WS 2004/2005
4.11.04

Stringtheorie I
Prof. Dieter Lüst

Übungsblatt 2

1. Nichtrelativistischer Grenzfall

Die Wirkung für das Punktteilchen ist

$$S_{pp} = -m \int d\tau (-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)^{1/2}.$$

Die Nambu-Goto Wirkung für den String ist

$$S_{NG} = -T \int d\sigma^2 \left[-\det\, \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu\right]^{1/2}.$$

(i) Zeige, dass S_{pp} im nichtrelativistischen Limes die übliche nichtrelativistische Form hat (i.e. kinetische Energie minus potentielle Energie, wobei die potentielle Energie die Ruhemasse ist).
(ii) Zeige, dass sich die Nambu-Goto-Wirkung für einen nichtrelativistischen String auf einen kinetischen Term minus einen Potentialterm reduziert, wobei der Potentialterm proportional zur Länge des Strings ist.
(iii) Zeige, dass die kinetische Energie nur von der transversalen Geschwindigkeit des Strings herrührt.
(iv) Berechne die Masse pro Einheitslänge.

2. Äquivalenz von Nambu-Goto- und Polyakov-Wirkung

Die Polyakov-Wirkung ist

$$S_P = -\frac{T}{2} \int_M d\sigma^2 \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu},$$

wobei $h = \det(h_{\alpha\beta})$.
Der Energie-Impulstensor ist definiert als

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{T} \frac{1}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}.$$

(i) Berechne den Energie-Impulstensor unter Verwendung der allgemeinen Formel für die Variation einer Determinanten $\delta h = -h h_{\alpha\beta} \delta h^{\alpha\beta}$.
(ii) Finde die Bewegungsgleichungen von $h_{\alpha\beta}$ und zeige mittels der daraus gewonnenen Bedingung die Äquivalenz von Nambu-Goto-Wirkung und Polyakov-Wirkung.

3. Weyl-Invarianz der Polyakov-Wirkung

Die Weyl-Reskalierung ist definiert als

$$\begin{aligned} h'_{\alpha\beta} &= e^{2\Lambda} h_{\alpha\beta}, \\ X^{\mu'} &= X^\mu, \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei Λ eine beliebige infinitesimale Funktion von $\sigma,\ \tau$ ist.
(i) Zeige, dass die Polyakov-Wirkung invariant unter obiger Skalentransformation ist.
(ii) Zeige, dass Weyl-Invarianz die Spurfreiheit des Energie-Impulstensors impliziert,

$$h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0.$$