WS 2004/2005
16.12.04

# Stringtheorie I
# Prof. Dieter Lüst

**Übungsblatt 8**

**1. Die konforme Abbildung vom Zylinder auf die komplexe Ebene**

Seien $\sigma$, $\tau$ wie gehabt die Koordinaten auf der Weltfläche. Wir definieren die komplexen Koordinaten auf dem Zylinder:

$$z' = \tau - i\sigma, \quad \overline{z}' = \tau + i\sigma.$$

Die Abbildung auf die komplexe Ebene ist definiert durch

$$z = e^{z'}, \quad \overline{z} = e^{\overline{z}'}.$$

(i) Worauf wird eine Linie auf der Weltfläche mit gleichbleibendem $\tau$ abgebildet?

(ii) Was geschieht mit $\sigma$–Translationen $\sigma \to \sigma + \theta$ und Zeittranslationen $\tau \to \tau + a$ unter der Abbildung auf die komplexe Ebene?

Sei $\phi(z, \overline{z})$ ein konformes Feld, welches unter $z \to z' = f(z)$, $\overline{z} \to \overline{z}' = \overline{f}(\overline{z})$ wie folgt transformiert:

$$\phi(z, \overline{z}) \to \phi'(z', \overline{z}') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \overline{z}'}{\partial \overline{z}}\right)^{\overline{h}} \phi(z', \overline{z}').$$

(iii) Betrachte die infinitesimalen Transformationen

$$z' = z + \xi(z), \; \overline{z}' = \overline{z} + \overline{\xi}(\overline{z}).$$

Wir erhalten $\phi'(z,\overline{z}) = \phi(z,\overline{z}) + \delta_{\xi,\overline{\xi}}\phi(z,\overline{z})$. Berechne $\delta_{\xi,\overline{\xi}}\phi(z,\overline{z})$.

(iv) Gib das Transformationsverhalten des konformen Feldes $\phi(z,\overline{z})$ unter Reskalierung $z \to \lambda z$, $\lambda$ reell und unter Rotationen $z \to e^{-i\theta} z$ an.

(v) Betrachte nun wieder die Abbildung vom Zylinder auf die komplexe Ebene und gib die Relation eines holomorphen Feldes $\phi(z)_E$ auf der Ebene zum Feld $\phi(z)_Z$ auf dem Zylinder an.

## 2. Das Operatorprodukt mit dem Energie-Impulstensor

Die erhaltene Ladung

$$T_\xi = \oint_{C_0} \frac{dz}{2\pi i} \xi(z) T(z)$$

generiert die infinitesimale konforme Transformation $z \to z' = z + \xi(z)$, wobei $T(z)$ der Energie-Impulstensor ist. $\delta_\xi \phi(w)$, berechnet in Aufgabe 1.iii) hier mit $\overline{h} = 0$, $\overline{\partial}\phi = 0$, ist gegeben durch

$$\delta_\xi \phi(w) = [T_\xi, \phi(w)].$$

Beachte dabei, dass Produkte radial geordnet sind:

$$\begin{aligned} R(\phi_1(z)\phi_2(w)) &= \phi_1(z)\phi_2(w), \quad |z| > |w|, \\ R(\phi_1(z)\phi_2(w)) &= \phi_2(w)\phi_1(z), \quad |z| < |w|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Zeige, dass ein konformes Feld $\phi$ das folgende Operatorprodukt mit $T(z)$ hat:

$$T(z)\phi(w) = \frac{h\phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w)}{(z-w)} + \text{endl. Terme.}$$

Tip: Cauchy-Riemann