WS 2004/2005
18.11.04

Stringtheorie I
Prof. Dieter Lüst

Übungsblatt 4

1. Differentialgeometrie für die allgemeine Relativitätstheorie

Wir betrachten die wichtigsten Konzepte anhand des Beispiels der 2-Sphäre.
(i)*Die Metrik*
Der Abstand zwischen den Punkten x^μ und $x^\mu + dX^\mu$ ist

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

$g_{\mu\nu}$ ist der metrische Tensor. Schreibe erst ds^2 für die S^2 in Polarkoordinaten auf und berechne daraus die Metrik.

(ii) *Der Riemann-Tensor*
Die Christoffel-Symbole sind wie folgt definiert:

$$\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} \right).$$

Der Riemann-Tensor hat folgende Definition:

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^\kappa_{\mu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^\kappa_{\nu\eta}.$$

Der Riemann-Tensor ist das Mass für die Krümmung einer Mannigfaltigkeit, wenn $R^\kappa_{\lambda\mu\nu}$ verschwindet, so ist der Raum flach.
Berechne $R^\kappa_{\lambda\mu\nu}$ für S^2.

(iii) *Der Ricci-Tensor*
Anhand von $R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}$ definiert man den Ricci-Tensor:

$$\mathrm{Ric}_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}.$$

Berechne $\mathrm{Ric}_{\mu\nu}$ für S^2.

(iv) *Die skalare Krümmung*
Die skalare Krümmung ist

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathrm{Ric}_{\mu\nu}.$$

Berechne $\mathcal{R}$ für S^2.

(v)*Der Einstein-Tensor*
Die Einstein-Gleichung ist die Bewegungsgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu},$$

wobei G eine Konstante ist, $T_{\mu\nu}$ der Energie-Impulstensor und $G_{\mu\nu}$ der Einsteintensor:

$$G_{\mu\nu} = \mathrm{Ric}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{R}.$$

Berechne $G_{\mu\nu}$ für S^2.

2. Die Oszillatorentwicklung für den offenen bosonischen String

Die Oszillatorentwicklung für den offenen String ist

$$X^I(\tau,\sigma) = x_0 + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^I \cos n\sigma e^{-in\tau}.$$

Benutze

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0},$$

um explizit die folgenden Kommutatoren zu überprüfen:

$$[X^{I'}(\tau,\sigma), X^{J'}(\tau,\sigma)] = [\dot{X}^I(\tau,\sigma), \dot{X}^J(\tau,\sigma)] = 0.$$

3. Die Virasoro-Algebra

Die Virasoro-Operatoren sind wie folgt definiert:

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbf{Z}} \alpha_{n-p}\alpha_p.$$

Sie haben die folgenden Kommutationsrelationen:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}.$$

(i) Zeige, dass die Virasoro-Algebra eine Lie-Algebra ist, also

$$\begin{aligned} [x,y] &= -[y,x], \\ [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

erfüllt.
(ii) Zeige, dass die Operatoren $L_0,\ L_1$ und L_{-1} eine Subalgebra bilden.