DEPARTMENT FÜR PHYSIK
Prof. Dr. D. Lüst

8. Januar 2007

Übungen zur QUANTENMECHANIK I (T III) im WS 2006/2007

— Blatt 10 —

Aufgabe 1: Wasserstoffatom im homogenen Magnetfeld

Ein Wasserstoffatom befinde sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$. Das Elektron des H-Atoms wird durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + q\,\phi(\vec{r}) \quad , \quad \phi(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0\, r} \ ,$$

beschrieben, wobei $q = -e$ die Ladung des Elektrons ist, und $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$.

a) Bringen Sie H auf die Form $H = H_0 + V_1 + V_2$, wobei H_0 von $\vec{B}$ unabhängig ist, während V_1 linear und V_2 quadratisch von $\vec{B}$ abhängt. Geben Sie V_1 und V_2 in Kugelkoordinaten r, θ, ϕ an.

b) Bestimmen Sie die Energie-Eigenfunktionen und die Eigenwerte $\mathcal{E}_{nlm}$ von $H_0 + V_1$. Wie lautet die Übergangsfrequenz ω_0 zwischen benachbarten Energieniveaus zur selben Hauptquantenzahl n und Drehimpulsquantenzahl l?

c) Berechnen Sie die durch V_2 verursachte Verschiebung der Energieniveaus zu $n = 2$ und $l = 1$ in Störungstheorie erster Ordnung, d.h. berechnen Sie

$$E^{(1)}_{nlm} = \mathcal{E}_{nlm} + \langle nlm|V_2|nlm\rangle \ ,$$

wobei $|nlm\rangle = R_{nl}(r)\,Y_{lm}(\theta,\phi)$ die Eigenfunktionen von H_0 bezeichnen.

Hinweis:

$$R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}}\,\frac{r}{a_0^{5/2}}\,\mathrm{e}^{-r/(2a_0)} \quad , \quad Y_{1,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \quad , \quad Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\,\mathrm{e}^{\pm i\phi} \quad , \quad a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} \ .$$

Aufgabe 2: Relativistischer Beitrag zur Grundzustandsenergie

Betrachtet werde ein wasserstoffähnliches Atom bestehend aus einem Kern (mit Kernladung Ze) und einem Elektron (mit der Masse m und Ladung $-e$). Der Hamilton-Operator dieses Ein-Elektron-Ions werde näherungsweise durch

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\, r}$$

beschrieben.

a) Wie lautet die Grundzustandsenergie?

b) Man betrachte nun $\vec{p}^{\,2}$ als Term niedrigster Ordnung in der Entwicklung des relativistischen Ausdrucks $c\sqrt{\vec{p}^{\,2} + (mc)^2} - mc^2$. Zeigen Sie, daß der nächste Term in dieser Entwicklung eine Korrektur

$$\frac{\Delta H}{E_R} = -\frac{\alpha^2}{8}\left(\left(\frac{\vec{p}}{\hbar/a_0}\right)^2\right)^2$$

zu H/E_R liefert, wobei $E_R = \hbar^2/(a_0^2 m)$ und $\alpha = \hbar/(a_0 mc)$ ($a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(e^2 m)$ ist der Bohrsche Radius).

c) Verwenden Sie die Impulsraum-Wellenfunktion $\tilde{\psi}(\vec{p})$ des Grundzustandes (siehe 9. Übungsblatt !), um den Erwartungswert von $\left(\vec{p}^{\,2}\right)^2$ zu berechnen. Für welche Kernladungszahl Z wird dadurch die Grundzustandsenergie um 1% korrigiert, für welche um 10%?

BITTE WENDEN!

Aufgabe 3: Der Einfluß der Kernausdehnung auf wasserstoffähnliche Zustände

Man betrachte wiederum ein wasserstoffähnliches Atom mit Kernladung Ze und einem Elektron (mit der Masse m und Ladung $-e$). Der Kern soll jetzt als homogen geladene Kugel mit Radius R angesetzt werden, sodaß die potentielle Energie durch

$$V(r) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r^2}{2R^3} - \frac{3}{2R} & , \quad r \leq R \, , \\ -\frac{1}{r} & , \quad r \geq R \, , \end{cases}$$

gegeben ist.

a) Zeigen Sie, daß die durch die Kernausdehnung verursachte Korrektur zur Grundzustandsenergie in Störungstheorie erster Ordnung gegeben ist durch

$$\Delta E_0 \equiv \langle \psi_0 | H_1 | \psi_0 \rangle = \frac{4}{5} Z^2 \, |E_0| \left(\frac{R}{a_0} \right)^2 \, ,$$

wobei ψ_0 (E_0) die Grundzustandswellenfunktion (Grundzustandsenergie) im ungestörten Fall (d.h. punktförmiger Kern) bezeichnet. Der Störoperator H_1 ist durch

$$H_1 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r^2}{2R^3} - \frac{3}{2R} + \frac{1}{r} & , \quad r \leq R \, , \\ 0 & , \quad r \geq R \, , \end{cases}$$

gegeben. *Hinweis:* Bei der Berechnung des Integrals soll die Exponentialfunktion durch eine Konstante genähert werden.

b) Betrachten Sie nun ein Thallium-Kern ($Z = 81, R = 7.05 \times 10^{-15} m$). Geben Sie den numerischen Wert von $\Delta E_0 / E_0$ an.