WS 2004/2005
2.12.04

Stringtheorie I
Prof. Dieter Lüst

Übungsblatt 6

1. Der quantisierte offene String

(i) Zeige anhand der Kommutatorrelation $[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu}$, dass die α_m mit $m > 0$ Vernichter und die α_m mit $m < 0$ Erzeuger sind. (Tip: Berechne $(\alpha_{-m}\alpha_m)\alpha_{\pm}\cdot$.)

(ii) Für physikalische Zustände fordern wir die folgenden zwei Bedingungen:

$$\begin{aligned} L_m|phys\rangle &= 0, \quad m > 0 \\ (L_0 - 1)|phys\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Leite aus der zweiten Bedingung und $L_0 = \sum_{n=1}^\infty \alpha_{-n}^\mu \alpha_{n,\mu} + \alpha' p^\mu p_\mu$ den Massenquadratoperator her.

(iii) Wir nennen $N = \sum_{m>0} \alpha_{-m}^\mu \alpha_{m,\mu}$ den Nummeroperator (number operator oder level operator). Zeige durch die Berechnung von

$$N\alpha_{-n}^\nu|0\rangle,$$

dass diese Bezeichnung Sinn macht.

(iv) In der Lichtkegelquantisierung haben wir

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'}\left\{\sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_{n,i} - 1\right\},$$

wobei $i = 1, ..., d-2$. Berechne mit dem oben gelernten die Massen der folgenden Zustände:

$$\begin{aligned} \alpha^i_{-1}|0\rangle, \\ \alpha^i_{-3}|0\rangle, \\ \alpha^i_{-2}\alpha^j_{-1}|0\rangle. \end{aligned} \tag{1.2}$$

2. Der quantisierte geschlossene String

Beim geschlossenen String haben wir zusätzlich zu den α_n die $\overline{\alpha}_n$ und zustzlich zu den L_n die $\overline{L}_n$. Wir fordern die Bedingungen aus Aufgabe 1 auch für die $\overline{L}_n$ und zudem

$$(L_0 - \overline{L}_0)|phys\rangle = 0.$$

(i) Leite analog zum offenen String den Massenoperator für den geschlossenen String her.

(ii) Berechne damit die Massen der folgenden Zustände:

$$\begin{aligned} \alpha^i_{-1}\overline{\alpha}^j_{-1}|0\rangle, \\ \alpha^i_{-2}\overline{\alpha}^j_{-2}|0\rangle, \\ \alpha^i_{-2}\overline{\alpha}^j_{-1}\overline{\alpha}^k_{-1}|0\rangle. \end{aligned} \tag{2.1}$$

3. Fadeev-Popov Quantisierung

Die Methode der Fadeev-Popov Quantisierung (siehe z.B. Peskin und Schroeder, Kap. 9) kann auch auf die Polyakov-Wirkung des Strings angewendet werden. Dabei wählt man die Eichfixierung $h_{\alpha\beta} = e^\phi \eta_{\alpha\beta}$ und fügt die folgende Identität in das Pfadintegral ein:

$$1 = \int Dg(\sigma)\delta(h^g_{++})\delta(h^g_{--})\det(\delta h^g_{++}/\delta g)\det(\delta h^g_{--}/\delta g),$$

wobei Dg die Integration über die Gruppenmanigfaltigkeit der Reparametrisierungen ist, $\delta h_{++}(\sigma)/\delta g(\sigma') = 2\nabla_+\delta(\sigma - \sigma')$, und $\delta h_{--}(\sigma)/\delta(\sigma') = 2\nabla_-\delta(\sigma - \sigma')$, mit ∇ der kovarianten Ableitung.

Der Trick besteht darin, die Determinanten in der obigen Identität als Integral darzustellen. Dazu führt man den Geist c^- und den Antigeist b_{--} ein:

$$\det(\delta h'_{++}/\delta g) = \int Dc^-(\sigma)Db_{--}(\sigma)\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma c^-\nabla_+ b_{--}\right\}.$$

Für die andere Determinante führt man den Geist c^+ und den Antigeist b_{++} ein und geht ebenso vor.

Die Geister sind antikommutierende Grössen, sogenannte Grassmann-Variablen. Für Grassmann-Variablen θ und η gilt:

$$\theta\eta = -\eta\theta$$

und somit natürlich $\theta^2 = 0$. Die Integration über Grassmann-Variablen (die sogenannte Berezin-Integration) ist wie folgt definiert:

$$\int d\theta (A + B\theta) = B.$$

Im Falle komplexer Grassmann-Zahlen werden θ und θ^* als unabhḧgige Variablen aufgefasst.

(i) Berechne die folgenden beiden Berezin-Intergrale:

$$\begin{aligned} \int d\theta d\theta^* e^{-\theta^* b\theta} \\ \int d\theta d\theta^* \theta\theta^* e^{-\theta^* b\theta} \end{aligned} \tag{3.1}$$

(ii) Sei $\theta'_i = U_{ij}\theta_j$. Berechne den Ausdruck $\prod_i \theta'_i = \frac{1}{n!}\epsilon^{ij...l}\theta'_i\theta'_j...\theta'_l$.

(iii) Berechne anhand der eben gewonnenen Erkenntnis folgendes Integral:

$$\left(\prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i\right) e^{-\theta_i^* B_{ij}\theta_j},$$

wobei B eine hermitische Matrix sei. Das Ergebnis macht den oben erwähnten Trick verständlich.

(iv) Die Wirkung mit Geistanteil ist die folgende:

$$S = -\frac{1}{8\pi}\int d^2\sigma\sqrt{h}h^{\alpha\beta}(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + 4ib_{\beta\gamma}\nabla_\alpha c^\gamma).$$

Berechne den Energie-Impulstensor für die Geistfelder analog zu Aufgabe 2, Übungsblatt 2.