DEPARTMENT FÜR PHYSIK

Prof. Dr. D. Lüst 27. November 2006

Übungen zur QUANTENMECHANIK I (T III) im WS 2006/2007

— Blatt 7—

Aufgabe 1: Deltafunktionspotential

Man untersuche die quantenmechanische Bewegung eines Teilchens im Potential

$$V(x) \ = \ c\delta(x)$$

i) $c < 0$: Bestimmen Sie die normierten Eigenfunktionen der gebundenen Zustände.

ii) $c > 0$: Bestimmen Sie die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten R und T.

Aufgabe 2: Relationen für Erwartungswerte

i) Zeigen Sie, dass für Eigenzustände des Hamiltonoperators die folgende Beziehung zwischen dem Mittelwert T der kinetischen Energie und dem Potential V gilt

$$2 < T > = < \vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}) >$$

Welche Form nimmt diese Beziehung insbesondere für ein sphärisches Potential der Form $V(\vec{r}) \sim r^n$ an ? Weisen Sie die entsprechende Aussage für den Fall $n = -1$ des Coulombpotentials $V(\vec{r}) = -e^2/r$ bei der Grundzustandswellenfunktion $\psi_{1s} = (\pi a^3)^{-1/2} e^{-r/a}$ des Wasserstoffatoms (mit $a = \hbar^2/(me^2)$) durch explizite Berechnung der beiden Seiten der Beziehung nach.

ii) Beweisen Sie für die Bewegung eines Teilchens im Potential $V(\vec{r})$ das Ehrenfest'sche Theorem für den Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ und das Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = -\vec{r} \times \nabla V$

$$\frac{d}{dt} < \vec{L} > = < \vec{M} >$$

Aufgabe 3: Bewegung im Potentialtopf

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < 0 \\ -V_0 & \text{für } 0 < x < a \\ 0 & \text{für } x > a \end{cases} \qquad (V_0 > 0)$$

Bestimmen Sie die Energie-Eigenwerte des stationären Problems. Besitzt dieses Problem stets einen gebundenen Zustand ? Geben Sie an, unter welchen Bedingungen genau n gebundene Zustände existieren.
(Hinweis: Welchen Randbedingungen genügen die stationären Eigenfunktionen? Konstruieren Sie die gebundenen Lösungen der stationären Schrödinger-Gleichung in den drei Potentialbereichen und fügen Sie diese mittels Randbedingungen zu einer Gesamtlösung zusammen.)