WS 2004/2005
23.12.04

Stringtheorie I
Prof. Dr. Lüst

Übungsblatt 9

Wie wir wissen ist der Energie-Impuls-Tensor die erhaltene Ladung der konformen Symmetrie und damit auch deren Generator. Anhand des Transformatiosnverhalten eines konformen Feldes haben wir gefunden, dass

$$T(z)\phi(w) = \frac{h\phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w)}{(z-w)} + \text{finite}.$$

Somit haben die obigen Felder eine nicht-triviale Operator-Produkt-Entwicklung.

1) Betrachten wir weiterhin den Kommutator zweier infinitesimalen Transformationen

$$[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}].$$

Zeige, dass er dem Audruck $\delta_{(\xi_1\partial\xi_2 - \xi_2\partial\xi_1)}$ gleicht.

2) Mit dieser Beziehung werden wir nun das Operator-Produkt zwischen den Ladungen der Symmetrie bestimmen.

Ausgehend von (letze Übung)

$$\delta_\xi\phi(w) = \oint_{C_w} \frac{dz}{2\pi i}\xi(z)T(z)\phi(w)$$

beweise folgenden Audruck:

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)} + \text{finite}$$

3) Durch Vergleich mit dem Operator-Produkt des konformen Feldes $\phi(w)$ können wir bereits jetzt eine Abweichung erkennen und zwar $\frac{c/2}{(z-w)^4}$. Um dies deutlicher zu sehen, zeige, dass

$$\delta_\xi T(z) = \frac{c}{12}\partial^3\xi(z) + 2\partial\xi(z)T(z) + \xi(z)\partial T(z).$$

Verwende hierzu die Beziehung von Aufgabe 2) und die "TT"-Entwicklung.

Nach Definition, wäre $T(z)$ ein konformes Feld vom Gewicht $h = 2$, für $c = 0$. Wir sind jedoch keineswegs überrascht, dass der Term $\partial^3\xi$ anwesend ist, denn: die Stringtheorie hatte erst einen Sinn nach Einführung der Geister um die **konforme Anomalie** zu beseitigen. Der "c-Term" stellt nichts anderes dar als diese Anomalie!

4) Wir werden nun den Energie-Impuls-Tensor in Moden entwickeln:

$$T(z) = \sum_n z^{-n-h} L_n.$$

Dabei ist h das Gewicht des Feldes, in unserem Fall also h=2. Zeige durch "invertieren" der Gleichung, dass die Moden gegeben sind durch

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z).$$

4) Jetzt sind wir in der Lage (ein letztes Mal) erneut die Algebra der Moden L_n auszurechnen (allerdings äußerst elegant). Setze den Kommutator der $L_n's$ an und zeige dass

$$[L_n, L_m] = \oint \frac{dw}{2\pi i} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} w^{m+1} \left(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)}\right).$$

Berechne die Integrale und finde

$$[L_n, L_m] = \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{m+n} + (n-m)L_{n+m}.$$

Ein Vergleich mit Übungsblatt No. 5 wäre angebracht!

Frohe Weihnachten![1]

[1] Formelsammlung: Für das gesamte Blatt ist die Relation

$$\oint_{C_w} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-w)^n} = \frac{1}{(n-1)!} f^{n-1}(w) \quad \text{(Cauchy – Riemann)}$$

zu beachten.