DEPARTMENT FÜR PHYSIK

Prof. Dr. D. Lüst 18. Dezember 2006

Übungen zur QUANTENMECHANIK I (T III) im WS 2006/2007

— Blatt 9—

Aufgabe 1: Dipol- und Quadrupolmomente

Ein Teilchen der elektrischen Ladung e befinde sich in dem quantenmechanischen Zustand, der durch die Wellenfunktion $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y_{l,m}(\theta,\phi)$ charakterisiert ist.
i) Berechnen Sie (mittels Kugelkoordinaten) die Erwartungswerte der Komponenten des Dipol- und Quadrupolmoments (bei elektrischer Ladungsdichte $\rho = e|\psi|^2$)

$$M_i = \int d^3x\, \rho(x)\, x_i \qquad (i = 1,2,3) \tag{1}$$

$$Q_{i,j} = \int d^3x\, \rho(x)\, (3x_ix_j - r^2\,\delta_{i,j}) \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{2}$$

Zeigen Sie insbesondere (wie verhalten sich hierbei $Q_{1,1}$ und $Q_{2,2}$ zueinander ?)

$$\sum_{i=1}^{3} Q_{i,i} = 0 \qquad \text{und} \qquad Q_{i,j} = 0 \quad \text{für} \;\; i \neq j \tag{3}$$

ii) Zeigen Sie ferner die Relation

$$\sum_{m=-l}^{l} Q_{i,i}(l,m) = 0 \qquad (i = 1,2,3) \tag{4}$$

Hinweis: Es gilt $\cos\theta \cdot Y_{l,m} = a_{l,m}Y_{l+1,m} + a_{l-1,m}Y_{l-1,m}$ mit $a_{l,m} = \left(\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2}$.

Aufgabe 2: Zentralsymmetrisches Problem in Impulsdarstellung

i) Leiten Sie mittels Fouriertransformation die Schrödingergleichung für die Bewegung in einem zentralsymmetrischen Potential $V(r)$ in der Impulsdarstellung ab

$$\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\,\tilde{\psi}(\vec{p}) + \int \frac{d^3\vec{p}^{\,\prime}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\,\tilde{V}(\vec{p}-\vec{p}^{\,\prime})\,\tilde{\psi}(\vec{p}^{\,\prime}) = E\tilde{\psi}(\vec{p})$$

Hierbei ist

$$\tilde{\psi}(\vec{p}) = \int \frac{d^3\vec{r}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\,\vec{r}}\,\psi(\vec{r}) \qquad \text{und} \qquad \int \frac{d^3\vec{r}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\,\vec{r}} = (2\pi\hbar)^{3/2}\delta(\vec{q})$$

ii) Was ergibt sich konkret für den Fall des Wasserstoffatoms ? (Verwenden Sie $4\pi/\vec{k}^2 = \int d^3\vec{r}\;\frac{e^{-i\vec{k}\,\vec{r}}}{r}$.)
iii) Zeigen Sie, dass $\tilde{\psi}(\vec{p}) = N/(\alpha^2 + \vec{p}^{\,2})^2$ für einen geeigneten Wert des Parameters α Eigenfunktion des Hamilton-Operators ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert. (Verwenden Sie

$$\frac{\pi^2}{\alpha(\vec{p}^{\,2}+\alpha^2)} = \int d^3\vec{p}^{\,\prime}\frac{1}{(\vec{p}-\vec{p}^{\,\prime})^2(\vec{p}^{\,\prime\,2}+\alpha^2)^2} \quad .)$$

iv) Zu dem gefundenen Eigenwert gibt es die übliche Eigenfunktion $\psi(\vec{r}) = \frac{1}{(\pi a^3)^{1/2}}e^{-r/a}$ in der Ortsdarstellung ($a = \frac{\hbar^2}{m(e^2/4\pi\epsilon_0)}$). Zeigen Sie, dass deren Fouriertransformierte (Impulsdarstellung) den in **iii)** verwendeten Ansatz ergibt.