

Übungen zur QUANTENMECHANIK I (T III) im WS 2006/2007— Blatt 4 —Aufgabe 1: Zwei-Niveau-System

Ein System werde durch den Hamilton-Operator H beschrieben, wobei H durch

$$H = E_0 \mathbf{1} + W \sigma_1 = \begin{pmatrix} E_0 & W \\ W & E_0 \end{pmatrix}$$

dargestellt wird. Bestimmen Sie die Eigenenergien E_{\pm} und die normierten Eigenvektoren $|\psi_{\pm}\rangle$ von H .

Aufgabe 2: Energieobservable H

Ein Hamiltonoperator habe bzgl. der Basis $(|\psi_L\rangle, |\psi_Z\rangle, |\psi_R\rangle)$ die Matrixdarstellung

$$H = \begin{pmatrix} b & -a & 0 \\ -a & b & -a \\ 0 & -a & b \end{pmatrix}, \quad a > 0,$$

wobei $|\psi_L\rangle, |\psi_Z\rangle$ und $|\psi_R\rangle$ ein orthonormales System aus Zustandsvektoren bezeichnet.

a) Verifizieren Sie (durch Einsetzen), daß die Vektoren der Energieeigenzustände von H wie folgt lauten,

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte E_0 und E_{\pm} .

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten P_L, P_Z und P_R dafür, daß $|\psi_{-}\rangle$ sich im Zustand $|\psi_L\rangle, |\psi_Z\rangle$ bzw. $|\psi_R\rangle$ befindet.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle H \rangle$ und die Varianz $\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$ der Energieobservable H im Zustand $|\psi_L\rangle$.

Aufgabe 3: Grundzustandswellenfunktion

Man betrachte ein Atom mit punktförmigem Kern (mit der Kernladung Ze) und einem Elektron (mit der Masse m_e und Ladung $-e$). Das Elektron werde durch die Grundzustandswellenfunktion

$$\psi(\vec{r}) = N \exp[-r/r_0] \quad , \quad r = |\vec{r}|$$

beschrieben. Zeigen Sie, daß aus der zeitunabhängigen Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E_0 \right) \psi(\vec{r}) = 0$$

folgt, daß

$$r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Zm_e e^2}, \quad E_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_e^2} \frac{1}{r_0^2}, \quad N = \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}}.$$