DEPARTMENT FÜR PHYSIK
Prof. Dr. D. Lüst

20. November 2006

Übungen zur QUANTENMECHANIK I (T III) im WS 2006/2007

— Blatt 6—

Aufgabe 1: Zwei-Niveau-System

Betrachten Sie das System aus Aufgabe 1, 4. UB, das durch den Hamilton-Operator

$$H = E_0 \, \mathbf{1} + W \, \sigma_1 = \begin{pmatrix} E_0 & W \\ W & E_0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Im 4. UB wurden die Eigenenergien $E_\pm$ und die normierten Eigenvektoren $|\psi_\pm\rangle$ der stationären Zustände von H bestimmt.
a) Geben Sie die Zeitabhängigkeit von $|\psi_\pm(t)\rangle$ an.
b) Geben Sie die allgemeine zeitabhängige Lösung $|\psi(t)\rangle$ an.
c) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsamplitude und die Wahrscheinlichkeit dafür an, das System zu irgend einem Zeitpunkt t im Zustand $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu finden.

Aufgabe 2: Unendlicher Potentialtopf

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem eindimensionalen, unendlich hohen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 \;, & 0 \le x \le L \\ \infty \;, & \text{sonst} \end{cases}$$

Stellen Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung auf und lösen Sie die resultierende Differentialgleichung für $\psi(x)$ unter der Randbedingung $\psi(0) = \psi(L) = 0$. Wie lauten die normierten Eigenfunktionen und die dazugehörigen Energieeigenwerte?

Aufgabe 3: Eindimensionales supersymmetrisches Potential

Betrachten Sie ein eindimensionales quantenmechanisches System, das durch den folgenden Hamiltonoperator $\bar{H}$ beschrieben wird,

$$\bar{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d\bar{x}^2} + \bar{V}(\bar{x}) \quad , \quad \bar{V}(\bar{x}) = \frac{\hbar^2}{2m x_0^2}\left(1 - \frac{2}{\cosh^2(\frac{\bar{x}}{x_0})}\right)$$

a) Wählen Sie Längen- und Energieeinheiten so, daß $\bar{H}$ in die folgende dimensionslose Form gebracht werden kann,

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad , \quad V(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\cosh^2(x)}\right)$$

b) Skizzieren Sie das Potential $V(x)$. Geben Sie eine untere Grenze für das Eigenwertspektrum von H an. Ab welcher Energie beginnt das kontinuierliche Energiespektrum?
c) Zeigen Sie, daß $\psi_0(x) = N\left[\cosh(x)\right]^{-1}$ eine Eigenfunktion von H zum Eigenwert $E = 0$ ist. Berechnen Sie den Normierungsfaktor N.
d) Skizzieren Sie $\psi_0(x)$. Nach welchem einfachen Argument ist $\psi_0(x)$ die Grundzustandswellenfunktion von H?
e) Zeigen Sie, daß sich H in der folgenden Form darstellen lässt,

$$H = Q^+ Q^- \quad , \quad Q^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mp\frac{d}{dx} + \tanh(x)\right)$$

f) Prüfen Sie, ob die Operatoren Q^+ und Q^- zueinander adjungiert sind.
g) Zeigen Sie explizit, daß die Relation $Q^- \, \psi_0(x) = 0$ gilt.