DEPARTMENT FÜR PHYSIK
Prof. Dr. D. Lüst

4. Dezember 2006

Übungen zur QUANTENMECHANIK I (T III) im WS 2006/2007

— Blatt 8 —

Aufgabe 1: Kohärente Zustände des einfachen harmonischen Oszillators

Der Hamilton-Operator des Systems sei

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

mit

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \quad , \quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad \langle\psi_m|\psi_n\rangle = \delta_{mn} \; .$$

Es sei

$$|\psi_z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)|\psi_n > \qquad \text{mit} \qquad c_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z|^2} \tag{1}$$

mit einer beliebigen komplexen Zahl z eine Überlagerung von Eigenzuständen.

a) Zeigen Sie, daß der Zustand (1) ein Eigenzustand des Operators a ist. Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

b) Zeigen Sie, daß

$$\langle\psi_z|\psi_{z'}\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\left[|z-z'|^2 - (z^*z' - zz'^*)\right]\right)$$

gilt. Was ergibt sich insbesondere für $z = z'$?

c) Zeigen Sie, daß der Zustandsvektor

$$|\psi_z(t)\rangle = \mathrm{e}^{-i\omega t/2}|\psi_{z(t)}\rangle \qquad \text{mit} \qquad z(t) = z_0\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

in der Form

$$|\psi_z(t)\rangle = \sum_n c_n(z_0)|\psi_n(t)\rangle \qquad \text{mit} \qquad |\psi_n(t)\rangle = \mathrm{e}^{-iE_nt/\hbar}|\psi_n\rangle$$

geschrieben werden kann, und daß er Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung ist.

d) Zeigen Sie, daß gilt

$$a|\psi_z(t)\rangle = z(t)|\psi_z(t)\rangle \qquad \text{und} \qquad \langle\psi_z(t)|a^\dagger = z(t)^*\langle\psi_z(t)| \; .$$

e) Berechnen Sie die (zeitabhängigen) Erwartungswerte $\langle x\rangle_z = \langle\psi_z(t)|x|\psi_z(t)\rangle$, $\langle p\rangle_z, \langle x^2\rangle_z, \langle p^2\rangle_z$, die Unschärfen $(\Delta x)_z, (\Delta p)_z$ und das Produkt $(\Delta x)_z(\Delta p)_z$ für den durch $|\psi_z(t)\rangle$ beschriebenen Zustand.

Aufgabe 2: Zweidimensionaler Oszillator im Magnetfeld

Man betrachte die Bewegung eines geladenen Teilchens (Ladung $q = -e$, Masse M, ohne Spin) in einem zweidimensionalen harmonischen Potential und einem zur (x, y)-Ebene senkrechten Magnetfeld.

a) Zeigen Sie zunächst, daß man ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ durch das Vektorpotential

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$$

darstellen kann.

Bitte wenden!

b) Spezialisieren Sie jetzt auf den Fall der Bewegung in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$, wobei $\vec{e}_z$ der Einheitsvektor in z-Richtung ist. In ebenen Polarkoordinaten (ρ, ϕ) hat man

$$\vec{p}^2 = -\hbar^2 \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{L_z^2}{\rho^2} \qquad \text{mit} \qquad L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \ .$$

Zeigen Sie, daß man den Hamilton-Operator

$$H = \frac{\left(\vec{p} + e\vec{A}\right)^2}{2M} + \frac{M}{2}\omega_0^2\left(x^2 + y^2\right)$$

in der Form

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2M} + \frac{\omega_c L_z}{2} + \frac{M\Omega^2\rho^2}{2}$$

schreiben kann mit

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\omega_c^2}{4} \qquad \text{und} \qquad \omega_c = \frac{eB}{M} \ .$$

c) Begründen Sie, daß man die Wellenfunktion in der Form

$$\psi(\rho, \phi) = R(\rho)\,\mathrm{e}^{im\phi}$$

mit ganzzahligem m schreiben kann. Geben Sie die Differentialgleichung für $R(\rho)$ an.

d) Den Radialanteil der Wellenfunktion kann man in der Form

$$R(\rho) = R_0(\rho)\,R_\infty(\rho)\,P(\rho)$$

schreiben mit

$$R_0(\rho) = \rho^\beta \qquad \text{und} \qquad R_\infty(\rho) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2\rho^2}$$

und einer Potenzreihe $P(\rho)$. Zeigen Sie, daß $R_0(\rho)$ und $R_\infty(\rho)$ Lösungen für asymptotisch kleine bzw. große Abstände ρ sind, und bestimmen Sie die Parameter α and β.

e) Die Potenzreihe $P(\rho)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left[P'' + \left(\frac{1+2|m|}{\rho} - 2\frac{M\Omega}{\hbar}\rho\right)P' - 2\frac{M\Omega}{\hbar}(1+|m|)P\right] = \left(E - \frac{m\hbar\omega_c}{2}\right)P \ .$$

Zeigen Sie, daß man mit dem Ansatz

$$P(\rho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \rho^\nu$$

($c_0 \neq 0, \nu$ gerade) aus dieser Differentialgleichung die Rekursionsrelation

$$\frac{c_{\nu+2}}{c_\nu} = \frac{\hbar\Omega(\nu + 1 + |m|) + \frac{m}{2}\hbar\omega_c - E}{\frac{\hbar^2}{2M}(\nu+2)(\nu+2+2|m|)}$$

für die Koeffizienten der Potenzreihe erhält.

f) Zeigen Sie, daß das Verhalten der Potenzreihe $P(z)$ für asymptotisch große Abstände ρ im Allgemeinen zu nicht-normierbaren Wellenfunktionen führt. Falls die Koeffizienten c_ν für alle $\nu > 2n$ verschwinden, wird die Potenzreihe zu einem Polynom (mit maximaler Potenz ρ^{2n}). Formulieren Sie die Abbruchbedingung, und zeigen Sie, daß man die Eigenenergien

$$E_{nm} = \frac{m\hbar\omega_c}{2} + \hbar\Omega(1 + 2n + |m|)$$

erhält.

g) Welche Energien erhält man für verschwindendes Magnetfeld? Wie hoch ist der Grad der Entartung der Zustände für $B = 0$? Welche Energien erhält man für sehr kleines und sehr großes Magnetfeld? Skizzieren Sie die Magnetfeld-Abhängigkeit der Energien E_{nm}, und tragen Sie die Wertepaare (n, m) an die Kurven der Skizze an.