Prof. Dr. D. Lüst 15. Januar 2007

Übungen zur QUANTENMECHANIK I (T III) im WS 2006/2007

— Blatt 11—

Aufgabe 1: Radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Wasserstoffatom

a) Die *radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit* $w_{nl}(r)$ im Wasserstoffatom ($x := kr$)

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) \;=\; \frac{R_{nl}(r)}{r} \;\cdot\; Y_{lm}(\theta,\phi) \;=\; c_{nl}\; x^l \; e^{-x/2}\; L_{n+l}^{2l+1}(x) \;\cdot\; Y_{lm}(\theta,\phi)$$

(wobei $k = 2\kappa := 2Z/(na_B)$ von n abhängt) ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen unabhängig vom Winkel im Abstand r vom Ursprung anzutreffen. Wie hängt diese mit der Größe $R_{nl}(r)$ zusammen ?
b) Bestimmen Sie den Radius maximaler radialer Aufenthaltswahrscheinlichkeit für die Grundzustandswellenfunktion mit

$$\frac{R_{10}(r)}{r} \;=\; \frac{2}{a^{3/2}} e^{-r/a}$$

und für den Fall $l = n - 1$ (verwenden Sie, dass dann das entsprechende Laguerre-Polynom konstant ist). Vergleichen Sie mit dem entsprechenden Erwartungswert

$$< r >_{nl} = \frac{a}{2Z}\Big(3n^2 - l(l+1)\Big)$$

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $<\; v^2 \;>$ im Grundzustand ($\vec{v} = \vec{p}/m$) und vergleichen Sie mit dem Wert im Bohr'schen Atommodell.

Aufgabe 2: Ströme im Wasserstoffatom

Bestimmen Sie für das Wasserstoffatom die Komponenten j_r, j_θ, j_ϕ der Stromdichte $\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m_e}(\psi\,\vec{\nabla}\psi^* \,-\, \psi^*\,\vec{\nabla}\psi)$ im Zustand ψ_{nlm}. Zeigen Sie insbesondere, dass der radiale Strom j_r verschwindet (begründen Sie dies auch anschaulich) und der azimutale Strom j_ϕ im wesentlichen von der magnetischen Quantenzahl m bestimmt wird.

Aufgabe 3: Effektive Ein–Elektron–Systeme

Alkali–Atome haben eine Elektron-Struktur, die wasserstoff–ähnlich ist (ihre chemischen Eigenschaften und Spektrallinien sind im wesentlichen durch ein einzelnes Valenzelektron bestimmt). Man kann solche Atome genähert als Ein–Elektron–Systeme behandeln mit dem Potential

$$V(r) \;=\; -\frac{e^2}{r}(1 + \frac{b}{r})$$

Zeigen Sie, daß die Energieniveaus gegeben sind durch (a_B ist der Bohrsche Radius)

$$E_{n,l} \;=\; -\frac{e^2}{2a_B}\Big[n - D(l)\Big]^{-2}$$

(durch Modifikation der Lösung für das Wasserstoffatom). Hierbei ist

$$D(l) \;=\; l + \frac{1}{2} - \Big[(l+\frac{1}{2})^2 - 2\frac{b}{a_B}\Big]^{1/2}$$