DEPARTMENT FÜR PHYSIK

Prof. Dr. D. Lüst 13. November 2006

Übungen zur QUANTENMECHANIK I (T III) im WS 2006/2007

— Blatt 5—

Aufgabe 1: Erhaltungssätze und Energiestromdichte

Sei $\rho = |\psi|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte und die Teilchenstromdichte $\vec{j}$ definiert durch

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}\big(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi\big) = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\big(\psi^*\vec{\nabla}\psi\big)$$

i) Zeigen Sie den Erhaltungssatz für die Teilchenzahl

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$$

ii Definieren Sie für ein Teilchen im Potential V die Energiestromdichte $\vec{j}_W$ so, dass folgender Erhaltungssatz gilt

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j}_W = 0$$

Hierbei ist W die Energiedichte, d.h. $\int d^3x\, W =< H >$.

Aufgabe 2: Eigenwerte und Extremaleigenschaften I: harmonischer Oszillator

Bestimmen Sie mittels des Ritz'schen Variationsprinzips die Grundzustandsenergie des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$.
Verwenden Sie dazu als Testwellenfunktionen

$$\psi_\lambda(x) := Ae^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2}$$

Aufgabe 3: Eigenwerte und Extremaleigenschaften II: Virialsatz

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem Potential V, das homogen vom Grade n ist, d.h.

$$V(c\,\vec{r}) = c^n\,V(\vec{r})$$

Zeigen Sie mittels des Variationsprinzips den Virialsatz

$$2 < T >= n < V >$$

für einen Energieeigenzustand zu einem diskreten Eigenwert.
Wählen Sie dazu als Testfunktionenschar

$$\tilde{u}_\alpha(\vec{r}) := u(\alpha\,\vec{r})$$

wobei $u(\vec{r})$ die normierte Energieeigenfunktion zu dem betreffenden gebundenen Zustand sei.