

# Gebrauchsanweisung

zum

## Harmonischen Analysator

nach Dr. ing. O. Mader.

Zweck und Theorie des Analysators erklärt der beigegebene Sonderabdruck aus der „Elektrotechnischen Zeitschrift“, auf dessen Figuren sich auch diese Anweisung bezieht.

**1. Aufstellung des Analysators.** Die Zeichnung, die die zu untersuchende Kurve enthält, wird auf einem nicht zu kleinen Reissbrette oder einer Tischplatte mit Reissnägeln befestigt. Dann markiert man Anfangs- und Endpunkt einer Periode auf der zu untersuchenden Kurve und zieht eine Basislinie ( $a$  in Fig. 1), sofern eine solche, wie es meist der Fall, nicht schon vorhanden ist. Dann ist die mit einer Rille versehene Laufschiene so in Richtung der Ordinatenachse zu legen, dass die Bahn des Drehpunktes des Winkelhebels des Analysators (K in Fig. 1) die Mittelsenkrechte auf die Basislinie bildet ( $x = a/2$ ). Diese Einstellung wird durch eine durchsichtige, mit einem Massstab versehene Einstellschiene sehr erleichtert. Man legt diese Schiene mit ihrer profilierten Führung in die Leitschienerille und bringt dann ihren Massstabnullpunkt mit der Mitte der Basislinie zur Deckung, wobei die Kante der Einstellschiene in Richtung der Basislinie laufen muss.

Zu beachten ist, dass die Laufschiene so weit nach oben gelegt wird, dass später für den Analysatorwagen genügend Bewegungsfreiheit bleibt; dabei kann die Laufschiene ruhig ein Stück über das Reissbrett hinausragen. Die richtige Lage der Laufschiene wird durch die mit Stahlspitzen versehenen, in die Löcher der Laufschiene passenden Zapfen gesichert.

Nunmehr stellt man vorsichtig den Wagen mit seinen Laufrädern in die Rille der Laufschiene, wobei die Laufräder (oberer Wagen) der Zahnstange nicht aus ihren Laufrillen kommen dürfen.

Zur Einstellung der richtigen Basislänge ist mit Hilfe des auf dem langen Arm des Winkelhebels befindlichen Massstabes der Fahrstift so zu verschieben, dass seine Spitze in den durch die Anschläge bestimmten Endlagen des Winkelhebels auf der Anfangs- bzw. Endordinate der Basislinie steht. Bei rauhem Papier kann der spitze Fahrstift durch Herabschrauben der Traghülse am Ende des Winkelhebels vom Papier entfernt gehalten werden.

**2. Einsetzen der Zahnräder.** Wenn wir die Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$ , der Glieder  $A_n \cos \left( n \cdot \frac{2 \pi x}{a} \right)$  und  $B_n \sin \left( n \cdot \frac{2 \pi x}{a} \right)$  suchen wollen, so stecken wir die Achse des mit  $n$  (z. B. wenn  $n = 3$ , mit 3) gezeichneten Zahnrades in das mit  $n$  (3) bezeichnete Loch. Dabei muss das Zahnrad so in die Zahnstange eingreifen, dass der Strich an der Zahnstange mit dem Strich an dem Zahnrad zusammen trifft.

Bei  $n = 7$  und  $9$  muss noch ein Doppelzahnrad zwischengeschaltet werden, dessen Achsenloch durch die auf dem Doppelrad angegebene Zahl (5) angegeben ist. Das Einsetzen des Doppelzahnrades erfolgt in gleicher Weise wie bei den einfachen Rädern so, dass der Strich an der Zahnstange mit dem Strich am Zahnrad zusammen trifft. (Abb. 5). Darauf fährt man mit dem Fahrstift ( $F$  Abb. 1) nach rechts, bis das Einsetzen des Rades 7 bzw. 9 so möglich ist, dass der Strich von 7 bzw. 9 mit dem des Doppelrades zusammen trifft. (Abb. 6 und 7.) Nach Zurückdrehen des Fahrstiftes ( $F$ ) in die linke Anschlagstellung befinden sich die Einsatzmarken  $\sin$  und  $\cos$  in der richtigen Lage, um die Messung beginnen zu können.

**Das Einsetzen der Zahnräder kann nur bei der Anfangsstellung F (Fig. 1) erfolgen.**

**3. Planimeteraufstellung.** Auf das beigegebene Holzpodium wird mit Reissnägeln ein Blatt feinkörniges, nicht ganz glattes Zeichenpapier gespannt. Podium und ein gewöhnliches Polarplanimeter werden neben dem Analysator so, wie es Fig. 3 zeigt, aufgestellt und der Fahrstift des Planimeters in das mit  $c$  bezeichnete Loch des Zahnrades gestellt, wenn man den Koeffizienten  $A_n$  eines Cosinusgliedes, in das mit  $s$  bezeichnete Loch, wenn man den Koeffizienten  $B_n$  eines Sinusgliedes suchen will.

Das Podium muss so aufgestellt werden, dass die Planimeterrolle, auch wenn man das grösste Zahnrad benutzt, bei dem späteren Umfahren der Kurve nie das Zeichenpapier verlässt. **Der zu verwendende Planimeter ist auf die Richtigkeit seiner Angaben zu prüfen, sofern man genaue Resultate erzielen will.**

**4. Ausführung der Messung.** Man stellt den Fahrstift des Analysators ( $F$ ) auf den Anfangspunkt der Kurvenperiode, und liest am Planimeter ab. Dann fährt man auf der Kurve von links nach rechts (Fig. 1) und dann auf der Basislinie von rechts nach links bis zum Anschlag zurück.

Der Fahrstift muss nun wieder auf dem Ausgangspunkt stehen, worauf man am Planimeter wieder abliest. Die Differenz der beiden Ablesungen gibt direkt nach Grösse und Vorzeichen den gesuchten Koeffizienten, wobei 1 qem, abgelesen am Planimeter = 0,1 cm Amplitude bedeutet.

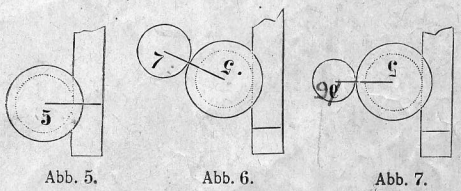
**Beispiel.**

Gesucht  $A_3$  für  $n = 3$ , also  $A_3$  zu  $A_3 \cos 3 \cdot \left( \frac{2 \pi x}{a} \right)$

Eingesetzt: Rad 3, die Planimeterspitze in  $c$ .

Anfangsablesung am Planimeter . . . . .	7940
Endablesung am Planimeter . . . . .	7339
Differenz . . . . .	<u>0601</u>

Dann ist  $A_3 = -06,01$  cm im Massstab der Zeichnung. Die Basislänge  $a$  ist gleichgültig.



**5. Behandlung des Analysators.** Der Analysator sollte möglichst wenig an seinen blanken Stellen mit den Händen berührt werden, vor allem nicht die blanken Stahlrollen, die sonst rosten.

Der Winkelhebel und die Zahnstange sind vor Verbiegung zu schützen, da dadurch die Genauigkeit der Messung leidet. Alle Teile sollten immer im geschlossenen Kasten aufbewahrt bleiben.

### Ein einfacher harmonischer Analysator mit beliebiger Basis.

Von O. Mader, München.

In der angewandten Mathematik und Physik, vor allem aber im Maschinen- und Schiffbau und in der Elektrotechnik ist häufig die Aufgabe zu lösen, eine in dem Intervall  $x=0$  bis  $x=a$  graphisch gegebene periodische Kurve  $y=f(x)$  in harmonische Schwingungen zu zerlegen, das heißt in eine Fouriersche Reihe von der Form

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi x}{a} + A_2 \cos \left(2 \cdot \frac{2\pi x}{a}\right) + \dots + A_n \cos \left(n \cdot \frac{2\pi x}{a}\right),$$

$$+ B_1 \sin \frac{2\pi x}{a} + B_2 \sin \left(2 \cdot \frac{2\pi x}{a}\right) + \dots + B_n \sin \left(n \cdot \frac{2\pi x}{a}\right)$$

zu entwickeln. Hier kann  $n$  der Reihe nach jede beliebige ganze, positive Zahl vorstellen. Das konstante Glied

$$A_0 = \frac{1}{a} \int_0^a y dx$$

bedeutet den mittleren Wert von  $y$  und kann durch Planimetrieren mit einem gewöhnlichen Planimeter gefunden werden. Außerdem sind aber noch die konstanten Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  nach dem Gesetz

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a y \cos \left(n \cdot \frac{2\pi x}{a}\right) dx$$

$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos n x dx$

und

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a y \sin \left(n \cdot \frac{2\pi x}{a}\right) dx$$

zu bilden.

Die dazu üblichen rechnerischen oder zeichnerischen Verfahren sind ziemlich zeitraubend und mühevoll, setzen aber doch ein gutes Verständnis für die auszuführende Arbeit voraus. Instrumente, die diese Aufgabe mechanisch lösen, sogenannte „harmonische Analysatoren“, konnten bisher keine größere Verbreitung finden, entweder wegen zu hohen Preises, oder wegen unbequemer Handhabung und ungenauer Ergebnisse. Nachstehend soll nun ein neuer Analysator<sup>1)</sup> beschrieben werden, bei dessen Konstruktion folgende

#### Gesichtspunkte

maßgebend waren:

1. Die Handhabung sollte leicht verständlich, schnell und bequem sein, das Resultat sofort ohne Reduktionen und Nebenrechnungen ablesbar sein.
2. Das Instrument sollte sofort für jede beliebige, praktisch vorkommende Basis verwendbar sein, sodaß das sonst nötige Umzeichnen der gegebenen Kurve entfällt.
3. Es sollte billig sein.

<sup>1)</sup> Der vollständige Analysator ist zu beziehen durch Gebr. Staerzl, Mechanische Werkstätte, München, Amalienstraße, zum Preise von 120 M.

Abb. 1 zeigt das

Schema

des neuen Analysators, dessen Wirkungsweise sich im wesentlichen auf der von Clifford (Finsterwalde) angegebenen graphischen Methode der harmonischen Analyse aufbaut und dessen Konstruktion teilweise Ähnlichkeit mit dem Apparat von Youle hat.

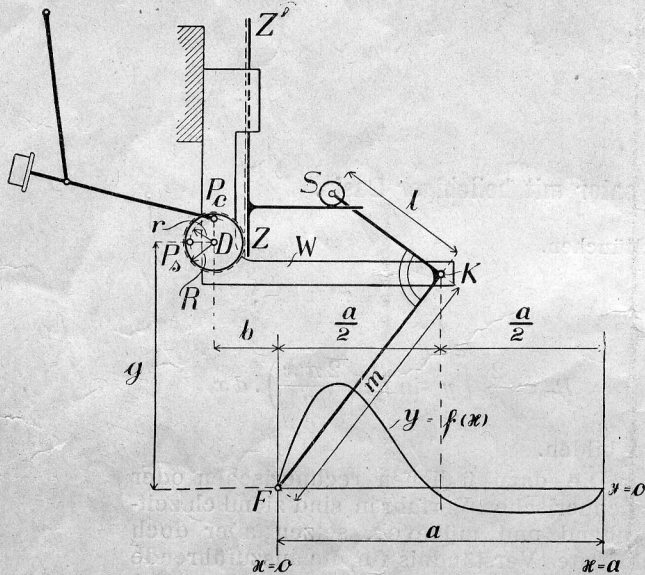


Abb. 1. Schema des Kurvenanalysators.

An einem nur in Richtung der  $y$ -Achse verschiebbaren Wagen  $W$  sind drei bewegliche Teile befestigt:

1. Ein Winkelhebel  $FKS$ , drehbar im Punkt  $K$ , und in  $S$  mit einer Rolle versehen

$$(FK = m, KS = l, \sphericalangle FKS = 90^\circ).$$

2. Eine Zahnstange  $ZZ'$ , die auf dem Wagen  $W$  ebenfalls nur in Richtung der  $y$ -Achse verschiebbar ist. Die Verschiebung erfolgt durch die in  $S$  angebrachte Rolle und einen Arm an der Zahnstange, welcher in Richtung der  $x$ -Achse verläuft.
3. Eine gezahnte Scheibe vom Halbmesser  $R$ , die sich um den Punkt  $D$  des Wagens  $W$  drehen kann und deren Zähne in die Zähne der Zahnstange  $ZZ'$  eingreifen. Dadurch dreht sich bei einer Drehung des Winkelhebels  $FKS$  die Scheibe um  $D$ . Auf der Scheibe befinden sich am Halbmesser  $r$  zwei Einsatzpunkte  $P_s$  und  $P_c$  für den Fahrstift eines gewöhnlichen Polarplanimeters.

Rechnerischer Zusammenhang zwischen der Bewegung des Fahrstiftes  $F$  und den von  $P_s$  beziehungsweise  $P_c$  beschriebenen Bahnen.

Wenn der Fahrstift  $F$  im Koordinatenanfangspunkt ( $x=0$ ) steht, so sind die Koordinaten von  $P_s$  zu

$$x_s = -(b+r),$$

$$y_s = y_D = g,$$

und die Koordinaten von  $P_c$  zu

$$x_c = x_D = -b,$$

$$y_c = g+r$$

gewählt.

Fährt man nun mit dem Fahrstift  $F$  von  $x=0$  und  $y=0$  auf der gegebenen

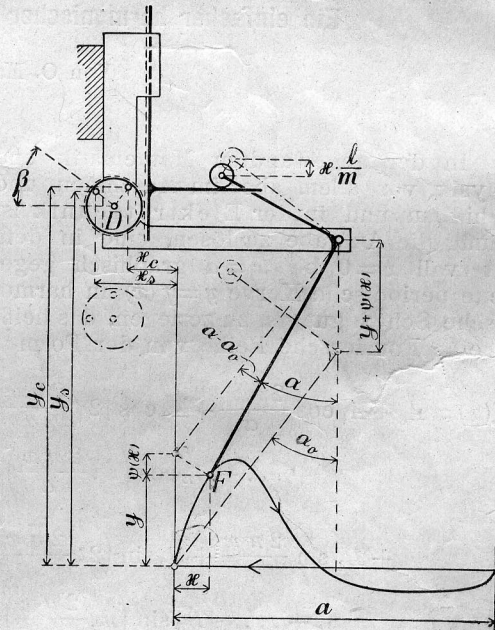


Abb. 2.

Kurve bis  $x=x$  und  $y=f(x)$  (Abb. 2) entlang, so wird sich die Scheibe um den Winkel

$$\beta = \frac{x}{R} \cdot \frac{l}{m}$$

drehen, ihr Mittelpunkt  $D$  wird sich dabei mit dem Wagen  $W$  um eine Strecke  $y + \psi(x)$  in Richtung der  $y$ -Achse verschieben. Die Funktion  $\psi(x)$  ist eine Folge der Drehung des Winkelhebels  $FKS$  um den Winkel  $\alpha_0 - \alpha$ . Die Koordinaten von  $P_s$  und  $P_c$  werden dann:

$$x_s = - \left[ b + r \cos \left( \frac{x l}{R m} \right) \right],$$

$$y_s = g + y + \psi(x) + r \sin \left( \frac{x l}{R m} \right)$$

und

$$x_c = -b + r \sin\left(\frac{x l}{R m}\right),$$

$$y_c = g + y + \psi(x) + r \cos\left(\frac{x l}{R m}\right).$$

Fährt man nun mit  $F$  auf der Kurve weiter bis  $x=a$ ,  $y=0$ , und dann auf der Basislinie ( $y=0$ ) von  $x=a$  nach  $x=0$  zurück, so hat  $P_s$  wie  $P_c$  je eine in sich geschlossene Kurve beschrieben. Die von diesen Kurven umschlossenen Flächen berechnen sich für  $P_s$  zu

und

$$Fl_c = K \cdot \frac{2}{a} \int_0^a y \cos\left(n \cdot \frac{2x\pi}{a}\right) dx = K \cdot A_n.$$

Setzt man also in  $P_s$  beziehungsweise  $P_c$  den Fahrstift eines gewöhnlichen Polarplanimeters ein und fährt mit  $F$  auf der Kurve  $y=f(x)$  von  $x=0$  nach  $x=a$ , und auf der Basislinie, genau wie beim gewöhnlichen Planimeter, zurück, so gibt der Unterschied zwischen Anfangs- und Endablesung am Planimeter den  $K$ -fachen Wert der Koeffizienten  $B_n$  beziehungsweise  $A_n$  der

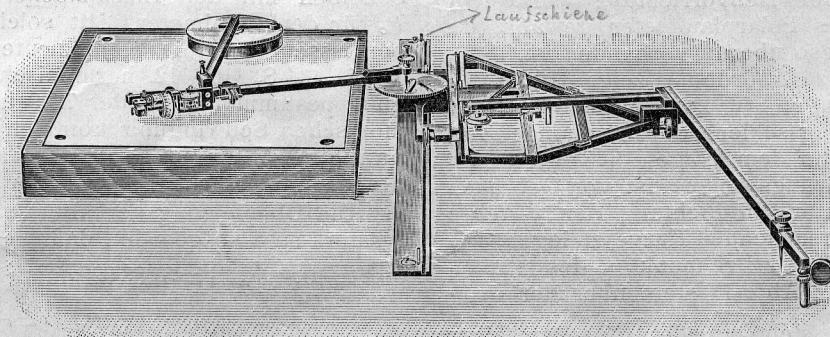


Abb. 3. Kurvenanalysator von Mader.

$$\begin{aligned} Fl_s &= \int_0^a \left[ g + y + \psi(x) \right. \\ &\quad \left. + r \sin\left(\frac{x l}{R m}\right) \right] d \left[ -b - r \cos\left(\frac{x l}{R m}\right) \right] \\ &\quad + \int_0^a \left[ g + 0 + \psi(x) \right. \\ &\quad \left. + r \sin\left(\frac{x l}{R m}\right) \right] d \left[ -b - r \cos\left(\frac{x l}{R m}\right) \right] \\ &= \frac{r l}{R m} \int_0^a y \sin \frac{x l}{R m} \cdot dx, \end{aligned}$$

und analog für  $P_c$  zu

$$Fl_c = \frac{r l}{R m} \int_0^a y \cos \frac{x l}{R m} \cdot dx.$$

Macht man nun

$$R = a \frac{l}{m} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad r = \frac{1}{n\pi} \cdot K,$$

wo  $n = 1, 2, 3$  usw. sein muß, so ergibt sich:

$$Fl_s = K \cdot \frac{2}{a} \int_0^a y \sin\left(n \cdot \frac{2x\pi}{a}\right) dx = K \cdot B_n,$$

Fourierschen Reihe nach Größe und Vorzeichen. Der Koeffizient ist positiv, wenn die Endablesung größer wie die Anfangsablesung, negativ, wenn das Umgekehrte der Fall ist.

Hier seien noch kurz einige

abweichende Verwendungsmöglichkeiten

des Analysators angedeutet:

1. Das Zurückfahren mit  $F$  von  $x=a$  nach  $x=0$  kann statt auf der Basislinie auch auf einer beliebigen periodischen Kurve  $y=\chi(x)$  erfolgen, nur wird dann die Differenzkurve  $f(x) - \chi(x)$  harmonisch analysiert.
2. Durch schrittweises Ändern der Basislänge können versteckte Periodizitäten aufgefunden werden.
3. Die Möglichkeit, die Basis  $\frac{a}{n}$  einzustellen, gestattet es, die Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  zu finden, auch wenn eine passende Scheibe nicht vorhanden ist. Man teilt die Basis  $a$  in  $n$  gleiche Teile und sucht für jeden dieser Teile einzeln den Koeffizienten der ersten harmonischen Schwingung; die Summe der so gefundenen zusammengehörigen Teilkoeffizienten, divi-

diert durch  $n$ , stellt den gesuchten Koeffizienten  $A_n$  beziehungsweise  $B_n$  vor.

Die konstruktive Ausführung.

Der Analysator sollte vor allem billig herzustellen sein. Deshalb wurde, im Gegensatz zu sonstigen mathematischen Instrumenten, die Bearbeitung, soweit es die Genauigkeit gestattete, auf ein Mindestmaß beschränkt. Alle Nachstellvorrichtungen wurden weggelassen, dagegen aller Nachdruck auf genaueste Herstellung der wichtigen Dimensionen in der Werkstatt gelegt. Als eigentliche Meßvorrichtung wurde ein gewöhnliches Polarplanimeter gewählt, da dieses sowieso überall vorhanden ist.

Die ganze Anordnung zeigt Abb. 3.

Der Wagen  $W$  läuft mit Rollen auf einer Führungsschiene, die Zahnstange  $ZZ'$  mit Rollen auf dem Wagen  $W$ .

Die Führungsschiene ist vor Gebrauch des Analysators in Richtung der  $y$ -Achse der zu untersuchenden Kurve zu legen, und zwar so, daß der Drehpunkt  $K$  des Winkelhebels  $FKS$  (Abb. 1) stets über der Ordinate  $x = \frac{a}{2}$  sich befindet. Ein an einer Seite mit Millimeterteilung versehener Zeichenwinkel erleichtert dies, ein späteres Verschieben der Schiene verhindern in die Unterlage zu drückende Nadelspitzen.

Der Fahrstift  $F$  ist auf dem Winkelhebel  $FKS$  verschieblich, wodurch die Basislänge  $a$  zwischen 20 und 360 mm mit Hilfe einer auf dem Winkelhebel befindlichen Teilung beliebig eingestellt werden kann.

Die Verbindung zwischen Zahnstange und Rolle des Winkelhebels  $FKS$  ist in einfachster, dabei jeden toten Gang vermeidender Weise dadurch bewirkt, daß zwei Spiralfedern Zahnstange und Rolle zusammen zu ziehen suchen.

Im Eingriff mit der Zahnstange stehen gezahnte, durch einen Griff auswechselbare Scheiben mit den Einsatzlöchern  $P_s$  und  $P_c$  für den Planimeter. Mit solchen Scheiben lassen sich die Koeffizienten für die 1. bis 6., 8., 10., 12. harmonische Schwingung bestimmen. Bei der 7., 9. und 11. harmonischen Schwingung kommen Scheibenpaare zur Verwendung, in der Handhabung des Planimeters tritt aber keine Änderung ein.

Die Übersetzungsverhältnisse des Analysators sind so gewählt, daß

$$K = 10, \quad r_{n=1} = 31,83\,099 \text{ mm},$$

$$R_{n=1} = \frac{120}{\pi} \text{ mm} \approx 38,22$$

wird.

Es entspricht dann:

$$1 \text{ qcm (abgelesen am Planimeter)} \\ = 0,1 \text{ cm Amplitude.}$$

Meßgenauigkeiten des Kurvenanalysators.

Koeffizient	Basislänge $a = 36 \text{ cm}$			Basislänge $a = 7,2 \text{ cm}$		
	Gerechnet	Gemessen	Fehler	Gerechnet	Gemessen	Fehler
$A_0$	10,00	10,00 <sup>1)</sup>	0,00	2,00	1,97 <sup>1)</sup>	0,03
$A_1$	0	+ 0,05	0,05	0	- 0,02	0,02
$B_1$	- 6,366	- 6,39	0,02	- 1,273	- 1,31	0,04
$A_2$	0	0	0	0	+ 0,01	0,01
$B_2$	- 3,182	- 3,18	0,00	- 0,636	- 0,65	0,02
$A_3$	0	- 0,06	0,06	0	+ 0,04	0,04
$B_3$	- 2,122	- 2,15	0,03	- 0,424	0,43	0,01
$A_4$	0	- 0,01	0,01	0	- 0,04	0,04
$B_4$	- 1,591	- 1,61	0,02	- 0,318	- 0,32	0,00
$A_5$	0	- 0,09	0,09	0	0,00	0,00
$B_5$	- 1,273	- 1,28	0,01	- 0,254	- 0,26	0,00
$A_6$	0	- 0,07	0,07	0	0,00	0,00
$B_6$	- 1,061	- 1,08	0,02	- 0,212	- 0,23	0,02
$A_7$	0	0,03	0,03	0	+ 0,01	0,01
$B_7$	- 0,909	- 0,93	0,02	- 0,182	- 0,19	0,01

<sup>1)</sup> Mit Planimeter allein.

Somit gestattet die Teilung eines gewöhnlichen Polarplanimeters auf

0,1 qcm = 0,01 cm Amplitude genau noch abzulesen, eine für die Praxis weitaus genügende Genauigkeit.

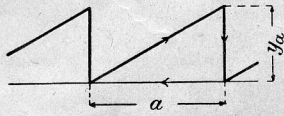


Abb. 4.

Zum Beispiel sei die  
 Anfangsablesung . . . . . 794,0 qcm  
 Endablesung . . . . . 733,9 „  
 Dann wird der gesuchte  
 Koeffizient . . . . . - 60,1 cm

Zur Beurteilung der Genauigkeit des Instrumentes wurde die in Abb. 4 dargestellte, aus geraden Linien gebildete Kurve

für eine Basislänge  $a = 36$  cm und  $a = 7,2$  cm, bei einer Endordinate  $y_a = 20$  cm beziehungsweise  $y_a = 4$  cm rechnerisch und dann mit dem Instrument analysiert.

Es wird:

$$y = \frac{1}{1,8} x, \quad A_n = 0,$$

$$B_n = -\frac{20}{\pi n} \quad \text{beziehungsweise} \quad B_n = -\frac{4}{\pi n}.$$

Die Resultate zeigt die Tabelle auf S. 4 (Längen in cm).

#### Zusammenfassung.

Es wird ein neues Instrument beschrieben, welches die mühsame rechnerische oder graphische harmonische Analyse in der Technik ersetzen soll. Einfache, billige Konstruktion und bequeme, zeitsparende Handhabung, dabei genügende Genauigkeit ermöglichen dies in höherem Grade als bei den bisherigen harmonischen Analysatoren.