

Übungen zur QUANTENMECHANIK I (T III) im WS 2006/2007— Blatt 2 —Aufgabe 1: Erwartungswerte einer Wellenfunktion

Gegeben sei die eindimensionale zeitunabhängige Wellenfunktion

$$\psi(x) = \frac{N}{x^2 + a^2} \quad (\text{a reell})$$

- Bestimmen Sie N durch Normierung von $\psi(x)$.
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $[-a, a]$ zu finden ?
- Berechnen Sie $\langle x^n \rangle$ für die $n=1,2,3, \dots$, die konvergente Integrale liefern .
- Berechnen Sie $\langle p^2 \rangle$ (p : Impuls in x -Richtung).

Aufgabe 2: Zerfall

a) Eine grosse Zahl N_0 identischer Atome befinde sich bei $t = 0$ in einem angeregten Zustand mit mittlerer Lebensdauer τ . Zeigen Sie (drücken Sie λ durch τ aus)

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (t > 0) \quad (1)$$

b) Die Wellenfunktion eines zum Zeitpunkt $t = 0$ angeregten Atoms der Energie $E_a = \hbar\omega_a$ sei $\Psi_a(\vec{x}, t) = X(\vec{x}) \cdot \Phi(t)$ wobei $\Phi(t) = 0$ für $t < 0$ und für $t \geq 0$:

$$\Phi(t) = e^{-i\omega_a t} \cdot e^{-\lambda t/2}$$

Spiegelt dies das Zerfallsgesetz (1) wider ? Ist hier die Wahrscheinlichkeit erhalten ?

c) Berechnen Sie die Wellenfunktion $\tilde{\Phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{i\omega t} dt$ im Frequenzraum und zeigen Sie, dass die Breite auf halber Höhe der Intensitätskurve $|\tilde{\Phi}(\omega)|^2$ mit der Lebensdauer über die Beziehung $\Delta\omega \cdot \tau = 1$ bzw. $\Delta E \cdot \tau = \hbar$ verknüpft ist.

Aufgabe 3: Erwartungswert und Parität

Zeigen Sie, dass der quantenmechanische Erwartungswert des (auf den Koordinatenursprung bezogenen) Dipolmoments eines elektrisch geladenen Teilchens verschwindet, wenn letzteres sich in einem Zustand bestimmter Parität befindet, d.h.

$$P\psi(\vec{r}) := \psi(-\vec{r}) = \pm\psi(\vec{r})$$

Aufgabe 4: Kommutatorrelationen

a) Zeigen Sie für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ die Operatorgleichung

$$[p, f(x)] = \frac{\hbar}{i} f'(x)$$

b) Zeigen Sie für beliebige Operatoren A, B

$$[A, B^n] = \sum_{k=0}^{n-1} B^k [A, B] B^{n-1-k}$$

c) Zeigen Sie mittels b) für eine analytische Funktion $g(p)$ die Operatorgleichung

$$[x, g(p)] = i\hbar g'(p)$$