DEPARTMENT FÜR PHYSIK
Prof. Dr. D. Lüst

22. Januar 2007

Übungen zur QUANTENMECHANIK I (T III) im WS 2006/2007

— Blatt 12 —

Aufgabe 1: Streupotential

Betrachten Sie eine Wellenfunktion $\psi(\vec{r})$, die aus der einfallenden ebenen Welle $\psi_e(\vec{r})$ und der Streuwelle $\psi_s(\vec{r})$ zusammengesetzt ist,

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= \psi_e(\vec{r}) + \psi_s(\vec{r}) \, , \\ \psi_e(\vec{r}) &= \mathrm{e}^{ik\,z} = \mathrm{e}^{ikr\cos\theta} \, , \\ \psi_s(\vec{r}) &= f(\theta)\, \frac{\mathrm{e}^{ik\,r}}{r} \, . \end{aligned} \tag{1}$$

Zeigen Sie, daß $\psi(\vec{r})$ für $r \to \infty$ eine asymptotische Lösung der Schrödingergleichung darstellt, wenn das Streupotential $V(\vec{r})$ für $r \to \infty$ stärker als $1/r$ abfällt.

Aufgabe 2: Streuung am Potentialtopf

Gegeben sei das Potential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 \quad , \quad r < R_0 \quad , \quad V_0 > 0 \, , \\ \\ \;\;\; 0 \quad\;\; , \quad r > R_0 \, . \end{cases}$$

Betrachten Sie die s-Welle $\psi(\vec{r}) = R(r)\, Y_{00}(\theta, \phi)$.

a) Bestimmen Sie die radiale Wellenfunktion $R(r)$. Zeigen Sie, daß für $r > R_0$ gilt

$$R(r) = N \, \frac{\sin(kr + \delta_0)}{kr} \, .$$

Wie lautet δ_0 als Funktion von k, V_0 und R_0?

b) Zeigen Sie, daß für $r > R_0$ die radiale Wellenfunktion $R(r)$ die Form (1) hat.
Hinweis: man approximiere ψ_e durch den s-Wellenanteil $j_0(kr)$.

Aufgabe 3: Streuamplitude in erster Bornscher Näherung

Die in (1) auftretende Streuamplitude f kann in erster Bornscher Näherung durch

$$f = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\vec{r}\, \mathrm{e}^{-i\vec{K}\vec{r}}\, V(\vec{r})$$

dargestellt werden, wobei $\vec{K} = k\,(\vec{e}_r - \vec{e}_z)$. Berechnen Sie f für folgende Fälle,

a) $V(\vec{r}) = -V_0$ für $-a/2 < x, y, z < a/2$, sonst $V(\vec{r}) = 0$,

b) $V(r) = -V_0$ für $r = |\vec{r}| < a$, sonst $V(r) = 0$,

wobei $V_0 > 0$.