der 2. Variablen weder stetig noch linear sein muß, so nennt man $\delta F(y, h)$ GÂTEAUX-Differential von F an der Stelle y in Richtung von h . Ist $\delta F(y, h)$ zusätzlich linear und stetig in h , also ein Element des Dualraumes E' von E , so schreibt man

$$\delta F(y, h) = \delta_y F(h) \quad (8.41)$$

und nennt $\delta_y F$ die GÂTEAUX-Ableitung von F an der Stelle y .

In endlichdimensionalen Räumen folgt aus der Existenz aller stetigen partiellen Ableitungen die Existenz des totalen Differentials. Ganz ähnlich ist es auch für Ableitungen in unendlichdimensionalen Räumen,

Lemma: Sei $F : E \rightarrow \mathbb{R}$. Existiert in einer Umgebung U von y die GÂTEAUX-Ableitung $\delta_y F$ und ist sie stetig, so gilt

$$\delta_y F = F'_y. \quad (8.42)$$

Eine stetige GÂTEAUX-Ableitung ist automatisch eine FRÉCHET-Ableitung. Umgekehrt gilt

Lemma: Ist F an der Stelle y FRÉCHET-differenzierbar, so ist F auch GÂTEAUX-differenzierbar, und die beiden Differentiale sind gleich.

Wir wollen im Folgenden annehmen, daß die Funktionale FRÉCHET-differenzierbar sind und werden deshalb nicht mehr zwischen FRÉCHET- und GÂTEAUX-Ableitung unterscheiden.

Höhere Variationen: Eine bequeme Methode, ein Funktional auf einem BANACH-Raum zu untersuchen, besteht darin, die Funktion $F(y + sh)$ der reellen Veränderlichen s für beliebige, aber feste $y, h \in E$ zu studieren. Informationen über das Verhalten in der Umgebung von $s = 0$ erhält man aus dem TAYLORSchen Satz:

$$F(y + sh) = F(y) + \sum_{n=1}^N \frac{s^n}{n!} \Delta^n F(y, h) + R_N, \quad (8.43)$$

Ist $F(y + sh)$ auf $(-s_0, s_0)$ N -mal differenzierbar, dann gilt für das Restglied

$$\frac{R_N}{s^N} \rightarrow 0 \quad \text{für } s \rightarrow 0.$$

Die n -te Variation von F im Punkte $y \in M$ in Richtung $h \in E$ ist definitionsgemäß

$$\Delta^n F(y, h) = \left. \frac{d^n F(y + sh)}{ds^n} \right|_{s=0}. \quad (8.44)$$

Für genügend reguläre Funktionale ist die erste Variation gleich der GÂTEAUX-Ableitung,

$$\Delta F(y, h) = \delta_y F(h). \quad (8.45)$$

Die zweite Variation unterscheidet zwischen Maxima und Minima eines Funktional, ähnlich wie bei Funktionen im \mathbb{R}^n .

Als Beispiel betrachten wir die TAYLOR-Entwicklung des Funktional (8.1). Wir fordern, daß $h(x)$ an den Enden des Intervalls $[x_1, x_2]$ verschwindet. Die Entwicklung (8.43) hat die folgende Form

$$F(y + sh) = \int f(x, y, y') + s \int \left(\frac{\partial f}{\partial y(x)} h(x) + \frac{\partial f}{\partial y'(x)} h'(x) \right) + \frac{s^2}{2} \int \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2(x)} h^2(x) + \frac{2\partial f}{\partial y(x)\partial y'(x)} h(x)h'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2(x)} h'^2(x) \right) + o(s^3).$$

Wir dürfen partiell integrieren, wobei wegen $h(t_1) = h(t_2) = 0$ keine Randterme auftreten, und erhalten folgende Variationen von F :

$$\Delta F(y, h) = \int \left(\frac{\partial f}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'(x)} \right) h(x)$$

$$\Delta^2 F(y, h) = \int h(x) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2(x)} - \left(\frac{\partial f}{\partial y(x)\partial y'(x)} \right)' - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2(x)} \right)' \frac{d}{dx} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2(x)} \right) \frac{d^2}{dx^2} \right) h(x).$$

Fordern wir das Verschwinden der ersten Variation für beliebige $h(x)$, so erhalten wir wieder die EULER-LAGRANGE Gleichungen. Die zweite Variation enthält Information über die Stabilität der Lösungen. Ist zum Beispiel $\Delta^2 F(y, h)$ positiv für alle $h \neq 0$, dann ist y ein (lokales) Minimum, ist es negativ für alle $h \neq 0$, dann ist y ein (lokales) Maximum. Ein Sattelpunkt liegt vor, wenn $\delta^2 F(y, h)$ als Funktion von h positive und negative Werte annimmt.

Kapitel 9

Hamilton'sche Mechanik

In der LAGRANGE-Mechanik wird der Zustand eines Systems durch f verallgemeinerte Koordinaten $q = (q^1, \dots, q^f)$ und f verallgemeinerte Geschwindigkeiten $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^f)$ beschrieben. Hier ist $f = 3N - s$ die Dimension des Konfigurationsraumes für N Teilchen unter s (holonomen) Zwangsbedingungen; $3N$ ist die Zahl der kartesischen Koordinaten. Durch den Übergang von den kartesischen zu den verallgemeinerten Koordinaten haben wir die holonomen Zwangsbedingungen eliminiert.

In der HAMILTON'schen Mechanik werden die verallgemeinerten Geschwindigkeiten durch die verallgemeinerten Impulse ersetzt

$$(t, q, \dot{q}) \longrightarrow (t, q, p), \quad p = (p_1, \dots, p_f). \quad (9.1)$$

Die (q, p) sind die Koordinaten des *Phasenraumes* Γ . Der Übergang (9.1) wird durch eine LEGENDRE-Transformation geleistet. Die Formulierung der Mechanik im Phasenraum wurde von Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON in den Dreißiger Jahren des 19. Jahrhunderts entwickelt. Sie beschränkt sich auf die reibungsfreie Bewegung, also auf Systeme, die durch eine Lagrangefunktion beschrieben werden¹. Insofern behandelt sie keine neue Physik, die wir nicht auch schon mit Hilfe des LAGRANGE-Formalismus beschreiben könnten. Dass wir uns noch heute mit der HAMILTON'schen Mechanik befassen hat folgende Gründe:

- Sie gibt eine Formulierung der Grundgesetze der Mechanik, die ihre mathematischen Eigenschaften, insbesondere ihre *symplektische Struktur*, besonders deutlich macht. Sie ermöglicht eine qualitative, geometrische Beschreibung der Bewegung im Phasenraum und ist für die Chaostheorie bedeutsam.
- Sie bildet den gängigsten Ausgangspunkt² für die Erweiterungen der klassischen Me-

¹Für dissipative Systeme gibt es natürlich auch eine LAGRANGESche Beschreibung. Die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = Q_j^{(R)}$$

enthalten aber neben der LAGRANGE-Funktion noch Reibungskräfte $Q_j^{(R)}$.

²Man kann auch den LAGRANGE-Formalismus als Ausgangspunkt wählen.

chanik zur statistischen Mechanik oder/und zur Quantenmechanik und ist daher für ein Verständnis dieser Theorien von grundsätzlicher Bedeutung.

- Die im Rahmen dieser Theorie gültigen Bewegungsgleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten und Impulse sind explizite Differentialgleichungen von erster Ordnung in der Zeit und daher für numerische Rechnungen besser geeignet als die impliziten LAGRANGE-Gleichungen zweiter Ordnung.
- In der HAMILTON'schen Mechanik lassen sich die Bedingungen für die Integrierbarkeit eines mechanischen Systems und für die Möglichkeit chaotischen Verhaltens am besten diskutieren.

9.1 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Wir beschränken uns auf Systeme, die durch eine LAGRANGE-Funktion $L(t, q, \dot{q})$ beschrieben werden können. Die Koordinaten q^1, \dots, q^f sind dabei f unabhängige verallgemeinerte Koordinaten für f Freiheitsgrade. In den Gleichungen (7.27) und (7.72) haben wir bereits die *kanonischen Impulse*

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \quad (9.2)$$

eingeführt. Die HAMILTON'sche Theorie benutzt nun nicht mehr die Variablen q und \dot{q} , die in der LAGRANGE'schen Formulierung wesentlich waren, sondern die unabhängigen Variablen q und p . Man löst dazu die Gleichungen (9.2) nach den Geschwindigkeiten \dot{q} auf,

$$\dot{q}^j = \dot{q}^j(t, q, p), \quad (9.3)$$

was nach dem Theorem über implizite Funktionen (lokal) möglich ist, wenn

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) \neq 0$$

ist. Wenn man nun in allen Funktionen die verallgemeinerten Geschwindigkeiten durch diese Ausdrücke ersetzt, erhält man Funktionen der Koordinaten und der Impulse. Die zentrale Rolle spielt dabei nicht mehr die LAGRANGE-Funktion $L(t, q, \dot{q})$ sondern die HAMILTON-Funktion

$$H(t, q, p) = \sum_j p_j \dot{q}^j(t, q, p) - L(t, q, \dot{q}(t, q, p)) = p\dot{q} - L. \quad (9.4)$$

Diese Funktion haben wir schon in (7.35), dort allerdings als Funktion der Orte und Geschwindigkeiten, eingeführt. Wir haben gezeigt, dass für kinetische Energien, die homogen quadratisch in den \dot{q}^j sind, H die Gesamtenergie des mechanischen Systems ist. Aus der Homogenität der Zeit folgte die Zeitunabhängigkeit der Funktion H . Diese HAMILTON-Funktion hat als natürliche Argumente die Zeit, die f Koordinaten und die f Impulse.

Mit Hilfe der LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art lassen sich nun die HAMILTON'schen Bewegungsgleichungen für die Funktionen $q(t)$ und $p(t)$ ableiten. Dazu differenzieren wir

zunächst die HAMILTONfunktion (9.4) partiell nach den Koordinaten, wobei wir die *Impulse festhalten* (und nicht die Geschwindigkeiten). Wir finden

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} \stackrel{(9.2)}{=} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = - \frac{dp_i}{dt}. \quad (9.5)$$

Im zweitletzten Schritt benutzten wir die LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art. Des weiteren folgt

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} \stackrel{(9.2)}{=} \frac{dq^i}{dt}.$$

Zusammenfassend erhalten wir die folgenden HAMILTON'schen *Bewegungsgleichungen*

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (9.6)$$

Analog zeigt man unter Zuhilfenahme der Definition der kanonischen Impulse, daß

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (9.7)$$

Diese Gleichung zeigt, daß für autonome Systeme die HAMILTON-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt. In diesem Fall ist $H = H(q, p)$. Wir haben bereits früher gesehen, daß H mit der Energie des mechanischen Systems identifiziert werden kann. Die HAMILTON-Funktion ist deshalb die Energie, ausgedrückt in verallgemeinerten Koordinaten und Impulsen.

Die HAMILTON'schen Bewegungsgleichungen (9.6) sind ein Satz von $2f$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit für die $2f$ Variablen q und p . Sie sind äquivalent zu den f LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art, die Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Zeit für die f Koordinaten q^j sind. Die Lösungen der HAMILTON'schen Bewegungsgleichungen sind eindeutig bestimmt, wenn wir zu einer festen Zeit die Orte und die Impulse des Systems angeben können.

Die q^i und p_i sind (lokale) Koordinaten des $2f$ -dimensionalen *Phasenraumes* Γ , der oft auch Zustandsraum genannt wird. Die Lage des Ausgangspunktes in Γ zur Zeit t_0 bestimmt, zusammen mit der HAMILTON-Funktion, die Entwicklung des Systems vollständig. Im Gegensatz hierzu braucht man zur Charakterisierung des Systems im f -dimensionalen *Konfigurationsraum* des LAGRANGE-Formalismus sowohl den verallgemeinerten Ort q als auch die verallgemeinerte Geschwindigkeit \dot{q} . Die Variablen q^i und p_i heißen zueinander konjugierte Variable oder kanonisch konjugierte Variable.

In (9.5) haben wir auch gezeigt, daß $\partial H / \partial q^i = - \partial L / \partial q^i$ gilt. Ist etwa q^f eine zyklische Koordinate, so hängt die HAMILTON-Funktion nicht von dieser Koordinate ab. Der konjugierte Impuls ist dann eine Konstante der Bewegung (ein Integral der Bewegung), $p_f = \text{const} = \alpha_f$, und H hat die Form

$$H = H(t, q^1, \dots, q^{f-1}, p_1, \dots, p_{f-1}, \alpha_f). \quad (9.8)$$

Man hat es also mit einem Problem mit $f-1$ Koordinaten zu tun, das man weiter behandeln kann, ohne die Koordinate q^f zu berücksichtigen. Bei den LAGRANGESchen Gleichungen

ist diese einfache Art der Reduzierung des Problems nicht möglich. Sind *alle Koordinaten zyklisch*, d.h. ist H eine Funktion nur der Impulse und der Zeit,

$$H = H(t, p_1, \dots, p_f), \quad (9.9)$$

so lassen sich die kanonischen Gleichungen sofort vollständig integrieren und ihre Lösungen können unmittelbar angegeben werden. Bei zyklischen Koordinaten folgt nämlich

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \omega^i(t)$$

wobei die $\omega^i(t)$ wegen $p_i = \text{const}$ bekannte, nur von t abhängige Funktionen sind:

$$p_i = \alpha_i (= \text{const}) \quad \text{und} \quad q^i = \int \omega^i(t) dt + \beta^i, \quad i = 1, \dots, f. \quad (9.10)$$

Die (α_i, β^i) sind die notwendigen $2f$ Integrationskonstanten. Sie werden durch die Anfangsbedingung festgelegt.

9.1.1 Beispiele

Hier bestimmen wir die HAMILTON-Funktionen und kanonischen Bewegungsgleichungen (9.6) für einige einfache mechanische Systeme.

Eindimensionaler harmonischer Oszillator: Die LAGRANGE-Funktion ist

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2),$$

so daß der kanonische Impuls und die HAMILTON-Funktion folgende einfache Form haben

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad H = p\dot{x} - L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{1}{2m}(p^2 + (m\omega)^2 x^2). \quad (9.11)$$

Wie erwartet ist H die Energie des Oszillators. Die kanonischen Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \text{und} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x, \quad (9.12)$$

oder zusammen

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (9.13)$$

Ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld: Aus der LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - q\varphi(t, \mathbf{r}) + q\mathfrak{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad (9.14)$$

mit einem skalaren Potential φ und einem Vektorpotential \mathfrak{A} liest man den zu \mathbf{r} kanonisch konjugierten Impuls ab,

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + q\mathfrak{A}(t, \mathbf{r}). \quad (9.15)$$

Wir lösen nach der Geschwindigkeit auf, $m\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}$, und bestimmen die HAMILTON-Funktion:

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L = \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) - \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi - \frac{q}{m} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \\ &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Damit erhalten wir die kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} (p_i - qA_i) \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{q}{m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Daraus folgen die LORENTZ'schen Bewegungsgleichungen für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld (Übung).

Allgemeines Potentialproblem: Für eine LAGRANGE-Funktion der allgemeinen Form (wir benutzen wieder die EINSTEIN'sche Summenkonvention)

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j - V(t, q) \quad (9.18)$$

sind die kanonischen Impulse

$$p_i = g_{ij}(q) \dot{q}^j \quad \text{und damit ist} \quad \dot{q}^i = g^{ij}(q) p_j, \quad (9.19)$$

wobei $(g^{ij})(q)$ die zu $(g_{ij})(q)$ inverse Matrix ist,

$$g_{ik}(q) g^{kj}(q) = \delta_i^j.$$

Damit lautet die HAMILTON-Funktion

$$H = p_i \dot{q}^i - \frac{1}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j + V(t, q) = \frac{1}{2} g^{ij}(q) p_i p_j + V(t, q). \quad (9.20)$$

Die HAMILTON-Gleichungen sind

$$\dot{q}^i = g^{ij}(q) p_j \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{jk}(q)}{\partial q^i} p_j p_k - \frac{\partial V(t, q)}{\partial q^i}. \quad (9.21)$$

Für kartesische Koordinaten sind die Koeffizienten g_{ij} der Metrik ortsunabhängig, und wir finden wieder die bekannten NEWTON'schen Bewegungsgleichungen.

9.1.2 Die Legendre-Transformation

Der Übergang

$$q, \dot{q}, L \longrightarrow q, p, H$$

entspricht einer mathematischen Operation, die man LEGENDRE-Transformation nennt. Da diese Transformation in mehreren Gebieten der Physik (Mechanik, Thermodynamik, Quantenfeldtheorie) wichtig ist, wollen wir sie hier etwas näher untersuchen.

Wir betrachten zuerst den Fall einer Variablen, denn dieser läßt sich graphisch leicht darstellen.

Definition Es sei $L \in C^2$ eine reelle Funktion auf einem offenen Intervall I mit $L'' > 0$. Die LEGENDRE-Transformierte $\mathcal{L}L : J \rightarrow \mathbb{R}$ von L mit $J := L'(I) \subset \mathbb{R}$, ist gegeben durch

$$(\mathcal{L}L)(p) = \max_{v \in I} \{vp - L(v)\}. \quad (9.22)$$

Der zu maximierende Ausdruck in den geschweiften Klammern ist extremal für diejenigen v , welche die Gleichung

$$L'(v) = p \implies v = v(p), \quad (9.23)$$

erfüllen. Nach Definition des Intervalls J existiert für jedes $p \in J$ mindestens eine Lösung $v(p)$ von (9.23). Wegen $L'' > 0$ ist diese Lösung eindeutig. Die LEGENDRE-Transformation ist damit wohldefiniert. Da die zweite Ableitung des Ausdrucks gleich $-L''(v) < 0$ ist, handelt es sich um beim Extremum um ein Maximum.

Zum Beispiel, für $I = \mathbb{R}$ und $L(v) = e^v$ ist $J = (0, \infty)$ und

$$(\mathcal{L}L)(p) = \max_v (pv - e^v) \stackrel{v=\log p}{=} p(\log p - 1).$$

Wie wir in Abbildung (9.1) sehen, hat die LEGENDRE-Transformierte von L eine *anschauliche Bedeutung*: Sie ist der minimale Ordinaten-Abstand zwischen dem Graphen von L und dem Graphen der Geraden pv durch den Ursprung. Das Maximum wird für den Wert $v = v(p)$

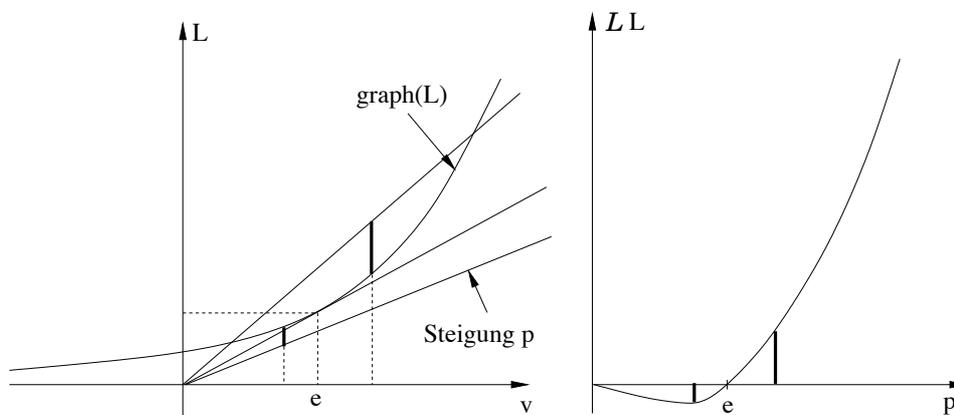


Abbildung 9.1: Legendretransformierte der Exponentialfunktion

angenommen, der durch $p = L'(v)$ gegeben ist.

Wegen

$$(\mathcal{L}L)(p) = p \cdot v(p) - L(v(p)) \quad (9.24)$$

ist die Ableitung der LEGENDRE-Transformierten von L gleich

$$(\mathcal{L}L)'(p) = v(p) + pv'(p) - L'(v(p))v'(p) \stackrel{(9.23)}{=} v(p). \quad (9.25)$$

Aus $L'' > 0$ folgt die Monotonie von L' und mit (9.23) wächst v monoton mit p . Also wächst $(\mathcal{L}L)'(p) = v(p)$ monoton mit p und damit ist $(\mathcal{L}L)'' > 0$, d.h. die LEGENDRE-Transformation bildet konvexe Funktionen in konvexe Funktionen ab. Da $\mathcal{L}L$ außerdem auf einem offenen Intervall, nämlich $J := L'(I) \subset \mathbb{R}$, definiert ist, können wir auf $\mathcal{L}L$ wieder die LEGENDRE-Transformation anwenden.

Satz Die LEGENDRE-Transformierte ist involutiv: ist $\mathcal{L}L$ LEGENDRE-Transformierte von $L : I \rightarrow \mathbb{R}$, so ist auch L LEGENDRE-Transformierte von $\mathcal{L}L$, d.h. $\mathcal{L} \circ \mathcal{L} = \mathbb{1}$.

Beweis: Da nach (9.25) $(\mathcal{L}L)'(p) = v(p)$ ist, ist $(\mathcal{L}L)'(J) = I$. Die LEGENDRE-Transformierte von $\mathcal{L}L$ ist gemäß Definition

$$(\mathcal{L}^2 L)(u) = \max_p \{up - (\mathcal{L}L)(p)\} = \max_p \{up - pv(p) + L(v(p))\} \quad \text{mit} \quad v(p) \stackrel{(9.23)}{=} (L')^{-1}(p).$$

Das maximierende p erfüllt die Gleichung

$$0 = u - v(p) - \underbrace{pv'(p) + L'(v(p))}_p v'(p) = u - v(p).$$

Damit wird das Maximum bei $u = v(p)$, also $p = L'(u)$ angenommen, so daß

$$\max_{p \in J} \{up - (\mathcal{L}L)(p)\} = uL'(u) - L'(u)u + L(u) = L(u)$$

gilt, was zu beweisen war.

Beispiele für derartige LEGENDRE-Transformationen bezüglich einer Variablen sind aus der Thermodynamik wohlbekannt: Aus der inneren Energie $U(S, V)$ mit den natürlichen Variablen Entropie S und Volumen V ergibt sich durch LEGENDRE-Transformation bezüglich der ersten Variablen die freie Energie $F(T, V) = U - TS$ mit den natürlichen Variablen T und V . In der Thermodynamik sind die Potentiale nicht immer strikt konvex oder/und zweimal stetig differenzierbar. Aber auch für solche Potentiale kann die LEGENDRE-Transformation gemäß (9.22) definiert werden. Man zeigt zum Beispiel, daß $\mathcal{L}^2 L$ die konvexe Einhüllende der Funktion L ist.

Im Fall *mehrerer Variablen* beginnen wir mit einer auf ganz \mathbb{R}^f definierten Funktion $L \in C^2(\mathbb{R}^f, \mathbb{R})$, wobei die symmetrische HESSE-Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial v^1 \partial v^1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial v^1 \partial v^f} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial v^f \partial v^1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial v^f \partial v^f} \end{pmatrix}$$

positiv ist. Dann können wir $p_i = \partial L / \partial v^i$ (lokal) nach den v^i auflösen.

Definition: Sei $J := (\nabla L)(\mathbb{R}^f) \subset \mathbb{R}^f$. Die LEGENDRE-Transformation $\mathcal{L}L : J \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch

$$(\mathcal{L}L)(p) = \max_{v \in \mathbb{R}^f} \{p_i v^i - L(v)\}, \quad p \in J \tag{9.26}$$

gegeben.

Beispiel: für eine symmetrische positive Matrix A sei L die durch

$$L(v) = \frac{1}{2} v^i A_{ij} v^j$$

definierte quadratische Form. Dann ist

$$(\mathcal{L}L)(p) = \max_v \left\{ p_i v^i - \frac{1}{2} v^i A_{ij} v^j \right\} \stackrel{p=Av}{=} \frac{1}{2} p_i (A^{-1})_{ij} p_j.$$

Eine quadratische Form geht unter der LEGENDRE-Transformation wieder in eine quadratische Form über. Eine Anwendung findet diese Formel in der Umrechnung der kinetischen Energie von Geschwindigkeits- auf Impulskoordinaten.

Nun wenden wir die LEGENDRE-Transformation an, um die LAGRANGE-Funktion in die HAMILTON-Funktion umzuwandeln und umgekehrt. Es sei also $L \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_q^f \times \mathbb{R}_\dot{q}^f)$ und

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) > 0. \quad (9.27)$$

Dann ist die die HAMILTON-Funktion

$$H(q, p) = \max_{\dot{q}} \{ p_i \dot{q}^i - L(t, q, \dot{q}) \} = p_i \dot{q}^i(t, q, p) - L(t, q, \dot{q}(t, q, p)), \quad (9.28)$$

wobei die maximierende Geschwindigkeiten $\dot{q}^i(t, q, p)$ durch Auflösung der Gleichungen für die kanonischen Impulse,

$$p_i = p_i(t, q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (9.29)$$

zu berechnen sind. Die HAMILTON-Funktion H ist ebenfalls C^∞ . Daß H die gleiche Differenzierbarkeitsstufe wie L hat, folgt aus der Tatsache, daß die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^{2f} \longrightarrow \mathbb{R}^{2f}, \quad (q, v) \longrightarrow (q, p)$$

wegen (9.27) lokal invertierbar, und damit ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Nach unseren allgemeinen Betrachtungen können wir aus der HAMILTON-Funktion die LAGRANGE-Funktion zurückgewinnen,

$$L(t, q, \dot{q}) = \max_p \{ p_i \dot{q}^i - H(t, q, p) \} = p_i(t, q, \dot{q}) \dot{q}^i - H(t, q, p(t, q, \dot{q})), \quad (9.30)$$

wobei die maximierenden kanonischen Impulse $p_i(t, q, \dot{q})$ durch Auflösung der Gleichungen

$$\dot{q}^i = \dot{q}^i(t, q, p) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (9.31)$$

zu berechnen sind. Abschließend bemerken wir, daß der *kanonische Impuls* p_i im Allgemeinen von dem *kinetischen (mechanischen) Impuls* $m\dot{q}^i$ zu unterscheiden ist.

Ableitung der Hamilton-Gleichungen aus dem Extremalprinzip: Auch die HAMILTON-Gleichungen sind die EULER-Gleichungen eines (ausgearteten) Variationsproblems. Die Wirkung ist

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, q, p, \dot{q}, \dot{p}) dt, \quad \mathcal{L}(t, q, p, \dot{q}, \dot{p}) = p_i \dot{q}^i - H(t, q, p). \quad (9.32)$$

Dabei wird bezüglich aller Bahnen im Phasenraum extremiert, wobei diese einen festen Anfangs- und Endpunkt haben,

$$\delta q(t_j) = \delta p(t_j) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (9.33)$$

Die EULER-Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}$$

Wegen $\partial L / \partial q = -\partial H / \partial q$ sind dies gerade die HAMILTON'schen Bewegungsgleichungen,

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad (9.34)$$

was zu zeigen war. Das Variationsproblem ist singular, da die Determinante der Matrix der zweiten Ableitungen verschwindet,

$$\det \begin{pmatrix} \partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{q} \partial \dot{q} & \partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{q} \partial \dot{p} \\ \partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{p} \partial \dot{q} & \partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{p} \partial \dot{p} \end{pmatrix} = 0.$$

9.1.3 Phasenraum, Trajektorien und Flüsse

Die $2f$ -dimensionalen Tupel

$$x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix} \quad (9.35)$$

sind Koordinaten im *Phasenraum* Γ . Dieser Raum ist im allgemeinen eine Mannigfaltigkeit. Die kanonischen Bewegungsgleichungen in Γ sind von erster Ordnung in der Zeit,

$$\dot{x}(t) = X_H(t, x). \quad (9.36)$$

Die *Trajektorien* $x = x(t, t_0, x_0)$ mit den Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$ sind Integralkurven des Vektorfeldes X_H . Eine Trajektorie beschreibt die zeitliche Entwicklung *eines* festen Anfangszustandes $x_0 \in \Gamma$. Dagegen ist die Abbildung, welche für eine *feste Zeit* jedem Anfangspunkt $x_0 \in \Gamma$ den Punkt $x(t) \in \Gamma$ zuordnet, eine Abbildung des Phasenraumes auf sich, und heißt der *Fluß* in Γ . Bis auf wenige Ausnahmen³ geht durch jeden Punkt von Γ genau eine Trajektorie. Die Bewegung in Γ entspricht also einer Strömung.

HAMILTON'sche Systeme sind besonders einfach. In diesem Fall ist der Fluß von einer speziellen Form,

$$\dot{x} \equiv \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_f \\ -\mathbb{1}_f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}, \quad (9.37)$$

³bei denen die Lipschitzbedingung nicht erfüllt ist.

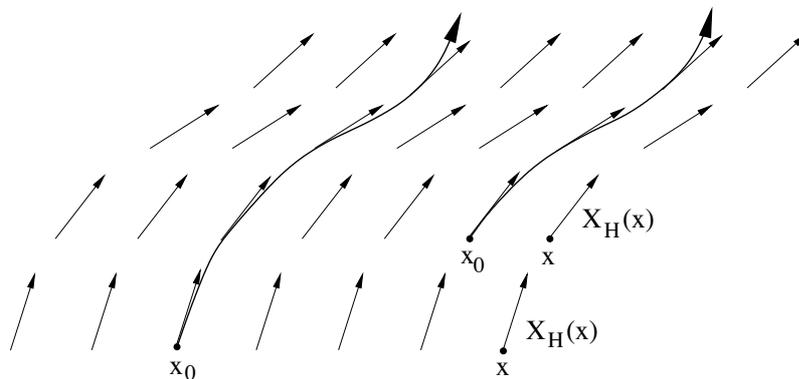


Abbildung 9.2: Die Lösungen sind Integralkurven zum HAMILTON'schen Vektorfeld X_H .

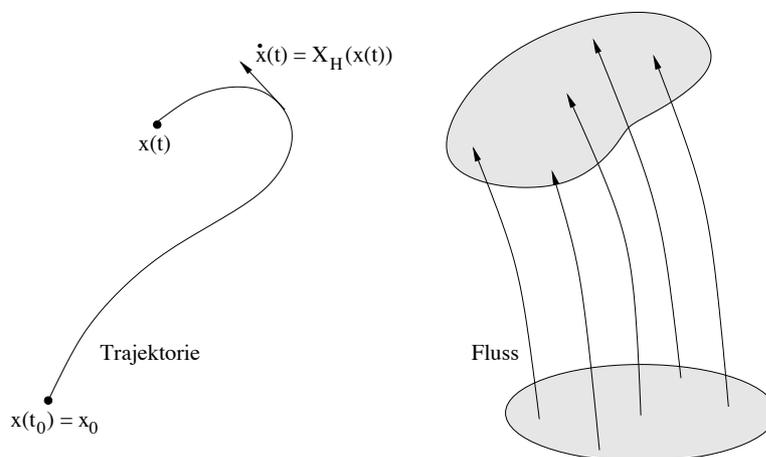


Abbildung 9.3: Trajektorie und Fluß im Phasenraum

also in Kurzschreibweise

$$\dot{x}(t) = X_H(t, x), \quad \text{wobei} \quad X_H = J\nabla_x H, \quad (9.38)$$

mit einer schiefsymmetrischen $2f \times 2f$ -Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_f \\ -\mathbb{1}_f & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.39)$$

die auch *symplektische Metrik* genannt wird. Die transponierte Matrix ist $J^T = -J$ und es gelten die Relationen

$$J^T J = J J^T = \mathbb{1}_{2f}, \quad \text{so daß} \quad J^T = -J = J^{-1} \quad \text{und} \quad J^2 = -\mathbb{1}_{2f}. \quad (9.40)$$

Die symplektische Matrix hat die Determinante $\det J = 1$.

Die Tangentialvektoren an einer Trajektorie sind gleich dem HAMILTON'schen Vektorfeld X_H längs der Trajektorie und $X_H(x)$ ist gleich der symplektischen Metrik J , angewandt auf den

Gradienten von H . Für ein autonomes System ist H konstant und jede Trajektorie liegt in einer durch den Anfangspunkt x_0 festgelegten Niveaufläche von H in Γ , einer *Energiefläche* des untersuchten Systems.

9.2 Zeitliche Änderung von Observablen

Wie wollen die zeitliche Änderung einer Observablen

$$F = F(t, q^i, p_i) = F(t, q, p) \quad (9.41)$$

des betrachteten Systems, wie z.B. der Energie, des Impulses oder Drehimpulses, berechnen. Dazu bilden wir

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (9.42)$$

und benutzen die kanonischen Gleichungen:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (9.43)$$

Diese Gleichung läßt sich mit Hilfe der POISSON *Klammer*, definiert durch

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \right) \quad (9.44)$$

schreiben als

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (9.45)$$

Verschwindet die POISSON-Klammer $\{F, H\}$ einer nicht explizit zeitabhängigen Funktion F mit der HAMILTON-Funktion, so ist F ein Integral der Bewegung,

$$\{F, H\} = 0 \iff F \text{ Integral der Bewegung} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \right). \quad (9.46)$$

Wir diskutieren diese Bewegungsgleichungen für die wichtigsten Observablen.

Energieerhaltung: Wegen $\{H, H\} = 0$ ist für $F = H$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (9.47)$$

Falls die HAMILTON-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, ist sie eine Konstante der Bewegung. Dieses bekannte Resultat führt auf die Erhaltung der Energie für abgeschlossene Systeme.

Kanonische Gleichungen: Wegen

$$\frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i \quad \text{und} \quad \frac{\partial q^i}{\partial p_j} = 0$$

ist die Zeitableitung der Observablen q^i gleich

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (9.48)$$

Ebenso ist die Zeitableitung der Impulse

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (9.49)$$

Nicht unerwartet sind dies die bekannten kanonischen Bewegungsgleichungen für die Koordinaten im Phasenraum.

Mit Hilfe der symplektischen Metrik in (9.39) kann die POISSON-Klammer von zwei Funktionen auch folgendermaßen geschrieben werden,

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \right) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2f} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial G}{\partial x_\beta} \equiv \nabla_x F \cdot J \nabla_x G. \quad (9.50)$$

9.2.1 Poisson-Klammern

Die in (9.44) oder (9.50) eingeführten POISSON-Klammern sind über das Problem der zeitlichen Änderung einer Observablen hinaus von Bedeutung, da sie erlauben, die klassische Mechanik in einer Form darzustellen, welche den Zusammenhang zur Quantenmechanik besonders klar aufzeigt. Wir geben daher im Folgenden eine Reihe wichtiger Eigenschaften der POISSON-Klammern an, welche die Berechnung von Klammersausdrücken erleichtern. Es seien $F, G, H \in C^\infty(\Gamma)$ und a die konstante Funktion. Dann gelten folgende Regeln:

- **Antisymmetrie:** Es gilt offensichtlich

$$\{F, G\} = -\{G, F\}, \quad (9.51)$$

- **(Bi)Linearität:** Auch die Bilinearität

$$\{F, G + H\} = \{F, G\} + \{F, H\} \quad \text{und} \quad \{F, aG\} = a\{F, G\} \quad (9.52)$$

folgt unmittelbar aus der Definition (9.50).

- **Produktregel:** Die Produkt- oder Derivationsregel

$$\{F, G \cdot H\} = G \cdot \{F, H\} + \{F, G\} \cdot H \quad (9.53)$$

ist ebenfalls leicht zu beweisen. Sie folgt aus der Produktregel für die Differenziation,

$$\{F, G \cdot H\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \left[\frac{\partial G}{\partial p_i} H + G \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] - \left[q^i \leftrightarrow p_i \right] \right) = G \cdot \{F, H\} + \{F, G\} \cdot H.$$

- **Jacobi-Identität:** Die Identität

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0 \quad (9.54)$$

läßt sich durch Nachrechnen bestätigen.

Zum Beispiel ist

$$\{F, \{G, H\}\} = \partial_\alpha F J_{\alpha\beta} \partial_\beta (\partial_\gamma G J_{\gamma\delta} \partial_\delta H) = \partial_\alpha F J_{\alpha\beta} \partial_\beta \partial_\gamma G J_{\gamma\delta} \partial_\delta H + \partial_\alpha F J_{\alpha\beta} \partial_\gamma G J_{\gamma\delta} \partial_\beta \partial_\delta H,$$

wozu wir die entsprechenden Terme in der zyklischen Summe (9.54) addieren müssen,

$$(9.54) = \begin{aligned} & \partial_\alpha F J_{\alpha\beta} \partial_\beta \partial_\gamma G J_{\gamma\delta} \partial_\delta H + \partial_\alpha F J_{\alpha\beta} \partial_\gamma G J_{\gamma\delta} \partial_\beta \partial_\delta H \\ & + \partial_\alpha G J_{\alpha\beta} \partial_\beta \partial_\gamma H J_{\gamma\delta} \partial_\delta F + \partial_\alpha G J_{\alpha\beta} \partial_\gamma H J_{\gamma\delta} \partial_\beta \partial_\delta F \\ & + \partial_\alpha H J_{\alpha\beta} \partial_\beta \partial_\gamma F J_{\gamma\delta} \partial_\delta G + \partial_\alpha H J_{\alpha\beta} \partial_\gamma F J_{\gamma\delta} \partial_\beta \partial_\delta G, \end{aligned} \quad (9.55)$$

Wir betrachten diejenigen Terme, welche zweite Ableitungen der Funktion F enthalten, also den vierten und fünften Term auf der rechten Seite,

$$(9.54) = \partial_\alpha G J_{\alpha\beta} \partial_\gamma H J_{\gamma\delta} \partial_\beta \partial_\delta F + \partial_\alpha H J_{\alpha\beta} \partial_\beta \partial_\gamma F J_{\gamma\delta} \partial_\delta G + \dots$$

Wählen wir für die Summationsindizes im letzten Term anstelle von $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ die Buchstaben $(\gamma, \delta, \beta, \alpha)$ und benutzen, daß J schiefsymmetrisch ist, so heben sich diese beiden Terme gegenseitig weg. Genauso heben sich die verbleibenden vier Terme in (9.55) weg, und dies beweist dann die JACOBI-Identität.

Wichtige Beispiele sind:

Koordinatenfunktionen: Die POISSON-Klammern der Koordinatenfunktionen,

$$\{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q^i, q^j\} = 0, \quad \{q^i, p_j\} = \delta^i_j, \quad (9.56)$$

werden oft als *fundamentale Poisson-Klammern* bezeichnet. Sie können mit Hilfe der symplektischen Metrik J in (9.39) auch in die elegante Form

$$\{x_\alpha, x_\beta\} = J_{\alpha\beta}, \quad x = (q, p), \quad (9.57)$$

gebracht werden.

Drehimpulse: Wir berechnen die POISSON-Klammern zwischen den Komponenten des Drehimpulses,

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{p} \quad \text{oder} \quad L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k. \quad (9.58)$$

Benutzen wir die Linearität und Produktregel (9.53) so ergibt sich

$$\begin{aligned} \{L_i, L_j\} &= \epsilon_{ipq} \epsilon_{jrs} \{x_p p_q, x_r p_s\} = \epsilon_{ipq} \epsilon_{jrs} \left(x_r \underbrace{\{x_p, p_s\}}_{\delta_{ps}} p_q + x_p \underbrace{\{p_q, x_r\}}_{-\delta_{qr}} p_s \right) \\ &= \epsilon_{ipq} \epsilon_{jrp} x_r p_q - \epsilon_{ipq} \epsilon_{jq s} x_p p_s = x_i p_j - x_j p_i, \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\{L_1, L_2\} = L_3, \quad \{L_2, L_3\} = L_1, \quad \{L_3, L_1\} = L_2 \quad \text{oder} \quad \{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k. \quad (9.59)$$

Das quantenmechanische Analogon dieser Klammern ist der Ausgangspunkt für die Quantisierung des Drehimpulses.

Als Anwendung der JACOBI'schen Identität folgt der Satz von POISSON:

Satz 6 (Poisson) *Sind F und G Integrale der Bewegung, dann ist es auch $\{F, G\}$.*

Zum Beispiel: sind L_1 und L_2 Integrale der Bewegung, so ist auch L_3 ein Integral der Bewegung. Der Beweis des Satzes ist denkbar einfach: Wegen der JACOBI-Identität

$$\{\{F, G\}, H\} + \underbrace{\{\{H, F\}, G\}}_{=0} + \underbrace{\{\{G, H\}, F\}}_{=0} \stackrel{(9.54)}{=} 0 \longrightarrow \{\{F, G\}, H\} = 0$$

muß der erste Term auf der linken Seite verschwinden, was bedeutet, daß $\{F, G\}$ ein Integral der Bewegung ist.

Wegen der Derivationsregel gilt aber auch der

Satz 7 Sind F und G Integrale der Bewegung, dann sind auch aF , $F+G$ und $F \cdot G$ Integrale der Bewegung.

Beweis: Verschwinden die Klammern von F und G mit der HAMILTON-Funktion, so verschwindet wegen (9.52) auch die Klammer jeder Linearkombination von F und G mit H . Mit der Derivationsregel gilt weiterhin

$$\{F \cdot G, H\} \stackrel{(9.53)}{=} F \cdot \underbrace{\{G, H\}}_{=0} + \underbrace{\{F, H\}}_{=0} \cdot G = 0.$$

Die Menge aller C^∞ -Integrale der Bewegung bilden einen Vektorraum, der bezüglich der punktweisen Multiplikation der Funktionen abgeschlossen ist, d.h. eine Algebra \mathcal{A}_H . Diese Algebra ist abgeschlossen bezüglich $\{.,.\}$ (hier ist C^∞ nötig) und damit eine LIE-Algebra. Sie ist nichttrivial, da für autonome Systeme offensichtlich $H \in \mathcal{A}_H$ ist. Es kann allerdings sein, daß \mathcal{A}_H nur Funktionen von H enthält. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn jede *Energiefläche* (definiert durch $H = E = \text{const.}$) eine transitive Bahn enthält. Eine Bahn heißt transitiv, wenn ihr Abschluss die ganze Energiefläche ist.

Für ein abgeschlossenes System (ohne äußere Kräfte und ohne äußere Zwangsbedingungen) mit HAMILTON-Funktion

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \mathbf{p}_i^2 + \sum_{i < j} V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (9.60)$$

sind der Gesamtimpuls $\mathfrak{P} = \sum \mathbf{p}_i$, der zur Schwerpunktskoordinate $M\mathfrak{R} = \sum m_i \mathbf{r}_i$ konjugiert ist,

$$\{R_a, R_b\} = \{P_a, P_b\} = 0, \quad \{R_a, P_b\} = \delta_{ab}, \quad (9.61)$$

sowie der Drehimpuls im Schwerpunktsystem, $\mathcal{L}' = \sum \mathcal{L}_i - \mathfrak{R} \wedge \mathfrak{P}$, Integrale der Bewegung,

$$\{P_a, H\} = 0 \quad , \quad \{L'_a, H\} = 0 \quad a = 1, 2, 3, \quad (9.62)$$

Diese haben folgende Klammern untereinander,

$$\begin{aligned} \{H, H\} &= \{H, P_a\} = \{H, L'_a\} = 0 \\ \{P_a, P_b\} &= \{L'_a, P_b\} = 0 \quad , \quad \{L'_a, L'_b\} = \epsilon_{abc} L'_c, \end{aligned} \quad (9.63)$$

und erzeugen eine LIE-Algebra \mathcal{A}_H . Aber \mathcal{A}_H ist nicht ABELSCH, d.h. nicht alle Klammern zweier Elemente aus \mathcal{A}_H verschwinden. Zum Beispiel ist $\{L'_1, L'_2\} = L'_3$. Aber die Funktionen

$$H, \quad P_a, \quad L'_3 \quad \text{und} \quad \mathcal{L}'^2 = L_1'^2 + L_2'^2 + L_3'^2 \quad (9.64)$$

haben alle verschwindende Klammern untereinander. In der analytischen Mechanik zeigt man, daß ein System mit f unabhängigen Integralen der Bewegung mit verschwindenden POISSON-Klammern⁴ integrabel ist. Für Details verweise ich auf das ausführliche Lehrbuch von MARSDEN und RATIU [11] über analytische Mechanik.

9.3 Kanonische Transformationen

Eine Motivation für die Untersuchung von kanonischen Transformationen ist die Suche nach neuen Koordinaten im Phasenraum

$$Q^i = Q^i(t, q, p) \quad \text{und} \quad P_i = P_i(t, q, p), \quad (9.65)$$

so daß möglichst viele von ihnen zyklisch werden.

Allerdings muß die Form der HAMILTON-Gleichungen beim Koordinaten-Wechsel erhalten bleiben, denn zyklische Koordinaten sind ja gerade im HAMILTON-Formalismus so außerordentlich nützlich. Wir brauchen also neben den neuen Koordinaten (Q, P) auch noch eine Funktion H' , welche die Rolle der HAMILTON-Funktion übernimmt. Wir definieren also

Definition: *Die Transformation*

$$Q^i = Q^i(t, q, p) \quad , \quad P_i = P_i(t, q, p) \quad (9.66)$$

heißt *kanonisch*, falls eine Funktion $H' = H'(t, Q, P)$ existiert, so daß

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \quad \text{und} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q^i} \quad (9.67)$$

gilt. Die kanonischen Gleichungen sind forminvariant bei kanonischen Transformationen.

9.3.1 Eingeschränkte kanonische Transformationen

Für die folgende Diskussion ist es wieder angebracht die Orts- und Impulskordinaten zusammenzufassen, insbesondere da kanonische Transformationen Orte und Impulse ineinander transformieren können. Es sei also

$$x = (q, p) \quad \text{und} \quad y = (Q, P), \quad (9.68)$$

zwei Koordinatensysteme in Γ . Eine *zeitunabhängige* umkehrbare Transformation $x \rightarrow y = y(x)$ ist eingeschränkt kanonisch, wenn die kanonischen Gleichungen

$$\dot{x}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{2f} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta} \quad \overset{J^2 = -\mathbb{1}}{\iff} \quad \frac{\partial H}{\partial x_\alpha} = -\sum_{\beta=1}^{2f} J_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta, \quad (9.69)$$

⁴und weiteren technischen Annahmen über Γ

die entsprechenden Gleichungen in den neuen Koordinaten implizieren,

$$\dot{y}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{2f} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H'}{\partial y_\beta} \quad \text{mit} \quad H'(y) = H(x(y)). \quad (9.70)$$

Die Transformation ist nur eingeschränkt kanonisch, weil sie zeitunabhängig ist. Für solche Transformationen ist die neue HAMILTON-Funktion $H'(y)$ gleich der alten HAMILTON-Funktion, umgerechnet in die neuen Koordinaten, $H'(y) = H(x(y))$. Weiter unten in diesem Kapitel werden wir allgemeinere zeitabhängige Transformationen untersuchen, für welche dies nicht mehr der Fall zu sein braucht.

Um festzustellen, für welche $y = y(x)$ die HAMILTON'schen Bewegungsgleichungen erfüllt sind, müssen wir sie auf x -Koordinaten umrechnen:

$$\sum_{\beta} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} \dot{x}_\beta = \dot{y}_\alpha \stackrel{(9.70)}{=} \sum_{\beta,\sigma} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\sigma} \frac{\partial x_\sigma}{\partial y_\beta} \stackrel{(9.69)}{=} - \sum_{\beta,\sigma,\rho} J_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\sigma}{\partial y_\beta} J_{\sigma\rho} \dot{x}_\rho. \quad (9.71)$$

Hier begegnen wir der JACOBI-Matrix der als umkehrbar vorausgesetzten Transformation $x \rightarrow y(x)$ und ihrer Inversen,

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} = M_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta} = (M^{-1})_{\alpha\beta}. \quad (9.72)$$

Man zeigt leicht, daß das Produkt dieser Matrizen gleich der Einheitsmatrix ist,

$$\sum_{\sigma} M_{\alpha\sigma} (M^{-1})_{\sigma\beta} = \sum_{\sigma} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\sigma} \frac{\partial x_\sigma}{\partial y_\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial y_\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Mit diesen Definitionen der JACOBI-Matrix und ihrer Inversen lauten die Bedingungen (9.71)

$$\sum_{\beta} M_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta = - \sum_{\beta} \left(JM^{-1T}J \right)_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta.$$

Da diese Gleichungen für beliebige Geschwindigkeiten \dot{x} im Phasenraum gelten müssen, schließen wir mit $J^2 = -\mathbb{1}$

$$JM = M^{-1T}J.$$

Wir multiplizieren diese Matrixgleichung mit M^T und finden

$$M^T JM = J. \quad (9.73)$$

Matrizen, welche diese Bedingung erfüllen, heißen *symplektische Matrizen*. Aus (9.73) folgt

$$\det M^T \det J \det M = \det J \quad \text{oder} \quad \det M = \pm 1. \quad (9.74)$$

Die Menge der symplektischen $2f \times 2f$ -Matrizen bilden die *symplektische Gruppe* $Sp(2f)$. Das bedeutet:

1. Sind M_1 und M_2 symplektisch, so ist es auch $M_1 M_2$.
2. Das Produkt ist assoziativ, $M_1(M_2 M_3) = (M_1 M_2) M_3$.

3. Die Einheitsmatrix ist symplektisch.
4. Ist M symplektisch, so ist es auch M^{-1} .

Die erste Eigenschaft ist evident,

$$(M_1 M_2)^T J (M_1 M_2) = M_2^T \underbrace{M_1^T J M_1}_J M_2 = M_2^T J M_2 = J,$$

genauso wie die dritte. Das Matrixprodukt ist assoziativ und es verbleibt der Beweis der letzten Eigenschaft:

$$J = \underbrace{(M M^{-1})^T}_\mathbb{1} J \underbrace{(M M^{-1})}_\mathbb{1} = M^{-1T} \underbrace{M^T J M}_J M^{-1} = M^{-1T} J M^{-1} \implies M^{-1} \in Sp(2f).$$

Aus den genannten Eigenschaften folgt nun, daß mit M auch M^T symplektisch ist, da

$$M^{-1T} J M^{-1} = J \xrightarrow{\text{Inverse}} M J^{-1} M^T = J^{-1} \quad \text{oder} \quad M J M^T = J$$

folgt.

Wir fassen zusammen: Eine zeitunabhängige Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_{2f}) &\longrightarrow (y_1, \dots, y_{2f}) \quad \text{bzw.} \\ (q^1, \dots, q^f, p_1, \dots, p_f) &\longrightarrow (Q^1, \dots, Q^f, P_1, \dots, P_f) \end{aligned}$$

ist eingeschränkt kanonisch, falls ihre JACOBI-Matrix (9.72) symplektisch ist.

Wichtige Beispiele sind Transformationen

$$q \longrightarrow Q = Q(q) \tag{9.75}$$

der verallgemeinerten Koordinaten untereinander. Bei entsprechender Transformation der Impulse,

$$p \longrightarrow P = P(q, p) \tag{9.76}$$

sind (9.75) und (9.76) eingeschränkte kanonische Transformationen. Dies folgt aus der Invarianz der LAGRANGE-Gleichungen unter beliebigen Transformationen der Art (9.75), und somit nach der LEGENDRE-Transformation auch der kanonischen Gleichungen. Die Transformation der Impulse ist dabei durch

$$P_i = \frac{\partial}{\partial \dot{Q}^i} L(Q, \dot{Q}) = \sum_{j=1}^f \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}}_{p_j} \underbrace{\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{Q}^i}}_{\frac{\partial q^j}{\partial Q^i}} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial q^j} \underbrace{\frac{\partial q^j}{\partial \dot{Q}^i}}_{=0} = \sum_j p_j \frac{\partial q^j}{\partial Q^i}, \tag{9.77}$$

gegeben, denn (q, \dot{q}) und (Q, \dot{Q}) sind unabhängige Variablen und somit $\partial q^j / \partial \dot{Q}^i = 0$.

Die Klasse der kanonischen Transformationen ist wesentlich größer als (9.75), insbesondere können auch Lagekoordinaten und Impulse vermischt werden. Dies ist ein Vorzug der HAMILTON'schen Formulierung der Mechanik. Zum Beispiel ist die Transformation

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad y = Jx, \tag{9.78}$$

welche die q und p vertauscht, kanonisch, da

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} = J_{\alpha\beta} \implies M^T J M = J^T J J = J$$

ist. Das Beispiel verdeutlicht, daß Koordinaten und Impulse 'austauschbar' und damit gleichberechtigt sind. Beide Freiheitsgrade werden zu abstrakten Koordinaten, in denen sich die HAMILTON-Funktion auf dem $2f$ -dimensionalen Phasenraum darstellen läßt.

Es stellt sich nun die natürliche Frage, ob wir das gleiche Ergebnis erhalten, wenn wir die POISSON-Klammern mit den ursprünglichen Variablen (q, p) berechnen oder den neuen Variablen (Q, P) , die durch eine eingeschränkte kanonische Transformation aus den alten Variablen hervorgingen. Es gilt der

Satz 8 Die POISSON-Klammer ist unabhängig vom Satz der kanonischen Variablen, der für die Definition verwendet wird.

Der Beweis ist denkbar einfach. Wegen

$$\{y_\alpha, y_\beta\} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma} J_{\gamma\delta} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_\delta} = M_{\alpha\gamma} J_{\gamma\delta} M_{\delta\beta}^T = (M J M^T)_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta}$$

gilt nämlich

$$x \longrightarrow y = y(x) \text{ ist kanonisch} \iff \{y_\alpha, y_\beta\} = \{x_\alpha, x_\beta\} = J_{\alpha\beta}, \quad (9.79)$$

wie behauptet. Nun nehmen wir an, daß

$$\{F(q, p), G(q, p)\}_{q,p} \equiv \frac{\partial F(x)}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial G(x)}{\partial x_\beta} = H(q, p) \quad (9.80)$$

für beliebige C^∞ -Funktionen F und G auf Γ gelte. Dabei wird die Klammer mit den alten Koordinaten und der symplektischen Metrik J berechnet. Wir müssen die entsprechende Beziehung für die transformierten Funktionen zeigen, daß heißt wir müssen zeigen, daß

$$\{F'(Q, P), G'(Q, P)\}_{Q,P} \equiv \frac{\partial F'(y)}{\partial y_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial G'(y)}{\partial y_\beta} = H'(Q, P), \quad (9.81)$$

gilt, wobei F', G' und H' die auf die neuen Variablen transformierten Funktionen F, G und H sind. Zum Beispiel ist

$$F'(Q, P) = F(q(Q, P), p(Q, P)) \quad \text{bzw.} \quad F'(y) = F(x(y)). \quad (9.82)$$

Die Klammer in (9.81) wird mit den neuen Koordinaten und der symplektischen Metrik J berechnet.

Der Beweis ist nicht sehr schwierig. Wir führen wieder die Koordinaten $x = (q, p)$ und $y = (Q, P)$ in Γ ein und finden

$$\begin{aligned} \{F', G'\}_{Q,P} &= \frac{\partial F'}{\partial y_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial G'}{\partial y_\beta} = \frac{\partial F}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x_\gamma}{\partial y_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\delta}{\partial y_\beta} \frac{\partial G}{\partial x_\delta} = \frac{\partial F}{\partial x_\gamma} (M^{-1} J M^{-1T})_{\gamma\delta} \frac{\partial G}{\partial x_\delta} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_\gamma} J_{\gamma\delta} \frac{\partial G}{\partial x_\delta} = \{F, G\}_{q,p} = H(q, p) = H'(Q, P), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. Betrachten wir zum Beispiel den *anharmonischen Oszillator* mit HAMILTON-Funktion

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 + \frac{\lambda}{4} q^4$$

und kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \{q, H\} = \frac{1}{m} p &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= \{p, H\} = -m\omega^2 q - \lambda q^3 = -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{aligned} \quad (9.83)$$

Wir führen neue kanonische Koordinaten gemäß (9.78) ein, d.h.

$$Q = p \quad \text{und} \quad P = -q. \quad (9.84)$$

Die transformierte HAMILTON-Funktion hat die Form

$$H' = \frac{1}{2m} Q^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 P^2 + \frac{\lambda}{4} P^4,$$

und die kanonischen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \{Q, H'\} = m\omega^2 P + \lambda P^3 = \frac{\partial H'}{\partial P} \\ \dot{P} &= \{P, H'\} = -\frac{1}{m} Q &= -\frac{\partial H'}{\partial Q}. \end{aligned} \quad (9.85)$$

Für die einfache lineare kanonische Transformation (9.84) sieht man sofort, daß die Bewegungsgleichungen (9.83) und (9.85) für den anharmonischen Oszillator äquivalent sind.

9.4 Erzeugende Funktionen

Es gibt Rechenverfahren, welche erlauben, aus sogenannten erzeugenden Funktionen kanonische Transformationen abzuleiten. Der Vorteil liegt darin, daß diese Erzeugenden frei wählbar sind, und es somit möglich ist, einfach auszuprobieren, ob eine gewisse Erzeugende, bzw. die aus ihr abgeleitete kanonische Transformation die Bewegungsgleichungen vereinfacht.

Aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung im Phasenraum (9.32) folgt, daß die kanonischen Bewegungsgleichungen bei einer Transformation

$$(q, p) \longrightarrow (Q, P) \quad (9.86)$$

und

$$H(t, q, p) \longrightarrow H'(t, Q, P) \quad (9.87)$$

erhalten bleiben, falls die beiden Funktionale

$$\int dt \left[\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}^i - H(t, q, p) \right] \quad \text{und} \quad \int dt \left[\sum_{i=1}^f P_i \dot{Q}^i - H'(t, Q, P) \right] \quad (9.88)$$

die gleichen Extremalpunkte haben. Da beim Variieren der Funktionale nur Wege in Γ mit festen Anfangs- und Endorten zugelassen werden, sind die beiden Funktionale in (9.88) bis auf eine Konstante gleich, wenn die Integranden bis auf eine totale Zeitableitung übereinstimmen, d.h. falls

$$\sum_i p_i \dot{q}^i - H(t, q, p) = \sum_i P_i \dot{Q}^i - H'(t, Q, P) + \frac{d}{dt} F(t, q, p, Q, P)$$

oder auch

$$\sum_i p_i dq^i - H(t, q, p) dt = \sum_i P_i dQ^i - H'(t, Q, P) dt + dF(t, q, p, Q, P), \quad (9.89)$$

gilt. Hierbei ist die *Eichfunktion* F eine beliebige Funktion, die aber wegen (9.86) nur von zwei der vier Variablensätze q, p, Q, P abhängt.

Nach diesen Bemerkungen *definieren* wir nun eine Transformation als *kanonisch*, wenn für eine beliebige HAMILTON-Funktion $H(t, q, p)$ eine HAMILTON-Funktion $H'(t, Q, P)$ existiert mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^f (p_i dq^i - P_i dQ^i) + [H'(t, Q, P) - H(t, q, p)] dt = dF(t, q, p, Q, P). \quad (9.90)$$

Die in (9.90) eingeführte Funktion F ist eine beliebige (stetig differenzierbare) Funktion von $4f + 1$ Variablen, von denen aber nur $2f + 1$ linear unabhängig sind, da die Anzahl Freiheitsgrade des Systems f beträgt und wir für jeden Freiheitsgrad 2 unabhängige Variablen benötigen; die Zeit ist ein zusätzlicher Parameter. Es gibt also - bis auf Linearkombinationen - nur 6 unterschiedliche *erzeugende Funktionen* mit jeweils $2f + 1$ unabhängigen Argumenten:

$$F_1(t, q, Q), \quad F_2(t, q, P), \quad F_3(t, p, Q), \quad F_4(t, p, P), \quad F_5(t, q, p), \quad F_6(t, Q, P). \quad (9.91)$$

9.4.1 Die Erzeugende $F_5(t, q, p)$

Die erzeugende Funktion F_5 hängt nur von den konjugierten Variablen (q, p) ab, so daß wir (9.90) wie folgt schreiben können

$$\begin{aligned} & \sum_i (p_i dq^i - P_i dQ^i) + [H'(t, Q, P) - H(t, q, p)] dt \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial F_5}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial F_5}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial F_5}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (9.92)$$

Das totale Differential der Koordinate Q^i können wir umschreiben unter Verwendung ihrer Abhängigkeit von den Variablen (t, q, p) ,

$$dQ^i = \sum_j \left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^j} dq^j + \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial Q^i}{\partial t} dt$$

und erhalten dann

$$\begin{aligned} & \sum_i \left\{ \left(p_i - \sum_j P_j \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} - \frac{\partial F_5}{\partial q^i} \right) dq^i - \left(\sum_j P_j \frac{\partial Q^j}{\partial p_i} + \frac{\partial F_5}{\partial p_i} \right) dp_i \right\} \\ & + \left(H' - H - \sum_j P_j \frac{\partial Q^j}{\partial t} - \frac{\partial F_5}{\partial t} \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind die q, p und damit auch die dq, dp linear unabhängig und die Koeffizienten von dq^i und dp_i müssen identisch verschwinden. Wir erhalten nach Koeffizientenvergleich

$$\frac{\partial F_5}{\partial q^i} = p_i - \sum_{j=1}^f P_j \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} \quad (9.93)$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial p_i} = - \sum_{j=1}^f P_j \frac{\partial Q^j}{\partial p_i} \quad (9.94)$$

$$H' = H + \sum_{j=1}^f P_j \frac{\partial Q^j}{\partial t} + \frac{\partial F_5}{\partial t} \quad (9.95)$$

Die Gleichungen (9.93) und (9.94) stellen ein System von $2f$ gekoppelten Gleichungen dar, welches nach den neuen Koordinaten aufzulösen ist. Die gesuchte HAMILTON-Funktion $H'(t, Q, P)$ folgt dann aus (9.95) durch Einsetzen der Lösungen $Q(t, q, p)$ und $P(t, q, p)$, wobei die partielle Zeitableitung von F_5 noch beliebig gewählt werden kann. Die Funktion F_5 erzeugt somit unendlich viele kanonische Transformationen. Die Auflösung des gekoppelten Gleichungssystems (9.93,9.94) kann jedoch sehr aufwendig sein, da alle Gleichungen die gesuchten Variablen Q^i und P_i in nichttrivialer Weise enthalten können. Dieser Sachverhalt trifft auch auf die Erzeugende $F_6(t, Q, P)$ zu, da sie ebenfalls eine Funktion von konjugierten Variablen ist.

9.4.2 Die Erzeugende $F_1(t, q, Q)$

Wir untersuchen daher im Folgenden die Funktionen F_1, \dots, F_4 und beginnen mit $F_1(t, q, Q)$. Für eine erzeugende Funktion von q und Q lautet (9.90)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^f (p_i dq^i - P_i dQ^i) + (H' - H)dt &= dF_1(t, q, Q) \\ &= \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F_1}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial F_1}{\partial Q^i} dQ^i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (9.96)$$

Wegen der Unabhängigkeit der dq, dQ und dt erhalten wir durch Koeffizientenvergleich

$$p_i = \frac{\partial F_1(t, q, Q)}{\partial q^i} \quad (9.97)$$

$$P_i = - \frac{\partial F_1(t, q, Q)}{\partial Q^i} \quad (9.98)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_1(t, q, Q)}{\partial t}. \quad (9.99)$$

Als Beispiel berechnen wir die von der erzeugenden Funktion $F_1(q, Q) = -Q/q$ auf einem 2-dimensionalen Phasenraum induzierte kanonische Transformation. Nach (9.97) ist

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \frac{Q}{q^2} \quad \text{und damit} \quad Q = q^2 p,$$

und nach (9.98) ist

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{q}.$$

Die JACOBI-Matrix dieser Transformation,

$$M = \begin{pmatrix} \partial Q/\partial q & \partial Q/\partial p \\ \partial P/\partial q & \partial P/\partial p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2qp & q^2 \\ -1/q^2 & 0 \end{pmatrix},$$

ist eine symplektische Matrix, $M^T J M = J$, wie es für eine kanonische Transformation sein muß.

Umgekehrt kann man aus einer bekannten Transformation, zum Beispiel aus

$$Q = \log p \quad \text{und} \quad P = -qp \tag{9.100}$$

mit symplektischer JACOBI-Matrix die Erzeugende F_1 berechnen. Mit $p = \exp(Q)$ führt die allgemeine Beziehung (9.97) auf folgende Formel für F_1 :

$$F_1(t, q, Q) = \int p(q, Q) dq + g(t, Q) = e^Q q + g(t, Q).$$

Mit (9.98) erhalten wir weiterhin

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -qe^Q - \frac{\partial g(t, Q)}{\partial Q} \stackrel{(9.100)}{=} -qp \stackrel{p=\exp(Q)}{=} -e^Q q$$

woraus unmittelbar folgt $\partial g(t, Q)/\partial Q = 0$. Damit ist die Erzeugende

$$F_1 = q \exp(Q) \tag{9.101}$$

bis auf eine unbedeutende Konstante bestimmt.

Die allgemeine Vorgehensweise zur Berechnung der kanonischen Transformationen ist wie folgt: Bei gegebenen $F_1(t, q, Q)$ berechnet man zunächst die f Bewegungsgleichungen für die p_i durch Differenziation der Erzeugenden nach den q^i , Gl. (9.97), und löst die Gleichungen nach den $Q^i(t, q, p)$ auf. Danach berechnet man die Ableitungen von F_1 formal nach den Q^i und setzt die berechneten $Q^i(t, q, p)$ in den gewonnenen Ausdruck für die P_i ein, woraus sich die neuen Impulse $P_i(t, q, p)$ ergeben.

9.4.3 Die Erzeugende $F_2(t, q, P)$

Wir beginnen zunächst mit einer Funktion $F_2'(t, q, P)$, die von den gleichen Variablen abhängt wie die später zu definierende Funktion F_2 . Eine Transformation $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ ist dann kanonisch, wenn

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^f (p_i dq^i - P_i dQ^i) + (H' - H) dt &= dF_2'(t, q, P) \\ &= \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F_2'}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial F_2'}{\partial P^i} dP^i \right) + \frac{\partial F_2'}{\partial t} dt \end{aligned} \tag{9.102}$$

gilt. Wegen der Abhängigkeit $Q^i(t, q, P)$ der neuen Koordinaten von den q^i und P_i folgt

$$dQ^i = \sum_j \left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^j} dq^j + \frac{\partial Q^i}{\partial P_j} dP_j \right) + \frac{\partial Q^i}{\partial t} dt.$$

Dies setzen wir in (9.102) ein und vergleichen die Koeffizienten, da die Differentiale dq^i, dP_i und dt unabhängig sind. Der Vergleich liefert

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_j P_j \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \frac{\partial F'_2}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \left(F'_2 + \sum_j P_j Q^j \right) \\ 0 &= \sum_j P_j \frac{\partial Q^j}{\partial P_i} + \frac{\partial F'_2}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left(F'_2 + \sum_j P_j Q^j \right) - Q^i \\ H' &= H + \sum_j P_j \frac{\partial Q^j}{\partial t} + \frac{\partial F'_2}{\partial t} = H + \frac{\partial}{\partial t} \left(F'_2 + \sum_j P_j Q^j \right), \end{aligned}$$

wobei wir mehrfach die Unabhängigkeit der Variablen (q, P, t) benutzten. Dies Gleichungen führen uns ganz natürlich auf die Definition

$$F_2(t, q, P) = F'_2(t, q, P) + \sum_j P_j Q^j. \quad (9.103)$$

Damit lassen sich die Gleichungen in kompakter Form schreiben,

$$p_i = \frac{\partial F_2(t, q, P)}{\partial q^i} \quad (9.104)$$

$$Q^i = \frac{\partial F_2(t, q, P)}{\partial P_i} \quad (9.105)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_2(t, q, P)}{\partial t}, \quad (9.106)$$

Als Beispiel wollen wir wieder die Erzeugende F_2 für die Transformation (9.100) berechnen. Mit $p = -P/q$ erhalten wir durch Integration von (9.104)

$$F_2(q, P) = \int p(P, q) dq + g(P) = -P \log q + g(P)$$

mit einer beliebigen, stetig differenzierbaren Funktion $g(P)$. Wir nutzen nun (9.105) um $g(P)$ zu bestimmen:

$$Q = \log p = \frac{\partial F_2}{\partial P} = -\log q + \frac{\partial g(P)}{\partial P}.$$

Wir lösen nach $\partial g / \partial P$ auf und integrieren über P ,

$$g(P) = \int \log(qP) dP = \int \log(-P) dP = P \log(-P) - P.$$

Damit erhalten wir die Erzeugende

$$F_2(q, P) = -P \log q + P \log(-P) - P = P [\log(-P/q) - 1]. \quad (9.107)$$

9.4.4 Zusammenhang zwischen den Erzeugenden

Wir wollen eine Beziehung zwischen denjenigen Erzeugenden $F_1(t, q, Q)$ und $F_2(t, q, P)$ herstellen, die zur selben kanonischen Transformation Anlass geben. Zum Beispiel, was ist der Zusammenhang zwischen den Erzeugenden

$$F_1(q, Q) = q \exp(Q) \quad \text{und} \quad F_2(q, P) = P [\log(-P/q) - 1] \quad (9.108)$$

in (9.101) und (9.107), die zur gleichen kanonischen Transformation (9.100) gehören? Aus den Definitionsgleichungen (9.96) und (9.102) folgt sofort

$$d(F_1 - F_2') = 0 \quad \text{oder} \quad F_1 = F_2' + \text{const}, \quad (9.109)$$

wobei die Konstante als 0 angenommen werden kann. Mit (9.103) erhalten wir unter Benutzung von (9.98) die Beziehung

$$F_2(t, q, P) = F_2'(t, q, P) + \sum_{i=1}^f P_i Q^i \stackrel{(9.98)}{=} F_1(t, q, Q) - \sum_{i=1}^f \frac{\partial F_1}{\partial Q^i} Q^i \quad (9.110)$$

Dabei sind die Beziehungen (9.98), also

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q^i} \quad (9.111)$$

nach den Q^i aufzulösen und rechts in (9.110) einzusetzen. Damit ist die erzeugende Funktion $F_2(t, q, P)$ die LEGENDRE-Transformierte von $F_1(t, q, Q)$.

9.4.5 Die Erzeugenden im Überblick

Analog findet man, daß auch die Erzeugenden F_3 und F_4 sich als LEGENDRE-Transformierte und LEGENDRE-Doppeltransformierte von F_1 ergeben:

$$\begin{aligned} F_3(t, p, Q) &= F_1(t, q, Q) - \sum_{i=1}^f \frac{\partial F_1}{\partial q^i} q^i, & p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q^i} \\ F_4(t, p, P) &= F_1(t, q, Q) - \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F_1}{\partial q^i} q^i + \frac{\partial F_1}{\partial Q^i} Q^i \right), & p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q^i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q^i}. \end{aligned} \quad (9.112)$$

Dabei sind bei der Transformation $F_1 \rightarrow F_3$ die Gleichungen $p_i = \partial F_1 / \partial q^i$ nach den q^i aufzulösen und bei der Transformation $F_1 \rightarrow F_4$ die Gleichungen $p_i = \partial F_1 / \partial q^i$ und $P_i = -\partial F_1 / \partial Q^i$ nach den q^i und Q^i aufzulösen.

Die aus den Forderung (9.90) durch Koeffizientenvergleich folgenden Verknüpfungen sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Übersicht			
Erzeugende	Ableitungen		Einfacher Fall
$F_1(t, q, Q)$	$p = +\partial F_1 / \partial q$	$P = -\partial F_1 / \partial Q$	$F_1 = qQ, \quad Q = +p, \quad P = -q$
$F_2(t, q, P)$	$p = +\partial F_2 / \partial q$	$Q = +\partial F_2 / \partial P$	$F_2 = qP, \quad Q = +q, \quad P = +p$
$F_3(t, p, Q)$	$q = -\partial F_3 / \partial p$	$P = -\partial F_3 / \partial Q$	$F_3 = pQ, \quad Q = -q, \quad P = -p$
$F_4(t, p, P)$	$q = -\partial F_4 / \partial p$	$Q = +\partial F_4 / \partial P$	$F_4 = pP, \quad Q = +p, \quad P = -q$

Die neue HAMILTON-Funktion berechnet sich gemäß

$$H'(t, Q, P) = H(t, q, p) + \frac{\partial F_i}{\partial t} \quad (9.113)$$

aus der alten. Für zeitunabhängige, d.h. eingeschränkte kanonische Transformationen ist die HAMILTON-Funktion selbst eine sogenannte *kanonische Invariante*, d.h. $H' = H$. Als kanonische Invarianten bezeichnen wir Größen, welche sich bei kanonischen Transformationen nicht ändern. Zum Beispiel ist die Formulierung der Dynamik mit Hilfe der POISSON-Klammern bei zeitunabhängigen Transformationen kanonisch invariant. In der Tat gilt sogar der

Satz 9 *Eine (zeitabhängige) Transformation*

$$Q^i = Q^i(t, q, p) \quad \text{und} \quad P_i = P_i(t, q, p) \quad (9.114)$$

ist genau dann kanonisch, wenn die fundamentalen POISSON-Klammern in den neuen Variablen erfüllt sind, d.h.

$$\{Q^i, Q^j\} = 0 = \{P_i, P_j\}, \quad \{Q^i, P_j\} = \delta^i_j. \quad (9.115)$$

Dieser Satz ist oft hilfreich wenn man prüfen will, ob eine Transformation kanonisch ist.

Polarkoordinaten: Zum Beispiel, die kanonische Transformation

$$\underbrace{(x, y, p_x, p_y)}_{\substack{q \\ p}} \longrightarrow \underbrace{(r, \varphi, p_r, p_\varphi)}_{\substack{Q \\ P}} \quad (9.116)$$

von kartesischen zu Polarkoordinaten wird von der Funktion $F_3(r, \varphi, p_x, p_y) = -r(p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi)$ erzeugt. Man findet folgende bekannte Beziehung zwischen kartesischen und Polarkoordinaten,

$$x = -\frac{\partial F_3}{\partial p_x} = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = -\frac{\partial F_3}{\partial p_y} = r \sin \varphi \quad (9.117)$$

und zwischen den entsprechenden konjugierten Impulsen,

$$p_r = -\frac{\partial F_3}{\partial r} = p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi \quad \text{und} \quad p_\varphi = -\frac{\partial F_3}{\partial \varphi} = -p_x r \sin \varphi + p_y r \cos \varphi. \quad (9.118)$$

Diese Gleichungen kann man nach den alten Impulsen auflösen und erhält

$$p_x = p_r \cos \varphi - \frac{1}{r} p_\varphi \sin \varphi \quad \text{und} \quad p_y = p_r \sin \varphi + \frac{1}{r} p_\varphi \cos \varphi. \quad (9.119)$$

Wir haben also auf ungewöhnliche Art Polarkoordinaten eingeführt.

9.5 Theorem von Liouville

Das Theorem von LIOUVILLE bietet eine eleganten Einstieg in die *statistische Mechanik*. Um den Zustand eines mechanischen Systems als Punkt im Phasenraum Γ festlegen zu

können, muß man die Anfangsbedingung $(q^1, \dots, q^f, p_1, \dots, p_f)$ zur Lösung der kanonischen Gleichungen exakt kennen, was für makroskopische Systeme von etwa $N \sim 10^{23}$ Teilchen *praktisch* unmöglich ist. Hinzu kommt, daß es für solch komplizierte Systeme illusorisch wäre, die Lösungen der Bewegungsgleichungen explizit zu berechnen⁵. Als eine weniger genaue, aber für viele wichtige Fragen durchaus genügende Zustandsbeschreibung, bietet sich dann die Angabe der *Wahrscheinlichkeit* $\rho(t, q, p) = \rho(t, x)$ an, mit der das System sich zur Zeit t am Punkt $x = (q, p) \in \Gamma$ befindet. Etwas genauer: Ist $\Delta \subset \Gamma$ ein Gebiet im Phasenraum, dann ist

$$w(\Delta) = \int_{\Delta} d^f q d^f p \rho(t, q, p) = \int_{\Delta} d^{2f} x \rho(t, x), \quad d^{2f} x = d^f q d^f p = \prod_{i=1}^f dq^i dp_i, \quad (9.120)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, das System zur Zeit t im Gebiet Δ zu finden. Insbesondere werden wir die Normierungsbedingung

$$w(\Gamma) = \int_{\Gamma} d^{2f} x \rho(t, x) = 1 \quad (9.121)$$

verlangen müssen. Kennt man ρ , so kann man den *Erwartungswert* einer Observablen $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ als Mittelwert berechnen,

$$\langle F \rangle = \int d^{2f} x \rho(t, x) F(t, x). \quad (9.122)$$

Wenn die mittlere quadratische Abweichung $(\Delta F)^2 = \langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2$ genügend klein ist, so kann man den Mittelwert (9.122) mit dem makroskopischen Messwert identifizieren.

In der statistischen Physik entspricht der Wahrscheinlichkeitsdichte ρ ein *Ensemble*: Man ersetzt das tatsächliche System, dessen Anfangsbedingungen man nur ungenau (unvollständig) kennt, oder dessen genaue Anfangsbedingungen irrelevant sind, durch einen großen Satz gleichartiger Systeme (durch ein Ensemble) mit verschiedenen, jeweils genau spezifizierten Anfangsbedingungen, in Einklang mit den makroskopischen Kenntnissen über das tatsächliche System. Jedes Mitglied des Ensemble wird durch einen Punkt im Phasenraum Γ repräsentiert, das Ensemble also durch eine Ansammlung von Punkten in Γ , deren Verteilung durch die Punktschwarmdichte (Wahrscheinlichkeitsdichte) ρ gegeben ist.

Nun ändern sich alle Systeme (repräsentiert durch Punkte im Phasenraum) gemäß den Bewegungsgleichungen, die Punkte im Phasenraum bewegen sich. Dadurch verändert sich die anfängliche⁶ Punktschwarmdichte $\rho(0, x(0))$ zu $\rho(t, x(t))$. Es stellt sich die Frage, welcher Bewegungsgleichung die Punktschwarmdichte ρ genügt. Hierzu betrachten wir ein Gebiet Δ im Phasenraum und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zur Zeit 0 ein System des Ensemble in Δ liegt,

$$w(\Delta) = \int_{\Delta} d^{2f} x \rho(0, x). \quad (9.123)$$

Die Trajektorien jedes einzelnen Systems genügen den kanonischen Gleichungen mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0. \quad (9.124)$$

⁵Die besten numerischen Codes bewältigen einige Millionen Teilchen.

⁶Als Anfangszeit wählen wir $t_0 = 0$.

Durch die zeitliche Entwicklung erreichen die Punkte in Δ neue Stellen $x(t)$. Insgesamt gesehen wird dadurch Δ zur Zeit 0 in eine neue Untermenge Δ_t zur Zeit t überführt. Die Wahrscheinlichkeit, daß im Ensemble zur Zeit t der Punktschwarm in Δ_t liegt, ist

$$w(\Delta_t) = \int_{\Delta_t} d^{2f}x \rho(t, x). \quad (9.125)$$

Der LIOUVILLE'sche Satz besagt nun, daß die beiden Wahrscheinlichkeiten (9.123) und (9.125) gleich sind, da keine Schwarmpunkte im Phasenraum Γ erzeugt oder vernichtet werden,

$$\int_{\Delta} d^{2f}x_0 \rho(0, x_0) = \int_{\Delta_t} d^{2f}x \rho(t, x). \quad (9.126)$$

Wir wollen aus dieser Bedingung eine Differentialgleichung für die Schwarmdichte ableiten.

Als Vorbereitung betrachten wir den Fluß des HAMILTON'schen Vektorfeldes $X_H = J\nabla_x H$,

$$\Gamma \ni x_0 \longrightarrow x = x(t, x_0) \in \Gamma, \quad x(0, x_0) = x_0, \quad \dot{x}(t, x_0) = X_H(x(t, x_0)), \quad (9.127)$$

und zeigen, daß für jede feste Zeit die Abbildung $x(t, \cdot) : \Gamma \rightarrow \Gamma$ kanonisch ist. Wir müssen also zeigen, daß die JACOBI-Matrix

$$M_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x_\alpha(t, x_0)}{\partial x_{0\beta}} \right) \quad (9.128)$$

für alle Zeiten symplektisch ist. Für $t = 0$ ist $x = x_0$ und entsprechend ist $x(0, \cdot)$ die identische Abbildung, welche natürlich symplektisch ist. Die zeitliche Variation der Matrixelemente $M_{\alpha\beta}$ ist

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_{0\beta}} = \frac{\partial}{\partial x_{0\beta}} \dot{x}_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_{0\beta}} J_{\alpha\sigma} \frac{\partial H}{\partial x_\sigma} = J_{\alpha\sigma} \frac{\partial^2 H}{\partial x_\sigma \partial x_\rho} \frac{\partial x_\rho}{\partial x_{0\beta}}$$

und lautet in Matrixform

$$\frac{d}{dt} M = JH''M \quad \text{mit} \quad H'' = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) = (H'')^T. \quad (9.129)$$

Es folgt, daß $M^T J M$ zeitunabhängig ist,

$$\frac{d}{dt} (M^T J M) \stackrel{(9.129)}{=} (M^T H'' J^T) J M + M^T J (J H'' M) = M^T H'' M - M^T H'' M = 0,$$

wobei wir die Symmetrie von H'' und die Eigenschaften $J^2 = -\mathbb{1}$ sowie $J^T J = \mathbb{1}$ der symplektischen Metrik ausnutzten. Damit gilt

$$(M^T J M)(t) = (M^T J M)(0) = J, \quad (9.130)$$

d.h. die JACOBI-Matrix des Flusses ist eine symplektische Matrix, was zu zeigen war. Der Fluß zu X_H ist damit eine kanonische Abbildung. Insbesondere ist die Determinante der JACOBI-Matrix des HAMILTON'schen Flusses gleich Eins, $\det M = 1$. Es folgt unmittelbar, daß

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_t} d^{2f}x \rho(t, x) &= \int_{\Delta} d^{2f}x_0 \rho(t, x(t, x_0)) \det \left(\frac{\partial x_\alpha(t, x)}{\partial x_{0\beta}} \right) \\ &= \int_{\Delta} d^{2f}x_0 \rho(t, x(t, x_0)) \end{aligned} \quad (9.131)$$

gilt, und insbesondere auch

$$V(\Delta_t) = \int_{\Delta_t} d^{2f}x = \int_{\Delta} d^{2f}x_0 = V(\Delta). \quad (9.132)$$

Das Volumen eines beliebigen Gebietes im Phasenraum bleibt erhalten, wenn sich die Punkte seiner Begrenzung entsprechend den HAMILTON-Gleichungen bewegen. Der Fluß im Phasenraum entspricht demnach dem einer *inkompressiblen Flüssigkeit*. Der Grund für die Inkompressibilität des Flusses ist die Quellenfreiheit des HAMILTON'schen Vektorfeldes,

$$\operatorname{div} X_H = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta} = 0. \quad (9.133)$$

Der HAMILTON'sche Fluß hat also weder Quellen noch Senken.

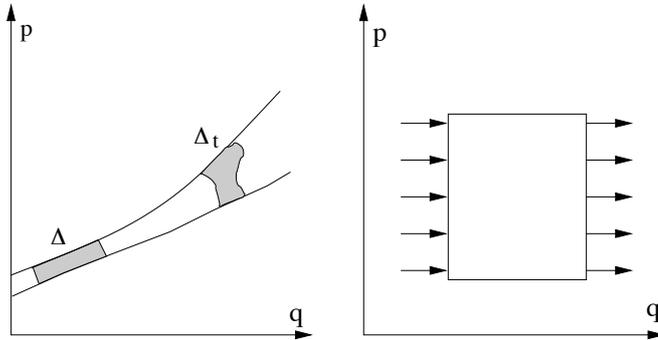


Abbildung 9.4: Links: Entwicklung eines Gebietes in Γ . Das Volumen von Δ ist gleich demjenigen von Δ_t . Rechts: Der Fluß ist inkompressibel.

Zur Illustration betrachten wir wieder einmal den harmonischen Oszillator mit Masse m und Kreisfrequenz ω . Die Trajektorien im Phasenraum wurden im Abschnitt (3.3.2) berechnet,

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -m\omega \sin \omega t \\ \sin \omega t / m\omega & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}.$$

Es sind Ellipsen und diese sind in der Abbildung (3.10) dargestellt. Offensichtlich ist M eine symplektische Matrix. In der folgenden Abbildung sieht man das Bild des Rechtecks auf der rechten Seite nach einem Achtel und einem Viertel der Periode des Oszillators. Einzelne Punkte bewegen sich auf Ellipsen. Dies ist für einige Punkte in der Figur angedeutet. Der zur Zeit $t = 0$ beinahe quadratische Bereich wird bei der Bewegung aller seiner Punkte wie angedeutet verzerrt.

Mit diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage die Gleichung für die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeitsdichte ρ abzuleiten. Benutzen wir nämlich (9.131) in (9.126) dann folgt

$$\int_{\Delta} d^{2f}x_0 \rho(0, x_0) = \int_{\Delta} d^{2f}x_0 \rho(t, x(t, x_0)) \quad (9.134)$$

für alle Zeiten. Wir leiten nach der Zeit ab und finden, da die linke Seite zeitunabhängig ist,

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\Delta} d^{2f}x_0 \rho(t, x(t, x_0)) = \int_{\Delta} d^{2f}x_0 \frac{d}{dt} \rho(t, x(t, x_0)) = \int_{\Delta} d^{2f}x_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} \right).$$

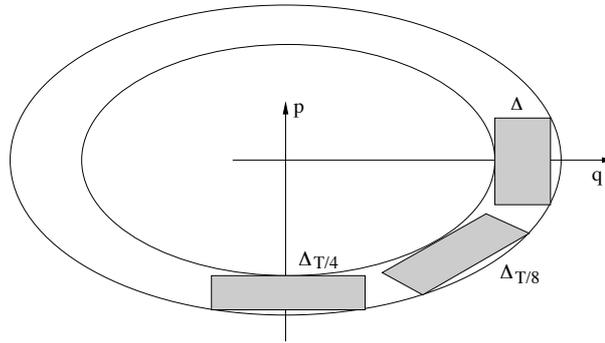


Abbildung 9.5: Der HAMILTON'sche Fluß des harmonischen Oszillators im Phasenraum .

Diese Gleichung muß für beliebige Untermengen Δ des Phasenraumes gelten, und es folgt die LIOUVILLE-Gleichung

$$\frac{d\rho}{dt} = \{\rho, H\} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \quad (9.135)$$

Sie gibt an, wie sich die Wahrscheinlichkeitsdichte an einem festen Punkt im Phasenraum ändert: die Änderung ist proportional zur POISSON-Klammer der Dichte mit der HAMILTON-Funktion.

Zur Erläuterung dieser wichtigen Gleichung schreiben wir sie um. Mit

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho \dot{x}_\alpha) = \frac{\partial\rho}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta} + \underbrace{\rho J_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}}_{=0} = \frac{\partial\rho}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta} = \{\rho, H\}$$

kann die LIOUVILLE-Gleichung (9.135) auch als *Kontinuitätsgleichung im Phasenraum* verstanden werden,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \dot{x}) = 0 \quad \text{mit} \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{q}^i \\ \dot{p}_i \end{pmatrix} \quad (9.136)$$

als Geschwindigkeit im Phasenraum. Das LIOUVILLE-Theorem läßt sich dann - analog zur Ladungserhaltung in der Elektrodynamik - als Erhaltung der Zahl der das Ensemble repräsentierenden Punkte im Phasenraum interpretieren: Nach (9.136) kann sich diese Zahl in einem Bereich Δ im Phasenraum nur dadurch ändern, daß Punkte des Schwarms hinein- bzw. herauswandern.

Für die Gleichgewichtsthermodynamik sind stationäre Verteilungen von Interesse,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \quad (9.137)$$

Für derartige Verteilungen gilt

$$\{\rho, H\} = 0, \quad (9.138)$$

und eine wichtige Lösung dieser Gleichung lautet

$$\rho = \delta(H - E), \quad (9.139)$$

was als *mikrokanonisches Ensemble* bezeichnet wird. Beim diese Ensemble ist die Gesamtenergie des Systems genau bekannt. Da hier ρ nur von der HAMILTON-Funktion abhängt, ist nach der Produktregel für die POISSON-Klammern die Gleichung (9.138) offensichtlich erfüllt.

Falls das System mit einem 'Wärmereservoir' Energie austauscht und nur seine mittlere Energie $\langle H \rangle$ bekannt ist, wird ρ zu

$$\rho \sim \exp(-H/kT), \quad (9.140)$$

was als *kanonisches Ensemble* bezeichnet wird. Hier kann T mit der makroskopischen Temperatur des Systems identifiziert werden, während k die BOLTZMANN-Konstante bezeichnet.

Daneben treten in der statistischen Physik noch weitere Ensemble auf, die jeweils dadurch charakterisiert werden, ob eine thermodynamische Observable *exakt* oder *im Mittel* erhalten ist. Zu den verschiedenen Ensembles gehören thermodynamische Potentiale, die durch LEGENDRE-Transformationen auseinander hervorgehen.

9.6 Elementare Hamilton-Jacobi Theorie

Die Koordinaten $x(t) = (q(t), p(t))$ im Phasenraum charakterisieren den Zustand des Systems zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ vollständig. Ist $x(t_0)$ bekannt, so kann die Bewegungsgleichung mit diesem Anfangspunkt eindeutig gelöst werden. Im folgenden wählen wir $t_0 = 0$.

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, läßt sich der Zusammenhang von $x(t)$ und $x(0)$ als eine spezielle, explizit *zeitabhängige* kanonische Transformation auffassen,

$$\begin{aligned} q(t) &\longrightarrow Q(t, q(t), p(t)) = Q \\ p(t) &\longrightarrow P(t, q(t), p(t)) = P. \end{aligned} \quad (9.141)$$

mit der Umkehrung

$$\begin{aligned} Q &\longrightarrow q(t, Q, P) = q(t) \\ P &\longrightarrow p(t, Q, P) = p(t). \end{aligned} \quad (9.142)$$

Wenn Q und P konstant sind, dann darf die transformierte HAMILTON-Funktion $H'(t, Q, P)$ weder von Q noch von P abhängen. Mit Hilfe einer Erzeugenden, die explizit von der Zeit abhängt, können wir sogar $H' = 0$ erreichen. Unter einer kanonischen Transformation mit Erzeugenden F transformiert die HAMILTON-Funktion gemäß

$$H \longrightarrow H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (9.143)$$

Die eigentliche Aufgabe besteht jetzt also darin, eine geeignete Erzeugende der gesuchten kanonischen Transformation zu finden, also derjenigen Transformation, welche das zeitlich veränderliche $x(t)$ auf seinen Anfangswert $x(0)$ zurückführt.

9.6.1 Die Prinzipalfunktion $F_2(t, q, P)$

Wir wählen eine Erzeugende vom Typ F_2 , d.h. ein $F_2(t, q, P)$. Dann ist

$$p_i = \frac{\partial F_2(t, q, P)}{\partial q^i} \quad \text{und} \quad Q^i = \frac{\partial F_2(t, q, P)}{\partial P_i}. \quad (9.144)$$

Dies setzen wir in den Ausdruck für die transformierte HAMILTON-Funktion $H'(t, Q, P)$ ein, die ja identisch verschwinden soll:

$$H'(t, Q, P) = H(t, q, p) + \frac{\partial F_2(t, q, P)}{\partial t} = H\left(t, q, \frac{\partial F_2}{\partial q}\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0. \quad (9.145)$$

Wir erhalten also eine nichtlineare partielle Differentialgleichung für F_2 , die sogenannte HAMILTON-JACOBI-Gleichung

$$H\left(t, q^1, \dots, q^f, \frac{\partial F_2}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q^f}\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0. \quad (9.146)$$

Die Lösungen sind Funktionen der $f + 1$ Variablen (t, q^1, \dots, q^f) und hängen von $f + 1$ frei wählbaren Integrationskonstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_{f+1}$ ab. Da in (9.144) nur Ableitungen von F_2 vorkommen, ist eine dieser Konstanten rein additiv, $F_2 = F_2(t, q, \alpha_1, \dots, \alpha_f) + \alpha_{f+1}$. Die additive Konstante α_{f+1} ist nicht interessant und kann Null gesetzt werden. Es bleiben f Integrationskonstanten übrig. Wir wählen eine solche Darstellung der Lösung, daß die Konstanten gerade die (konstanten) kanonischen Impulse P_i sind. Die so gewonnene Funktion F_2 nennt man *Prinzipalfunktion* oder auch HAMILTON'sche *Wirkungsfunktion*. Man benutzt für sie traditionell den Buchstaben S , d.h.

$$F_2 = S(t, q^1, \dots, q^f, \alpha_1, \dots, \alpha_f). \quad (9.147)$$

Nun wollen wir einen Lösungsweg der HAMILTON-JACOBI-Gleichung betrachten. Wir gehen von der Gleichung (9.145) aus

$$H\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad S = S(t, q, P), \quad (9.148)$$

d.h. S soll gerade so bestimmt werden, daß $H'(t, Q, P) = 0$ gilt und die neuen Orte und Impulse damit zeitunabhängig werden,

$$\dot{Q}^i = 0, \quad i = 1, \dots, f \quad (9.149)$$

$$\dot{P}_i = 0, \quad i = 1, \dots, f. \quad (9.150)$$

Üblicherweise bezeichnet man die Konstanten $\alpha_i \equiv P_i(t) = P_i(0)$. Wenn man die HAMILTON-JACOBI-Gleichung gelöst hat, dann löst man die Beziehungen

$$Q^i = \frac{\partial S(t, q, P)}{\partial P_i} = \text{const} \quad (9.151)$$

nach den $q^i(t)$ auf, d.h. man erhält $q^i(t)$ als Funktion der Anfangswerte Q^i und P_i . Die $p_i(t)$ ergeben sich aus

$$p_i = \frac{\partial S(t, q, P)}{\partial q^i}, \quad (9.152)$$

wobei die $q^i(t)$ entsprechend dem vorherigen Schritt durch Q und P und t ausgedrückt werden.

Die Erzeugende $S(t, q, P)$ als Lösung der zeitabhängigen HAMILTON-JACOBI-Gleichung läßt sich physikalisch interpretieren. Hierzu betrachten wir deren totale Zeitableitung, die mit der LAGRANGE-Funktion identifiziert werden kann:

$$\frac{dS(t, q, P)}{dt} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial S}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial S}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) + \frac{\partial S}{\partial t} \stackrel{(9.152, 9.150, 9.148)}{=} \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}^i - H = L. \quad (9.153)$$

Die Integration von (9.153) zeigt, daß die Erzeugende $S(t, q, P)$ bis auf eine Integrationskonstante die Wirkung entlang einer Bahnkurve darstellt. Deshalb wird sie häufig auch als HAMILTONsche *Wirkungsfunktion* bezeichnet.

Es stellt sich die Frage: Wie kann man die HAMILTON-JACOBI-Gleichung lösen? Zunächst betrachten wir ein abgeschlossenes System mit $H = H(q, p)$. Wir fordern

$$H(q, p) = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (9.154)$$

Diese Gleichung wird gelöst durch den Ansatz

$$S(t, q, P) = W(q, P) - H'(P)t. \quad (9.155)$$

Hier ist H' die Separationskonstante, die den konstanten Wert der HAMILTON-Funktion $H(q, p)$ hat. Bei einem konservativen System ist sie gleich der Energie. Die Funktion $W(q, p)$ heißt *charakteristische Funktion*. Sie gehorcht der *zeitunabhängigen* HAMILTON-JACOBI-Gleichung

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = H'(P). \quad (9.156)$$

Die Transformationsgleichungen (9.151) und (9.152) lauten

$$Q^i = \frac{\partial W(q, P)}{\partial P_i} - \frac{\partial H'(P)}{\partial P_i} t, \quad i = 1, \dots, f \quad (9.157)$$

$$p_i = \frac{\partial W(q, P)}{\partial q^i}. \quad i = 1, \dots, f. \quad (9.158)$$

Es gibt keinen leicht überschaubaren Satz von Bedingungen dafür, daß sich diese Gleichung (9.156) leicht⁷ lösen läßt.

Auch die charakteristische Funktion $W(q, P)$ hat eine physikalische Bedeutung, die derjenigen der Wirkungsfunktion $S(t, q, P)$ sehr ähnlich ist. Für die totale Zeitableitung erhalten wir

$$\frac{dW(q, P)}{dt} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial W}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial W}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) \stackrel{(9.150, (9.158))}{=} \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}^i, \quad (9.159)$$

so daß die Zeitintegration ergibt

$$W(q, P) = \int \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}^i dt = \sum_{i=1}^f \int p_i dq^i. \quad (9.160)$$

⁷Was immer das heißt.

9.6.2 Beispiele

Nichtwechselwirkende 1-dimensionale Systeme: Das Verfahren von HAMILTON und JACOBI zur Lösung mechanischer Probleme scheint auf den ersten Blick nur von geringer praktischer Bedeutung zu sein. Anstatt der $2f$ gewöhnlichen HAMILTON-Gleichungen muß man die partielle HAMILTON-JACOBI-Gleichung lösen und nichtlineare partielle Differentialgleichungen sind im Allgemeinen schwerer zu lösen als gewöhnliche Differentialgleichungen. Unter gewissen Bedingungen ist es jedoch möglich, die einzelnen Variablen in der HAMILTON-JACOBI-Gleichung zu separieren, so daß die Lösung stets auf Quadraturen zurückgeführt werden kann. Praktisch ist das HAMILTON-JACOBI-Verfahren nur dann von Nutzen, wenn sich eine solche Separation erreichen läßt.

Eine Separation der Variablen ist zum Beispiel möglich, wenn die HAMILTON-Funktion eine Summe von HAMILTONfunktionen $H_i(q^i, p_i)$ ist, die jeweils nur von einer Koordinate und dem zugehörigen konjugierten Impuls abhängen,

$$H(q, p) = \sum_i H_i(q^i, p_i). \quad (9.161)$$

Durch den Separationsansatz,

$$W(q, P) = \sum_i W_i(q^i, P) \quad (9.162)$$

erhält man dann ungekoppelte Gleichungen für jedes q^i . Wichtig dabei ist, daß die einzelnen W_i von *allen* P_j abhängen können, also nicht nur von P_i abhängen. Setzen wir unseren Separationsansatz in (9.156) ein und benutzen (9.159), so erhalten wir

$$\sum_i H_i\left(q^i, \frac{\partial W_i}{\partial q^i}\right) = H'(P). \quad (9.163)$$

Wir greifen einen beliebigen Term in der Summe heraus, z.B. denjenigen mit $i = j$,

$$H_j\left(q^j, \frac{\partial W_j}{\partial q^j}\right) = H'(P) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^f H_i\left(q^i, \frac{\partial W_i}{\partial q^i}\right).$$

Die beiden Seiten hängen von verschiedenen Variablen ab und müssen daher konstant sein. Wir nennen diese Konstanten jeweils $h_j(P)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die einzelnen Separationskonstanten $h_j(P)$ mit den neuen Impulsen identifizieren,

$$h_i(P) = P_i, \quad i = 1, \dots, f. \quad (9.164)$$

wobei deren Summe gemäß (9.163) die Energie des Systems ergibt,

$$H'(P) = \sum_{i=1}^f P_i. \quad (9.165)$$

Damit ergeben sich die entkoppelten Differentialgleichungen

$$H_i\left(q^i, \frac{\partial W_i(q^i, P)}{\partial q^i}\right) = P_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^f P_i = H'(P). \quad (9.166)$$

Diese f Differentialgleichungen hängen jeweils nur von einer Ortskoordinate ab, wohl aber von allen Konstanten P_i .

Beispiel: Eindimensionale Potentialprobleme. Wir untersuchen die HAMILTON-JACOBI-Gleichung für das eindimensionale Potentialproblem mit HAMILTON-Funktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q). \quad (9.167)$$

Da die HAMILTON-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt läßt sich die Zeitabhängigkeit abspalten. Die entsprechende zeitunabhängige HAMILTON-JACOBI-Differentialgleichung für die Prinzipalfunktion lautet

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + V(q) = H'(P), \quad (9.168)$$

wobei die Separationskonstante $H'(P)$ als Energie des Systems mit dem neuen Impuls als Erhaltungsgröße identifiziert wurde. Wir setzen $H'(P) = P$. Für eindimensionale Systeme ist die HAMILTON-JACOBI-Gleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung und läßt sich lösen,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m[P - V(q)]} \implies W(q) &= \int \sqrt{2m[P - V(q)]} dq \\ S &= \int \sqrt{2m[P - V(q)]} dq - Pt. \end{aligned} \quad (9.169)$$

Die Ableitung dieser Erzeugenden Funktion nach dem neuen Impuls liefert die neue Koordinate

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \int \frac{mdq}{\sqrt{2m[P - V(q)]}} - t \quad (9.170)$$

und ableiten nach der alten Koordinate den alten Impuls,

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2m[P - V(q)]}. \quad (9.171)$$

Hierbei sind Q und P Integrationskonstanten. Auflösen der Gleichungen (9.170) und (9.171) nach den alten Koordinaten und Impulsen ergibt dann die Lösung der Bewegungsgleichungen.

Für den *harmonischen Oszillator* mit

$$V = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

ist diese Auflösung sogar analytisch möglich. Das Integral (9.170) findet sich in jeder besseren Formelsammlung⁸

$$Q = \frac{1}{\omega} \arcsin \left(q \sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} \right) - t. \quad (9.172)$$

Wir können jetzt leicht nach der alten Koordinate q auflösen,

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \omega Q). \quad (9.173)$$

⁸z.B. in Bronstein.

Für p in (9.171) erhalten wir dann

$$p = \sqrt{2mP - 2mP \sin^2(\omega t + \omega Q)} = \sqrt{2mP} \cos(\omega t + \omega Q). \quad (9.174)$$

Die Funktionen $q(t)$ und $p(t)$ in (9.173) und (9.174) beschreiben Bahnen des harmonischen Oszillators im Phasenraum. Dabei sind die Integrationskonstanten Q und P proportional zur Phase und Amplitude der Schwingungen des Oszillators.

9.6.3 Wirkungs- und Winkelvariablen

Bisher wurde die charakteristische Funktion $W(q, P)$ nur als Bestandteil der HAMILTON'schen Wirkungsfunktion $S(t, q, P)$ betrachtet. Wir können aber $W(q, P)$ als Erzeugende einer eigenen, zeitunabhängigen kanonischen Transformation auffassen. Es folgt mit (9.143) und (9.156), daß die neue HAMILTON-Funktion folgende Form hat

$$H'(Q, P) = H\left(q, \frac{\partial W(q, P)}{\partial q^i}\right) + \underbrace{\frac{\partial W(q, P)}{\partial t}}_{=0} = H'(P_1, \dots, P_f), \quad (9.175)$$

so daß die verallgemeinerten Koordinaten Q^i zyklisch sind. Die neuen kanonischen Gleichungen

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial H'(P)}{\partial P_i} \quad \text{und} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'(P)}{\partial Q^i} = 0 \quad (9.176)$$

lassen sich unmittelbar integrieren

$$Q^i(t) = \frac{\partial H'}{\partial P_i} t + Q^i, \quad P_i(t) = P_i, \quad i = 1, \dots, f. \quad (9.177)$$

Die zu den zyklischen Koordinaten Q^i kanonisch konjugierten Impulse sind Erhaltungsgrößen. Damit haben wir eine kanonische Transformation auf *Wirkungs- und Winkelvariablen* gefunden. Diese werden häufig über die Diskussion (zeitlich oder räumlich) periodischer Bewegungen eingeführt. Derartige Bewegungen lassen sich als Bewegungen auf Kreisen oder höherdimensionalen Tori darstellen. Die Winkelvariablen, für die man in der Regel den Buchstaben θ benutzt, entsprechen Polarwinkeln. Die Wirkungsvariablen, die man üblicherweise mit J bezeichnet, entsprechen den von den Bahnen im Phasenraum eingeschlossenen Flächen. Wesentlich ist, daß die transformierte HAMILTON-Funktion $H'(\theta, J)$ nicht mehr von den Winkelvariablen abhängt, $H' = H'(J)$. Daher sind in (9.175) die neuen Koordinaten Q^i Winkelvariablen und die neuen Impulse P_i Wirkungsvariablen. Die Bewegungsgleichungen für die Wirkungsvariablen lauten

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial H'}{\partial \theta^i} = 0 \implies J_i = J_i(0) = \text{const.} \quad (9.178)$$

Für die θ^i erhalten wir zunächst

$$\dot{\theta}^i = \frac{\partial H'}{\partial J_i} \equiv \omega_i. \quad (9.179)$$

Da die J_i aber zeitlich konstant sind, sind auch die ω_i zeitlich konstant. Damit wird

$$\theta^i(t) = \omega_i(J) t + \theta^i(0). \quad (9.180)$$

Die Bewegung ist also durch $2f$ Konstanten, die J_i und die $\theta^i(0)$, charakterisiert. Ein mechanisches System für das sich eine Transformation auf Wirkung- und Winkelvariable finden läßt, heisst *integrabel*. Anstelle von integrabel verwendet man auch die Bezeichnung *lösbar*.

Integrabel sind zum Beispiel

- alle Systeme mit nur einem Freiheitsgrad und hinreichend oft differenzierbarer HAMILTON-Funktion,
- alle System mit linearen Bewegungsgleichungen,
- alle nichtlinearen Systeme, die sich auf entkoppelte Systeme mit einem Freiheitsgrad transformieren lassen,
- die Systeme, die in vielen Lehrbüchern als Übungsaufgaben gegeben werden, und für die explizite Lösungen gefunden werden sollen.

Im nächsten Semester wird eine Vorlesung Mechanik II gelesen, in der allgemeinere dynamische Systeme behandelt werden. Trotz der Schönheit und Eleganz der HAMILTON'schen Mechanik sollte man nicht vergessen, daß diese nur für reibungsfreie Systeme gilt. In der Menge der makroskopischen Systeme, deren Bewegung sich durch die Wirkung von Kräften beschreiben läßt, stellen die HAMILTON'schen Systeme eine kleine Teilmenge dar. Die moderne Theorie der dynamischen Systeme ist viel umfassender als die HAMILTON'sche Theorie. Andererseits ist Reibung ein Begriff, der in wirklich fundamentalen Theorien der Physik keinen Platz hat. Alle fundamentalen Wechselwirkungen der Physik, also Elektrodynamik, schwache und starke Wechselwirkung und die Gravitation, sind reibungsfrei und passen wunderbar in das Gebäude der HAMILTON'schen Mechanik.

In dieser Vorlesung wurde die *relativistische Mechanik* nicht behandelt. Dies wurde nur teilweise aus Zeitgründen unterlassen. An unserer Fakultät werden regelmäßig Wahlvorlesungen über spezielle Relativitätstheorie gelesen, in denen die relativistische Mechanik einen breiten Raum einnimmt.

Literaturverzeichnis

- [1] P. Strathern, *Archimedes & der Hebel*, Fischer Taschenbuch Verlag, Frankfurt, 1999.
- [2] J. Hoppe, *Johannes Kepler*, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1976.
- [3] P. Strathern, *Newton & die Schwerkraft*, Fischer Taschenbuch Verlag, Frankfurt, 1998;
R.S. Westfall, *Isaac Newton. Eine Biographie*, Spektrum, Heidelberg, 1996.
- [4] C. Seelig, *Albert Einstein. Leben und Werk eines Genies unserer Zeit*, Zürich 1960; A. Pais, *Raffiniert ist der Herrgott ...*, Braunschweig 1986; A. Fölsing, *Albert Einstein*, Frankfurt/Main 1993.
- [5] V. Szebehely, *Theory of Orbits*, Academic Press, 1967; Ch. Marchal, *The Three-Body Problem*, Elsevier, 1990.
- [6] K.F. Sundman, *Mémoire sur le problème de trois corps*, Acta Math. 36 (1912) 105-179.
- [7] D. Gruntz und J. Waldvogel, *Orbits in the Planar Three-Body Problem*, in *Solving Problems in Scientific Computing using Maple and Matlab*, 3rd edition, Springer Verlag 2002, ed. W. Gander und Jiří Hřebiček.
- [8] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course in Modern Analysis*, 4th edition, CUP, 1990; F. Tölke, *Praktische Funktionenlehre*, vierter Band: *Elliptische Integralgruppen und Jacobi elliptische Funktionen im Komplexen*, Springer, Berlin, 1967
- [9] F. Klein und A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels*, Teubner, Leipzig, 1910;
V. Golubev, *Lectures on Integration of the Equations of Motion of a Rigid Body about a Fixed Point*, State Publ. House of Theoretical Technical Literature, Moskau, 1953;
K. Magnus, *Kreisel: Theorie und Anwendungen*, Springer Verlag, 1971;
E.T. Whittaker, *A Treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge University Press, 1993;
E. Leimanis, *The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point*, Springer Verlag, 1965;
M. Audin, *Spinning Tops*, Cambridge University Press, 1966;
H. Dullin, *Die Energieflächen des Kowalewskaja-Kreisels*, Dissertation, Bremen, 1994;
D. Lewis, T. Ratiu, J. Simon und J. Marsden, *The heavy top: a geometric treatment*, Nonlinearity **5** (1992) 1-48
- [10] E. Klingbeil, *Variationsrechnung*, BI-Wiss.-Verlag, Mannheim, Zürich, 1988
U. Brechtken-Manderscheid, *Einführung in die Variationsrechnung*, Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt, 1983

- [11] J.E. Marsden und T.S. Ratiu, *Einführung in die Mechanik und Symmetrie*, Springer, 2000.
- [12] E.T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, 4. Ausgabe, Cambridge University Press, 1993.

Index

- Äquipotentialfläche, 62
- Äquivalenzprinzip, 48
 1. Newtonsches Axiom, 18
 2. Newtonsches Axiom, 46
 3. Newtonsches Axiom, 48
- Amplitude, 67
- Anfangswertproblem, 210
- Attraktor, 83

- Bahnkurve, 26, 34
- Baker-Hausdorff Formel, 75
- Banachraum, 211
- Basis
 - kartesische, 22
 - orthonormierte, 22
- Basisvektoren
 - kontravariante, 38
 - kovariante, 38
- Beschleunigung, 34, 36, 47
- Bezugssystem
 - beschleunigtes, 49
- Binormaleneinheitsvektor, 37
- Bogenlänge, 35
- Brachystochrone, 204

- Chandlersche Periode, 152
- charakteristische Funktion, 247
- charakteristische Gleichung, 71
- charakteristisches Polynom, 77
- Coriolis-Kraft, 52
- Coulombkraft, 107
- Coulombproblem, 107

- d'Alembertsche Prinzip, 175
- Dämpfung
 - kritische, 72
 - schwache, 72
 - starke, 72
- Deviationsmomente, 140
- Dielektrizitätskonstante, 107
- Differentialgleichungssystem, 73, 93

- Differentialoperatoren, 41
 - in Kugelkoordinaten, 45
 - in Zylinderkoordinaten, 45
- Divergenz, 41
 - in Kugelkoordinaten, 45
 - in Zylinderkoordinaten, 45
- Drehimpuls, 56
 - Erhaltung, 97
 - im Schwerpunktsystem, 97
 - relativer, 105
- Drehimpulserhaltung, 198
- Drehimpulserhaltungssatz, 57
- Drehimpulssatz, 56, 96
- Drehmoment, 56
- Drehung
 - aktive, 30
 - eigentliche, 30
 - passive, 30
 - uneigentliche, 30
- Drehungen, 30
- Dreikörperproblem, 125
 - ebenes, 130
 - eingeschränktes, 128
 - exakte Lösungen, 126
 - numerische Lösung, 130

- Eichtransformationen, 192, 210
- Eigenfrequenz, 66, 104
- Eigennilpotente, 90
- Eigenprojektor, 90
- Eigenraum
 - verallgemeinerter, 80
- Eigenschwingungen, 104
- Ellipse, 110
- Ellipsenbahnen, 111
- elliptische Funktionen, 153
 - Additionstheoreme, 156
- Energieerhaltung
 - in Lagrangeschen Formalismus, 187
- Energiefläche, 226
- Energiesatz, 59, 60, 98, 99

- mit Zwangsbedingungen, 176
- Ensemble
 - kanonisches, 245
 - mikrokanonisches, 245
- Erde
 - rotierende, 53
- Erhaltungs
 - größen, 34
 - sätze, 56
- Erhaltungsgrößen, 196
- Erwartungswert, 241
- erzeugende Funktion, 234, 235
 - $F_1(t, q, Q)$, 236
 - $F_2(t, q, P)$, 237
 - $F_5(t, q, p)$, 235
- erzeugende Funktionen
 - Überblick, 239
- Euklidische Geometrie, 20
- Eulergleichung, 203, 206, 207
- Eulersche
 - Periode, 151
 - Gleichungen, 152
 - Winkel, 137
- Exzentrizität
 - lineare, 110
 - numerische, 110
- Fixpunkt
 - asymptotisch stabiler, 83
 - instabiler, 83
- Flächengeschwindigkeit, 57
- Flächensatz, 58
- Fluß, 224
- Folgenräume, 212
- Fréchetableitung, 212
- Freiheitsgrade, 179
- Frenetsche Formeln, 37
- Frequenz, 67
- Fundamentallösungen, 71
- Fundamentalschwingungen, 104

- Gâteauxableitung, 213
- Galileigruppe, 32
- Galileisches Relativitätsprinzip, 32
- Galileitransformation, 32
 - spezielle, 28
- Gangpolkegel, 149
- geodätische Linien, 203
- Gesamtdrehimpuls, 96
- Gesamtenergie, 99

- Gesamtimpuls, 94
- Geschwindigkeit, 27, 34
- Gewicht, 52
- Gleichgewicht, 65
 - instabiles, 67
 - stabiles, 66
- Gleichzeitigkeit, 19, 24
- Gradient, 41
 - in Kugelkoordinaten, 45
 - in Zylinderkoordinaten, 45
- Gravitation, 107
- Gravitationskonstante, 107
- Gravitationskraft, 25, 107

- Halbparameter, 110
- Hamilton-Jacobi-Gleichung, 246
- Hamilton-Jacobi-Theorie, 245
- Hamiltonfunktion, 217
- Hamiltonsche Bewegungsgleichungen, 217, 218
- Hamiltonsche Mechanik, 216
- Hamiltonsches Prinzip, 201, 209
- Hamiltonsches Vektorfeld, 225
- harmonischer Oszillator, 65
- Hauptachsen, 142
- Hauptnormaleneinheitsvektor, 36
- Hauptträgheitsmomente, 142
- Hodographen, 36
- Homogenität der Zeit, 187
- Homogenität des Raumes, 199
- Hyperbel, 111

- Impuls, 46
 - kanonischer, 217, 223
 - mechanischer, 223
- Impulserhaltung, 95, 199
- Impulssatz, 47, 56, 94
- Inertialsysteme, 25
- integrables System, 251
- Integrale der Bewegung, 100
- isoperimetrische Probleme, 208
- Isotropie des Raumes, 198

- Jacobi-Identität, 227
- Jacobische Funktionen, 153
- Jordan
 - Basis, 79
 - Block, 79
 - Matrix, 79

- körperfestes System, 136

kanonische Invariante, 240
 kanonische konjugierte Variable, 218
 kanonische Transformation
 eingeschränkte, 230
 kanonische Transformationen, 230
 Kegelschnitte, 110
 Kepler Gesetz
 drittes, 111
 zweites, 58
 Keplerproblem, 107
 kinetische Energie, 60
 Koordinate
 zyklische, 184
 Koordinaten
 kartesische, 22
 krummlinige, 37
 verallgemeinerte, 179
 zyklische, 183
 Krümmung, 36
 Krümmungsradius, 36
 Kraft, 46, 47
 äußere, 48, 93
 dissipative, 62, 99
 innere, 93
 konstante, 63
 Kraftstoß, 117
 Kreisbahn, 111
 Kreisel, 134, 188
 kräftefreier, 147, 148
 schwerer, 190
 schwerer symmetrischer, 163
 symmetrischer, 146
 unsymmetrischer, 146
 unsymmetrischer freier, 153
 Kreisfrequenz, 67
 Kugelkoordinaten, 44
 Kugelmotiv, 146

 Längenmessung, 21
 Lagrange-Funktion, 192
 Lagrange-Gleichungen
 erster Art, 175
 zweiter Art, 179, 182
 Lagrangefunktion, 182
 Lagrangesche Mechanik, 179
 Lagrangesche Multiplikatoren, 168
 Elimination, 177
 Lagrangegleichungen
 Forminvarianz, 195
 Lagrangesche Multiplikatoren, 208

 Laplaceoperator, 43
 in Kugelkoordinaten, 45
 in Zylinderkoordinaten, 45
 Lebesgueräume, 212
 Legendre-Transformation, 220
 Leistung, 60
 Levi-Civita Tensor, 40
 lex
 prima, 18
 secunda, 46
 tertia, 48
 Lie-Algebra, 229
 Liouville-Gleichung, 244
 Liouvillescher Satz, 240
 Locus, 191
 Lorentzkraft, 60, 193

 Maßstab, 20
 Masse
 reduzierte, 104
 schwere, 48
 träge, 47
 Massendichte, 95
 Massenmittelpunkt, 94
 Massenpunkt, 26
 Matrix
 Exponentialfunktion, 74
 Mehrkörpersysteme, 93
 metrischer Tensor, 39

 Nebenbedingung
 siehe Zwangsbedingung, 166
 Niveaufläche, 62
 Nordpol
 geometrischer, 151
 kinematischer, 151
 Norm, 211
 Normalkoordinaten, 66, 79
 Normalschwingungen, 104
 normierter Raum, 211
 Nutation, 149, 151, 191

 orthogonale Gruppe, 30
 Ortsvektor, 22
 Oszillator
 harmonischer, 65

 parabolische Bahn, 111
 Pendel
 gekoppelte, 101

physikalisches, 134
 sphärisches, 167, 179
 sympathischer, 102
 Periodendauer, 67
 Phase, 67
 Phasen
 bahn, 67, 68
 portrait, 68
 verschiebung, 86
 Phasenraum, 218, 224
 Planetenbahnen
 gebundene, 111
 Poincaré Konstruktion, 147
 Poissonklammer, 226, 227
 Polbahn, 148
 Potential, 61
 Coulomb, 108
 effektives, 105
 Newtonsches, 108
 Potentialkraft, 60, 98
 potentielle Energie, 61
 Präzession
 reguläre, 192
 Präzessionskegel, 150
 Prinzipalfunktion, 245, 246
 Produkt
 schiefes, 23
 skalares, 21
 Produktregel, 227
 Pseudovektor, 58
 Punktteilchen, 26

 Rückwirkung, 93
 Randwertproblem, 210
 Rastpolkegel, 149, 150
 Raum
 absoluter, 19
 Raumspiegelung, 30
 Raumzeit-Modelle, 19
 Reibungskraft, 68
 Relativgeschwindigkeit, 118
 Relativkoordinate, 118
 Relaxationszeit, 72, 86
 Resolvente, 88
 Resolventengleichung, 89
 Resonanz, 86
 Rollpendel, 183
 Rotation, 42
 in Kugelkoordinaten, 45
 in Zylinderkoordinaten, 45

 Rutherfordstreuung, 123

 Säkulargleichung, 102
 Satz
 Existenz einer Jordan-Basis, 79
 von Cayley-Hamilton, 77
 von Euler, 31
 von Gauss, 41
 von Liouville, 240
 von Stokes, 42
 Satz von Noether, 197
 Satz von Steiner, 144
 Scheinkraft, 49, 51
 Schmiegeebene, 37
 Schwebung, 103
 Schwerpunkt, 94
 Schwerpunktsatz, 95, 104
 Schwerpunktsystem, 95, 135
 Schwingungen
 erzwungene, 83
 Schwungrad, 141
 Skalarprodukt, 21
 Spatprodukt, 23
 Spektraldarstellung, 92
 Spektralzerlegung, 91
 spezielle orthogonale Gruppe, 30
 Spurbahn, 148
 Spurkegel, 149
 Stabilität des Kreisels, 152
 starre Körper, 133
 Bewegungen von, 135
 Stoßparameter, 113
 Streuprozeß, 118
 Streuung
 elastische, 117
 Streuwinkel, 113, 119
 Stromdichte, 121
 Superpositionsprinzip, 48
 Symmetrien, 34, 196
 symplektische Gruppe, 231
 symplektische Matrix, 231
 symplektische Metrik, 225

 Teilchenbahnen
 in krummlinigen Koordinaten, 43
 Thetafunktionen, 155, 157
 Torsion einer Kurve, 37
 Trägheitskraft, 51
 Trägheitsmoment, 140
 Trägheitsmomente

- Beispiele, 144
- Trägheitsprodukte, 140
- Trägheitstensor, 139
- Trajektorie, 224
- Translation
 - räumliche, 28
 - zeitliche, 28

- Variation, 202
- Variationsrechnung, 201
- Vektorprodukt, 23
- Vektorraum, 21
 - Basis, 21
- virtuelle Verrückung, 175
- Volumenform, 40

- Windung einer Kurve, 37
- Winkelgeschwindigkeit, 50
- Winkelmessung, 21
- Winkelvariable, 250
- Wirkung, 209
- Wirkungsfunktion, 246
- Wirkungsquerschnitt, 121
 - differentieller, 122
 - totaler, 122
- Wirkungsvariable, 250

- Zeit
 - absolute, 19
- Zeitbegriff, 24
- Zentralkraft, 57, 96
- Zentrifugalbarriere, 106
- Zentrifugalkraft, 52
- Zentrifugalmomente, 140
- Zentripedalkraft, 52
- Zerfall, 114
- Zwangsbedingung, 166
 - äußere, 175
 - anholonome, 173
 - holonome, 173
 - innere, 175
 - rheonome, 174
 - skleronome, 174
- Zwangskraft, 166, 168
 - äußere, 167
 - innere, 167
- Zweikörperproblem, 104
- Zykloide, 205
- Zylinderkoordinaten, 44