

Übungen zur QUANTENMECHANIK I (T III) im WS 2006/2007— Blatt 3 —Aufgabe 1: Exponentialfunktion für OperatorenZeigen Sie für zwei Operatoren A und B :

a) $\exp(e^{-A} B e^A) = e^{-A} e^B e^A$

b) $e^B A e^{-B} := A + [B, A] + \frac{1}{2!}[B, [B, A]] + \dots$

Hinweis: Verwenden Sie die Taylor-Entwicklung von $F(\lambda) := e^{\lambda B} A e^{-\lambda B}$.c) Zeigen Sie, daß, falls sowohl A als auch B mit $[A, B]$ vertauschen, gilt

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

Hinweis: Stellen Sie eine Differentialgleichung für $G(\lambda) := e^{\lambda A} e^{\lambda B}$ auf und verwenden Sie b).Aufgabe 2: Drehimpuls Vertauschungsrelationen

Man zeige unter Benutzung der Kommutator-Relationen

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij} \quad , \quad [x_i, x_j] = 0 \quad , \quad [p_i, p_j] = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

daß der Drehimpuls-Operator

$$\vec{L} = (L_i) = \vec{x} \times \vec{p} \quad , \quad L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$$

den Vertauschungsrelationen

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$$

genügt.

Aufgabe 3: WahrscheinlichkeitsstromdichteDie Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t)$ ist als

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2im} \left(\psi^*(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi^*(\vec{r}, t) \right)$$

definiert.

Gemäss Aufgabe 2 des 1. Übungsblattes wird das eindimensionale Gaußsche Wellenpaket zum Zeitpunkt $t = 0$ durch

$$\psi(x, 0) = A \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha}\right) e^{ik_0 x}$$

beschrieben. Berechnen und interpretieren Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{j}(x, 0)$ des eindimensionalen Gaußschen Wellenpackets.