

---

---

Morphologie großräumiger Strukturen  
im Universum

---

---

Dissertation an der Fakultät für Physik  
der Ludwig-Maximilians-Universität München  
vorgelegt von Martin Kerscher aus München  
München, den 26. Januar 1998

Erster Gutachter: Prof. Dr. Herbert Wagner  
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Gerhard Börner  
Tag der mündlichen Prüfung: 4. Mai 1998





# Zusammenfassung

Eine wesentliche Beobachtung, die kosmologische Modelle erklären müssen, ist die Verteilung leuchtender Materie im Raum. Im Rahmen dieser Arbeit interessieren wir uns für die Verteilung der Galaxien, der Galaxienhaufen (Cluster) und der Supercluster. Zur Untersuchung deren räumlicher Verteilung verwenden wir statistische Methoden; ein Vergleich mit Modellen sowie Ergebnissen aus  $N$ -Körperrechnungen liefert dann einen Zusammenhang mit der Kosmogenese.

Da durch die Galaxien in unserem Universum nur *eine* Punktverteilung gegeben ist, gehen wir speziell auf den Zusammenhang zwischen einer rein statistischen Beschreibung mit Ensemblemittelwerten und einer Beschreibung mittels räumlichen Mittelwerten ein. Als deskriptive Methoden zur Beschreibung einer Punktverteilung betrachten wir unter anderem die Paarkorrelationsfunktion, die Verteilung nächster Nachbarn und Minkowskifunktionale. Diese unterschiedlichen Verfahren beleuchten verschiedene Aspekte der räumlichen Verteilung der leuchtenden Materie in unserem Universum. Wir besprechen Methoden, mit denen diese statistischen Größen aus Punktverteilungen geschätzt werden können. Für einige Schätzer der Paarkorrelationsfunktion konnten wir deren geometrische Eigenschaften klären und zeigen, daß ein weitverbreiteter Schätzer nicht erwartungstreu ist.

Sicher eines der interessantesten Resultate dieser Arbeit ist die Existenz großer Fluktuationen in den Clusterungseigenschaften der Galaxien bis auf Skalen von  $200h^{-1}\text{Mpc}$ . „Kleine“ Simulationen sind nicht in der Lage, die beobachteten Fluktuationen zu reproduzieren. Aus der statistischen Physik kennen wir große Fluktuationen in der Nähe des kritischen Punktes. In diesem Fall divergiert die Korrelationslänge, wir haben es dann mit einer skaleninvarianten Paarkorrelationsfunktion zu tun. Wir konnten zeigen, daß mit den derzeit verfügbaren Galaxienkatalogen der Schluß auf eine „fraktale“ Verteilung der Galaxien *nicht* möglich ist. Eine „Homogenitätsskala“ ist jedoch ebenfalls nicht aus der Galaxienverteilung mit Hilfe der Paarkorrelationsfunktion ablesbar.

Eine Untersuchung der Verteilung der Galaxiencluster und ein Vergleich mit  $N$ -Körperrechnungen zeigt, daß zwei gängige Modelle der Strukturbildung mit kalter dunkler Materie, das Standard- und ein „getiltetes“-Modell, die beobachtete Verteilung der Galaxiencluster nicht wiedergeben können, wohingegen Modelle mit kalter dunkler Materie und einer kosmologischen Konstante oder mit einer zusätzlichen Skala konsistente Ergebnisse erzielen.

Mit der Untersuchung der Superclusterverteilung gehen wir zu noch größeren Skalen. Wir finden Hinweise auf eine reguläre (antikorrelierte) Verteilung der Supercluster, sowie auf eine typische Skala bei  $60h^{-1}\text{Mpc}$ .

Abschließend untersuchen wir nochmals die Galaxienverteilung und vergleichen deren statistische Eigenschaften mit denen einfacher Punktprozeßmodelle. Es stellt sich heraus, daß Punktprozesse, die keine Struktur auf großen Skalen zeigen, die Galaxienverteilung nicht konsistent beschreiben können.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Galaxien als Punkte im Raum</b>	<b>7</b>
2.1	Empirische Verteilung . . . . .	7
2.2	Punktprozesse . . . . .	9
2.2.1	Definition . . . . .	9
2.2.2	Intensitätsmaß und Palmverteilung . . . . .	11
2.2.3	$n$ -Punktdichten . . . . .	13
2.2.4	Randverteilungen und „counts in cells“ . . . . .	14
2.2.5	Markierte Punktprozesse . . . . .	16
2.2.6	Modelle für Punktprozesse . . . . .	17
2.3	Zweipunktmaße . . . . .	22
2.3.1	Korrelationsintegral . . . . .	23
2.3.2	Paarkorrelationsfunktion . . . . .	24
2.3.3	Leistungsdichtespektrum . . . . .	26
2.3.4	Kovarianz, Varianz und $\sigma^2$ . . . . .	26
2.3.5	Warum reichen Zweipunktmaße nicht aus? . . . . .	28
2.4	Verteilung nächster Nachbarn und verwandte Größen . . . . .	31
2.4.1	Nächste-Nachbarverteilung . . . . .	31
2.4.2	Sphärische Kontaktverteilung . . . . .	36
2.4.3	Die $J$ -Funktion . . . . .	39
2.5	Minkowskifunktionale . . . . .	46
2.5.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	46
2.5.2	Minkowskifunktionale zur Analyse von Punktmengen . . . . .	55
2.6	Tesselationen . . . . .	57
2.6.1	Definition . . . . .	58
2.6.2	Delauney-Tesselationen . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Morphologische Untersuchungen</b>	<b>67</b>
3.1	Daten . . . . .	67
3.1.1	Beobachtungen . . . . .	67
3.1.2	Die untersuchten Kataloge . . . . .	72
3.1.3	Simulationen . . . . .	75

3.2	Fluktuationen in den Clusterungseigenschaften von Galaxien . . . . .	79
3.2.1	Fluktuationen der Minkowskifunktionale . . . . .	80
3.2.2	Vergleich mit einer CDM-Simulation . . . . .	94
3.2.3	Fluktuationen anderer Maße . . . . .	100
3.2.4	Zusammenfassung . . . . .	104
3.3	Vergleich der Verteilung von Galaxienclustern mit CDM-Modellen . . . . .	105
3.3.1	Beschreibung der CDM-Simulationen . . . . .	105
3.3.2	Simulierte Galaxiencluster . . . . .	108
3.3.3	Minkowskifunktionale der Abell/ACO-Galaxiencluster . . . . .	109
3.3.4	Vergleich mit den simulierten Clusterkatalogen . . . . .	112
3.3.5	Zusammenfassung . . . . .	117
3.4	Supercluster . . . . .	117
3.4.1	Regularität . . . . .	118
3.4.2	Typische Skalen . . . . .	121
3.4.3	Clustern auf kleinen – Regularität auf großen Skalen? . . . . .	124
3.4.4	Zusammenfassung . . . . .	125
3.5	Fraktale . . . . .	126
3.5.1	Selbstähnliche Punktverteilungen . . . . .	127
3.5.2	Analyse von Galaxienkatalogen . . . . .	132
3.5.3	Skaliert $\xi_2(r)$ ? . . . . .	136
3.5.4	Skaliert's nun? . . . . .	141
3.6	Clusternde Galaxien . . . . .	141
3.6.1	$J(r)$ von Galaxienkatalogen . . . . .	141
3.6.2	Ein <i>zu</i> einfaches Modell der Galaxienverteilung . . . . .	145
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>149</b>
<b>A</b>	<b>Schätzer</b>	<b>153</b>
A.1	Schätzer für das Korrelationsintegral . . . . .	154
A.1.1	Der „naive“ Schätzer für $C(r)$ . . . . .	154
A.1.2	Minus-Schätzer für $C(r)$ . . . . .	155
A.1.3	Ripley-Schätzer für $C(r)$ . . . . .	157
A.1.4	Ohser-Schätzer für $C(r)$ . . . . .	157
A.1.5	Vergleich der Schätzer für $C(r)$ . . . . .	158
A.1.6	Berechnung der Gewichte . . . . .	158
A.2	Schätzer für die Paarkorrelationsfunktion . . . . .	159
A.2.1	Der „naive“ Schätzer für $g(r)$ . . . . .	161
A.2.2	Minus-Schätzer für $g(r)$ . . . . .	161
A.2.3	Rivolo-Schätzer für $g(r)$ . . . . .	162
A.2.4	Der Ohser-Schätzer für $g(r)$ . . . . .	162
A.2.5	Schätzer für $g(r)$ mit $DD$ , $DR$ und $RR$ . . . . .	162
A.2.6	Die Geometrie von $DR$ und $RR$ . . . . .	163
A.2.7	Der $DD/RR$ -Schätzer für $g(r)$ . . . . .	164

---

A.2.8	Der $DD/DR$ -Schätzer für $g(r)$ . . . . .	164
A.2.9	Der Landy-Szalay-Schätzer für $g(r)$ . . . . .	165
A.2.10	Der Hamilton-Schätzer für $g(r)$ . . . . .	166
A.3	Schätzer für $\sigma(r)^2$ . . . . .	168
A.4	Schätzer für $G(r), G_n(r)$ . . . . .	168
A.4.1	Schätzer ohne Randkorrektur . . . . .	168
A.4.2	Der Minus-Schätzer . . . . .	168
A.4.3	Ein Hanisch-Schätzer . . . . .	169
A.4.4	Vergleich der Schätzer . . . . .	169
A.4.5	Schätzer für $G_n(r)$ und $g_n(r)$ . . . . .	170
A.5	Schätzer für $F(r), F_n(r)$ . . . . .	170
A.5.1	Schätzer ohne Randkorrektur . . . . .	173
A.5.2	Der Minus-Schätzer . . . . .	173
A.5.3	Schätzer für $F_n(r)$ . . . . .	173
A.6	Schätzer für $J(r), J_n(r)$ . . . . .	174
A.6.1	$J$ ohne Randkorrektur . . . . .	174
A.7	Schätzer für die Dichten der Minkowskifunktionale . . . . .	174
<b>B</b>	<b>Nochmals Punktprozesse</b> . . . . .	<b>179</b>
B.1	Definition . . . . .	179
B.2	Intensitätsmaß, Campbell-Maß und Palmverteilung . . . . .	180
B.3	Momentenmaße und $n$ -Punktdichten . . . . .	181
B.3.1	$n$ -Punktdichten mit fester Teilchenzahl . . . . .	182
B.3.2	Kumulanten und Korrelationsfunktionen . . . . .	183
B.3.3	Bedingte Dichten . . . . .	184
B.4	Markierte Punktprozesse . . . . .	184
<b>C</b>	<b>Lokale Minkowskifunktionale</b> . . . . .	<b>187</b>
C.1	Eine Zerlegungsformel . . . . .	187
C.1.1	Verallgemeinerte Ränder . . . . .	187
C.1.2	Lokale Minkowskifunktionale . . . . .	189
C.1.3	Eine spezielle Zerlegungsformel . . . . .	191
C.2	Nochmals Minkowskifunktionale von Punktprozessen . . . . .	192
	<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	<b>193</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Die Modellbildung in der Kosmologie wurde seit den ersten Anfängen bis in dieses Jahrhundert hinein mehr von philosophischen bzw. religiösen Prinzipien geleitet als durch Beobachtungen (Kanitscheider 1991). Gerne wird betont, daß mit den ersten *Messungen* der Mikrowellenhintergrundstrahlung und mit der Verfügbarkeit großer Galaxienkataloge die Kosmologie zur empirischen Wissenschaft wurde (Peebles 1993). Eine wesentliche Beobachtung, die kosmologische Modelle erklären müssen ist die Verteilung leuchtender Materie im Raum. Im Rahmen dieser Arbeit interessieren wir uns für die Verteilung der Galaxien, der Galaxienhaufen (Cluster) und der Supercluster. Zur Untersuchung deren räumlicher Verteilung verwenden wir statistische Methoden; ein Vergleich mit Modellen sowie Ergebnissen aus  $N$ -Körperrechnungen liefert dann einen Zusammenhang mit der Kosmogense.

### Unser homogenes Universum?

Die derzeitige Arbeitshypothese in der Kosmologie ist, daß wir uns in einem expandierenden, zu Anfang heißen Universum befinden. Weiterhin nehmen wir an, daß unser Universum, zumindest zu frühen Zeiten, sehr gut durch eine homogene und isotrope Verteilung der Materie beschrieben werden kann. Dies entspricht der Annahmen von Translations- und Rotationsinvarianz in drei Dimensionen. Mit zusätzlichen Forderungen (siehe z.B. Goenner 1994) erhalten wir eine spezielle einfache Form des metrischen Tensors  $g_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 0 \dots 4$  die durch das Friedmann–Robertson–Walker–Linienelement

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = c^2 dt^2 - R(t)^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 + \frac{k}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right)^2} \quad (1.1)$$

gegeben ist. Der Parameter  $k$  ist die konstante Gaußsche Krümmung der Raumhyperflächen. Mit entsprechenden reskalierten Längen können wir  $k$  aus  $\{-1, 0, 1\}$  wählen (Longair 1995). Für festes  $k$  ist daher die Geometrie eines homogenen und isotropen Raums vollständig durch die Skalenfunktion  $R(t)$  bestimmt. Es ist praktisch, die Skalenfunktion zu normieren,  $a(t) = \frac{R(t)}{R_0}$ , wobei  $R_0 = R(t_0)$  der Wert von  $R(t)$  zur heutigen Zeit  $t_0$  ist. Die Dynamik des

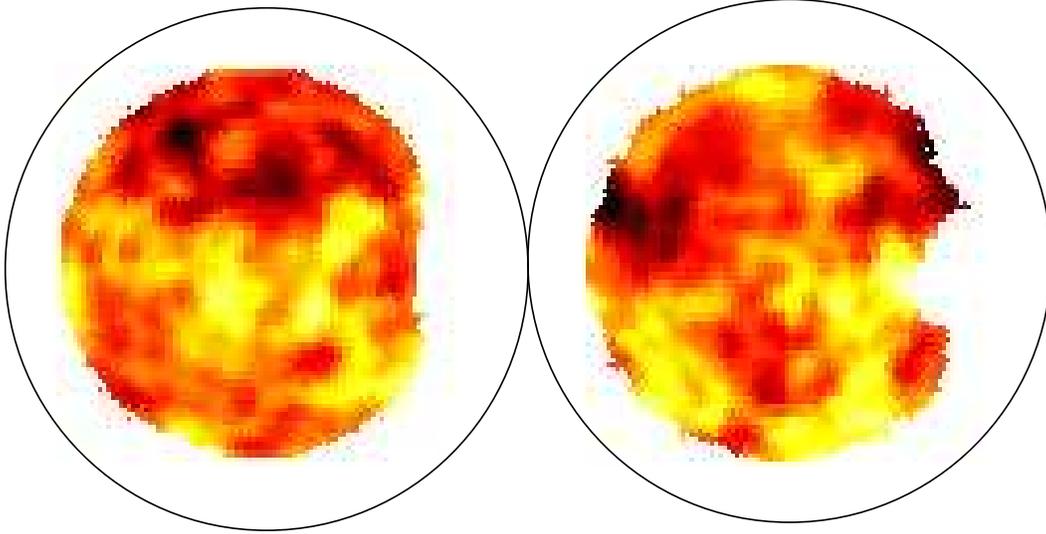


Abbildung 1.1: Die projizierten Temperaturschwankungen der Mikrowellenhintergrundstrahlung. Die Skala von Schwarz bis Weiß gibt Schwankungen in der Größenordnung von  $\pm 0.01\%$  um den Mittelwert 2.7 Kelvin wieder (aus Schmalzing & Górski 1998).

Skalenfaktors  $a(t)$  ist durch die Friedmanngleichung

$$\frac{\dot{a}^2 + c^2 k}{a^2} = \frac{8\pi G \bar{\rho} + \Lambda}{3} \quad (1.2)$$

gegeben, mit der Newtonschen Gravitationskonstante  $G$ , der Lichtgeschwindigkeit  $c$ , der mittleren Dichte  $\bar{\rho}$  und der kosmologischen Konstante  $\Lambda$ . In diesem Zusammenhang verwenden wir auch die Abkürzungen  $H_0 = \frac{\dot{a}}{a}|_{t_0}$  für die Hubblezahl,  $\Omega_0 = \frac{8\pi G \bar{\rho}(t_0)}{3H_0^2}$  für den Dichteparameter und  $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}$ . Fast alle Lösungen der Friedmanngleichung zeigen eine Anfangssingularität, die mit einem Zustand hoher Dichte und hohen Temperaturen in Verbindung gebracht wird. Diese Anfangssingularität wird als Urknall oder „Big Bang“ bezeichnet (siehe auch Waterson 1993). Anschließend erfolgt eine zumindest zeitweilige Expansion, in deren Verlauf die Dichte und die Temperatur abnimmt. Zum Zeitpunkt  $t_{\text{rek.}}$  besitzt nur noch ein geringer Bruchteil der Photonen die Energie, um Wasserstoff zu ionisieren; die Protonen und Elektronen rekombinieren zu Wasserstoff. Unwesentlich später sinkt die optische Dicke für Photonen, bedingt durch die Photon–Elektron–Streuung, unter eins: Das Universum wird durchsichtig. Die Photonen von dieser „letzten Streufläche“ können wir als Mikrowellenhintergrundstrahlung detektieren (siehe Abbildung 1.1). Neben der Isotropie der Mikrowellenhintergrundstrahlung ist das nahezu perfekte Schwarzkörperspektrum dieser Strahlung ein deutlicher Hinweis auf eine beinahe homogene Materieverteilung zu frühen Zeiten (Peebles 1993). Die Beobachtungen des Mikrowellenhintergrunds sind daher ein Konsistenztest für ein homogen expandierendes Modell unseres Universums. Sie ergeben, daß die Annahme, daß zum Zeitpunkt  $t_{\text{rek.}}$  unser Universum homogen *war*, plausibel ist.

Betrachtet man kleine Abweichungen von der homogenen Massenverteilung, so erkennt man, daß die Lösung mit einer nur zeitabhängigen homogenen Dichte instabil gegen Störungen ist – die Materie tendiert zum Clustern (siehe z.B. Padmanabhan 1993). Die hohe Symmetrie, wie sie zur Herleitung der Friedmanngleichung nötig ist, wird zerstört.

## Großräumige Strukturen im Universum

In unserer näheren Umgebung ist die Verteilung der Materie inhomogen und stark strukturiert. Strukturen sind nicht nur auf Galaxien- und kleineren Skalen zu beobachten, sondern auch in der räumlichen Verteilung der Galaxien selbst. In Abbildung 1.2 sind Projektionen der Galaxien in zwei benachbarten Segmente des CfA2-Katalogs (Huchra et al. 1990, Huchra et al. 1995) dargestellt. Das verwendete Koordinatensystem wird in Abschnitt 3.1.1 näher erläutert. Wir erkennen deutlich das durch die Gravitation verursachte Clustern der Galaxien; große Galaxiencluster werden durch Linien (Filamente) und Flächen (Sheets, Pancakes) verbunden. In der Überlagerung der beiden Segmente sehen wir, daß die große Struktur, die sich quer durch die Stichprobe zieht, nicht ein Artefakt der Projektion entlang einer Winkelkoordinate ist, sondern daß vielmehr eine große flächige Struktur senkrecht zu beiden Segmenten steht.

Mit verschiedenen Approximationen für die Dynamik von Störungen der anfangs (bei  $t_{\text{rek.}}$ ) fast homogenen Materieverteilung und mit Modellen für diese kleinen Schwankungen in der Anfangsdichteverteilung versuchen wir, das Clustern der Galaxien und die Bildung von großräumigen Strukturen zum heutigen Zeitpunkt zu erklären (Sahni & Coles 1995). Die von diesen Modellen vorhergesagte räumliche Verteilung von Galaxien kann mit der tatsächlich beobachteten Galaxienverteilung verglichen werden. Dieser Vergleich findet nicht Punkt für Punkt statt, sondern mittels statistischer Eigenschaften der Punktverteilung, wie z.B. der Paarkorrelationsfunktion. Wir interessieren uns in dieser Arbeit vor allem für die globale Morphologie, wie wir sie mit dem Minkowskifunktionalen, Verteilung nächster Nachbarn, usw. untersuchen können. Die Signifikanz von Aussagen basierend auf statistischen Methoden ist natürlich umso größer, je umfangreicher die Kataloge sind. Die geringe Größe der verfügbaren Kataloge ist sicher das Hauptproblem der derzeitigen statistischen Untersuchungen. In den nächsten Jahren, mit dem Erscheinen des „2dF“-Katalogs (Maddox 1998) und des „Sloan Digital Sky Surveys“ (Gunn 1995), wird dieses Problem hoffentlich in den Hintergrund treten.

## Gliederung der Arbeit

In Kapitel 2 besprechen wir die stochastischen Grundlagen und führen die statistischen Größen ein mit denen wir die Galaxienverteilung analysieren werden.

- In Abschnitt 2.1 diskutieren wir eine rein kombinatorische Beschreibung *einer* gegebenen Punktverteilung. Wir werden immer wieder Bezug auf diese Beschreibung mittels empirischer Dichten nehmen, da keine statistischen Annahmen in diese Darstellung eingehen. Einen stochastischen Zugang zu Punktverteilungen beschreiben wir

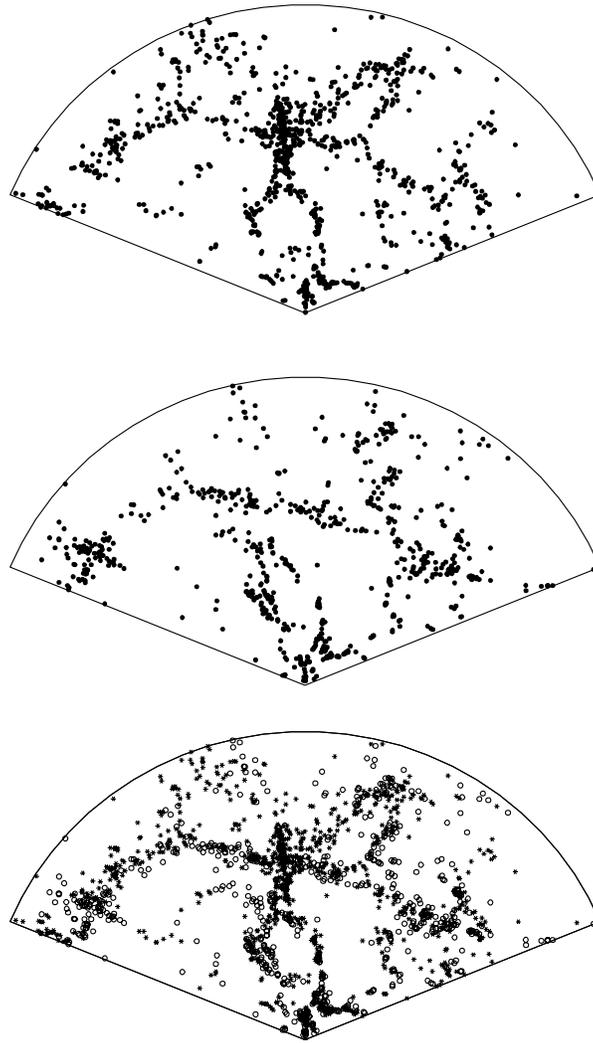


Abbildung 1.2: Oben sind die Galaxien im ersten CfA2–Segment (Huchra et al. 1990) mit äquatorialen Koordinaten (siehe Abschnitt 3.1.1)  $26.5^\circ \leq \delta \leq 32.5^\circ$  und  $8^h \leq \alpha \leq 17^h$  zu sehen, in der Mitte die Galaxien im benachbarten, zweiten CfA2–Segment (Huchra et al. 1995) mit  $32.5^\circ \leq \delta \leq 38.5^\circ$  und  $8^h \leq \alpha \leq 17^h$  und unten die Galaxien beider Segmente überlagert (erstes Segment: Sternchen, zweites Segment: Kreise). Es sind alle Galaxien mit Größenklasse  $\leq 15.5$  und einem radialen Abstand bis  $120h^{-1}\text{Mpc}$  projiziert entlang der Deklination  $\delta$  dargestellt.

in Abschnitt 2.2. Wir geben hier eine kurze Einführung in die Theorie der Punktprozesse, wobei wir immer die Verbindung zu Größen, die als Volumenmittel für nur eine Punktverteilung definiert werden, im Auge behalten. Dieser mathematische Zugang wurde gewählt, um zu erläutern, warum eine *statistische* Beschreibung der Galaxienverteilung überhaupt sinnvoll ist. Dies erscheint wichtig, da wir immer nur *eine* Galaxienverteilung in unserem Universum beobachten werden. In diesem Zusammenhang ist auch die Konstruktion von Schätzern für statistische Größen der Punktverteilung wichtig (siehe Anhang A). Die beiden Abschnitte 2.1 und 2.2 sind eher formal und schaffen die mathematischen Grundlagen für die folgenden Abschnitte. Ist der Leser weniger an der Methodik sondern mehr an den Ergebnissen interessiert, so können diese beiden Abschnitte übersprungen werden.

- In den Abschnitten 2.3 bis 2.6 werden die Größen eingeführt, mit denen wir die statistische Untersuchung der Galaxien-, Cluster- und Superclusterverteilung durchführen werden. In der Kosmologie ist nach wie vor die Analyse mit Zweipunktmethoden weit verbreitet. In Abschnitt 2.3 definieren wir Größen wie das Korrelationsintegral, die Paarkorrelationsfunktion, das Leistungsdichtespektrum, die Varianz der Teilchenzahl und zeigen deren Äquivalenz. An einem Beispiel sehen wir, daß Zweipunktmethoden oft wesentliche Eigenschaften einer Punktverteilung *nicht* erkennen können. Mit der Verteilung nächster Nachbarn, der sphärischen Kontaktverteilung und daraus abgeleiteten Größen erhalten wir zusätzliche Information über die Galaxienverteilung (Abschnitt 2.4). In Abschnitt 2.5 besprechen wir die Eigenschaften von Minkowski-funktionalen und zeigen, wie wir mit ihnen die Morphologie einer Punktverteilung untersuchen können. Als einen weiteren Ansatz zur Charakterisierung der Geometrie der Galaxienverteilung betrachten wir in Abschnitt 2.6 die Eigenschaften einer Delauney-Tessellation, bestimmt durch die Positionen der Galaxien im Raum.

In Kapitel 3 untersuchen wir dann die Galaxien-, Cluster- und Superclusterverteilung mit den in Kapitel 2 vorgestellten Methoden.

- Zu Beginn (Abschnitt 3.1) gehen wir auf typische Beobachtungsprobleme ein und stellen kurz die verwendeten Kataloge vor. Weiterhin werden die numerischen Verfahren der verwendeten  $N$ -Körperrechnungen erläutert.
- Eine Untersuchung der Galaxienverteilung gegeben durch den IRAS 1.2 Jy Galaxienkatalog in Abschnitt 3.2 zeigt, daß selbst auf großen Skalen bis  $200h^{-1}\text{Mpc}$  Fluktuationen *wesentlich* die Clusterungseigenschaften bestimmen. Ein Vergleich mit einer  $N$ -Körperrechnung zeigt, daß „kleine“ Simulationen nicht in der Lage sind, die beobachteten Fluktuationen wiederzugeben.
- Aus der statistischen Physik kennen wir große Fluktuationen in der Nähe des kritischen Punktes. In diesem Fall divergiert die Korrelationslänge, wir haben es dann mit einer skaleninvarianten Paarkorrelationsfunktion zu tun. Da die Paarkorrelationsfunktion bis  $20\text{--}30h^{-1}\text{Mpc}$  ein skaleninvariantes Verhalten zeigt, liegt es nahe,

eine „fraktale“ Verteilung der Galaxien zu vermuten. In Abschnitt 3.5 zeigen wir, daß solch ein weitreichender Schluß mit den derzeitig verfügbaren Galaxienkatalogen *nicht* möglich ist. Andererseits ist eine „Homogenitätsskala“ ebenfalls nicht aus der Galaxienverteilung mit Hilfe der Paarkorrelationsfunktion ablesbar.

- In Abschnitt 3.3 vergleichen wir die Morphologie der Galaxienclusterverteilung mit simulierten Clustern aus  $N$ -Körperrechnungen für unterschiedliche kosmologische Modelle. Zwei Modelle der Strukturbildung mit kalter dunkler Materie, das Standard- und ein „getiltetes“-Modell, sind nicht in der Lage, die beobachteten Strukturen zu reproduzieren. Modelle mit kalter dunkler Materie und einer kosmologischen Konstante oder mit einer zusätzlichen Skala liefern konsistente Ergebnisse.
- Wir gehen nun zu noch größeren Skalen über und untersuchen in Abschnitt 3.4 die Verteilung der Supercluster. Wir finden Hinweise auf eine reguläre Verteilung auf großen Skalen, sowie auf eine typische Skala bei  $60h^{-1}\text{Mpc}$ .
- In Abschnitt 3.6 untersuchen wir nochmals die beobachtete Galaxienverteilung und vergleichen mit einfachen Punktprozeßmodellen. Es zeigt sich, daß diese einfachen Modelle *ohne* Strukturen auf großen Skalen nicht in der Lage sind, die beobachtete Galaxienverteilung wiederzugeben.

Die Ergebnisse fassen wir dann in Abschnitt 4 zusammen und besprechen weitere geplante Anwendungen.

Im Anhang A definieren wir Schätzer für die deskriptiven statistischen Größen aus Abschnitt 2.3 bis 2.5 und diskutieren deren Eigenschaften. In Anhang B werden die Konzepte aus Abschnitt 2.2 nochmals verfeinert. Dort werden auch die in der Kosmologie üblichen normierten Kumulanten besprochen. Den Abschluß bildet der Anhang C über technische Aspekte der Minkowskifunktionale, wie wir sie für die numerische Berechnung benötigen.

# Kapitel 2

## Galaxien als Punkte im Raum

Die räumliche Verteilung der Galaxien, der Galaxienhaufen (Cluster) und der Supercluster kann als Realisierung eines stochastischen Punktprozesses aufgefaßt werden. Diese Betrachtungsweise erlaubt es uns, *statistische* Methoden zur Untersuchung der Galaxienverteilung zu verwenden. Allerdings ist durch die Positionen der Galaxien im Universum nur *eine* Punktmenge gegeben, d.h. nur *eine* Realisierung liegt vor. In Abschnitt 2.1 betrachten wir zuerst eine rein kombinatorische Beschreibung mittels empirischer Dichten. Stochastische Punktprozesse und ihre Eigenschaften diskutieren wir in Abschnitt 2.2. Speziell heben wir den Zusammenhang mit Größen hervor, die nur für eine gegebene Punktverteilung definiert werden können. Absätze, in denen diese Zusammenhänge diskutiert werden, sind eingerückt und *kursiv* gedruckt. Damit eng verwandt ist die Frage nach Schätzern (siehe Anhang A); mit ihnen bestimmen wir die Schätzwerte stochastischer Größen aus einer (oder mehreren) gegebenen Realisierungen. In den Abschnitten 2.3 bis 2.6 besprechen wir deskriptive Statistiken zur Untersuchung von Punktverteilungen.

### 2.1 Empirische Verteilung

Im folgenden betrachten wir die Punktmenge  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ , gegeben durch die Koordinaten von  $N$  Galaxien (oder Clustern, Superclustern),  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{D}$ , wobei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$  das Stichprobenfenster ist, in welchem die Beobachtung durchgeführt wurde (siehe Abbildung 2.1). Die geometrische Information ist vollständig in den (symmetrisierten) empirischen Dichten

$$\rho_n^{N,\mathcal{D}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \text{ mit } 1 \leq n \leq N \quad (2.1)$$

enthalten. Sie sind explizit als eine Summe über Delta-Distributionen  $\delta^D(\cdot)$  gegeben:

$$\rho_n^{N,\mathcal{D}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \delta^D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{i_1}) \cdots \delta^D(\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_{i_n}). \quad (2.2)$$

Die Summe läuft über alle  $n$ -Tupel  $(i_1, \dots, i_n)$  mit  $1 \leq i_j \leq N$  und paarweise verschiedenen Indizes  $i_j \neq i_k$ . Daher sind die  $\rho_n^{N,\mathcal{D}}(\cdot)$  symmetrisch:

$$\rho_n^{N,\mathcal{D}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = \rho_n^{N,\mathcal{D}}(\text{Permutation von } (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)). \quad (2.3)$$

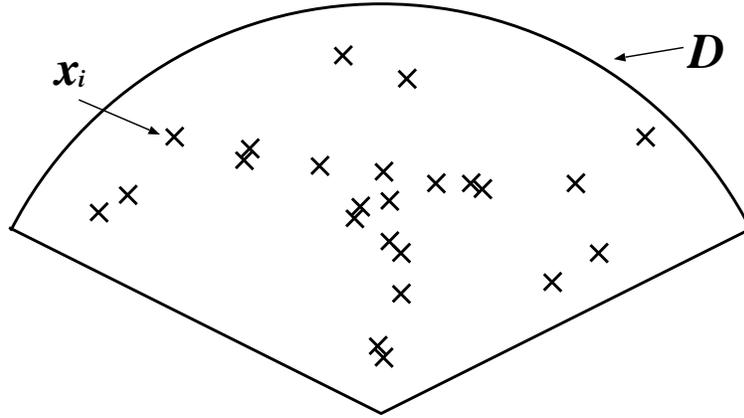


Abbildung 2.1: Zweidimensionale Skizze einer Punktverteilung  $\mathcal{X}$  in einem typischen Beobachtungsfenster  $\mathcal{D}$ .

Die Anzahl der Punkte in der Menge  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$  ist dann durch

$$\int_{\mathcal{C}} d^d y \rho_1^{N, \mathcal{D}}(\mathbf{y})$$

gegeben. Für disjunkte  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{D}$  ist

$$\int_{\mathcal{C}_1} d^d y_1 \int_{\mathcal{C}_2} d^d y_2 \rho_2^{N, \mathcal{D}}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$$

die Anzahl der Punktpaare aus  $\mathcal{X}$  mit jeweils einem Punkt in den Mengen  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ .

Die  $\rho_n^{N, \mathcal{D}}(\cdot)$  sind wie folgt normiert:

$$\int_{\mathcal{D}} d^d y_1 \dots \int_{\mathcal{D}} d^d y_n \rho_n^{N, \mathcal{D}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = \binom{N}{n} n! = N(N-1) \dots (N-(n-1)), \quad (2.4)$$

und somit gilt

$$\sum_{n=1}^N \int_{\mathcal{D}} d^d y_1 \dots \int_{\mathcal{D}} d^d y_n \left( \binom{N}{n} n! \right)^{-1} \rho_n^{N, \mathcal{D}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = N. \quad (2.5)$$

Diese kombinatorische<sup>1</sup> Beschreibung ist einzig an den Daten orientiert, natürlich ist  $\rho_n^{N, \mathcal{D}}$  abhängig von der Stichprobengeometrie  $\mathcal{D}$  und der Anzahl der Punkte  $N$ . Im folgenden zeigen wir, daß diese Beschreibung als ein Spezialfall einer stochastischen Beschreibung verstanden werden kann. Wir betrachten die  $\rho_n^{N, \mathcal{D}}$  als entartete „Wahrscheinlichkeitsdichten“ im Sinne von Distributionen.

<sup>1</sup>Kombinatorisch verstehen wir im Sinne von kombinatorischer Geometrie (Hadwiger 1955b).

## 2.2 Punktprozesse

In diesem Abschnitt diskutieren wir Punktverteilungen als Ergebnisse eines Zufallsprozesses. Um den Unterschied zwischen Raummittel und Ensemblemittel klar formulieren zu können, gehen wir von einer rein statistischen Beschreibung der Punktverteilung, einem Punktprozeß aus. Hierzu definieren wir statistische Größen wie die Teilchendichte oder die Paarkorrelationsfunktion als Eigenschaften eines Ensembles.

*In den abgesetzten und kursiv gedruckten Abschnitten werden die entsprechenden Größen als Raummittel eingeführt. Diese Größen sind für eine Realisierung gemäß Abschnitt 2.1 berechenbar.*

Eine Einführung in die Punktprozeßstatistik findet man bei Stoyan & Stoyan (1992), die Theorie wird ausführlich bei Stoyan et al. (1995), Cressie (1991) und Daley & Vere-Jones (1988) behandelt. In Anhang B werden wir nochmals Punktprozesse unter etwas formaleren Gesichtspunkten behandeln. Dort führen wir die normierten Kumulanten (die in der Kosmologie üblichen Korrelationsfunktionen) und die bedingten Dichten ein.

### 2.2.1 Definition

Ein Punktprozeß  $\Phi$  sei das stochastische „Konstruktionsprinzip“ für eine zufällige Punktmenge  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$  mit  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ . Wir interessieren uns nur für *lokal endliche* Punktprozesse  $\Phi$ , d.h. in jeder abgeschlossenen Menge des  $\mathbb{R}^d$  seien nur endlich viele Punkte  $\mathbf{x}_i$  enthalten. Um eindeutige geometrische Aussagen treffen zu können, betrachten wir im Folgenden nur *einfache* Punktprozesse, es gilt also immer  $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$  für  $i \neq j$ . Sei  $\varphi = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$  eine Punktmenge, die wir als Realisierung des Punktprozesses  $\Phi$ , also mit Hilfe dessen stochastischen „Konstruktionsprinzips“ erhalten. Oft sind wir an der Anzahl von Punkten  $\#(\varphi \cap \mathcal{C})$  einer Realisierung  $\varphi$  in einer Menge  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$  interessiert. Als Abkürzung schreiben wir<sup>2</sup>

$$\varphi(\mathcal{C}) = \#(\varphi \cap \mathcal{C}). \quad (2.6)$$

Die Punktmenge  $\mathcal{X}$  aus Abschnitt 2.1 können wir als Teilmenge einer Realisierung  $\varphi$  des Punktprozesses  $\Phi$  innerhalb der Stichprobengeometrie  $\mathcal{D}$  auffassen (siehe Abbildung 2.2):

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} = \{\mathbf{x} \in \varphi \mid \mathbf{x} \in \mathcal{D}\} \subset \varphi.$$

Mit obiger Abkürzung erhalten wir die Anzahl  $N$  der Punkte aus  $\varphi$  im Fenster  $\mathcal{D}$  durch

$$\varphi(\mathcal{D}) = N.$$

---

<sup>2</sup>Wir benutzen also  $\varphi$  als (zufälliges) Zählmaß, siehe hierzu Anhang B.

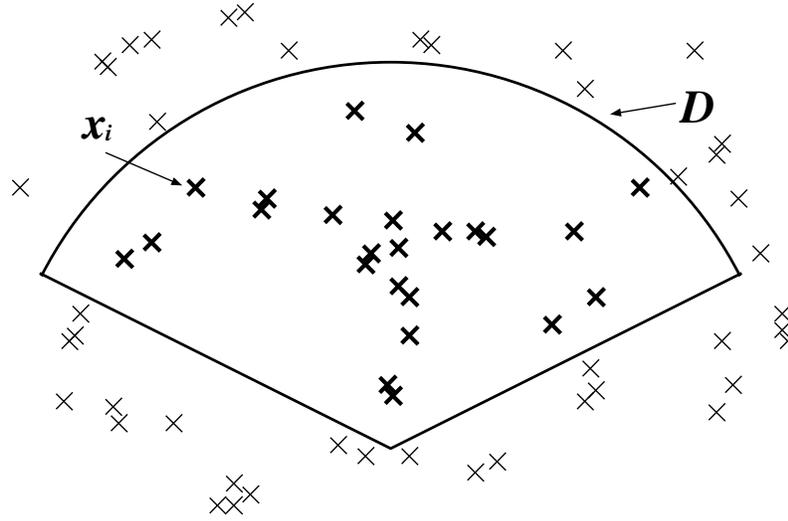


Abbildung 2.2: Die Punktverteilung  $\mathcal{X}$  (dicke Kreuze) als Teil einer Realisierung  $\varphi$  eines Punktprozesses (alle Kreuze). Wollen wir mit Hilfe der Punktverteilung  $\mathcal{X}$  auf statistische Eigenschaften außerhalb von  $\mathcal{D}$  schließen, müssen wir Stationarität annehmen.

### Verteilung und Erwartungswert

$\mathbb{P}$  bezeichne die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Punktprozesses  $\Phi$ . Mit ihr können wir Wahrscheinlichkeitsaussagen über Ereignisse, die von der räumlichen Verteilung der Punkte abhängen, formulieren. Als Beispiel betrachten wir die Wahrscheinlichkeit, daß in einer Realisierung  $\varphi$  im Gebiet  $\mathcal{C}$  genau  $n$  Punkte enthalten sind:

$$\mathbb{P}(\{\varphi \mid \varphi(\mathcal{C}) = n\}). \quad (2.7)$$

Wir fragen also, wie häufig solche Realisierungen  $\varphi$  auftreten. Für die Menge  $\{\varphi \mid \varphi(\mathcal{C}) = n\}$  an Realisierungen  $\varphi$  schreiben wir auch kürzer  $\{\varphi(\mathcal{C}) = n\}$ . Den Erwartungswert bezüglich  $\mathbb{P}$  bezeichnen wir mit  $\mathbb{E}$ . Für Funktionen  $f : \varphi \mapsto f(\varphi) \in \mathbb{R}$  ist dann  $\mathbb{E}f(\varphi)$  als Mittelwert über Realisierungen, also als Ensemblemittelwert definiert.

*Im Falle der Galaxienverteilung sind wir im Besitz nur einer Punktverteilung  $\mathcal{X}$  in  $\mathcal{D}$  (siehe Abschnitt 2.1); Ensemblemittelwerte sind nicht definierbar, ein Volumenmittel ist jedoch weiterhin wohldefiniert. Siehe hierzu auch Abbildung 2.3. Für eine Funktion  $f : \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$  erhalten wir*

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N} \int_{\mathcal{D}} d^d x \rho_1^{N, \mathcal{D}}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}).$$

*Ist die Punktmenge  $\mathcal{X}$  Teil einer Realisierung eines ergodischen Punktprozesses (siehe den nächsten Abschnitt), so konvergiert das Raummittel  $\langle f \rangle$  für große  $\mathcal{D}$  gegen den Ensemblemittelwert  $\mathbb{E} \frac{1}{\varphi(\mathcal{D})} \sum_{\mathbf{x} \in \varphi \cap \mathcal{D}} f(\mathbf{x})$ .*

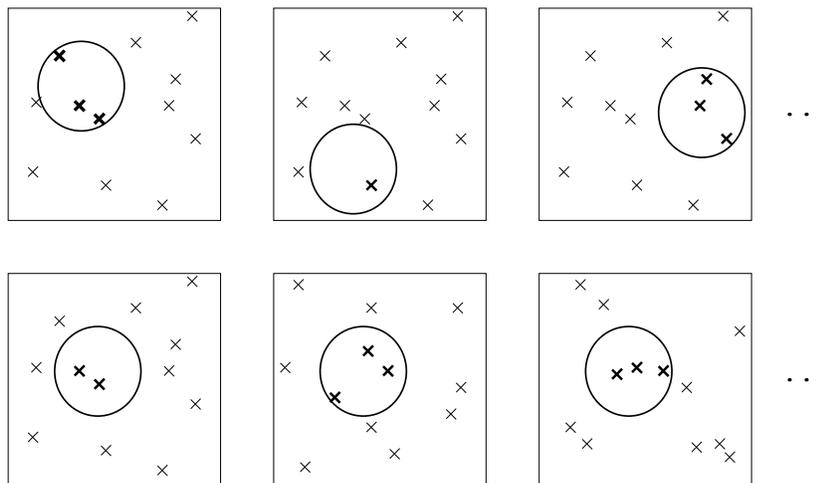


Abbildung 2.3: In der oberen Reihe ist das Raummittel in *einer* Realisierung dargestellt, in der unteren Reihe der Ensemble-Mittelwert über unterschiedliche Realisierungen.

### Stationarität, Isotropie und Ergodizität

Wir nennen einen Punktprozeß stationär<sup>3</sup>, wenn seine statistischen Eigenschaften invariant unter Translationen sind. Ein Punktprozeß heißt isotrop, wenn seine Eigenschaften invariant unter Rotationen sind. Noch stärker als Stationarität ist die Ergodizität. Intuitiv erwarten wir von einem ergodischen Punktprozeß, daß das Raummittel für genügend große Raumbereiche gegen das Ensemblemittel konvergiert. Konvergiert<sup>4</sup> z.B. die Folge kompakter Mengen  $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}_{n+1}$  gegen  $\mathbb{R}^d$ , so konvergiert für einen ergodischen Prozeß z.B.  $\varphi(\mathcal{C}_n)/|\mathcal{C}_n|$ , also die Anzahl von Punkten pro Volumen  $|\mathcal{C}_n|$ , gegen die Teilchendichte. Formale Definitionen findet man bei Stoyan et al. (1995) und Nguyen & Zessin (1979).

#### 2.2.2 Intensitätsmaß und Palmverteilung

Das Intensitätsmaß  $\Lambda$  eines Punktprozesses ist für eine Menge  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$  als die mittlere Anzahl von Punkten in  $\mathcal{C}$  definiert<sup>5</sup>:

$$\Lambda(\mathcal{C}) = \mathbb{E} \varphi(\mathcal{C}) = \mathbb{E} \sum_{\mathbf{x} \in \varphi} \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}). \quad (2.8)$$

<sup>3</sup>Die Theorie der Punktprozesse entwickelte sich anfangs parallel zur Theorie von Zeitreihen, daher der Begriff stationär, der synonym zu homogen verwendet wird.

<sup>4</sup>Als einfaches Beispiel stelle man sich Kugeln mit Radius  $r$  vor, deren Radius  $r$  nach unendlich wächst.

<sup>5</sup>Die Summe über die Indikatorfunktion der Menge  $\mathcal{C}$ ,

$$\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathcal{C}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist nichts anderes als  $\varphi(\mathcal{C})$ .

Für stationäre Punktprozesse folgt aus der Bewegungsinvarianz

$$\Lambda(\mathcal{C}) = \bar{\rho} |\mathcal{C}|, \quad (2.9)$$

wobei  $|\mathcal{C}|$  das Volumen von  $\mathcal{C}$  und  $\bar{\rho}$  die mittlere Dichte ist.

$\Lambda(\mathcal{C})$  ist die mittlere Anzahl von Punkten in  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$  und ist als Ensemblemittelwert definiert. Für eine gegebene Realisierung  $\mathcal{X} \subset \varphi$  ist  $\varphi(\mathcal{C})$  genau die Anzahl der Punkte in  $\mathcal{C}$ . Die mittlere Anzahl  $\langle \varphi(\mathcal{C}) \rangle$  von Punkten in Mengen der Form und Größe  $\mathcal{C}$  kann als Raummittel über Mengen  $\mathcal{C}_{\mathbf{z}_1}, \dots, \mathcal{C}_{\mathbf{z}_k} \subset \mathcal{D}$  mit der punktweisen Verschiebung  $\mathcal{C}_{\mathbf{z}} = \mathbf{z} + \mathcal{C}$  definiert werden (siehe hierzu auch Abbildung 2.3):

$$\langle \varphi(\mathcal{C}) \rangle = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varphi(\mathcal{C}_{\mathbf{z}_i}).$$

Für stationäre ergodische Prozesse konvergiert  $\langle \varphi(\mathcal{C}) \rangle / |\mathcal{C}|$  für  $|\mathcal{C}| \rightarrow \infty$  gegen die Dichte  $\bar{\rho}$ . Die Teilchendichte  $\bar{\rho}$  kann somit durch

$$\frac{\varphi(\mathcal{D})}{|\mathcal{D}|} = \frac{N}{|\mathcal{D}|}$$

geschätzt werden.

Einige Aussagen über Punktprozesse lassen sich einfacher formulieren, wenn man die Verteilung der Punkte von einem „typischen“ Punkt des Prozesses aus betrachtet. Zum Beispiel ist die Verteilung nächster Nachbarn  $G(r)$  (siehe Abschnitt 2.4.1) die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein weiterer Punkt aus  $\varphi$  in der Kugel  $\mathcal{B}_r(\mathbf{x})$  mit Radius  $r$  um einen „typischen“ Punkt  $\mathbf{x} \in \varphi$  zu finden ist,

$$G(r) = \mathbb{P}\left(\{\varphi(\mathcal{B}_r(\mathbf{x})) > 1 \mid \mathbf{x} \in \varphi\}\right).$$

Die Palmverteilung  $\mathbb{P}^{\mathbf{x}}$  ist die Verteilung des Punktprozesses unter der Bedingung, daß der Punkt  $\mathbf{x}$  in der Realisierung  $\varphi$  enthalten ist. Die Bedingung  $\mathbf{x} \in \varphi$  hat für einen stationären Prozeß aber Wahrscheinlichkeit 0. Es ist daher nicht möglich, die Palmverteilung als Quotient zu definieren. Sie ist jedoch als Dichte des Campbell–Maßes bezüglich des Intensitätsmaßes wohldefiniert (siehe Anhang B und Stoyan et al. 1995). Im stationären Fall gilt  $\mathbb{P}^{\mathbf{x}} = \mathbb{P}^0$ , d.h. für stationäre Prozesse kann jeder Punkt, also auch der Ursprung, als „typischer“ Punkt gewählt werden. Wir können in diesem Fall die Nächste–Nachbarverteilung wie folgt durch die Palmverteilung ausdrücken:

$$G(r) = \mathbb{P}^0\left(\{\varphi(\mathcal{B}_r(0)) > 1\}\right) = 1 - \mathbb{P}^0\left(\{\varphi(\mathcal{B}_r(0)) = 1\}\right).$$

### 2.2.3 $n$ -Punktdichten

Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit,  $n$  Punkte  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  in den (paarweise disjunkten) infinitesimalen Raumgebieten  $dV_1, \dots, dV_n$  zu finden, mit

$$\rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) dV_1 \dots dV_n. \quad (2.10)$$

Die Verteilung der Punkte im Raum ist vollständig durch die Angabe aller  $n$ -Punktdichten bestimmt (siehe Abschnitt B). Wir können  $\rho_n(\cdot)$  nun zur Berechnung von Erwartungswerten benützen. Als einfaches Beispiel betrachten wir die Indikatorfunktion  $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(x)$  der Menge  $\mathcal{C}$ . Integriert mit der Einpunktdichte erhalten wir die mittlere Anzahl von Punkten des Prozesses  $\Phi$  in der Menge  $\mathcal{C}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^d} d^d x \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) \rho_1(\mathbf{x}) = \mathbb{E} \sum_{x \in \varphi} \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathcal{C}) = \bar{\rho} |\mathcal{C}|.$$

Die letzte Gleichheit gilt nach Gleichung (2.9) für einen stationären Punktprozeß.

*Analog können wir die empirische Dichte aus Abschnitt 2.1 verstehen. Sei  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$  und  $\mathcal{X} = \varphi \cap \mathcal{D}$  unsere Galaxienverteilung mit  $N$  Galaxien. Dann ist*

$$\int_{\mathcal{C}} d^d x \rho_1^{N, \mathcal{D}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathcal{C})$$

*die Anzahl der Galaxien in  $\mathcal{C}$ .  $\rho_1^{N, \mathcal{D}}(\mathbf{x})$  ist die empirisch gegebene Dichte, vergleichbar mit der Einpunktdichte  $\rho_1(\mathbf{x})$ .*

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir zwei infinitesimale Volumina  $dV_1, dV_2$  zentriert um  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ . Dann ist

$$\rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) dV_1 dV_2$$

die Wahrscheinlichkeit, in  $dV_1$  (bei  $\mathbf{x}_1$ ) und in  $dV_2$  (bei  $\mathbf{x}_2$ ) einen Punkt zu finden (siehe auch Abbildung 2.4).

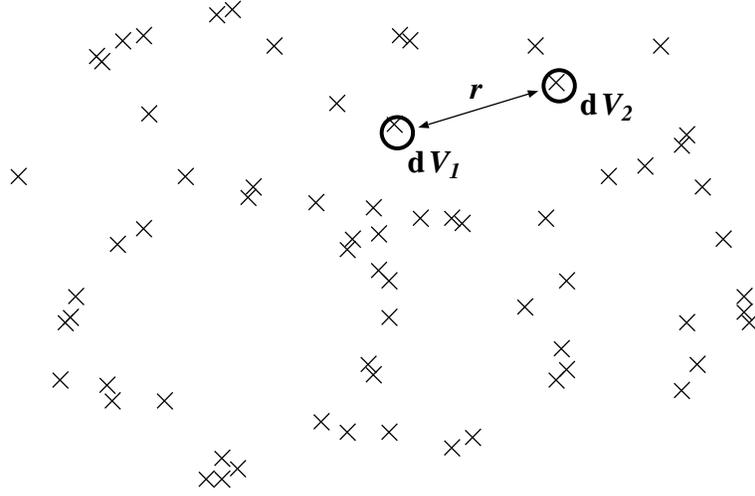
*Für disjunkte  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{D}$  ist*

$$\int_{\mathcal{C}_1} d^d x_1 \int_{\mathcal{C}_2} d^d x_2 \rho_2^{N, \mathcal{D}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{(i_1, i_2)} \mathbb{1}_{\mathcal{C}_1}(\mathbf{x}_{i_1}) \mathbb{1}_{\mathcal{C}_2}(\mathbf{x}_{i_2})$$

*die Anzahl der Paare  $(\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2})$  in  $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ ; die Summe läuft über Zweitupel mit paarweise verschiedenen Indizes. Somit entspricht  $\rho_2^{N, \mathcal{D}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  der Zweipunktdichte  $\rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Formal gilt*

$$\rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbb{E} \rho_n^{N, \mathcal{D}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n), \quad (2.11)$$

*wobei das Gleichheitszeichen nur unter einem Integral Sinn macht (für eine Herleitung siehe Abschnitt B.3).*

Abbildung 2.4: Illustration zur Zweipunktdichte  $\rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ .

Die  $\rho_n(\cdot)$  sind wie folgt normiert (siehe Stoyan et al. 1995, oder direkt mit den Gleichungen (2.4) und (2.11)):

$$\int_{\mathcal{C}} d^d x_1 \cdots \int_{\mathcal{C}} d^d x_n \rho(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbb{E} \left( \varphi(\mathcal{C}) (\varphi(\mathcal{C}) - 1) \cdots (\varphi(\mathcal{C}) - (n - 1)) \right). \quad (2.12)$$

Ist  $\Phi$  stationär, so ist  $\rho_1 = \bar{\rho}$  die Punktdichte, und die Zweipunktdichte  $\rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \rho_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$  ist nur vom Abstandsvektor abhängig. Ist der Prozeß zusätzlich isotrop, so ist  $\rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \rho_2(r)$  nur vom Abstand  $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$  abhängig. Das erzeugende Funktional der  $\rho_n(\cdot)$  ist wie folgt definiert,

$$\mathcal{F}[\mu] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \cdots \int d^d x_n \rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \mu(\mathbf{x}_1) \cdots \mu(\mathbf{x}_n),$$

wobei wir  $\rho_0 = 1$  setzen. Die  $n$ -Punktdichten erhalten wir als Funktionalableitungen

$$\rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \frac{\delta^{(n)}}{\delta \mu(\mathbf{x}_1) \cdots \delta \mu(\mathbf{x}_n)} \mathcal{F}[\mu] \Big|_{\mu=0}. \quad (2.13)$$

Eng verwandt zu den  $n$ -Punktdichten  $\rho_n(\cdot)$  sind die Dichten mit fester Teilchenzahl  $d_n(\cdot)$ , die Kumulanten  $c_n(\cdot)$ , die Korrelationsfunktionen  $\xi_n(\cdot)$  und die bedingten Dichten  $\rho_n(\cdot|\cdot)$ , wie wir sie in Anhang B besprechen werden.

## 2.2.4 Randverteilungen und „counts in cells“

Die  $k$ -dimensionalen Randverteilungen

$$\mathbb{P} \left( \{ \varphi(\mathcal{C}_1) = n_1, \dots, \varphi(\mathcal{C}_k) = n_k \} \right) \quad (2.14)$$

geben die Wahrscheinlichkeit an, daß jeweils  $n_i$  Punkte in den abgeschlossenen Mengen  $\mathcal{C}_i \subset \mathbb{R}^d$  (mit  $i = 1 \dots k$ ) enthalten sind. Die Verteilung  $\mathbb{P}$  eines Punktprozesses ist vollständig durch die Angabe der  $k$ -dimensionalen Randverteilungen für alle  $k$  bestimmt (Stoyan et al. 1995). Wichtig sind in diesem Zusammenhang die Leerraumwahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{C}) = 0\}) = \rho_0(\mathcal{C}). \quad (2.15)$$

Die Verteilung  $\mathbb{P}$  von  $\Phi$  ist bereits vollständig durch die Angabe der  $\rho_0(\mathcal{C})$  für alle kompakten  $\mathcal{C}$  bestimmt. Dies ist leicht einzusehen, da durch

$$\rho_0(\mathcal{C}) = \mathcal{R}[\mu] \Big|_{\mu = \mathbb{1}_{\overline{\mathcal{C}}}} \quad (2.16)$$

das Funktional  $\mathcal{R}[\mu]$  für elementare Funktionen bestimmt ist. Mit Gleichung (B.25) erhalten wir für einen stationären Punktprozeß mit mittlerer Teilchenzahldichte  $\bar{\rho}$  und den normierten Kumulanten  $\xi_i$  aus Anhang B.3

$$\rho_0(\mathcal{C}) = \exp \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\bar{\rho})^i}{i!} \int_{\mathcal{C}} d^d x_1 \cdots \int_{\mathcal{C}} d^d x_i \xi_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i) \right). \quad (2.17)$$

$\rho_0(\mathcal{C})$  wird auch als ‘‘Void Probability‘‘  $P_0(\mathcal{C}) = \rho_0(\mathcal{C})$  bezeichnet. Zur Beschreibung der Galaxienverteilung werden oft die ‘‘counts in cells‘‘  $P_n(\mathcal{C})$  verwendet. Diese sind nichts anderes als die 1-dimensionalen Randverteilungen

$$P_n(\mathcal{C}) = \mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{C}) = n\}). \quad (2.18)$$

Wie bereits bei White (1979) und Balian & Schaeffer (1989a) gezeigt wurde, können die eindimensionalen Randverteilungen durch die Dichten  $d_n(\dots)$  und die bedingten Dichten  $\rho_n(\dots | \mathcal{C})$  aus Anhang B aus Anhang B.3 dargestellt werden

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{C}) = n\}) &= P_n(\mathcal{C}) = & (2.19) \\ &= \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{C}} d^d y_1 \cdots \int_{\mathcal{C}} d^d y_n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int_{\overline{\mathcal{C}}} d^d y_{n+1} \cdots \int_{\overline{\mathcal{C}}} d^d y_{n+l} \times \\ &\quad \times d_{n+l}(\mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n+1} \cdots \mathbf{y}_{n+l}), \\ &= \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{C}} d^d y_1 \cdots \int_{\mathcal{C}} d^d y_n \rho_n(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n | \mathcal{C}) \rho_0(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

Ist für einen stationären Punktprozeß die funktionale Gestalt von  $\mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{C}) = 0\}) = \rho_0(\mathcal{C}) = P_0(\mathcal{C})$  bezüglich der mittlerer Teilchenzahldichte  $\bar{\rho}$  bekannt, so können wir die ‘‘counts in cells‘‘ durch

$$\mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{C}) = n\}) = \frac{(-\bar{\rho})^n}{n!} \left( \frac{d}{d\bar{\rho}} \right)^n \mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{C}) = 0\}) \quad (2.20)$$

bestimmen. Die Ableitung nach  $\bar{\rho}$  wirkt nur auf die explizite Dichteabhängigkeit (siehe Gleichung 2.17).

### 2.2.5 Markierte Punktprozesse

Zusätzlich zu den Positionen der Galaxien  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  ist meist noch deren Leuchtkraft (Magnitude), sowie deren Morphologie (Spirale, Ellipse, Irreguläre, etc.) bekannt. Manchmal sind Leuchtkräfte in verschiedenen Frequenzbändern und weitere innere Größen, wie die Geschwindigkeitsdispersion verfügbar. Für Galaxiencluster ist meist deren „Richness“ (die Anzahl der Galaxien pro Cluster) bekannt. Diese zusätzliche Information kann mit Hilfe von kontinuierlichen oder diskreten Marken, die an jeder Galaxie „kleben“, formalisiert werden.

Sei die Ortsinformation durch den Prozeß  $\Phi$  gegeben. Ein *markierter Punktprozeß*  $\Psi$  ist dann eine zufällige Menge von Paaren  $\{(\mathbf{x}_1, m_1), (\mathbf{x}_2, m_2), \dots\}$  (siehe Stoyan et al. 1995 und Stoyan 1984). Die Verteilung der Orte  $\mathbf{x}_i$  ist weiterhin durch den Punktprozeß  $\Phi$  gegeben. Im folgenden betrachten wir kontinuierliche Marken  $m \in \mathbb{R}_0^+$ , wie die Leuchtkraft von Galaxien. Die Behandlung von diskreten Marken geschieht vollkommen analog. Sei nun  $M(m)dm$  die Wahrscheinlichkeit, daß die Leuchtkraft einen Wert im Intervall  $[m, m + dm]$  hat. Die mittlere Leuchtkraft  $\bar{m}$  ist dann durch

$$\bar{m} = \int_0^\infty dm m M(m) \quad (2.21)$$

gegeben. Wie bereits diskutiert, ist für einen gewöhnlichen Punktprozeß  $\varphi(\mathcal{C})$  die Anzahl der Punkte im Raumgebiet  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ . Bei einer Realisierung  $\psi$  eines markierten Punktprozesses  $\Psi$  interessieren wir uns für die „markengewichtete“ Anzahl der Punkte in  $\mathcal{C}$  (Stoyan 1984)

$$\sum_{(\mathbf{x}, m) \in \psi} m \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}). \quad (2.22)$$

Für einen stationären markierten Punktprozeß erhalten wir

$$\mathbb{E}^\Psi \sum_{(\mathbf{x}, m) \in \psi} m \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) = \bar{\rho} \bar{m}, \quad (2.23)$$

wobei wir mit  $\mathbb{E}^\Psi$  den Erwartungswert bezüglich der Verteilung  $\Psi$  des markierten Punktprozesses bezeichnet ( $\bar{\rho}$  ist die mittlere Teilchenzahldichte und  $\bar{m}$  die mittlere Marke). Analog zu Abschnitt 2.2.3 lassen sich  $n$ -Punkt Dichten für  $\Psi$  definieren. Wir betrachten hier nur die Zweipunkteigenschaften. Für zwei Galaxien bei  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  ist  $M_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(m_1, m_2) dm_1 dm_2$  die Wahrscheinlichkeit, daß die Leuchtkraft der Galaxie bei  $\mathbf{x}_1$  im Intervall  $[m_1, m_1 + dm_1]$  und die Leuchtkraft der Galaxie bei  $\mathbf{x}_2$  im Intervall  $[m_2, m_2 + dm_2]$  liegt. In diesem Sinne ist  $M_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(m_1, m_2)$  die bedingte Dichte der Marken unter der Voraussetzung, daß zwei Galaxien bei  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  sind. Wir können dann die Zweipunktdichte von  $\Psi$  als Produkt schreiben:

$$M_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(m_1, m_2) \rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \quad (2.24)$$

Für stationäre und isotrope Punktverteilungen erhalten wir  $M_r(m_1, m_2)$  mit  $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ .

Für die empirische Untersuchung von markierten Punktprozessen eignet sich die bedingte Marken-Produkt-dichte

$$\kappa(r) = \int_0^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 m_1 m_2 M_r(m_1, m_2). \quad (2.25)$$

Mit  $\kappa(r)$  untersuchen wir, inwieweit die Verteilung der Marken von der Verteilung des zugrundeliegenden Punktprozesses abhängt. Sind die Marken unabhängig von der räumlichen Verteilung der Punkte, an denen sie kleben, gilt  $M_r(m_1, m_2) = M(m_1)M(m_2)$  und somit  $\kappa(r) = \bar{m}^2$ . Sind aber z.B. leuchtschwache Galaxien schwächer korreliert als leuchtstarke, so erwarten wir  $\kappa(r) > \bar{m}^2$  für kleine  $r$ . Eine Untersuchung der Galaxienverteilung mit  $\kappa(r)$  bietet sich an, wobei die Marken die absoluten Leuchtkräfte der Galaxien sind. Dies kann neues Licht auf die sogenannte „luminosity segregation“ werfen (siehe Maurogordato & Lachièze-Rey 1987, Dominguez-Tenreiro & Martinez 1989 und vor allem Alimi et al. 1988). Ebenfalls kann hiermit geklärt werden, inwieweit der Inklinationwinkel oder die Rotationsrichtung einer Spiralgalaxie mit der Umgebung der Galaxie korreliert ist. Mit diskreten Marken können Unterschiede in den Verteilungen von Spiral- und elliptischen Galaxien untersucht werden.

### 2.2.6 Modelle für Punktprozesse

Eine Möglichkeit, die Galaxienverteilung zu beschreiben, besteht darin, die beobachteten Eigenschaften mit den oft explizit bekannten statistischen Eigenschaften von Punktprozeßmodellen zu vergleichen. Im Gegensatz zu einer Beschreibung mit kosmologischen Modellrechnungen gehen die Eigenschaften der Dynamik nur über heuristische Argumente ein. Als erster Ansatz in diese Richtung sind die Clusterprozesse von Neyman & Scott (1958) zu sehen. Weit häufiger wird jedoch eine „zufällige“ Verteilung von Punkten, also ein Poissonprozeß als Referenzmodell gewählt. In Abbildung 2.5 sind drei Realisierungen sehr unterschiedlicher Punktprozeßmodelle zu sehen.

#### Poisson- und Binomialprozesse

Ein Poissonprozeß  $\Phi$  wird oft über die folgenden Eigenschaften definiert (Stoyan et al. 1995):

- Die Anzahl der Punkte in einem beschränkten Raumgebiet  $\mathcal{D}$  sei Poissonverteilt mit Mittelwert  $\mathbb{E} \varphi(\mathcal{D}) = \bar{\rho} |\mathcal{D}|$ .
- Die Anzahl der Punkte in disjunkten Mengen seien unabhängige Zufallsvariablen.

Diese Definition präzisiert die laxere Sprechweise von zufällig verteilten Punkten mit Dichte  $\bar{\rho}$ . Mit der Unabhängigkeit folgt für die  $n$ -Punktdichten  $\rho_n(\cdot)$  sowie die bedingten Dichten  $\rho_n(\cdot|\mathcal{C})$  aus Anhang B.3.3

$$\rho_n(\cdot) = \bar{\rho}^n = \rho_n(\cdot|\mathcal{C}). \quad (2.26)$$

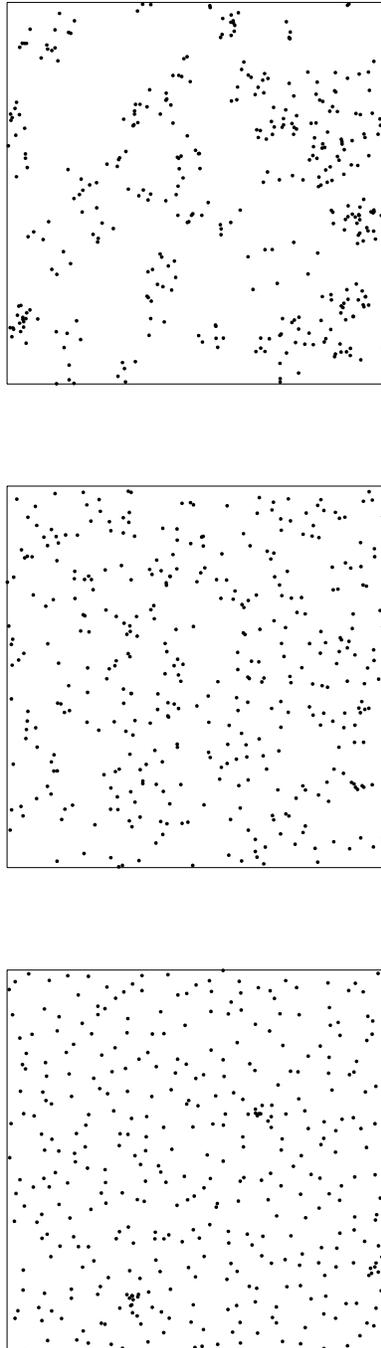


Abbildung 2.5: Diese Figur zeigt Realisierungen eines Matérn-Cluster-Prozesses, eines Poissonprozesses sowie des regulären Prozesses von Baddeley & Silverman (1984) (von oben nach unten).

Deshalb gilt für die normierten Kumulanten  $\xi_1 = 1$  und  $\xi_n = 0$  für alle  $n \geq 2$  und somit

$$\rho_0(\mathcal{C}) = \exp(-\bar{\rho} |\mathcal{C}|). \quad (2.27)$$

Im Rahmen dieser Arbeit verwenden wir oft den homogenen Poissonprozeß als Referenzmodell, sowie auch den Binomialprozeß, d.h. einen Poissonprozeß mit genau  $N$  Punkten im Raumgebiet  $\mathcal{D}$ .

### Clusterprozesse

Da die beobachtete Galaxienverteilung Anhäufungen von Galaxien zeigt, sucht man nach Punktprozessen, die Korrelationen erzeugen, wie z.B. Clusterprozesse. Typische Clusterprozesse sind Poisson-Cluster-Prozesse, deren Clusterzentren durch einen stationären Poissonprozeß gegeben sind. Die Cluster bestehen aus unabhängig, identisch verteilten und endlichen Punktprozessen. Spezielle Poisson-Cluster-Prozesse wurden bereits sehr früh von Neyman & Scott (1958) vorgeschlagen. Diese Neyman-Scott-Prozesse sind Poisson-Cluster-Prozesse, bei denen die Anzahl der Punkte pro Cluster selbst eine Zufallsvariable ist. Als einfaches Beispiel betrachten wir den Matérn-Cluster-Prozeß: Ein Cluster besteht in diesem Fall aus  $n$  Punkten, die zufällig in einer Kugel mit Radius  $R$  um ein Clusterzentrum (einen Punkt des Poissonprozesses) verteilt sind;  $n$  ist hierbei eine Poissonverteilte Zufallszahl mit Mittelwert  $\mu$ . Die Cluster können überlappen, die Clusterzentren selbst gehören jedoch nicht zum Prozeß (siehe Abbildung 2.15). Ist die Dichte der Clusterzentren  $\lambda$ , so hat der resultierende Matérn-Cluster-Prozeß die Punktdichte  $\bar{\rho} = \lambda\mu$ . Dieses Konstruktionsprinzip kann iteriert werden. Die Clusterzentren der ersten Generation sind durch einen Poissonprozeß gegeben. Die in den Clustern verteilten Punkte werden nun erneut als Clusterzentren für die zweite Generation von Clustern aufgefaßt, und so weiter. Der Matérn-Cluster-Prozeß ist somit ein Neyman-Scott-Prozeß der ersten Generation. Das Modell von Soneira & Peebles (1978) ist ein Beispiel für einen Poisson-Cluster-Prozeß. An zufällig verteilten Clusterzentren befinden sich unterschiedliche, skaleninvariante Cluster (siehe auch Abschnitt 3.5).

### Reguläre Prozesse

Unter regulär wollen wir nicht nur Prozesse auf einem Gitter verstehen, sondern auch Punktverteilungen mit einer Nahordnung, wie sie z.B. die Positionen der Moleküle in einer Flüssigkeiten zeigen. Es gibt viele unterschiedliche Modelle für reguläre Prozesse (Stoyan et al. 1995). Vor allem Gibbsprozesse liefern oft reguläre Punktverteilungen. Eines der einfachsten Fluid-Modelle, das Harte-Kugel-Modell, erzeugt eine reguläre Verteilung der Kugelzentren (Hansen & McDonnald 1986). In dieser Arbeit verwenden wir nur ein sehr spezielles Modell von Baddeley & Silverman (1984) für einen regulären Prozeß, in erster Linie um zu zeigen, daß Größen zweiter Ordnung nur eine unvollständige Beschreibung eines Punktprozesses liefern, wohingegen eine Analyse mit anderen Methoden durchaus differenzierte Aussagen ermöglicht (siehe Abschnitt 2.3.5).

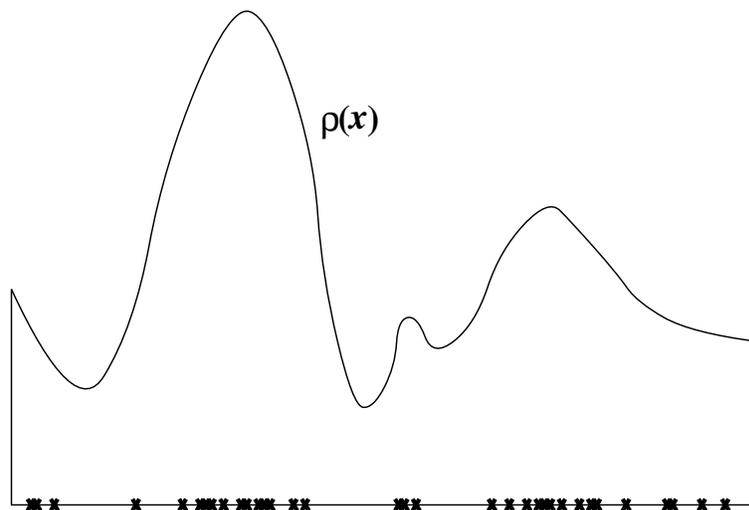


Abbildung 2.6: Eine Realisierung eines eindimensionalen stochastischen Feldes  $\varrho(\mathbf{x})$  und einer Realisierung des daraus bestimmten Cox-Prozesses.

### Cox-Prozesse – Zusammenhang mit Dichtefeldern

Cox-Prozesse, auch doppelte Poissonprozesse genannt, sind Punktprozesse, bei denen das Intensitätsmaß  $\Lambda(\cdot)$  ein zufälliges Maß ist. Für einen homogenen Poissonprozeß gilt  $\Lambda(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} d^d x \bar{\rho}$ . Im Falle eines *gemischten Poissonprozesses* gilt  $\Lambda(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} d^d x \varrho$ , wobei  $\varrho$  eine positive Zufallsgröße mit Mittelwert  $\bar{\varrho}$  ist. Eine Realisierung eines gemischten Poissonprozesses mit Dichte  $\varrho$  unterscheidet sich nicht von der eines Poissonprozesses mit fester Dichte<sup>6</sup>  $\bar{\varrho}$ . Ein gemischter Poissonprozeß ist stationär, aber nicht ergodisch, da sich die realisierte Dichte  $\varrho$  fast sicher vom Mittelwert  $\bar{\varrho}$  unterscheidet. Auch eine Punktverteilung auf zufällig verteilten Linien läßt sich als Cox-Prozeß modellieren.

Sei nun  $\varrho(\mathbf{x})$  ein stochastisches Feld mit  $\varrho(\mathbf{x}) \geq 0$ . Eine Einführung in die Theorie der stochastischen Felder findet man bei Adler (1981). Dieses Feld sei beispielsweise die Massendichte am Ort  $\mathbf{x}$ ;  $\varrho(\mathbf{x})$  ist dann genau das Dichtefeld, wie es in den Eulerschen Bewegungsgleichungen im Rahmen einer Fluidapproximation in der Newtonschen Kosmologie auftaucht (siehe Abschnitt 3.1.3). Wir nehmen nun an, daß die Wahrscheinlichkeit, am Ort  $\mathbf{x}$  eine Galaxie zu finden, direkt proportional zur Massendichte  $\varrho(\mathbf{x})$  ist. Diese Annahme wird auch oft *Poisson-Modell* genannt (Peebles 1980), eine Skizze ist in Abbildung 2.6 zu sehen. Für ein gegebenes stochastisches Feld  $\varrho(\mathbf{x})$  ist somit dieses Modell der Galaxienverteilung als Cox-Prozeß mit „treibendem“ Intensitätsmaß  $\Lambda(\mathcal{C}) \propto \int_{\mathcal{C}} d^d x \varrho(\mathbf{x})$  wohldefiniert. Die Eigenschaften eines stochastischen Feldes können mit  $n$ -Punktdichtekorrelationen beschrieben werden:

$$\langle \varrho(\mathbf{x}_1) \cdots \varrho(\mathbf{x}_n) \rangle \quad (2.28)$$

<sup>6</sup>Als Modelle für Punktverteilungen sind daher gemischte Poissonprozesse uninteressant.

ist als Mittelwert über alle möglichen Dichtefelder, also als Mittel über alle Feldkonfigurationen des stochastischen Feldes  $\varrho$  definiert. Diese Mittelung kann formal als Funktionalintegral geschrieben werden,

$$\langle \varrho(\mathbf{x}_1) \cdots \varrho(\mathbf{x}_n) \rangle = \int D[\varrho] P[\varrho] \varrho(\mathbf{x}_1) \cdots \varrho(\mathbf{x}_n). \quad (2.29)$$

Speziell erhalten wir damit die mittlere Massendichte  $\langle \varrho(\mathbf{x}) \rangle$  am Ort  $\mathbf{x}$ , sowie die Dichte–Dichte–Korrelation  $\langle \varrho(\mathbf{x}_1) \varrho(\mathbf{x}_2) \rangle$ . Für einen Poisson–Gauß–Prozeß wird vor allem die Kovarianzfunktion

$$\sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle \varrho(\mathbf{x}_1) \varrho(\mathbf{x}_2) \rangle - \langle \varrho(\mathbf{x}_1) \rangle \langle \varrho(\mathbf{x}_2) \rangle \quad (2.30)$$

als zweite Kumulante wichtig. Die statistischen Eigenschaften des Dichtefeldes übertragen sich direkt auf die statistischen Eigenschaften des Cox–Prozesses. Der Einfachheit halber nehmen wir nun an, daß die Wahrscheinlichkeit  $\rho_1(\mathbf{x})$ , am Ort  $\mathbf{x}$  ein Galaxie zu finden, gleich der Massendichte  $\varrho(\mathbf{x})$  ist. Dann sind die  $n$ –Punktdichten  $\rho_n$  aus Abschnitt 2.2.3 durch die Dichtekorrelationen gegeben,

$$\rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \langle \varrho(\mathbf{x}_1), \dots, \varrho(\mathbf{x}_n) \rangle. \quad (2.31)$$

Insbesondere gilt  $\rho_1(\mathbf{x}) = \langle \varrho(\mathbf{x}) \rangle$  und  $\rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \langle \varrho(\mathbf{x}_1) \rangle \langle \varrho(\mathbf{x}_2) \rangle$ . Für ein stationäres und isotropes stochastisches Feld hängt  $\sigma$  nur von  $r$  ab, und mit  $\langle \varrho(\mathbf{x}) \rangle = \bar{\varrho}$  erhalten wir

$$\xi_2(r) = \frac{\sigma(r)}{\bar{\varrho}^2}. \quad (2.32)$$

### Poisson–Gauß–Prozeß

Als wichtigen Spezialfall eines derartigen Cox–Prozesses betrachten wir den Poisson–Gauß–Prozeß. Wir nehmen an, daß wir das stochastische Feld als  $\varrho(\mathbf{x}) = \bar{\varrho}(1 + \delta(\mathbf{x}))$  mit mittlerer Dichte  $\bar{\varrho}$  schreiben können.  $\delta(\mathbf{x})$  sei nun ein Gaußsches stochastisches Feld mit  $\langle \delta(\mathbf{x}) \rangle = 0$  und ist daher vollständig durch seine Kovarianzfunktion  $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  bestimmt (Adler 1981). Alle höheren Kumulanten verschwinden. Strenggenommen ist dieses Gaußsche Feld nicht als Dichte eines Cox–Prozesses verwendbar, da  $\delta(\mathbf{x})$  für festes  $\mathbf{x}$  eine normalverteilte Zufallsgröße ist und somit negative  $\varrho(\mathbf{x})$  möglich sind. Für  $\sigma \ll 1$  kann es als gute Approximation dienen. Wie im vorangehenden Abschnitt erhalten wir mit  $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$  die normierte Kumulante

$$\xi_2(r) = \sigma(r) = \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \rangle. \quad (2.33)$$

Alle höheren Kumulanten verschwinden für ein Gaußsches Zufallsfeld;  $\xi_i = 0$  für  $i > 2$ . Mit den Gleichungen (B.25) und (B.26) gilt dann

$$\rho_0(\mathcal{B}_r) = \exp\left(-\bar{\rho}|\mathcal{B}_r| + \frac{\bar{\rho}^2}{2} \int_{\mathcal{B}_r} d^d x_1 \int_{\mathcal{B}_r} d^d x_2 \xi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\right), \quad (2.34)$$

$$\rho_1(\mathbf{x} | \mathcal{B}_r) = \bar{\rho} - \frac{\bar{\rho}^2}{2} \int_{\mathcal{B}_r} d^d y \xi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \mathcal{B}_r) &= \bar{\rho}^2 - \frac{\bar{\rho}^3}{2} \int_{\mathcal{B}_r} d^d y \xi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) - \frac{\bar{\rho}^3}{2} \int_{\mathcal{B}_r} d^d y \xi_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) + \\ &+ \frac{\bar{\rho}^4}{4} \int_{\mathcal{B}_r} d^d y \xi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) \int_{\mathcal{B}_r} d^d y \xi_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Speziell am letzten Ausdruck erkennen wir schön, daß es sich bei der Entwicklung der bedingten Dichten in Korrelationsfunktionen um eine asymptotische Reihe handelt, die für ein Gaußsches Feld natürlich abbricht, deren Konvergenz im allgemeinen aber erst untersucht werden muß (Balian & Schaeffer 1989a).

## 2.3 Zweipunktmaße

Ein Großteil der Analysen von Galaxienverteilungen oder von Simulationsdaten wird mit Methoden durchgeführt, die nur Informationen zweiter Ordnung über die Punktverteilung enthalten. Vor allem die Paarkorrelation  $\xi_2(r)$  spielt eine bedeutende Rolle in der Interpretation der beobachteten Galaxienverteilung (Peebles 1980).

Wir werden die Zweipunktkorrelationsfunktionen, wie  $g(r)$ ,  $\xi_2(r)$  und  $\Gamma(r)$ , das Korrelationsintegral  $C(r)$  und analog Ripley's  $K(r)$  und  $\Gamma^*(r)$ , das Leistungsdichtespektrum  $P(k)$ , sowie die Schwankungen von counts-in-cells  $\sigma^2(r)$  definieren und zeigen wie sie zusammenhängen. In den Anhängen A.1, A.2 und A.3 diskutieren wir Schätzer für diese Größen.

### Die Dichte $\rho_1$

Noch elementarer als Zweipunktmaße ist die Dichte  $\rho_1(\mathbf{x})$ , für die im stationären Fall  $\rho_1(\mathbf{x}) = \bar{\rho}$  gilt. Die mittlere Teilchendichte  $\bar{\rho}$  ist für eine gegebene Punktverteilung  $\mathcal{X} + \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$  als  $\hat{\rho} = N/|\mathcal{D}|$  wohldefiniert. Soll ein Dichtefeld aus einer gegebenen Punktverteilung rekonstruiert werden, so wird üblicherweise die empirische Dichte  $\rho_1^{N,\mathcal{D}}(\mathbf{x})$  mit einem Kern gefaltet. Härdle (1990) diskutiert ausführlich den Einfluß unterschiedlicher Kerne auf das geschätzte Dichtefeld. Im Rahmen dieser Arbeit werden wir jedoch nur Punktverteilungen und keine Dichtefelder analysieren.

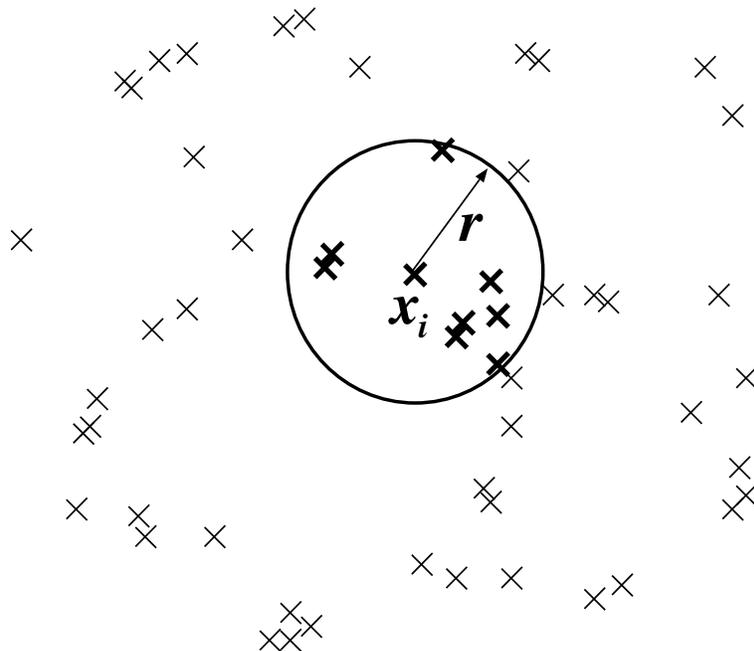


Abbildung 2.7: Die Anzahl der Punkte in einer Kugel mit Radius  $r$  um einen Punkt der Verteilung.

### 2.3.1 Korrelationsintegral

Das Korrelationsintegral  $C(r)$  ist die mittlere Anzahl der Punkte in einer Kugel mit Radius  $r$  um einen Punkt des betrachteten Punktprozesses, wie in Abbildung 2.7 dargestellt. Wir definieren  $C(r)$  für einen stationären Punktprozeß wie folgt:

$$C(r) = \mathbb{E}^0\left(\varphi(\mathcal{B}_r(0)) - 1\right). \quad (2.37)$$

$\mathbb{E}^0$  ist der Erwartungswert bezüglich der Palmverteilung  $\mathbb{P}^0$  (siehe Abschnitt 2.2.2), also der Erwartungswert unter der Voraussetzung, daß ein Punkt des Prozesses sich im Ursprung befindet. In der Definition des Korrelationsintegrals wird der Ursprung als Teil des Prozesses  $\varphi$  nicht mitgezählt. Es ist auch ein Korrelationsintegral für nicht-stationäre Prozesse definierbar, dann natürlich mit einer zusätzlichen Ortsabhängigkeit. In der statistischen Literatur wird analog Ripley's  $K$ -Funktion diskutiert, mit  $\bar{\rho}K(r) = C(r)$ . Allgemeiner wird das zweite reduzierte Momentenmaß betrachtet, das angewendet auf Kugeln mit Radius  $r$  genau  $K(r)$  liefert (Stoyan et al. 1995). Von Coleman & Pietronero (1992) wurde äquivalent in drei Dimensionen

$$\Gamma^*(r) = \frac{C(r)}{\frac{4\pi}{3}r^3} \quad (2.38)$$

vorgeschlagen. Der Zusammenhang mit der Paarkorrelationsfunktion aus Abschnitt 2.3.2 ist

$$C(r) = \int_0^r ds g(s) \bar{\rho} 4\pi s^2 = \int_0^r ds (1 + \xi_2(s)) \bar{\rho} 4\pi s^2. \quad (2.39)$$

Für einen Poissonprozeß ist  $\xi_2(r) = 0$  und wir erhalten das wohlbekannte Ergebnis  $C(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \bar{\rho}$ .

$C(r)$  kann auch als Raummittel für eine Punktmenge  $\mathcal{X} \subset \varphi$  mit  $N$  Punkten bestimmt werden:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\varphi(\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)) - 1).$$

Randeffekte werden hierbei noch nicht berücksichtigt, siehe hierzu Anhang A.1.

### 2.3.2 Paarkorrelationsfunktion

Die Paarkorrelationsfunktion kann über die Wahrscheinlichkeit  $\rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) dV_1 dV_2$ , einen Punkt im Volumen  $dV_1$  am Ort  $\mathbf{x}_1$  und einen Punkt im Volumen  $dV_2$  am Ort  $\mathbf{x}_2$  zu finden, definiert werden. Es sei

$$g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{\rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\rho_1(\mathbf{x}_1)\rho_1(\mathbf{x}_2)}, \quad (2.40)$$

für  $\rho_1(\mathbf{x}_1) \neq 0 \neq \rho_1(\mathbf{x}_2)$  (siehe Abschnitt 2.2.3). Für einen stationären Prozeß gilt  $\rho_1(\mathbf{x}) = \bar{\rho}$  und wir erhalten  $g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = g(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ . Gilt zusätzlich noch Isotropie, so folgt  $g(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = g(r)$  mit  $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ .  $\bar{\rho}g(r)dr$  ist dann die mittlere Anzahl von Punkten in einer Schale mit Radius in  $[r, r + dr]$  um einen Punkt der Verteilung (siehe Abbildung 2.8). Dies ist die „bedingte“ Dichte<sup>7</sup>

$$\Gamma(r) = \bar{\rho} g(r) \quad (2.41)$$

von Coleman & Pietronero (1992). In der Kosmologie wird üblicherweise nicht  $g(r)$ , sondern die normierte Kumulante betrachtet (siehe Anhang B.3):

$$\xi_2(r) = \xi(r) = g(r) - 1. \quad (2.42)$$

Die Verwendung von  $\xi_2(r)$  zur Beschreibung der Zweipunktkorrelationen ist in erster Linie durch die Verwendung des Dichtekontrasts  $\delta(x) = (\rho(x) - \bar{\rho})/\bar{\rho}$  in den Bewegungsgleichungen der pekuliären Felder motiviert (Peebles 1980). Es folgt dann wie in Abschnitt 2.2.6 für einen Cox-Prozeß

$$\xi_2(r) = \langle \delta(\mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x}_2) \rangle, \quad (2.43)$$

---

<sup>7</sup>Im Unterschied zu den bedingten Dichten aus Anhang B.3.3 besteht die Bedingung hier darin, daß von *einem Punkt des Prozesses* aus die Nachbarschaft betrachtet wird.

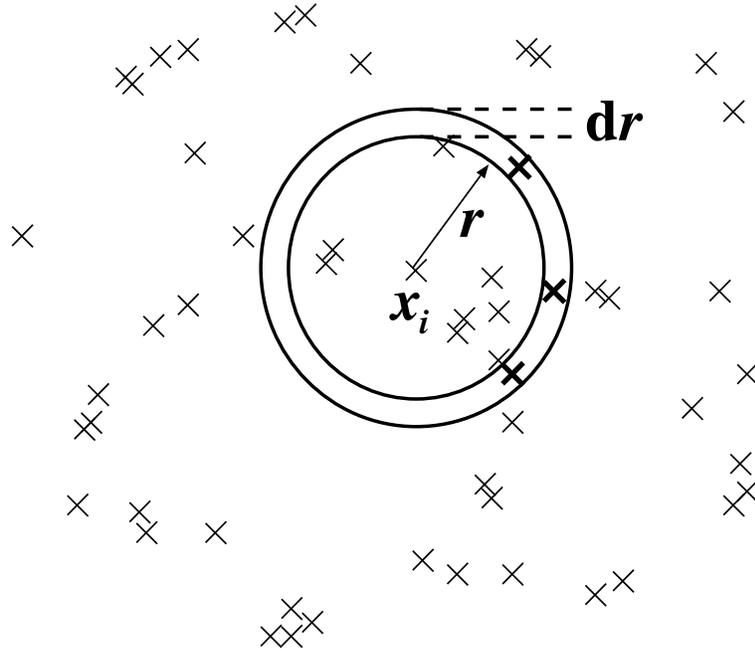


Abbildung 2.8: Die Anzahl der Punkte in einer Schale mit Radius in  $[r, r + dr]$  um einen Punkt der Verteilung.

mit  $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ . Analog zu  $g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  verwenden wir auch  $\xi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ .  $\xi_2(r)$  wird oft als zusätzliche Korrelation der Galaxienverteilung im Verhältnis zu Poissonverteilten Punkten (miß-) verstanden. Dies ist nur richtig für stationäre Punktprozesse und solange Randkorrekturen nicht wesentlich sind. Wie in Abschnitt A.2 gezeigt wird, verführt diese Interpretation zur Benutzung nicht erwartungstreuer Schätzer.

### Normierung

Aus Gleichung (2.12) erhalten wir

$$4\pi \int_0^r ds s^2 g(s) = |\mathcal{B}_r| \left(1 - \frac{1}{N_r}\right) \quad (2.44)$$

und

$$4\pi \int_0^r ds s^2 \xi_2(s) = -\frac{1}{N_r} \quad (2.45)$$

mit  $N_r = \mathbb{E} \varphi(\mathcal{B}_r)$ . Eine Verallgemeinerung auf beliebige Teilmengen  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$  anstelle von  $\mathcal{B}_r$  ist direkt möglich. Für  $r \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$\int_0^\infty ds s^2 \xi_2(s) = 0. \quad (2.46)$$

Dies gilt für abzählbar unendliche Punktprozesse, d.h. Punktprozesse deren Realisierungen fast sicher aus einer abzählbar unendlichen Punktmenge bestehen.

### 2.3.3 Leistungsdichtespektrum

Zur Motivation des Leistungsdichtespektrums  $P(k)$  („Power Spectrums“) betrachten wir wieder ein Dichtefeld  $\varrho(\mathbf{x})$  mit wohldefinierter mittlerer Dichte  $\bar{\varrho}$  und Dichtekontrast  $\delta(\mathbf{x}) = (\varrho(\mathbf{x}) - \bar{\varrho})/\bar{\varrho}$ . Die Fouriertransformierte des Dichtekontrasts sei wie folgt definiert:

$$\widehat{\delta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d x \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.47)$$

Mit der Normierung auf die Diracsche Deltafunktion  $\delta^D$  im Impulsraum

$$\delta^D(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.48)$$

erhalten wir für ein stationäres und isotropes Zufallsfeld den Zusammenhang zwischen den Korrelationen im Fourier- und Ortsraum:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\delta}(\mathbf{k}_1) \widehat{\delta}^*(\mathbf{k}_2) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int d^d x_1 \int d^d x_2 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1)} \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \rangle \\ &= \delta^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d y e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{y}} \langle \delta(0) \delta(\mathbf{y}) \rangle \\ &= \delta^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P(\mathbf{k}_1). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Die Fouriermoden sind also  $\delta^D$ -korreliert mit der Amplitude

$$P(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d y e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \langle \delta(0) \delta(\mathbf{y}) \rangle. \quad (2.50)$$

Für einen Cox-Prozeß wie in Abschnitt 2.2.6 gilt  $\xi_2(\mathbf{y}) = \langle \delta(0) \delta(\mathbf{y}) \rangle$ , und wir erhalten zusammenfassend:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \xi_2(\mathbf{x}), \\ \xi_2(\mathbf{x}) &= \int d^d x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} P(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Bei Untersuchungen kondensierter Materie wird oft die Strukturfunktion  $S(k)$  mit  $k = |\mathbf{k}|$ , in diesem Fall die Fouriertransformierte der Paarkorrelation  $g(r) = 1 + \xi_2(r)$  betrachtet, da sie eine direkte Meßgröße bei Streuexperimenten darstellt (Hansen & McDonald 1986).

### 2.3.4 Kovarianz, Varianz und $\sigma^2$

#### Kovarianz

Die Kovarianz eines Punktprozesses gibt an, wie stark die Teilchenanzahl zwischen zwei Raumgebieten  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_2$ , unter anderem abhängig von ihrem Abstand, fluktuiert. Sie ist wie folgt definiert:

$$\text{cov}(\Phi(\mathcal{C}_1)\Phi(\mathcal{C}_2)) = \mathbb{E} \varphi(\mathcal{C}_1)\varphi(\mathcal{C}_2) - \mathbb{E} \varphi(\mathcal{C}_1) \mathbb{E} \varphi(\mathcal{C}_2). \quad (2.52)$$

Mit  $\mathbb{E} \varphi(\mathcal{C}_1) = \Lambda(\mathcal{C}_1)$ , Gleichung (B.9) und

$$\mathbb{E} \varphi(\mathcal{C}_1)\varphi(\mathcal{C}_2) = \int_{\mathcal{C}_1} d^d x_1 \int_{\mathcal{C}_2} d^d x_2 \rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \Lambda(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) \quad (2.53)$$

erhalten wir den Zusammenhang der Kovarianz  $\text{cov}(\cdot)$  mit der Zweipunktdichte  $\rho_2(\cdot)$

$$\text{cov}(\Phi(\mathcal{C}_1)\Phi(\mathcal{C}_2)) = \int_{\mathcal{C}_1} d^d x_1 \int_{\mathcal{C}_2} d^d x_2 \rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \Lambda(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) - \Lambda(\mathcal{C}_1)\Lambda(\mathcal{C}_2). \quad (2.54)$$

Die Kovarianz  $\text{cov}(\cdot)$  eines stationären und isotropen Punktprozesses ist also bereits durch die Teilchendichte  $\bar{\rho}$  und die Paarkorrelationsfunktion  $g(r)$  bestimmt.

### Varianz

Mit der Varianz  $\mathbb{V}\Phi(\mathcal{C})$  interessieren wir uns für die Stärke der Fluktuationen in der Teilchenzahl innerhalb eines Raumgebietes  $\mathcal{C}$ . Mit Gleichung (2.54) gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\Phi(\mathcal{C}) &= \mathbb{E} \varphi(\mathcal{C})^2 - (\mathbb{E} \varphi(\mathcal{C}))^2 = \text{cov}(\Phi(\mathcal{C})\Phi(\mathcal{C})) \\ &= \int_{\mathcal{C}} d^d x_1 \int_{\mathcal{C}} d^d x_2 \rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \Lambda(\mathcal{C}) - \Lambda(\mathcal{C})^2, \end{aligned} \quad (2.55)$$

wobei die letzte Zeile wieder den Zusammenhang mit der Paarkorrelationsfunktion liefert. Für einen Poissonprozeß erhalten wir  $\mathbb{V}\Phi(\mathcal{C}) = \bar{\rho}|\mathcal{C}|$ .

*Die Varianz kann auch als Raummittel für eine Realisierung  $\mathcal{X} \subset \varphi$  berechnet werden (siehe auch Abbildung 2.3). Wir betrachten hierzu  $M$  Kugeln mit Radius  $r$  um Poissonverteilte Punkte  $\mathbf{y}_j$  und erhalten*

$$\frac{1}{M^2} \sum_{j=1}^M \varphi(\mathcal{B}_r(\mathbf{y}_j))^2 - \left( \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \varphi(\mathcal{B}_r(\mathbf{y}_j)) \right)^2.$$

*Ein randkorrigierter Schätzer wird in Anhang A.3 besprochen.*

### Varianz des „Dichtekontrasts“

In der Kosmologie wird für einen stationären und isotropen Punktprozeß die Varianz  $\mathbb{V}(\mathcal{C})$  in einen Anteil, den ein Poissonprozeß mit gleicher Dichte erzeugen würde und den restlichen Anteil proportional zu  $\sigma(\mathcal{C})^2$  aufgeteilt:

$$\mathbb{V}\Phi(\mathcal{C}) = \Lambda(\mathcal{C}) + \sigma(\mathcal{C})^2 \Lambda(\mathcal{C})^2 = \bar{\rho}|\mathcal{C}| + \sigma(\mathcal{C})^2 (\bar{\rho}|\mathcal{C}|)^2. \quad (2.56)$$

Die Verwendung von  $\sigma(\mathcal{C})^2$  und nicht von  $\mathbb{V}(\mathcal{C})$  ist wie die Verwendung von  $\xi_2(r)$  statt  $g(r)$  durch die Verwendung des Dichtekontrasts  $\delta(x)$  in den Bewegungsgleichungen für die pekuliären Felder motiviert. Es gilt

$$\sigma(\mathcal{C})^2 = \frac{1}{|\mathcal{C}|^2} \int_{\mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} d^3 x d^3 y \xi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.57)$$

Für einen Poissonprozeß gilt  $\sigma(r)^2 = 0$ . Ist der Prozeß innerhalb von  $\mathcal{C}$  korreliert ( $\xi_2 > 0$ ), so gilt  $\sigma(r)^2 > 0$ , für einen antikorrelierten Prozeß<sup>8</sup> gilt  $\sigma(r)^2 < 0$ . Mit einer Paarkorrelationsfunktion der Gestalt  $\xi_2(r) = (r_0/r)^\gamma$  und mit  $\mathcal{C} = \mathcal{B}_r$  erhalten wir (Peebles 1993)

$$\sigma^2(r) = \left(\frac{r_0}{2r}\right)^\gamma \frac{1}{(1 - \gamma/3)(1 - \gamma/4)(1 - \gamma/6)}. \quad (2.58)$$

### $\sigma^2$ für einen fraktalen Träger

Auch für einen Poissonprozeß auf einem Fraktal mit Dimension  $D_H$  (siehe Abschnitt 3.5.1) können wir die Varianz berechnen.  $\sigma^2$  hängt dann explizit von Größe und Umfang der Stichprobe ab. Wir betrachten hierzu  $N_0$  Punkte in einer Kugel  $\mathcal{D} = \mathcal{B}_{R_0}$  mit Radius  $R_0$ . Weiterhin skalieren die Dichte mit der Dimension  $D_H$ , d.h.

$$\mathbb{E} \varphi(\mathcal{B}_r) = \left(\frac{N_0}{R_0^{D_H}}\right) r^{D_H}. \quad (2.59)$$

Eine Verallgemeinerung für Koni und eine Anwendung auf „Number counts“ findet man bei Sylos Labini et al. (1996). Mit Gleichung (2.55) und (2.59) folgt

$$\sigma(r)^2 = \frac{\mathbb{E}(\varphi(\mathcal{B}_r) - \mathbb{E}\varphi(\mathcal{B}_r))^2 - \mathbb{E}\varphi(\mathcal{B}_r)}{(\mathbb{E}\varphi(\mathcal{B}_r))^2} \quad (2.60)$$

$$= \frac{\mathbb{E}\varphi(\mathcal{B}_r)^2}{N_0^2} \left(\frac{R_0}{r}\right)^{2D_H} - \frac{1}{N_0} \left(\frac{R_0}{r}\right)^{D_H} - 1. \quad (2.61)$$

Für  $D_H < 3$  hängt  $\sigma^2$  nicht trivial von  $N_0$  und  $R_0$  ab. Für stationäre Prozesse mit  $D_H = 3$  und wohldefinierter mittlerer Dichte  $\bar{\rho} = N_0/V_0 = N_0/(\frac{4\pi}{3}R_0^3)$  ist  $\sigma(r)^2$  unabhängig von der Größe der Stichprobe, und wir erhalten

$$\sigma^2(r) = \frac{\mathbb{E}\varphi(\mathcal{B}_r)^2}{(\bar{\rho}\frac{4\pi}{3}r^3)^2} - \frac{1}{\bar{\rho}\frac{4\pi}{3}r^3} - 1. \quad (2.62)$$

### 2.3.5 Warum reichen Zweipunktmaße nicht aus?

Die Analyse der Galaxienverteilung mit Zweipunktmaßen, wie der Korrelationsfunktion  $\xi_2(r)$  stellt historisch den Ausgangspunkt für eine Untersuchung von Punktverteilungen dar. Sie ist jedoch unvollständig, wie die Charakterisierung eines Punktprozesses mit  $n$ -Punkt-Korrelationsfunktionen in Abschnitt 2.2.3 illustriert. Dies ist nicht nur eine theoretische Spitzfindigkeit, sondern Prozesse mit gleicher Zweipunktdichte  $\rho_2$  sowie gleicher Dichte  $\bar{\rho}$  können völlig unterschiedliche Eigenschaften, sowie auch ein unterschiedliches visuelles Erscheinungsbild haben.

<sup>8</sup>Da  $\sigma^2$  kleiner Null werden kann, ist diese historisch bedingte Schreibweise als Quadrat leicht irreführend.

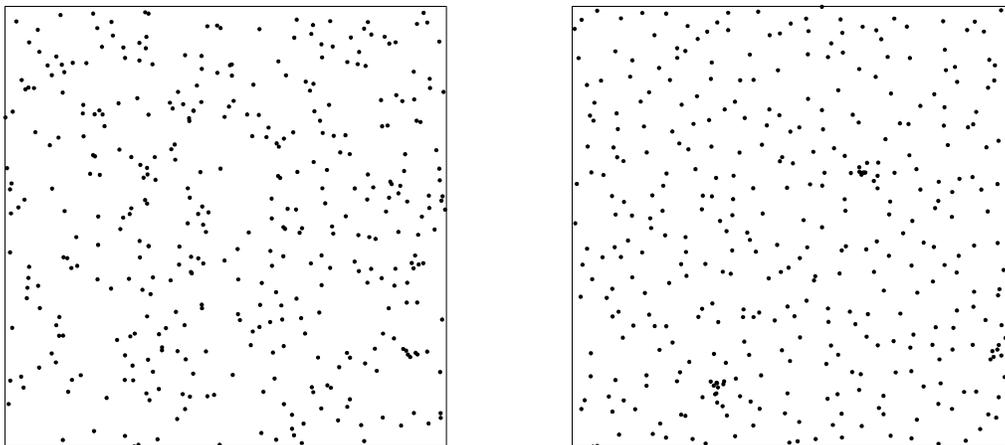


Abbildung 2.9: Links sehen wir eine Realisierung eines Poissonprozesses, rechts eine Realisierung des Prozesses von Baddeley & Silverman (1984).

Wir betrachten in Abbildung 2.9 einen Poissonprozeß und den Prozeß von Baddeley & Silverman (1984) in zwei Dimensionen. Wir erzeugen eine Realisierung dieses Prozesses, indem wir ein Quadrat in 20 quadratische Zellen aufteilen. In jede Zelle werfen wir zufällig verteilt 0, 1 oder 10 Punkte jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $1/10$ ,  $8/9$  und  $1/90$ . Beide Prozesse haben die gleichen Zweipunktmaße, z.B.  $\xi_2(r) = 0$ . Der Prozeß von Baddeley & Silverman (1984) ist jedoch regulär. Die Aufteilung des Quadrats in 400 Kästchen legt eine Skala, die Seitenlänge eines Kästchens, hier 0.05, fest. In Abbildung 2.9 sehen wir jeweils eine Realisierung dieser Prozesse mit 388 Punkten. Ein erster visueller Eindruck zeigt eine „gleichmäßigere“ Verteilung des Prozesses von Baddeley & Silverman (1984), im Gegensatz zum Poissonprozeß enthält er keine größeren Leerräume.

Die Abbildung 2.10 zeigt, daß die Mittelwerte des Korrelationsintegrals  $C(r)$  für den regulären Prozeß sehr genau mit den Werten für einen Poissonprozeß zusammenfallen, wobei die Stichprobenvarianz im regulären Fall fast doppelt so groß ist. Kein Indiz für Regularität und/oder eine Skala ist in  $C(r)$  zu sehen. Dagegen unterscheidet die Funktion  $J(r)$  (siehe Abschnitt 2.4.3) die beiden Prozesse und zeigt mit  $J(r) \geq 1$  eindeutig den regulären Charakter des Prozesses von Baddeley & Silverman (1984) an. Die Unterschiede werden somit allein von den höheren Momenten (also den Dichten  $\rho_n(\cdot)$  mit  $n > 2$ ) verursacht.

Darüber hinaus sind  $C(r)$ , sowie  $g(r)$  und  $\xi_2(r)$  für Strukturen auf großen Skalen wie Wände und Filamente blind, da sie isotrop mitteln. Siehe hierzu das sehr schöne Beispiel bei Szalay (1997) für ein Dichtefeld.

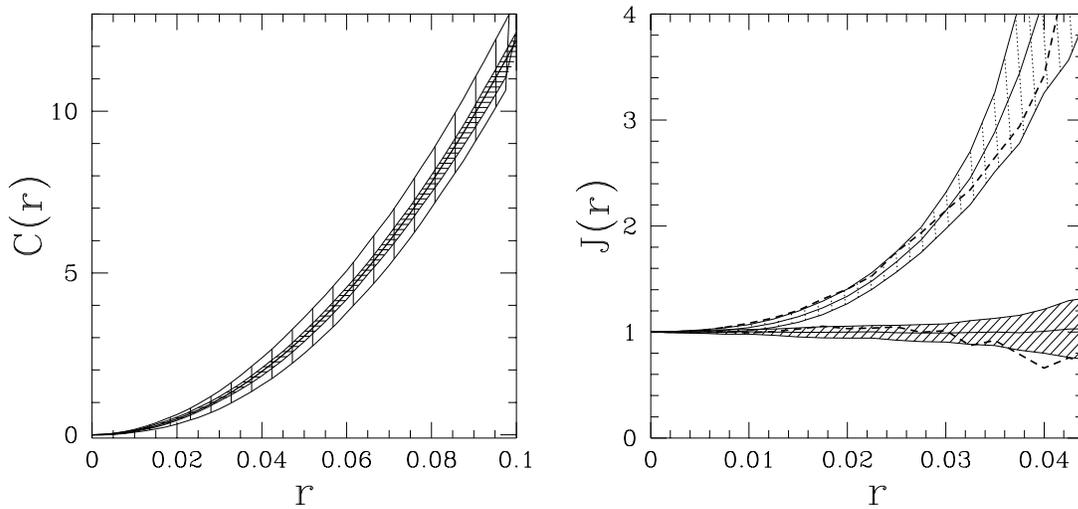


Abbildung 2.10: Links ist  $C(r)$  für den Poissonprozeß (hell schraffiert) und den regulären Prozeß (dunkel schraffiert) zu sehen; die schraffierten Bereiche entsprechen dem  $1\sigma$  Standardfehler, bestimmt aus 50 Realisierungen. Rechts ist  $J(r)$  für den Poissonprozeß (dunkel schattiert) und für den regulären Prozeß (hell gepunktet) zu sehen. Die gestrichelte Linie gibt  $J(r)$  für die Realisierungen wie sie in Abbildung 2.9 zu sehen sind, Der Radius  $r$  ist in Einheiten der Kantenlänge des Quadrats angegeben.

## 2.4 Verteilung nächster Nachbarn und verwandte Größen

Die Verteilung nächster Nachbarn  $G(r)$  sowie die sphärische Kontaktverteilung  $F(r)$  werden oft zur Charakterisierung von Punktverteilungen herangezogen (Diggle 1983, Stoyan et al. 1995). Vor kurzem wurde von van Lieshout & Baddeley (1996) die  $J(r)$  Funktion als eine deskriptive, nichtparametrische Statistik für Punktprozesse eingeführt. Alle drei Größen  $F(r)$ ,  $G(r)$  und  $J(r)$  liefern in erster Linie nur Information für „kleine“ Abstände  $r$ , das heißt solange  $r$  in der Größenordnung des mittleren Abstands der Punkte ist. Um diese Einschränkungen zu umgehen, betrachten wir zusätzlich die  $n$ -te Nachbarverteilung  $G_n(r)$  sowie die  $n$ -te sphärische Kontaktverteilung  $F_n(r)$  und daraus abgeleitet die  $J_n(r)$  Funktion. Auch in der Beschreibung von einfachen Flüssigkeitsmodellen werden die  $n$ -ten Nachbarverteilungen benutzt (siehe z.B. Mazur 1992, Torquato et al. 1990).

### 2.4.1 Nächste–Nachbarverteilung

Die Nächste–Nachbarverteilung  $G(r)$  ist die Verteilung der Abstände  $r$  von einem Punkt des Prozesses zum *nächsten* anderen Punkt des Prozesses. Wie bereits in Abschnitt 2.2.2 diskutiert wurde, läßt sich dies mit der Palmverteilung  $\mathbb{P}^{\mathbf{x}}(\cdot)$  formalisieren:

$$G^{(\mathbf{x})}(r) = \mathbb{P}^{\mathbf{x}}(\{\varphi(\mathcal{B}_r(\mathbf{x})) > 1\}). \quad (2.63)$$

Wir betrachten also die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein Punkt in der Kugel  $\mathcal{B}_r(\mathbf{x})$  mit Radius  $r$  um den Punkt  $\mathbf{x}$  zu finden ist. Ist der Punktprozeß stationär, so gilt

$$\mathbb{P}^{\mathbf{x}}(\{\varphi(\mathcal{B}_r(\mathbf{x})) > 1\}) = \mathbb{P}^0(\{\varphi(\mathcal{B}_r(0)) > 1\}),$$

und wir erhalten die nächste Nachbarverteilung

$$G(r) = \mathbb{P}^0(\{\varphi(\mathcal{B}_r(0)) > 1\}). \quad (2.64)$$

*Für eine Punktverteilung  $\mathcal{X}$  mit  $N$  Punkten erhalten wir  $G(r)$  als den Anteil an Punkten, deren Abstand zum nächsten Nachbarn kleiner als  $r$  ist (siehe auch Abbildung 2.11):*

$$\frac{1}{N} |\{ \mathbf{x}_i \in \mathcal{X} \mid l_i < r \}|$$

*mit dem Abstand zum nächsten Punkt aus  $\mathcal{X}$*

$$l_i = \min_{\mathbf{x}_j \in \mathcal{X} \setminus \mathbf{x}_i} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|.$$

*Randkorrigierte Schätzer für  $G(r)$  werden in Anhang A.4 besprochen.*

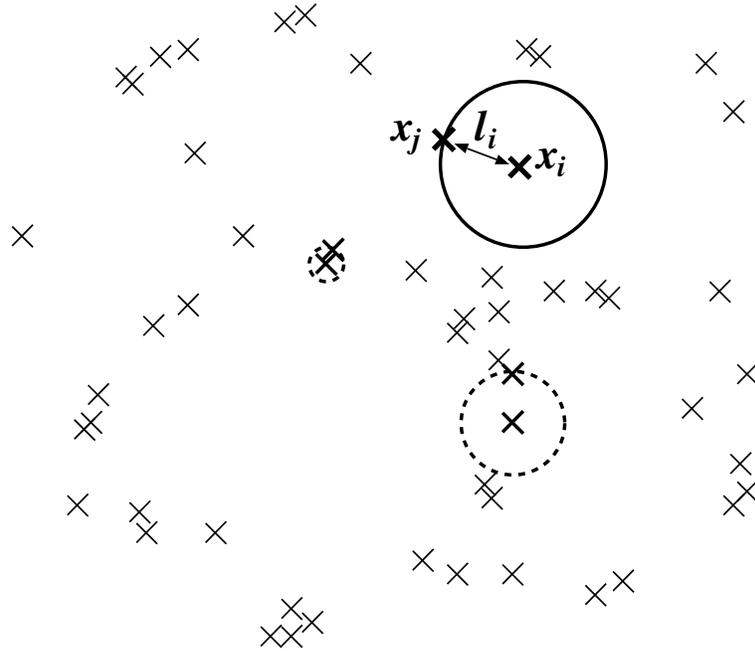


Abbildung 2.11: Abstand  $l_i$  vom Punkt  $\mathbf{x}_i$  zum nächsten Nachbarn  $\mathbf{x}_j$ .

Die  $n$ -te Nachbarverteilung  $G_n(r)$  ist die Verteilung der Abstände  $r$  von einem Punkt des Prozesses zum  $n$ -ten nächsten Punkt des Prozesses. Wir setzen hierbei voraus, daß es genau einen  $n$ -ten Nachbarn gibt. Mit der Palmverteilung erhalten wir

$$G_n^{(\mathbf{x})}(r) = \mathbb{P}^{\mathbf{x}}(\{\varphi(\mathcal{B}_r(\mathbf{x})) > n\}) \quad (2.65)$$

und für einen stationären Prozeß

$$G_n(r) = \mathbb{P}^0(\{\varphi(\mathcal{B}_r(0)) > n\}). \quad (2.66)$$

Es gilt  $G(r) = G_1(r)$ . Die  $G_n(r)$  sind Verteilungsfunktionen mit Dichten  $g_n(r)$ ,

$$G_n(r) = \int_0^r ds g_n(s). \quad (2.67)$$

$g_n(r)dr$  ist somit die Wahrscheinlichkeit, den  $n$ -ten Nachbarn eines Punktes im Abstand  $[r, r + dr]$  zu finden. Der mittlere Abstand zum  $n$ -ten Nachbarn ist dann durch

$$\overline{r_{(n)}} = \int_0^\infty dr r g_n(r) \quad (2.68)$$

gegeben. Analog lassen sich die  $l$ -ten Momente bestimmen,

$$\overline{r_{(n)}^l} = \int_0^\infty dr r^l g_n(r). \quad (2.69)$$

### Zusammenhang mit Zweipunktfunktionen

Für einen stationären Prozeß ist  $G_n(r)$  die Wahrscheinlichkeit, daß sich mindestens  $n$  Punkte des Prozesses in einer Kugel mit Radius  $r$  um einen typischen Punkt des Prozesses befinden. Somit läßt sich das Korrelationsintegral  $C(r)$  wie folgt aus der Verteilung der  $n$ -ten Nachbarn berechnen:

$$\begin{aligned}
 C(r) &= \mathbb{E}^0 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_n(\varphi(\mathcal{B}_r)) \right) (\varphi(\mathcal{B}_r) - 1) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \mathbb{P}^0(\{\varphi(\mathcal{B}_r) = n\}) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}^0(\{\varphi(\mathcal{B}_r) = i+1\}) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} G_n(r),
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\tag{2.71}$$

wobei  $\mathcal{B}_r = \mathcal{B}_r(0)$ . Mit  $\mathbb{E}^0$  bezeichnen wir den Erwartungswert unter der Bedingung, daß sich ein Punkt der Realisierung  $\varphi$  am Ursprung befindet (siehe auch Gleichung (2.37)), also den Erwartungswert bezüglich der Palmverteilung  $\mathbb{P}^0$ . Für die Zweipunktkorrelationsfunktion  $g(r)$  folgt dann (siehe auch Mazur 1992):

$$g(r) \bar{\rho} 4\pi r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r). \tag{2.72}$$

### Poissonprozeß

Für einen Poissonprozeß wurde  $G(r)$ , sowie der mittlere Abstand zum nächsten Nachbarn  $\overline{r_{(1)}}$  bereits von Hertz (1909) berechnet:

$$G(r) = 1 - \exp\left(-\bar{\rho} \frac{4\pi r^3}{3}\right). \tag{2.73}$$

Die  $n$ -te Nachbarverteilung ist in drei Dimensionen durch

$$g_n(r) = \frac{3}{r (n-1)!} \left(\bar{\rho} \frac{4\pi}{3} r^3\right)^n \exp\left(-\bar{\rho} \frac{4\pi}{3} r^3\right) \tag{2.74}$$

gegeben (siehe Cressie 1991 und Stoyan & Stoyan 1992 für das Resultat in zwei Dimensionen). Wir erhalten durch Integration<sup>9</sup>

$$G_n(r) = 1 - \frac{\Gamma\left(n, \bar{\rho} \frac{4\pi}{3} r^3\right)}{\Gamma(n)}, \tag{2.75}$$

---

<sup>9</sup>Mit  $\Gamma(n, x) = \int_x^{\infty} s^{n-1} e^{-s} ds$  bezeichnen wir die unvollständige und mit  $\Gamma(n) = \Gamma(n, 0)$  die übliche Gammafunktion.

für die  $l$ -ten Momente der  $n$ -ten Nachbarverteilung

$$\overline{r_{(n)}^l} = \int_0^\infty dr g_n(r) r^l = \left( \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} \right)^{-l/3} \frac{\Gamma(n + l/3)}{(n - 1)!} \quad (2.76)$$

und somit ihre Varianz

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \int_0^\infty dr g_n(r) (r - r_n^{(1)})^2 \\ &= \left( \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} \right)^{-2/3} \left( \frac{\Gamma(n + 2/3)}{(n - 1)!} - \left( \frac{\Gamma(n + 1/3)}{(n - 1)!} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (2.77)$$

In Abbildung 2.12 vergleichen wir die theoretischen Resultate nach Gleichung (2.74) und (2.75) mit den Mittelwerten, geschätzt aus 50 Realisierungen von 100 Poissonverteilten Punkten im Einheitswürfel. Innerhalb der Fehler (hier nicht gezeigt) ist die Übereinstimmung nahezu perfekt. Zusätzlich zeigen wir die Summe  $\sum_{n=1}^5 g_n(r)$ , welche nach Gleichung (2.72)  $g(r) \bar{\rho} 4\pi r^2 = \bar{\rho} 4\pi r^2$  approximiert. Bis  $r \approx 0.15$  (in Einheiten der Kantenlänge des Würfels) ist dies für einen Poissonprozeß vernünftig; auf großen Skalen muß diese Approximation mit nur fünf  $g_n(r)$  fehlschlagen.

### Zusammenhang mit bedingten Dichten

Für einen stationären Punktprozeß ist  $G_n(r)$  die Wahrscheinlichkeit, mindestens  $n$  Punkte in einer Kugel mit Radius  $r$  zusätzlich zum Punkt im Zentrum der Kugel zu finden. Somit erhalten wir mit den Dichten  $\rho_i(\cdot \wedge \mathcal{B}_r)$  aus Abschnitt B.3.3 für  $\mathcal{B}_r = \mathcal{B}_r(0)$ :

$$\begin{aligned} 1 - G_n(r) &= \mathbb{P}^0(\varphi(\mathcal{B}_r) \leq n) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}^0(\varphi(\mathcal{B}_r) = i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i - 1)!} \int_{\mathcal{B}_r} d^d x_2 \cdots \int_{\mathcal{B}_r} d^d x_i \frac{\rho_i(0, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i \wedge \mathcal{B}_r)}{\bar{\rho}}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Die Integrale über  $\rho_i(0, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i \wedge \mathcal{B}_r) / \bar{\rho}$  liefern die Wahrscheinlichkeit, daß genau  $i - 1$  Punkte in einer Kugel mit Radius  $r$  um den Ursprung enthalten sind, wobei sich bereits ein Punkt direkt am Ursprung befindet. Mit dem Faktor  $1/(i - 1)!$  wird der Vertauschbarkeit der  $i - 1$  Punkte Rechnung getragen. Speziell für  $n = 1$  erhalten wir

$$G(r) = 1 - \frac{\rho_1(0 \mid \mathcal{B}_r)}{\bar{\rho}} \rho_0(\mathcal{B}_r). \quad (2.79)$$

Der Zusammenhang von  $G_1(r)$  mit der bedingten Dichte  $\rho_1(0 \mid \mathcal{B}_r)$  wurde bereits bei White (1979) diskutiert.

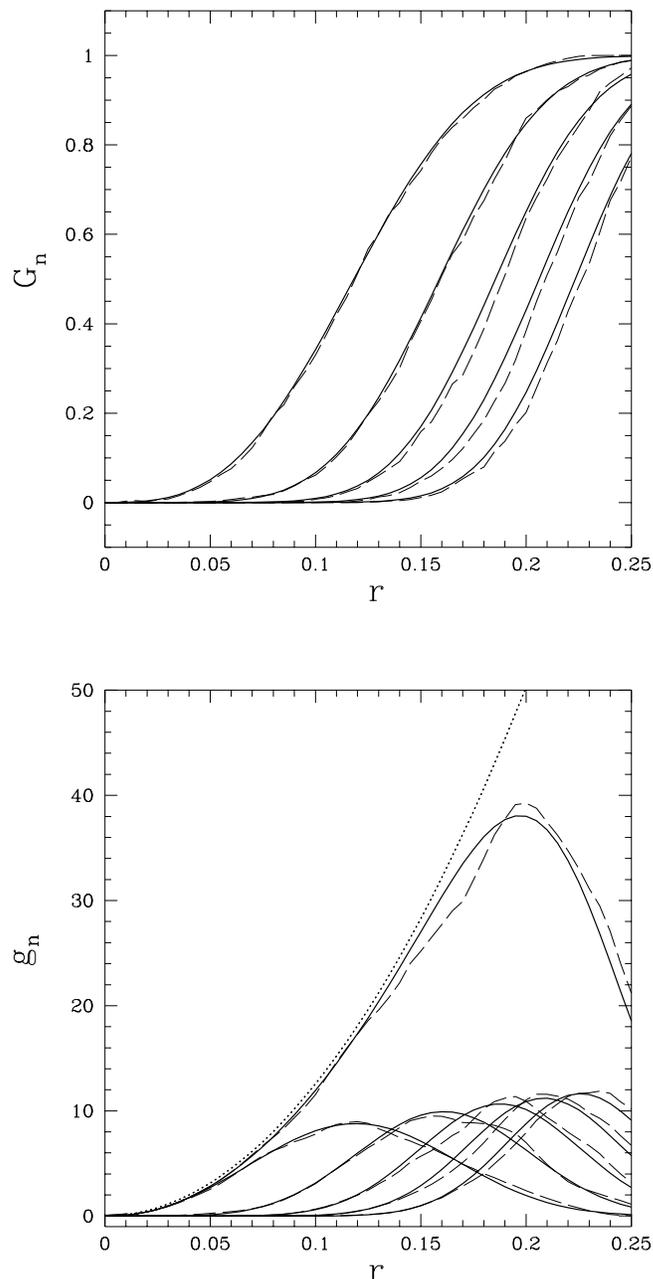


Abbildung 2.12: Oben sind die  $G_n(r)$  mit  $n = 1, \dots, 5$  (von links nach rechts) für einen Poissonprozeß mit  $\bar{\rho} = 100$  dargestellt (theoretisches Ergebnis: durchgezogene Linie; geschätzt aus 50 Realisierungen: gestrichelte Linie). Unten sind die entsprechenden Dichten  $g_n(r)$  gezeigt, sowie zusätzlich die Summe  $\sum_{n=1}^5 g_n(r)$  und  $g(r)\bar{\rho}4\pi r^2 = \bar{\rho}4\pi r^2$  (gepunktet).

Mit den Resultaten aus Abschnitt B.3.3 können wir  $G_n(r)$  auch durch die  $n$ -Punkt Korrelationsfunktionen  $\xi_n(r)$  ausdrücken. Für den stationären Poissonprozeß in drei Dimensionen gilt

$$\rho_i(\cdot|\mathcal{B}_r) = \bar{\rho}^i = \rho_i(\cdot) \text{ und } \rho_0(\mathcal{B}_r) = \exp\left(-\bar{\rho}\frac{4\pi}{3}r^3\right) \quad (2.80)$$

und wir erhalten mit Gleichung (2.78) die bereits diskutierten Ergebnisse (2.74) und (2.75). Für einen Poisson–Gauß–Prozeß ist  $G(r)$  nach Gleichung (2.79) bereits durch die Dichte  $\bar{\rho}$  und die Paarkorrelationsfunktion  $\xi_2(r)$  mit den Gleichungen (2.34) und (2.35) bestimmt.

## 2.4.2 Sphärische Kontaktverteilung

Die sphärische Kontaktverteilung  $F^{(\mathbf{y})}(r)$ , auch Leerraumwahrscheinlichkeit genannt, ist die Verteilung des Abstands  $r$  von einem zufällig im Raum gewählten Punkt  $\mathbf{y}$  zum *nächsten* Punkt des Prozesses:

$$F^{(\mathbf{y})}(r) = \mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{B}_r(\mathbf{y})) \geq 1\}). \quad (2.81)$$

Wir betrachten also die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein Punkt des Prozesses in der Kugel  $\mathcal{B}_r(\mathbf{y})$  mit Radius  $r$  um den zufälligen Punkt  $\mathbf{y}$  zu finden ist. Ist der Punktprozeß stationär, so gilt

$$\mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{B}_r(\mathbf{y})) \geq 1\}) = \mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{B}_r(0)) \geq 1\})$$

und wir erhalten die sphärische Kontaktverteilung

$$F(r) = \mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{B}_r(0)) \geq 1\}). \quad (2.82)$$

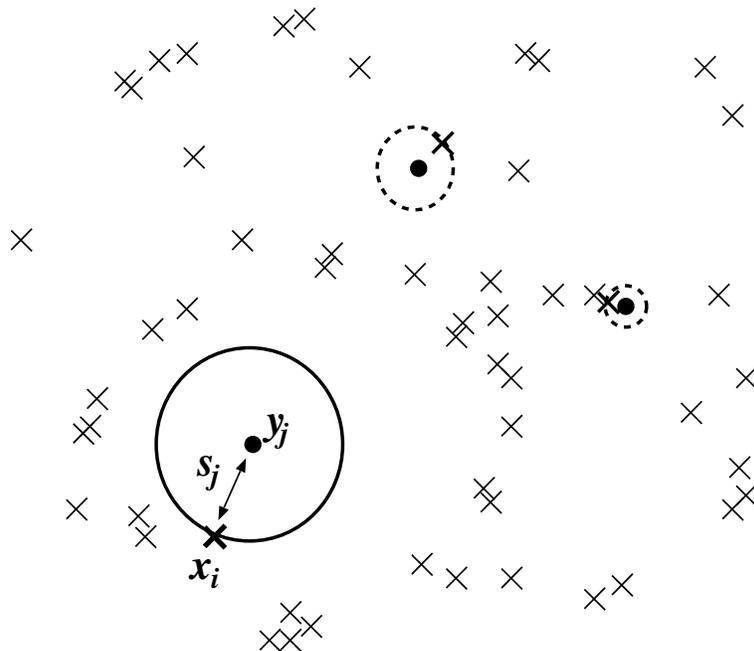
Sei  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$  eine Verteilung von  $N$  Punkten. Wir betrachten  $M$  zufällig (Poisson) verteilte Punkte  $\{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^M$ . Sei  $s_j = \min_{i=1,\dots,N} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j\|$  der Abstand von  $\mathbf{y}_j$  zum nächsten Punkt aus  $\mathcal{X}$ , dann können wir  $F(r)$  mit

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \Theta(r - s_j) \quad (2.83)$$

schätzen, wobei

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

die Sprungfunktion ist. Siehe hierzu Abbildung 2.13. Randkorrigierte Schätzer für  $F(r)$  werden im Anhang A.5 diskutiert.

Abbildung 2.13: Skizze zur Definition von  $F(r)$ .

Anhand von Gleichung (2.83) erkennen wir, daß  $F(r)$  gleich dem Anteil des überdeckten Volumens der  $r$ -Parallelmenge von  $\mathcal{X}$  ist und somit gleich der Volumendichte des ersten Minkowskifunktionals  $V_0(\bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i))$  ist (siehe Abschnitt 2.5). Der Zusammenhang mit der Minkowski-Dimension wird in Abschnitt 3.5.1 besprochen.

Die  $n$ -te sphärische Kontaktverteilung  $F_n(r)$  ist die Verteilung der Abstände  $r$  von einem zufälligen Punkt aus zum  $n$ -ten nächsten Punkt des Prozesses. Wir setzen hierbei voraus, daß es genau einen  $n$ -ten nächsten Punkt gibt:

$$F_n^{(\mathbf{y})}(r) = \mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{B}_r(\mathbf{y})) \geq n\}) \quad (2.84)$$

und für einen stationären Prozeß

$$F_n(r) = \mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{B}_r(0)) \geq n\}). \quad (2.85)$$

### Zusammenhang mit „counts in cells“

Für einen stationären Punktprozeß ist  $F_n(r)$  genau die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens  $n$  Punkte in einer Kugel  $\mathcal{B}_r$  mit Radius  $r$  zu finden sind, und somit

$$F_n(r) = \sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{B}_r) = i\}) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{B}_r) = i\}). \quad (2.86)$$

Die  $\mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{B}_r) = n\})$  sind die im Rahmen der Kosmologie üblicherweise diskutierten „counts in cells“  $P_n(\mathcal{B}_r) = P_n(r)$  nach Gleichung 2.18, die wir in Abschnitt 2.2.4 explizit durch

Korrelationsfunktionen ausgedrückt haben. Speziell gilt

$$1 - F(r) = \mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{B}_r) = 0\}) = \rho_0(\mathcal{B}_r) = P_0(r), \quad (2.87)$$

wobei  $P_0(r)$  oft als „Void Probability“ bezeichnet wird (White 1979, Maurogordato & Lachièze-Rey 1987).

### Poissonprozeß

Zur Bestimmung von  $F(r)$  betrachten wir die Wahrscheinlichkeit  $p(r)dr$ , daß wir in der Schale mit  $[r, r + dr]$  um einen zufällig gewählten Punkt einen Punkt des Prozesses finden, unter der Voraussetzung, daß in der Kugel mit Radius  $r$  kein Punkt enthalten ist. Es gilt dann

$$1 - F(r + dr) = (1 - F(r))(1 - p(r))dr. \quad (2.88)$$

Mit der Anfangsbedingung  $F(0) = 0$  erhalten wir dann

$$F(r) = 1 - \exp\left(-\int_0^r ds p(s)\right). \quad (2.89)$$

Für einen Poissonprozeß hängt  $p(r)$  nur von der Dichte  $\bar{\rho}$  und dem Volumen der Schale mit  $[r, r + dr]$  ab. Somit gilt  $p(r) = \bar{\rho}4\pi r^2$  und wir erhalten

$$F(r) = 1 - \exp\left(-\bar{\rho}\frac{4\pi r^3}{3}\right). \quad (2.90)$$

Die nächste Nachbarverteilung  $G(r)$  und die sphärische Kontaktverteilung  $F(r)$  liefern für einen Poissonprozeß die gleichen Werte. Dies ist kein Zufall, sondern die Konsequenz des fundamentalen Satzes von Slivnyak über Poissonprozesse (Stoyan et al. 1995), der besagt, daß die Verteilung gleich bleibt, egal ob wir die Punktverteilung von einem Punkt des Poissonprozesses, oder von einem zufälligen Punkt aus betrachten. Für einen Poissonprozeß mit Punktdichte  $\bar{\rho}$  gilt (siehe entweder Stoyan et al. 1995 oder direkt aus den Gleichungen (2.27) und (2.20)):

$$\mathbb{P}(\{\varphi(\mathcal{B}_r) = i\}) = \frac{(\bar{\rho}|\mathcal{B}_r|)^i}{i!} \exp(-\bar{\rho}|\mathcal{B}_r|), \quad (2.91)$$

und wir erhalten die  $n$ -ten Kontaktverteilungen mit Gleichung (2.86)

$$F_n(r) = 1 - \exp(-\bar{\rho}|\mathcal{B}_r|) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\bar{\rho}|\mathcal{B}_r|)^i}{i!}. \quad (2.92)$$

Dies ist im wesentlichen die Reihenentwicklung der unvollständigen Gammafunktion (siehe Abramowitz & Stegun 1984, 6.5.1 und 6.5.13) und wir erhalten

$$F_n(r) = 1 - \frac{\Gamma\left(n, \bar{\rho}\frac{4\pi}{3}r^3\right)}{\Gamma(n)}. \quad (2.93)$$

Mit Gleichung (2.75) sehen wir explizit, daß

$$F_n(r) = G_n(r) \quad (2.94)$$

gilt. Dies ist ein Spezialfall des Satzes von Slivnyak (Stoyan et al. 1995).

### 2.4.3 Die $J$ -Funktion

#### $J(r)$ -Funktion

Von van Lieshout & Baddeley (1996) wurde der Quotient

$$J(r) = \frac{1 - G(r)}{1 - F(r)} \quad (2.95)$$

zur Untersuchung der Eigenschaften eines Punktprozesses vorgeschlagen. Sie konnten zeigen, daß für clusternde Punktprozesse  $J(r) \leq 1$  und für reguläre Punktprozesse  $J(r) \geq 1$  ist. Nach Gleichung (2.73) und (2.90) gilt für den Poissonprozeß  $J(r) = 1$ . Er markiert somit die Trennungslinie zwischen clusternden und regulären Strukturen. Der Umkehrschluß, von  $J(r) = 1$  auf Poissonverteilte Punkte, ist nicht zulässig (Bedford & van den Berg 1997). Qualitativ können wir das Verhalten von  $J(r)$  wie folgt verstehen:

- In einer clusternden Punktverteilung wächst mit zunehmenden  $r$   $G(r)$  stärker an als in einem Poissonprozeß, da der nächste Nachbar typischerweise in der näheren Umgebung zu finden ist.  $F(r)$  wächst langsamer an, da ein zufällig gewählter Punkt vorzugsweise im Bereich zwischen den Clustern liegt. Diese beiden Effekte bedingen ein  $J(r) \leq 1$ .
- Im Gegensatz hierzu ist in einem regulären Prozeß  $G(r)$  niedriger als in einem Poissonprozeß, da der nächste Nachbar meist in einer endlichen Distanz zu finden ist. In einem Kristall ist diese durch die Gitterkonstante gegeben.  $F(r)$  steigt stärker an, da nun der Abstand von einem zufälligen Punkt zu einem Punkt der regulären Struktur kleiner ist. Somit erhalten wir  $J(r) \geq 1$ .
- $J(r) = 1$  zeigt den Übergang von clusternden zu regulären Strukturen an.

Für die Mischung zweier unabhängiger stationärer Punktprozesse mit Dichten  $\bar{\rho}^{(1)}$  und  $\bar{\rho}^{(2)}$  sowie  $J^{(1)}(r)$  und  $J^{(2)}(r)$  gilt die erstaunlich einfache Beziehung (van Lieshout & Baddeley 1996):

$$J(r) = \frac{\bar{\rho}^{(1)}}{\bar{\rho}^{(1)} + \bar{\rho}^{(2)}} J^{(1)}(r) + \frac{\bar{\rho}^{(2)}}{\bar{\rho}^{(1)} + \bar{\rho}^{(2)}} J^{(2)}(r). \quad (2.96)$$

Für einige Punktprozesse wie den Poisson- oder den Matérn-Cluster-Prozeß ist  $J(r)$  unabhängig von der Dichte  $\bar{\rho}$ . Dies ist im allgemeinen nicht der Fall.

*Bis jetzt sind noch keine direkten Schätzer für  $J(r)$  bekannt. In allen bisherigen Anwendungen wurden zuerst  $F(r)$  und  $G(r)$  bestimmt und dann  $J(r)$  geschätzt (Anhang A.6). Ein direkter Schätzer für eine leicht abgeänderte  $J$ -Funktion wird bei Baddeley et al. (1997) diskutiert.*

### Zusammenhang mit den bedingten Dichten – Poisson–Gauß–Prozeß

Nach den Gleichungen (2.87) und (2.79) erhalten wir für einen stationären Punktprozeß

$$J(r) = \frac{\rho_1(0|\mathcal{B}_r(0))}{\bar{\rho}}. \quad (2.97)$$

Diese Größe wurde bereits von Sharp (1981) zum Testen eines hierarchischen Ansatzes für  $n$ -Punkt-Korrelationsfunktionen verwendet. Für einen Poisson–Gauß–Prozeß erhalten wir mit Gleichung (2.35)

$$J(r) = 1 - \bar{\rho} 2\pi \int_0^r ds s^2 \xi_2(s). \quad (2.98)$$

Innerhalb dieses Gaußschen Ansatzes sehen wir, daß für kleine Radien reguläre Strukturen mit  $J(r) > 1$  durch ein negatives  $\xi_2(r)$  bedingt sind, wohingegen wir clusternde Strukturen mit  $J(r) < 1$  durch ein positives  $\xi_2(r)$  erhalten. Wir illustrieren dieses Verhalten von  $J(r)$  für einen Poisson–Gauß–Prozeß mit einem einfachen Modell für die normierte Kumulante  $\xi_2(r)$

$$f(r) = \cos(r + 0.1014268)(\tanh(r) - 1),$$

wobei die numerische Konstante so gewählt wurde, daß  $\int_0^\infty dr r^2 f(r) \approx 0$ . In Abbildung 2.14 ist  $\xi_2(r) = f(r)$  als Beispiel für eine reguläre und  $\xi_2(r) = -f(r)$  als Beispiel für eine clusternde Verteilung zu sehen, sowie die entsprechenden  $J(r)$ -Funktionen nach Gleichung (2.98) mit  $\bar{\rho} = 1$ .

### Matérn–Cluster–Prozesse

Wir betrachten Poisson–Cluster–Prozesse, bei denen die Punkte eines Clusters fast sicher<sup>10</sup> in einer Kugel mit Radius  $R$  um das Clusterzentrum enthalten ist. Von van Lieshout & Baddeley (1996) wurde gezeigt, daß  $J(r) = \text{const} \leq 1$  für  $r > 2R$  gilt. Speziell für einen Matérn–Cluster–Prozeß wie in Abbildung 2.15 erhielten sie

$$J(r) = \begin{cases} \frac{1}{|\mathcal{B}_R|} \int_{\mathcal{B}_R} d^3x e^{-\mu V(\mathbf{x}, r, R)} & \text{für } 0 \leq r \leq 2R, \\ \exp(-\mu) & \text{für } r > 2R \end{cases} \quad (2.99)$$

mit der mittleren Anzahl  $\mu$  von Punkten pro Cluster und dem relativen Volumen

$$V(\mathbf{x}, r, R) = \frac{|\mathcal{B}_r(\mathbf{x}) \cap \mathcal{B}_R(0)|}{|\mathcal{B}_R(0)|} \quad (2.100)$$

<sup>10</sup>Unter „fast sicher“ verstehen wir Aussagen mit Wahrscheinlichkeit eins, siehe z.B. Gässler & Stute (1977).

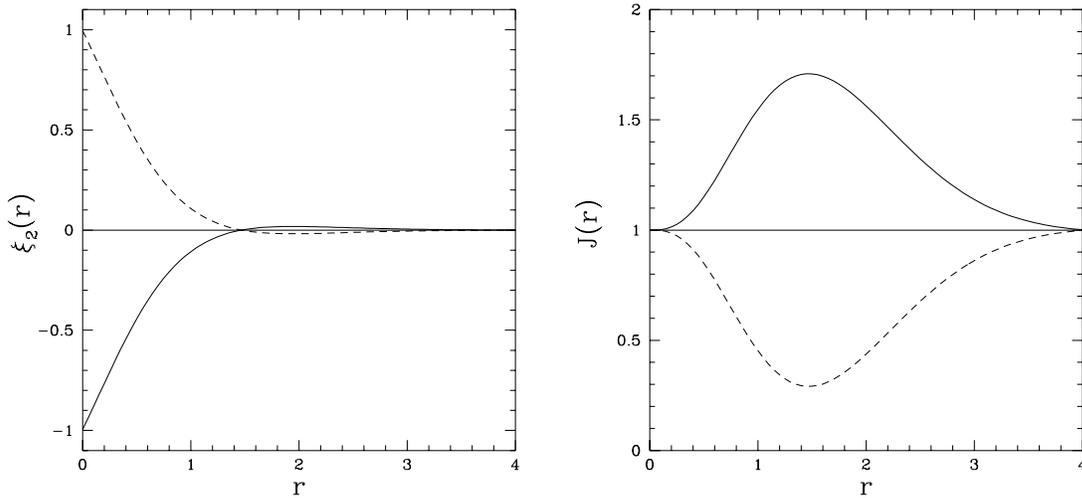


Abbildung 2.14: Links ist die normierte Kumulante  $\xi_2(r)$  für eine reguläre Verteilung (durchgezogen) mit  $\xi_2(r) = f(r)$  und für eine clusternde Verteilung (gestrichelt) mit  $\xi_2(r) = -f(r)$  abgebildet, rechts sind die entsprechenden  $J(r)$  Funktionen nach Gleichung (2.98) mit  $\bar{\rho} = 1$ .

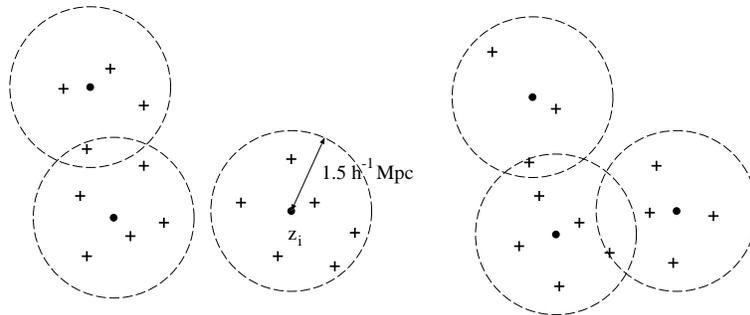


Abbildung 2.15: Skizze eines zweidimensionalen Matérn-Cluster-Prozesses mit Radius  $R = 1.5 h^{-1} \text{Mpc}$  und mit im Mittel  $\mu = 5$  Punkten pro Cluster.

zweier sich schneidender Kugeln mit Radius  $r$  und  $R$  im Abstand  $|\mathbf{x}|$ . In zwei Dimensionen wurde  $V(x, r, R)$  bereits bei Stoyan & Stoyan (1992) angegeben, in drei Dimensionen erhalten wir

$$V(x, r, R) = \begin{cases} r^3/R^3 & \text{für } 0 \leq r < R \text{ und } 0 \leq x \leq R - r, \\ 1 & \text{für } R \leq r \leq 2R \text{ und } 0 \leq x \leq r - R, \\ \widehat{V} := c_3 x^3 + c_1 x + c_0 + c_{-1} x^{-1} & \text{für } 0 \leq r < R \text{ und } R - r < x < R, \\ & \text{oder } R \leq r \leq 2R \text{ und } r - R < x < r \end{cases} \quad (2.101)$$

mit  $x = |\mathbf{x}|$  und

$$c_3 = \frac{1}{16R^3}, \quad c_1 = -\frac{3}{8} \left( \frac{r^2}{R^3} + \frac{1}{R} \right), \quad c_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{r^3}{R^3} + 1 \right), \quad c_{-1} = \frac{3}{16} \left( \frac{2r^2}{R} - \frac{r^4}{R^3} - R \right). \quad (2.102)$$

Mit Gleichung (2.101) und (2.99) folgt dann

$$J(r) = \begin{cases} e^{-\mu r^3/R^3} \left( 1 - \frac{3r}{R} + \frac{3r^2}{R^2} - \frac{r^3}{R^3} \right) + \frac{3}{R^3} \int_{R-r}^R e^{-\mu \widehat{V}} x^2 dx & \text{für } 0 \leq r \leq R, \\ e^{-\mu} \left( \frac{r^3}{R^3} - \frac{3r^2}{R^2} + \frac{3r}{R} - 1 \right) + \frac{3}{R^3} \int_{r-R}^R e^{-\mu \widehat{V}} x^2 dx & \text{für } R < r \leq 2R, \\ e^{-\mu} & \text{für } 2R < r. \end{cases} \quad (2.103)$$

In der Abbildung 2.16 ist  $J(r)$  für unterschiedliche Werte von  $\mu$  bei festem Radius  $R$  zu sehen.

Da in einem Poisson-Cluster-Prozeß  $J(r) = \text{konstant}$  für  $r > 2R$  gilt, sollte es im Prinzip möglich sein, den Clusterradius  $R$  aus der  $J(r)$ -Funktion einer Punktverteilung zu bestimmen. Wir erkennen am Beispiel eines Matérn-Cluster-Prozesses in Abbildung 2.17, daß dies nur aus einer Darstellung  $\ln J-r$  möglich sein wird. Leider sind jedoch bereits in solch einem einfachen Modell die Fluktuationen in  $J(r)$  so groß (siehe Abbildung 2.16), daß der Radius  $r = 2R$ , ab dem  $J(r) = \text{konstant}$  wird, nicht zuverlässig bestimmt werden kann.

### $J_n(r)$ -Funktion

Wie wir in Abbildung 2.12 gesehen haben, liefern  $G(r) = G_1(r)$ , und ebenso  $F(r)$ , nur in einem beschränkten Radialbereich zuverlässige Information über eine gegebene Punktverteilung. Es lassen sich nur Unterschiede im  $J(r)$  zwischen Punktverteilungen ausmachen, solange  $G(r)$  und  $F(r)$  von eins verschieden sind. Mit den  $G_n(r)$  und  $F_n(r)$  für  $n > 1$  dringen wir zu größeren und für jedes  $n$  spezifischen Radialbereichen vor. In Analogie zur Definition von  $J(r)$  in Gleichung (2.95) betrachten wir als Verallgemeinerung

$$J_n(r) = \frac{1 - G_n(r)}{1 - F_n(r)}. \quad (2.104)$$

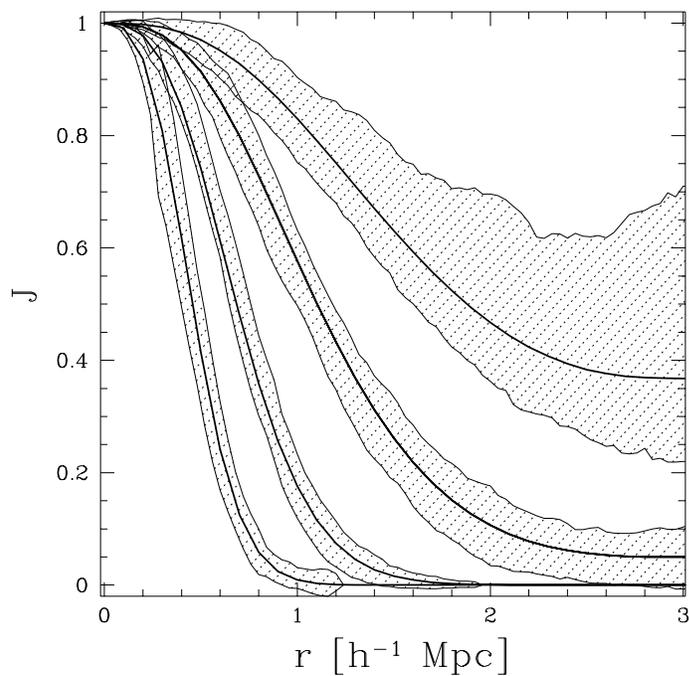


Abbildung 2.16:  $J(r)$  für Matérn-Cluster-Prozesse mit Clusterradius  $R = 1.5h^{-1}\text{Mpc}$  und mittlerer Teilchenzahl  $\mu = 1, 3, 10, 30$  pro Cluster (von rechts oben nach links unten). Die Flächen markieren den  $1\sigma$ -Bereich, bestimmt aus 50 Realisierungen.

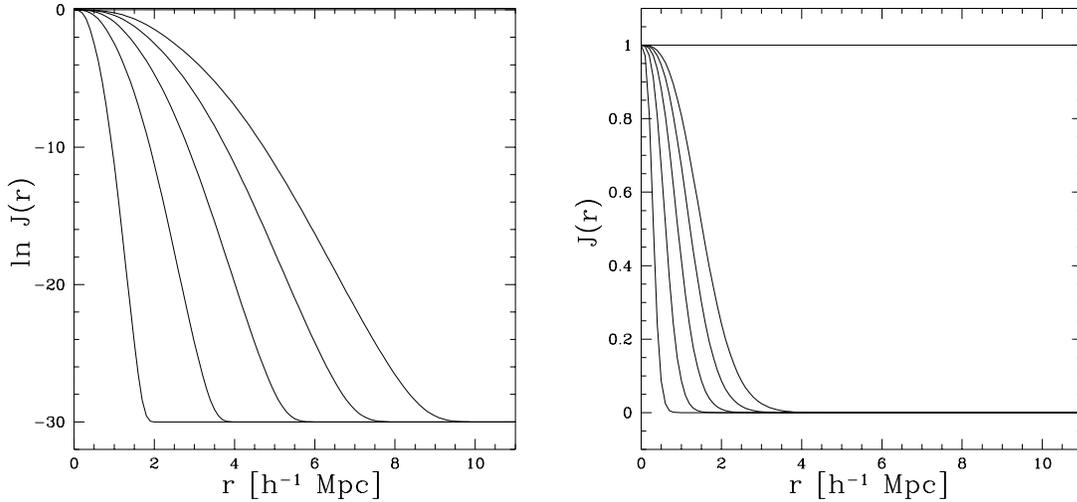


Abbildung 2.17: Links ist  $\ln J(r)-r$  eines Matérn Prozesses mit einer mittleren Teilchenzahl  $\mu = 30$  pro Cluster und mit Clusterradius  $R = 1, 2, 3, 4, 5h^{-1}\text{Mpc}$  (von links nach rechts) dargestellt; rechts, für dieselben Daten  $J(r)-r$ . Der Clusterradius  $R$  ist nur aus dem  $\ln J(r)-r$  Plot verlässlich ablesbar.

Für einen Poissonprozeß erhalten wir mit Gleichung (2.75) und (2.93)

$$J_n(r) = 1 \quad \text{für alle } n. \quad (2.105)$$

Dies folgt auch direkt aus dem Satz von Slivnyak (Stoyan et al. 1995). Qualitativ erwarten wir ein ähnliches Verhalten von  $J_n(r)$  wie für  $J(r)$ . Sei nun  $\Delta_n \subset \mathbb{R}_0^+$  der Radialbereich, in dem  $\epsilon < F_n(r) < 1 - \epsilon$  ist, wobei  $\epsilon$  in der Größenordnung der Fluktuationen von  $F_n(r)$  gewählt wird<sup>11</sup>:

- Clustert die Punktverteilung auf Skalen von  $\Delta_n$ , so wächst  $G_n(r)$  stärker an als in einem Poissonprozeß, da der  $n$ -te Nachbar typischerweise in der näheren Umgebung zu finden ist.  $F_n(r)$  wächst hingegen langsamer an. Diese beiden Effekte ergeben ein  $J_n(r) \leq 1$ .
- Im Gegensatz hierzu ist in einem auf Skalen von  $\Delta_n$  regulären Prozeß  $G_n(r)$  niedriger als in einem Poissonprozeß, da der  $n$ -te Nachbar meist in einer endlichen, charakteristischen Distanz zu finden ist.  $F_n(r)$  steigt stärker an, da nun typischerweise der Abstand von einem zufälligen Punkt zu einem Punkt der regulären Struktur kleiner ist. Somit erhalten wir  $J_n(r) \geq 1$ .
- $J_n(r) = 1$  zeigt den Übergang von clusternden zu regulären Strukturen auf Skalen von  $\Delta_n$  an.

<sup>11</sup>Dies ist eine rein willkürliche Definition, die hier zur Erläuterung der Eigenschaften von  $J_n(r)$  eingeführt wurde.

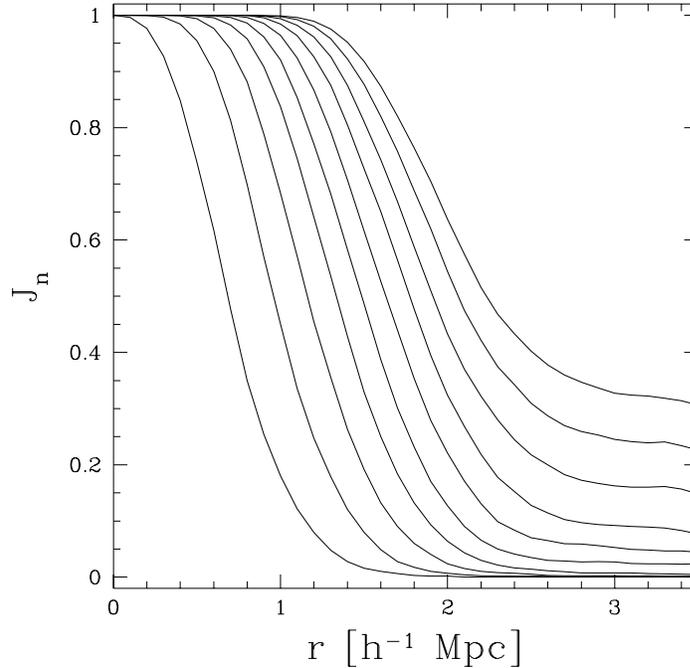


Abbildung 2.18: Die  $J_n(r)$ -Funktionen mit  $n = 1, \dots, 10$  für einen Matérn-Prozeß mit  $\mu = 10$  und  $R = 1.5h^{-1}\text{Mpc}$ ;  $n$  wächst von links unten nach rechts oben. Die Kurven sind durch die Mittelwerte über 50 Realisierungen gegeben.

Leider gibt es bisher, außer für den Poissonprozeß, keine analytischen Resultate, in denen die oben angesprochenen Eigenschaften für genügend allgemeine Punktprozesse gezeigt werden.

### $J_n(r)$ für einen Matérn-Cluster-Prozeß

Daß die oben beschriebenen Eigenschaften von  $J_n(r)$  nicht vollkommen aus der Luft gegriffen sind, sehen wir am folgenden Beispiel: In Abbildung 2.18 sind die  $J_n(r)$  für  $n = 1, \dots, 10$  eines Matérn-Cluster-Prozesses dargestellt (siehe auch Abschnitt 2.2.6 und Abbildung 2.15). Hierzu wurden zufällig Clusterzentren verteilt. Um diese wurden dann innerhalb eines Radius von  $R = 1.5h^{-1}\text{Mpc}$  im Mittel 10 Punkte zufällig verteilt. Die Anzahl der Punkte pro Cluster ist Poissonverteilt mit Mittelwert 10. Insgesamt wurden im Mittel 300 Punkte in einem Würfel der Kantenlänge  $20h^{-1}\text{Mpc}$  untergebracht. Dieser spezielle Clusterradius wurde vergleichbar zu typischen Galaxienclustern gewählt. Wie erwartet ist  $J_n(r) \leq 1$ , wir haben es hier mit einem clusternden Punktprozeß zu tun. Interessanterweise erkennen wir  $J_n(r) \leq J_m(r)$  für  $n < m$ , d.h. auf großen Skalen, respektive für großes  $n$ , clustert der Matérn-Cluster Prozeß schwächer als auf kleinen Skalen. Dies entspricht auch der

qualitativen Erwartung, daß auf großen Skalen, somit bei großen  $n$ , die Poissonverteilung der Clusterzentren selbst zu einem  $J_n(r) \nearrow 1$  führt.

### Zusammenhang mit bedingten Dichten

Mit den Gleichungen (2.78) und (2.86) können wir  $J_n(r)$  durch Integrale über die bedingten Dichten aus Abschnitt B.3.3 darstellen ( $\mathcal{B}_r$  sei hier eine Kugel mit Radius  $r$  um den Ursprung):

$$\begin{aligned} J_n(r) &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(i-1)!} \int_{\mathcal{B}_r} d^d x_2 \dots \int_{\mathcal{B}_r} d^d x_i \rho_i(0, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i \wedge \mathcal{B}_r) / \bar{\rho}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \int_{\mathcal{B}_r} d^d x_1 \dots \int_{\mathcal{B}_r} d^d x_i \rho_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i \wedge \mathcal{B}_r)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(i-1)!} \int_{\mathcal{B}_r} d^d x_2 \dots \int_{\mathcal{B}_r} d^d x_i \rho_i(0, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i | \mathcal{B}_r) / \bar{\rho}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \int_{\mathcal{B}_r} d^d x_1 \dots \int_{\mathcal{B}_r} d^d x_i \rho_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i | \mathcal{B}_r)}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Wir erkennen hier im Zähler eine Verteilung unter der Bedingung, daß ein Punkt im Ursprung sitzt, hingegen im Nenner eine Verteilung ohne Bedingung. Der Faktor  $\rho_0(\mathcal{B}_r)$ , der in der letzten Zeile gekürzt wurde, führt auf großen Skalen zu dem asymptotischen Verhalten von sowohl  $1 - F_n(r) \searrow 0$ , als auch  $1 - G_n(r) \searrow 0$ . Im  $J_n(r)$  findet daher keine Unterdrückung von großskaligen Eigenschaften durch den Faktor  $\rho_0(\mathcal{B}_r)$  statt.

## 2.5 Minkowskifunktionale

Mit der sphärischen Kontaktverteilung  $F(r)$ , der nächsten Nachbarverteilung  $G(r)$  und der  $J(r)$ -Funktion aus Abschnitt 2.4 haben wir bereits Größen kennengelernt, mit denen wir die globalen Eigenschaften einer Punktverteilung beschreiben können. Bei einer Betrachtung von Galaxienkatalogen glaubt man Strukturen wie Wände und Filamente zu erkennen (siehe Abbildung 1.2). Mit Minkowskifunktionalen können wir diesen Eindruck quantifizieren.

### 2.5.1 Definition und Eigenschaften

Für diesen Abschnitt nehmen wir Abschied von Punkten und betrachten abgeschlossene Teilmengen  $\mathcal{K}$  des  $d$ -dimensionalen Euklidischen Raums  $\mathbb{E}^d$ , die durch eine endliche Vereinigung konvexer Körper darstellbar sind. Die Menge all dieser Körper  $\mathcal{K}$  ist der Konvexring  $\mathfrak{K}$ . Die Verbindung zu Punktverteilungen stellen wir in Abschnitt 2.5.2 her.

#### Satz von Hadwiger

Wir wollen die Geometrie und Topologie des Körpers  $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}$  mit Hilfe von Zahlen beschreiben. Gesucht sind also Abbildungen  $M$  der Gestalt

$$\mathcal{K} \mapsto M(\mathcal{K}) \in \mathbb{R}. \quad (2.107)$$

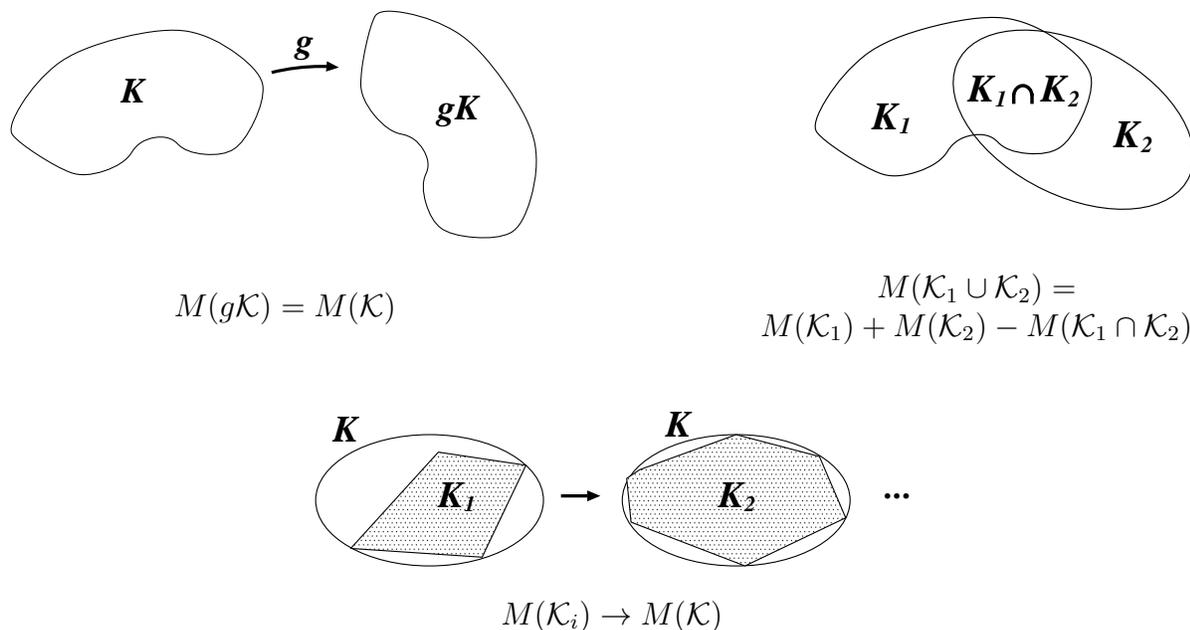


Abbildung 2.19: Links die Bewegungsinvarianz, rechts die Additivität und unten die (bedingte) Stetigkeit der Minkowskifunktionale.

Einschränkend betrachten wir nur Abbildungen  $M$ , die folgende Eigenschaften erfüllen (siehe Abbildung 2.19):

1. Da wir an der Geometrie und Topologie des Körpers  $\mathcal{K}$  und nicht an dessen Lage im Raum interessiert sind, fordern wir Bewegungsinvarianz:

$$M(g\mathcal{K}) = M(\mathcal{K}) \text{ mit } g \in \mathcal{G}, \quad (2.108)$$

wobei  $\mathcal{G}$  die Gruppe der Bewegungen in  $\mathbb{E}^d$ , bestehend aus den Translationen und Rotationen, ist.

2. Wir wollen globale Eigenschaften eines Körpers beschreiben und fordern daher Additivität:

$$M(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) = M(\mathcal{K}_1) + M(\mathcal{K}_2) - M(\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2). \quad (2.109)$$

3. Eine eher technische Forderung ist die nach (bedingter) Stetigkeit. Konvergieren<sup>12</sup> *konvexe* Körper  $\mathcal{K}_i$  mit  $i = 1, \dots$  gegen  $\mathcal{K}$ , so gelte dies auch für die Bilder

$$M(\mathcal{K}_i) \rightarrow M(\mathcal{K}). \quad (2.110)$$

<sup>12</sup>Die Konvergenz der Körper  $\mathcal{K}_i$  ist hier bezüglich der Hausdorff-Metrik  $d(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \inf\{\epsilon > 0 \mid \mathcal{M} \subset \mathcal{N} \uplus \mathcal{B}_\epsilon, \mathcal{N} \subset \mathcal{M} \uplus \mathcal{B}_\epsilon\}$ .

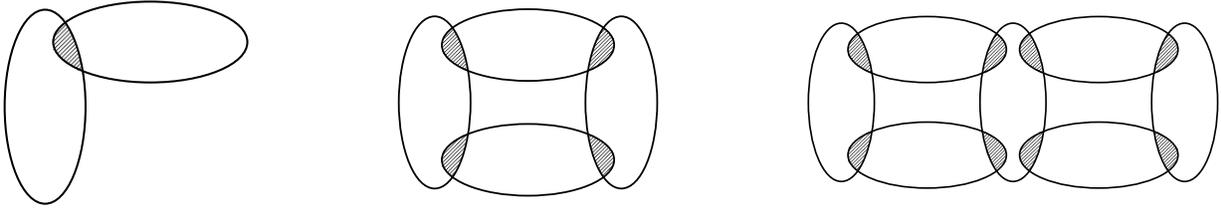


Abbildung 2.20: Berechnung der Eulercharakteristik  $\chi$  zusammengesetzter Körper über die Additivität: Links der Schnitt zweier konvexer Körper:  $\chi = 2 - 1 = 1$ ; in der Mitte: vier Körper mit vier Schnitten:  $\chi = 4 - 4 = 0$ , das diskrete Analogon zum Torus; rechts: sieben Körper mit acht Schnitten:  $\chi = 7 - 8 = -1$ , das diskrete Analogon zum Doppeltorus.

Diese drei Voraussetzungen sind erstaunlicherweise ausreichend für den Charakterisierungssatz von Hadwiger (1957):

**Satz von Hadwiger:** In  $d$  Dimensionen läßt sich jede bewegungsinvariante, additive und im obigen Sinne stetige Abbildung  $M$  vom Konvexring  $\mathfrak{K}$  nach  $\mathbb{R}$  als Linearkombination von  $d + 1$  Minkowskifunktionalen  $M_\mu$ ,  $\mu = 0, \dots, d$  darstellen:

$$M(\mathcal{K}) = \sum_{\mu=0}^d c_\mu M_\mu(\mathcal{K}) \text{ mit } c_\mu \in \mathbb{R}. \quad (2.111)$$

In diesem Sinne liefern die  $d + 1$  Minkowskifunktionale eine vollständige und bis auf reelle Konstanten eindeutige Charakterisierung der globalen Morphologie eines Körpers  $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}$ .

Die dritte Bedingung kann abgeschwächt werden. Wir fordern nur noch Monotonie, d.h. für konvexe  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$  mit

$$\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \text{ gelte } M(\mathcal{K}_1) \leq M(\mathcal{K}_2). \quad (2.112)$$

Der Charakterisierungssatz (2.111) gilt dann weiterhin für  $c_\mu \geq 0$ .

Eine Erweiterung, die diese skalaren Minkowskifunktionale umfaßt, stellen die vektorwertigen Minkowskifunktionale dar (siehe hierzu Hadwiger & Schneider 1971, Beisbart 1997).

Durch die Additivität können wir die Minkowskifunktionale einer endlichen Vereinigung konvexer Körper durch die Minkowskifunktionale der einzelnen Körper und deren Schnitte ausdrücken. Die Basis liefert das Inklusions-Exklusionsprinzip, äquivalent zur Additivität. Sei  $\mathcal{K} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_{\mathcal{K}}} \mathcal{K}_i$  und der Indexmenge  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}} = 1, \dots, N$ , so gilt

$$M(\mathcal{K}) = \sum_{\emptyset \neq \mathcal{I} \subset \mathcal{I}_{\mathcal{K}}} (-1)^{|\mathcal{I}|+1} M\left(\bigcap_{j \in \mathcal{I}} \mathcal{K}_j\right), \quad (2.113)$$

wobei hier  $|\mathcal{I}|$  die Anzahl der Elemente in  $\mathcal{I}$  angibt (z.B. Schneider & Weil 1992). In Abbildung 2.20 illustrieren wir dies am Beispiel der Eulercharakteristik  $\chi$  (Hadwiger 1955b).

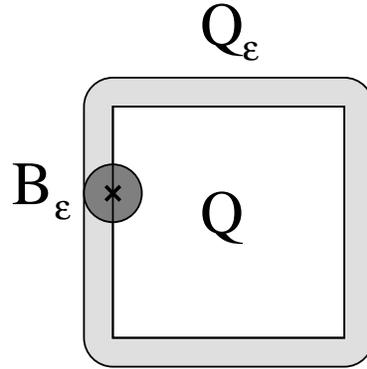


Abbildung 2.21: Ein Quadrat und sein Parallelkörper.

**Satz von Steiner**

Für konvexe Körper können wir die Minkowskifunktionale mit dem Satz von Steiner berechnen. Er gibt an, wie sich das Volumen eines konvexen Körpers  $\mathcal{K}$  ändert, wenn wir um jeden Punkt des Körpers eine Kugel mit Radius  $\epsilon$  legen. Diesen erweiterten Körper bezeichnet man als Parallelkörper  $\mathcal{K}_\epsilon$  von  $\mathcal{K}$  (siehe Abbildung 2.21),

$$\mathcal{K}_\epsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid d(\mathbf{x}, \mathcal{K}) \leq \epsilon\} = \mathcal{K} \uplus \mathcal{B}_\epsilon, \quad (2.114)$$

wobei  $d(\mathbf{x}, \mathcal{K}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{K}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  der Abstand vom Punkt  $\mathbf{x}$  zum Körper  $\mathcal{K}$  ist.  $\mathcal{K}_\epsilon$  ist somit die Minkowskisumme  $\uplus$  von  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{B}_\epsilon$ . Es gilt nun für das Volumen von  $\mathcal{K}_\epsilon$

$$|\mathcal{K}_\epsilon| = \sum_{\nu=0}^d \binom{d}{\nu} W_\nu(\mathcal{K}) \epsilon^\nu. \quad (2.115)$$

Die Koeffizienten  $W_\nu(\mathcal{K})$  sind bewegungsinvariante, additive und (bedingt) stetige Abbildungen, bilden also nach dem Satz von Hadwiger eine Basis der Minkowskifunktionale.

Als Beispiel in zwei Dimensionen betrachten wir ein Quadrat  $Q$  mit Seitenlänge  $a$  (siehe Abbildung 2.21). Die Fläche des Parallelkörpers  $Q_\epsilon$  ist

$$|Q_\epsilon| = a^2 \epsilon^0 + 4a\epsilon^1 + 4\frac{1}{4}\pi\epsilon^2,$$

und wir können die drei Minkowskifunktionale des Quadrats ablesen:

$$W_0 = a^2, \quad W_1 = 2a, \quad W_2 = \pi.$$

Aus dem Satz von Steiner folgt direkt die Homogenität der Minkowskifunktionale unter Skalierung des Körpers mit einem Faktor  $a > 0$ . Es gilt:

$$W_\nu(a\mathcal{K}) = a^{d-\nu} W_\nu(\mathcal{K}). \quad (2.116)$$

Tabelle 2.1: Minkowskifunktionale und ihre geometrische Bedeutung in drei Dimensionen.

geometrische Größe		$\mu$	$M_\mu$	$W_\mu$	$V_\mu$
$V$	Volumen	0	$V$	$V$	$V$
$S$	Oberfläche	1	$\frac{S}{8}$	$\frac{S}{3}$	$\frac{S}{6}$
$H$	Integrale mittlere Krümmung	2	$\frac{H}{2\pi^2}$	$\frac{H}{3}$	$\frac{H}{3\pi}$
$\chi$	Eulercharakteristik	3	$\frac{3}{4\pi}\chi$	$\frac{4\pi}{3}\chi$	$\chi$

Die Minkowskifunktionale sind daher nach Homogenitätsgraden geordnet, sie sind jedoch nach dem Satz von Hadwiger weiterhin nur bis auf Faktoren bestimmt. Wir haben bereits zwei Normierungen kennengelernt,  $M_\mu$  und  $W_\mu$ , im folgenden werden wir, je nach Anwendung, auch die Normierung  $V_\mu$  verwenden<sup>13</sup>:

$$M_\mu = \frac{\omega_{d-\mu}}{\omega_d} V_\mu = \frac{\omega_{d-\mu}}{\omega_d \omega_\mu} W_\mu. \quad (2.117)$$

Explizit in drei Dimensionen erhalten wir

$$\begin{aligned} M_0 &= V_0 = W_0, & M_1 &= \frac{3}{4}V_1 = \frac{3}{8}W_1, \\ M_2 &= \frac{3}{2\pi}V_2 = \frac{3}{2\pi^2}W_2, & M_3 &= \frac{3}{4\pi}V_3 = \frac{9}{16\pi^2}W_3. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Es werden auch die inneren Volumina  $\bar{V}_\mu = \binom{d}{\mu} V_{d-\mu}$  (siehe z.B. Weil 1983 und Schneider & Weil 1992) diskutiert, die im Gegensatz zu den oben definierten Minkowskifunktionalen  $M_\mu$ ,  $W_\mu$ ,  $V_\mu$  unabhängig von der Einbettungsdimension  $d$  sind. Eine explizite Konstruktion der Minkowskifunktionale auf dem Konvexring ist auch mit Schnittrekursionen über die Eulercharakteristik möglich (siehe z.B. Hadwiger 1957, Hadwiger 1955b, Mecke 1994).

### Minkowskifunktionale als geometrische Größen

In drei Dimensionen haben die vier Minkowskifunktionale eine anschauliche geometrische Bedeutung (siehe Tabelle 2.1). Leicht ist nachzuprüfen, daß das Volumen  $W_0$  und die Oberfläche  $\propto W_1$  additiv und bewegungsinvariant sind. Als topologische Invariante zählt die Eulercharakteristik  $\chi \propto W_3$  die Anzahl der Komponenten eines Körper (wobei Hohlräume als Komponenten gezählt werden) minus der Anzahl der Tunnel durch die einzelnen Komponenten. Für einen konvexen Körper erhalten wir somit  $\chi = 1$ , für einen Torus  $\chi = 0$ .

<sup>13</sup> $\omega_d$  ist das Volumen der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel, mit  $\omega_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)}$  also  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = \pi$ ,  $\omega_3 = 4\pi/3$ .

Es bleibt zu beachten, daß Hohlräume als eigene Komponenten zählen, die ebenfalls von Tunneln durchzogen sein können; für eine Hohlkugel erhalten wir  $\chi = 2$ , jedoch für einen Hohltorus weiterhin  $\chi = 0$ . Für konvexe Körper ist  $W_2$  dessen mittlere Breite.

Der Zusammenhang mit bekannten Größen aus der Differentialgeometrie kann mit dem Satz von Steiner hergestellt werden (Mecke et al. 1994, Schneider 1993). Für glatte konvexe Körper  $\mathcal{K}$  in drei Dimensionen erhalten wir dann die  $W_\mu$  für  $\mu \geq 1$  als Oberflächenintegrale:

$$W_1 = \frac{1}{3} \int_{\partial\mathcal{K}} dS, \quad W_2 = \frac{1}{3} \int_{\partial\mathcal{K}} dS h, \quad W_3 = \frac{1}{3} \int_{\partial\mathcal{K}} dS G \quad (2.119)$$

über die mittlere Krümmung  $h = \frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$  und die Gaußsche Krümmung  $G = \frac{1}{R_1 R_2}$ , wobei  $R_1$  und  $R_2$  die Hauptkrümmungsradien sind. Mit dem Satz von Gauß–Bonnet ergibt sich der Zusammenhang mit der Eulercharakteristik  $W_3 = \frac{4\pi}{3}\chi$ . In Tabelle 2.1 fassen wir die geometrische Bedeutungen und die unterschiedlichen Normierungen zusammen. Hadwiger (1955a) und Mecke (1994) geben die Minkowskifunktionale einiger gängiger Körper an.

### Kinematische Hauptformel

Im Rahmen der Integralgeometrie werden Mittelwerte über Bewegungen von Körpern betrachtet. Die Bewegungsgruppe  $\mathcal{G} = \mathcal{R} \otimes \mathcal{T}$  sei aus der Translationsgruppe  $\mathcal{T}$  und der Gruppe der eigentlichen Drehungen  $\mathcal{R}$  zusammengesetzt. Als Integrationsmaß für die Bestimmung von Mittelwerten verwenden wir das invariante Haarsche Maß auf den jeweiligen Gruppen. Für Translationen in  $\mathbb{E}^d$  ist dies proportional zum Lebesguemaß auf  $\mathbb{R}^d$ , für die eigentlichen Drehungen proportional zum Oberflächenmaß auf der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel<sup>14</sup>. Wir schränken die Translationen auf einen flachen  $d$ -dimensionalen Torus mit großem, aber endlichem Volumen  $|\mathcal{V}|$  ein, und legen die Normierung der Bewegungen wie folgt fest:

$$\int_{\mathcal{G}} dg = \int_{\mathcal{R} \otimes \mathcal{T}} dr dt = |\mathcal{V}|. \quad (2.120)$$

Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei Körper aus dem Konvexring. Wir halten  $\mathcal{A}$  fest, und bewegen  $\mathcal{B}$  mit  $g \in \mathcal{G}$ . Der Schnitt  $\mathcal{A} \cap g\mathcal{B}$  ist wieder Element des Konvexrings. Wir interessieren uns für die Minkowskifunktionale  $M_\mu(\mathcal{A} \cap g\mathcal{B})$ , gemittelt über alle Bewegungen  $g \in \mathcal{G}$ . Dieser Mittelwert ist bewegungsinvariant sowohl bezüglich  $\mathcal{A}$  als auch  $\mathcal{B}$ , und läßt sich daher nach dem Satz von Hadwiger aus den Minkowskifunktionalen von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  berechnen. Die Koeffizienten können an Beispielen bestimmt werden und wir erhalten die kinematische Hauptformel (Hadwiger 1957):

$$\int_{\mathcal{G}} dg M_\mu(\mathcal{A} \cap g\mathcal{B}) = \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} M_\nu(\mathcal{A}) M_{\mu-\nu}(\mathcal{B}). \quad (2.121)$$

<sup>14</sup>Für die Drehungen, als kompakte topologische Gruppe, ist das Haarmaß bis auf Faktoren eindeutig. Das Lebesguemaß ist auf  $\mathbb{R}^d$  ebenfalls eindeutig.

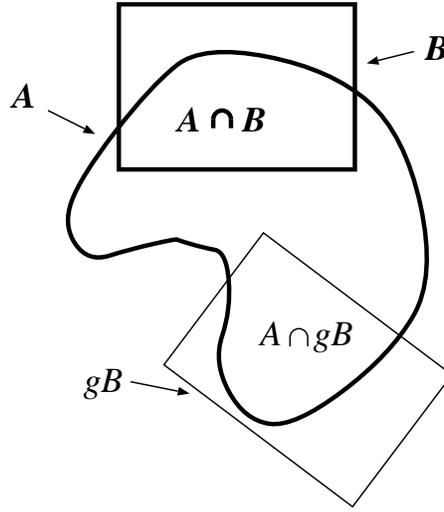


Abbildung 2.22: In der kinematischen Hauptformel betrachten wir den Mittelwert der Minkowskifunktionale von  $\mathcal{A} \cap g\mathcal{B}$  über alle Bewegungen  $g$ .

### Boolesches Kornmodell

Als ein einfaches, aber in seinen Eigenschaften sehr reichhaltiges stochastisches Modell betrachten wir die zufällige Verteilung von  $N$  konvexen Körpern  $\mathcal{K}_i$  im Raum  $\mathcal{V}$ , wobei wir uns für die Vereinigungsmenge  $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{K}_i$  interessieren werden. Dieses Modell wird Boolesches Kornmodell genannt. Dekorieren wir  $N$  Punkte  $\mathbf{x}_i$  eines Poissonprozesses zufällig mit Körpern  $\mathcal{K}$ , so erhalten wir ebenfalls ein Boolesches Kornmodell, wobei wir nicht notwendigerweise dieselben Körner verwenden müssen. Da die zufällige Lage von Körpern auch durch zufällige Bewegungen der Körper erreicht werden kann, ist es möglich, die Volumendichte

$$m_\mu(\mathcal{A}) = \frac{M_\mu(\mathcal{A})}{|\mathcal{V}|} \quad (2.122)$$

der Minkowskifunktionale von  $\mathcal{A}$  mit Hilfe der kinematischen Hauptformel zu berechnen (siehe Mecke & Wagner 1991, dort wird auch der Einfluß einer endlichen Geometrie diskutiert). Wir erhalten in drei Dimensionen

$$\begin{aligned} m_0(\mathcal{A}) &= 1 - e^{-\bar{\rho}\widehat{M}_0}, & m_2(\mathcal{A}) &= e^{-\bar{\rho}\widehat{M}_0} (\bar{\rho}\widehat{M}_2 - \bar{\rho}^2\widehat{M}_1^2), \\ m_1(\mathcal{A}) &= e^{-\bar{\rho}\widehat{M}_0} \bar{\rho}\widehat{M}_1, & m_3(\mathcal{A}) &= e^{-\bar{\rho}\widehat{M}_0} (\bar{\rho}\widehat{M}_3 - \bar{\rho}^2\widehat{M}_2^2 + \bar{\rho}^3\widehat{M}_1^3) \end{aligned} \quad (2.123)$$

mit der Teilchendichte  $\bar{\rho} = N/|\mathcal{V}|$  und den mittleren Minkowskifunktionalen der Körner

$$\widehat{M}_\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M_\mu(\mathcal{K}_i). \quad (2.124)$$

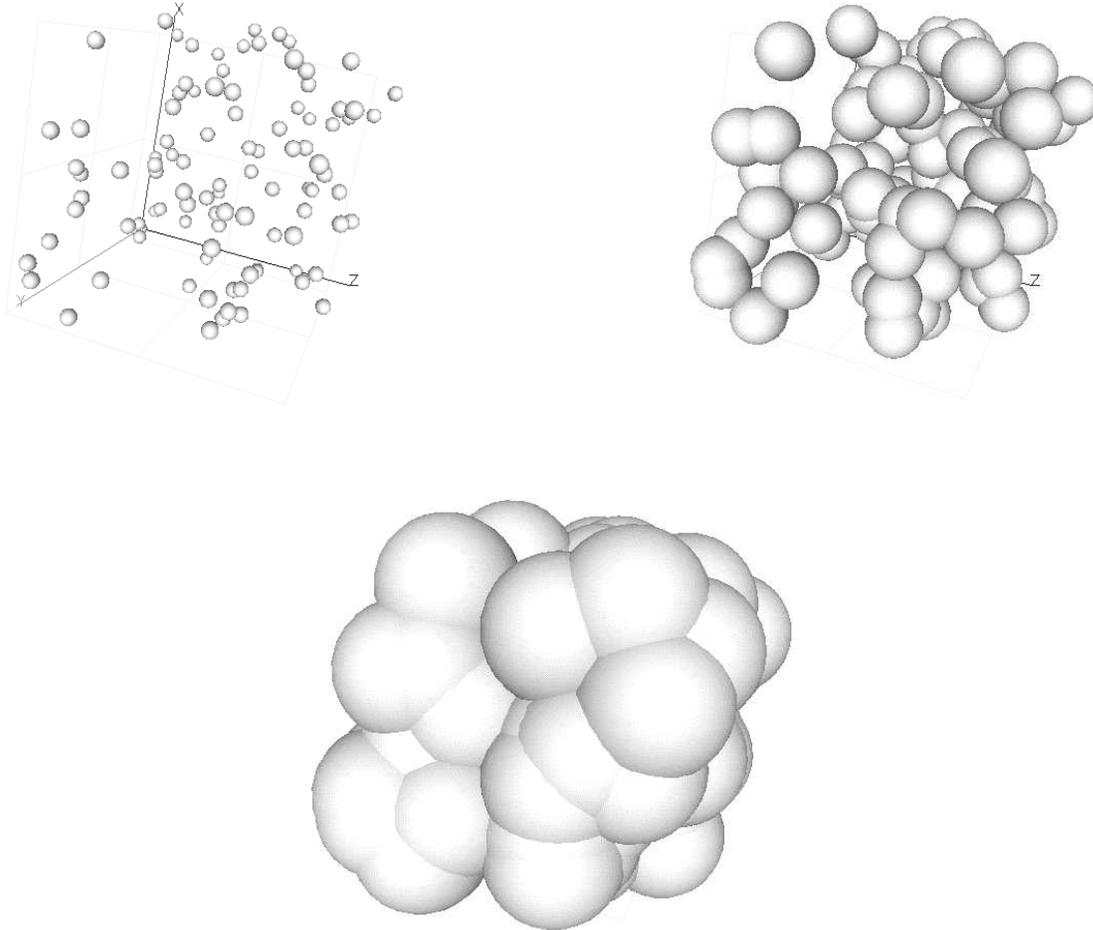


Abbildung 2.23: Zufällig verteilte Kugeln mit unterschiedlichem Radius  $r$ .

Speziell interessieren wir uns für ein Modell mit sphärischen Körnern. Wir dekorieren die  $N$  Poissonverteilten Punkte  $\mathbf{x}_i$  mit Kugeln  $\mathcal{B}_r$  vom Radius  $r$  und betrachten die Vereinigungsmenge

$$\mathcal{A}_r = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i). \quad (2.125)$$

Der Radius  $r$  kann variiert werden und dient als diagnostischer Parameter, mit dem wir die globalen Eigenschaften der Punktverteilung, in diesem Fall die eines Poissonprozesses, auf unterschiedlichen Skalen betrachten können (siehe Abbildung 2.23). Für monodisperse

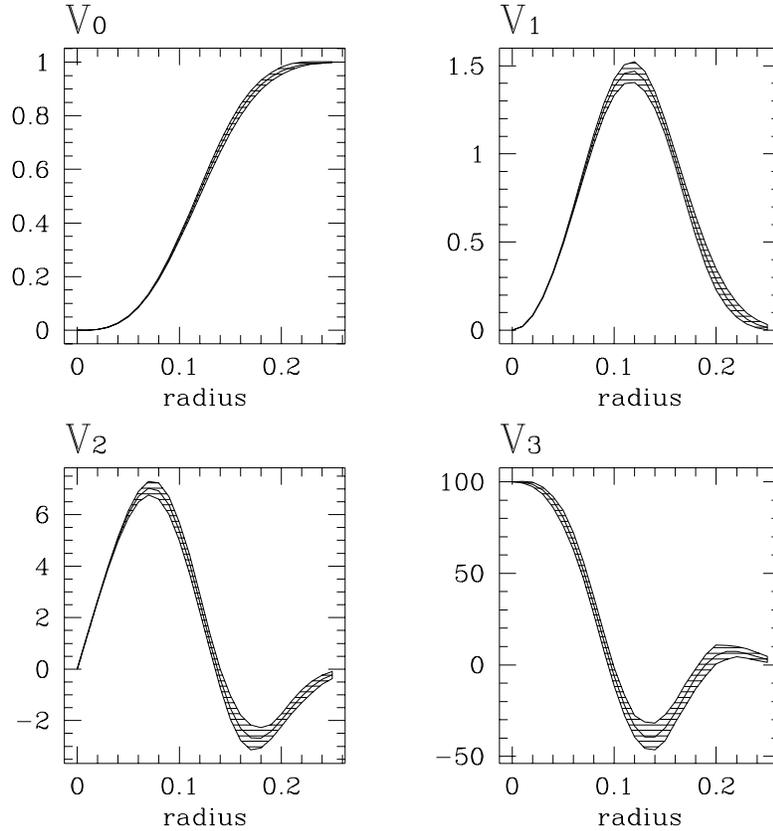


Abbildung 2.24: Minkowskifunktionale  $v_\mu(\mathcal{A}_r)$  von 100 zufällig verteilten Punkten im Einheitswürfel. Der schattierte Bereich markiert die  $1\sigma$ -Standardabweichung, geschätzt aus 100 Realisierungen. Die durchgezogenen Linien im Zentrum markieren jeweils die theoretischen Werte nach Gleichung (2.123).

Kugeln  $\mathcal{B}_r$  erhalten wir

$$\widehat{M}_0 = \frac{4\pi}{3}r^3, \quad \widehat{M}_1 = \frac{\pi}{2}r^2, \quad \widehat{M}_2 = \frac{4}{\pi}r, \quad \widehat{M}_3 = \frac{3}{4\pi}. \quad (2.126)$$

In Abbildung 2.24 sind die Dichten  $v_\mu(\mathcal{A}_r) = m_\mu(\mathcal{A}_r) \frac{\omega_d}{\omega_{d-\mu}}$  für 100 Punkte im Einheitswürfel  $|\mathcal{V}| = 1$  mit periodischen Randbedingungen dargestellt:

Mit wachsendem Radius nimmt das Volumen  $V_0$  zu, bis der ganze Raum  $\mathcal{V}$  ausgefüllt ist. Sowohl Oberfläche  $V_1$  als auch Krümmung  $V_2$  wachsen mit dem Radius, solange sich die Kugeln im wesentlichen frei ausdehnen. Dieses Wachstum wird langsamer, sobald sich Kugeln überlappen. Für weiter wachsende Radien wird dann der Großteil der Oberfläche überdeckt, und sowohl  $V_1$  als auch  $V_2$  verschwinden aufgrund der periodischen Randbedingungen. Eine positive integrale mittlere Krümmung  $V_2$  zeigt weitgehend konvexe Strukturen an, ein negatives  $V_2$  konkave Strukturen. Am interessantesten ist das Verhalten der

Eulercharakteristik  $V_3$ . Für kleine Radien erhalten wir einen Beitrag von allen hundert einzelnen Kugeln. Mit wachsendem Radius überlappen immer mehr Kugeln und die Eulercharakteristik fällt. Die Bildung von Tunneln durch die Struktur führt zu einem negativen Beitrag. Kurz bevor das ganze Volumen aufgefüllt ist, zeigen sich noch Kavitäten, die zu einer positiven Eulercharakteristik führen.

## 2.5.2 Minkowskifunktionale zur Analyse von Punktmengen

Wir kehren wieder zu unserem eigentlichen Ziel zurück, nämlich der Beschreibung der räumlichen Verteilung von Galaxien. Ein Galaxienkatalog ist in erster Linie eine Menge von Punkten  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$  im Beobachtungsfenster  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ . Der visuelle Eindruck ist, daß große Leerräume (Voids) von flächenhaften und linienartigen Strukturen (Sheets, Pancakes und Filamenten) umgeben sind. Um diesen subjektiven Eindruck zu quantifizieren, werden wir nun ein erweitertes Boolesches Kornmodell betrachten.

### Minkowskifunktionale *einer* Punktverteilung

Wie bereits in Abschnitt 2.1 diskutiert wurde, ist die geometrische Information über die Punktmenge  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$  vollständig in den Punktdichten

$$\rho_n^{N,\mathcal{D}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \delta(\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{i_1}) \cdots \delta(\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_{i_n}) \text{ mit } 1 \leq n \leq N$$

enthalten. Durch die Punktverteilung  $\mathcal{X}$  ist das „Gerüst“ der Strukturen gegeben. Wir dekorieren jeden Punkt mit einer Kugel  $\mathcal{B}_r$  und erzeugen einen Körper  $\mathcal{A}_r^N = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$ , wobei der gemeinsame Radius als diagnostischer Parameter zur Untersuchung der Morphologie von  $\mathcal{A}_r$  auf verschiedenen Skalen  $r$  verwendet wird. Die globale Morphologie dieser Menge  $\mathcal{A}_r^N$  kann eindeutig und vollständig mit Minkowskifunktionalen beschrieben werden. Um den Zusammenhang mit der Punktverteilung des Galaxienkatalogs explizit zu erhalten, betrachten wir

$$\mathcal{A}_r^N = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i) = \mathcal{A}_r^{N-1} \cup \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_N). \quad (2.127)$$

Mit der Additivität der Minkowskifunktionale folgt

$$M_\mu(\mathcal{A}_r^N) = M_\mu(\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_N)) + M_\mu(\mathcal{A}_r^{N-1}) - M_\mu(\mathcal{A}_r^{N-1} \cap \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_N)). \quad (2.128)$$

Iterieren wir Gleichung (2.128), so erhalten wir

$$M_\mu(\mathcal{A}_r^N) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \sum_{\langle i_1, \dots, i_n \rangle} M_\mu(\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_{i_1}) \cap \cdots \cap \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_{i_n})). \quad (2.129)$$

Die Summe läuft über alle *geordneten*  $n$ -Tupel  $\langle i_1, \dots, i_n \rangle$  mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N$ . Dies folgt auch direkt aus dem Inklusions– Exklusionsprinzip. Da die Schnittbildung kommutativ ist, können wir auch über die ungeordneten Tupel summieren, erhalten dann aber einen Faktor  $1/n!$ . Mit den empirischen Dichten  $\rho_n^{N,\mathcal{D}}(\cdot)$  folgt dann aus Gleichung (2.129):

$$M_\mu(\mathcal{A}_r^N) = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int_{\mathcal{D}} d^3x_1 \cdots \int_{\mathcal{D}} d^3x_n M_\mu(\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_1) \cap \cdots \cap \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_n)) \rho_n^{N,\mathcal{D}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n). \quad (2.130)$$

Die Werte der Minkowskifunktionale  $M_\mu(\mathcal{A}_r^N)$  sind daher eindeutig durch die Galaxienkoordinaten und die Wahl der Körner, in unserem Fall der Kugeln, bestimmt. Dieser Zugang ist rein kombinatorisch. Es gehen *keine* statistischen Annahmen ein. In Gleichung (2.130) sind Schnitte mit der Beobachtungsgeometrie  $\mathcal{D}$  noch nicht berücksichtigt. Wir erhalten diese explizit, indem wir die Schnittmenge  $\mathcal{A}_r^N \cap \mathcal{D}$  betrachten:

$$M_\mu(\mathcal{A}_r^N \cap \mathcal{D}) = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int_{\mathcal{D}} d^3x_1 \cdots \int_{\mathcal{D}} d^3x_n M_\mu(\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_1) \cap \cdots \cap \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_n) \cap \mathcal{D}) \rho_n^{N,\mathcal{D}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n). \quad (2.131)$$

### Volumendichten der Minkowskifunktionale eines Punktprozesses

Im Abschnitt 2.5.1 haben wir bereits die Mittelwerte der Volumendichten der Minkowskifunktionale für Poissonverteilte Kugeln  $\mathcal{B}_r$  (oder andere konvexe Körper) kennengelernt. Wir betrachten nun Kugeln  $\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$ , die um die Punkte  $\mathbf{x}_i$  einer Realisierung eines beliebigen Punktprozesses zentriert sind. Die Vereinigungsmenge  $\mathcal{A}_r = \bigcup_i \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$  ist eine zufällige abgeschlossene Menge. Für einen lokalendlichen Punktprozeß befinden sich nur endlich viele Punkte in einem kompakten Raumgebiet, d.h.  $\mathcal{A}_r$  geschnitten mit diesem Kompaktum ist ein Element des Konvexrings  $\mathfrak{K}$ . Es ist daher sinnvoll, nach den mittleren Volumendichten der Minkowskifunktionale  $m_\mu$  von  $\mathcal{A}_r$  als Größen zur statistischen Beschreibung des Punktprozesses zu fragen. Sei nun  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$  eine Realisierung eines stationären Punktprozesses  $\varphi$  in einem großen Raumgebiet<sup>15</sup>  $\mathcal{V}$ . Wie oben sei  $\mathcal{A}_r^N$  die Vereinigungsmenge  $\bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$ . Die Volumendichte der Minkowskifunktionale definieren wir durch

$$m_\mu(r) = \mathbb{E} \frac{M_\mu(\mathcal{A}_r^N)}{|\mathcal{V}|} \quad (2.132)$$

mit  $\bar{\rho} = N/|\mathcal{V}|$ . Durch Mittelung von Gleichung (2.130) und mit Gleichung (2.11) (siehe auch Abschnitt B.3) erhalten wir sofort

$$m_\mu(r) = \frac{1}{|\mathcal{V}|} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int_{\mathcal{V}} d^3x_1 \cdots \int_{\mathcal{V}} d^3x_n M_\mu(\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_1) \cap \cdots \cap \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_n)) \rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n), \quad (2.133)$$

<sup>15</sup>Um Einflüsse des Randes von  $\mathcal{V}$  vernachlässigen zu können, setzen wir das Gebiet periodisch fort.

(siehe auch Mecke et al. 1994). Für diese Konstruktion von  $\mathcal{A}_r^N$  mit Kugeln  $\mathcal{B}_r$  ist  $m_0(r) = M_0(\mathcal{A}_r^N)/|\mathcal{V}|$  genau der Volumenanteil des mittleren überdeckten Volumens, und somit für einen stationären Punktprozeß gleich der Wahrscheinlichkeit, daß ein zufälliger Punkt näher als  $r$  an einem Punkt der Punktverteilung zu finden ist. Wir erhalten

$$m_0(\mathcal{A}_r) = F(r) = 1 - \rho_0(\mathcal{B}_r). \quad (2.134)$$

### Auslassungen

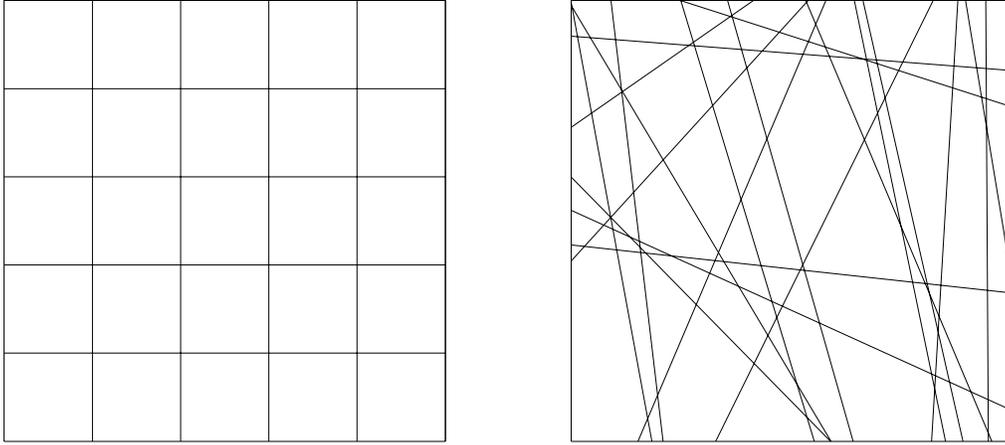
In diesem Abschnitt haben wir nur einen kleinen Einblick in die reichhaltigen Eigenschaften der Minkowskifunktionale präsentiert. Vor allem sind wir nicht auf die, gerade bei stereologischen Anwendungen sehr wichtigen Schnitt- und Projektionsformeln eingegangen (Schneider & Weil 1992, Ohser & Lorz 1996). Die numerische Berechnung der Minkowskifunktionale für eine gegebene Punktverteilung beruht auf der Zerlegungsformel (C.16). Eine detaillierte Beschreibung dieser Methode wird bei Schmalzing (1996) gegeben. In Abschnitt C wird nochmals ein Ausdruck für die Volumendichten der Minkowskifunktionale eines Punktprozesses angegeben, diesmal jedoch mit den bedingten Dichten aus Abschnitt B.3.3. Die Anwendung von Minkowskifunktionalen in der Kosmologie ist nicht auf das (erweiterte) Boolesche Kornmodell beschränkt. Die Untersuchung der Exkursionsmengen von Dichte- und Temperaturfeldern ist ebenfalls möglich (siehe Schmalzing & Buchert 1997 und Schmalzing & Górski 1998).

## 2.6 Tesselationen

Eine raumfüllende Aufteilung des Euklidischen Raum  $\mathbb{E}^d$  in Polytope bezeichnen wir als Tesselation. So liefert z.B. ein quadratisches Gitter eine Zerlegung des  $\mathbb{E}^2$ . Eine einfache zufällige Tesselation ist durch eine zufällige Verteilung von Geraden in  $\mathbb{E}^2$  gegeben (siehe Abbildung 2.25).

Einen geschichtlichen Abriß über die Entwicklung und Anwendung von Tesselationen findet man bei Okabe et al. (1992). Dort werden auch im Detail die technischen Probleme bei der Konstruktion von Voronoi- und Delauney-Tesselationen für gegebene Punktverteilungen behandelt. Die allgemeine Theorie der zufälligen Tesselationen, sowie Mittelwerte von Kenngrößen werden bei Møller (1989); Møller (1994) besprochen. Die Modellierung spezieller Tesselationen, deren Eigenschaften, sowie stereologische Anwendungen werden bei Ohser & Lorz (1996) und Stoyan et al. (1995) behandelt.

Spezielles Interesse galt schon immer den Voronoi-Tesselationen, oft auch Dirichlet-Tesselationen genannt. Eine erste Anwendung in der Kosmologie geht auf Matsuda & Shima (1984) zurück. Speziell von Icke & van de Weygaert (1987) und van de Weygaert (1991) wurde das Bild, daß sich die Galaxien auf den Seitenflächen, und vor allem den Kanten der Polyeder einer Voronoi-Tesselation befinden, diskutiert. Die Positionen der Galaxiencluster sind in diesem Modell durch die Eckpunkte der Polyeder gegeben (siehe hierzu auch Muche 1997).



Abbildungung 2.25: Zwei Tesselationen des  $\mathbb{E}^2$ , links durch ein quadratisches Gitter, rechts durch eine zufällige Verteilung von Geraden.

Wir interessieren uns speziell für Tesselationen, die durch Punktverteilungen erzeugt werden, wie die Voronoi- und die Delauney-Tesselation. Wir werden Kenngrößen, wie das mittlere Volumen einer Delauneyzelle, zur Beschreibung der Eigenschaften des erzeugenden Punktprozesses verwenden.

### 2.6.1 Definition

Eine Tesselation  $\mathfrak{T}$  des  $\mathbb{E}^d$  besteht aus  $d$ -dimensionalen kompakten Polytopen (Zellen)  $\mathcal{P}_i$  mit  $\bigcup_i \mathcal{P}_i = \mathbb{E}^d$ , wobei das Innere der Polytope paarweise disjunkt sei, also  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_i \cap \overset{\circ}{\mathcal{P}}_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  und  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_i = \mathcal{P}_i \setminus \partial\mathcal{P}_i$ . Der Rand  $\partial\mathcal{P}_i$  selbst ist wieder ein  $(d-1)$ -dimensionales Polytop. In drei Dimensionen besteht eine Tesselation aus Polyedern, deren Ränder aus Polygonen zusammengesetzt sind. Diese sind von Streckenabschnitten berandet, die in Punkten enden. Wir erhalten somit eine Hierarchie von  $r$ -dimensionalen Seiten (Facetten)  $\mathcal{S}^r$  des Polygons mit  $r = 0, \dots, d$ , wobei wir  $\mathcal{S}^d = \mathcal{P}$  gesetzt haben. In drei Dimensionen sind  $\mathcal{S}^2$  die Seitenflächen des Polygons  $\mathcal{S}^3$ ,  $\mathcal{S}^1$  die Kanten und  $\mathcal{S}^0$  die Ecken.

Eine Tesselation wird *normal* genannt, wenn sich jede  $r$ -Seite  $\mathcal{S}^r$  mit  $0 \leq r < d$  genau im Rand von  $d-r+1$  Zellen befindet. In zwei Dimensionen ist also eine Ecke  $\mathcal{S}^0$  einer normalen Tesselation immer Teil von  $2-0+1=3$  Zellen. Für die Tesselationen mit zufälligen Geraden gilt dies fast sicher. Hingegen ist eine Tesselation durch Quadrate nicht normal (siehe Abbildung 2.25).

Als Seitencharakteristik (Møller 1989) bezeichnen wir bewegungsinvariante Größen, die von den  $r$ -dimensionalen Seiten  $\mathcal{S}^r$  der Tesselation  $\mathfrak{T}$  abhängen. In drei Dimensionen sind dies z.B. das Volumen des Polygons  $\mathcal{S}^3 = \mathcal{P}$  oder der Flächeninhalt einer Seitenfläche  $\mathcal{S}^2$

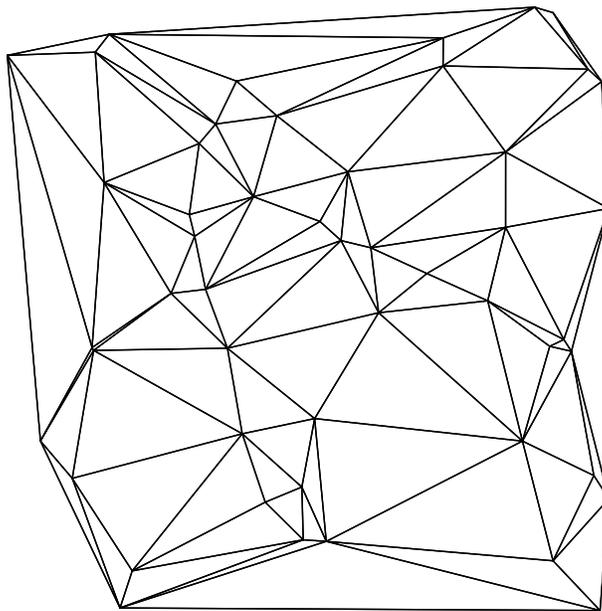


Abbildung 2.26: Die Delauney–Tesselation von 50 zufällig verteilten Punkten.

eines Polyeders. In Abschnitt 2.6.2 betrachten wir die Verteilung der Minkowskifunktionale von Polyedern  $\mathcal{S}^3$  der Delauney–Tesselation.

### 2.6.2 Delauney–Tesselationen

Sei  $\mathcal{Y}$  eine abzählbare Punktmenge in  $\mathbb{R}^d$ , z.B. eine Realisierung eines stationären Punktprozesses  $\varphi$ . Wir betrachten eine raumfüllende Aufteilung in  $d$ -dimensionale Simplizes  $\mathcal{P}$ , wobei die  $d + 1$  Ecken der Simplizes durch die Punkte aus  $\mathcal{Y}$  gegeben sind. Jeweils  $d + 1$  Punkte bestimmen in  $d$ -Dimensionen eine  $d$ -dimensionale Kugel. Eine Zelle der Delauney–Tesselation wird von diesen  $d + 1$  Punkten erzeugt, wenn in dieser Kugel keine weiteren Punkte aus  $\mathcal{Y}$  liegen. In zwei Dimensionen wird die Delauney–Tesselation durch Dreiecke, und in drei Dimensionen durch Tetraeder gebildet. Eine Delauney–Tesselation ist für zufällig verteilte Punkte *eindeutig*. Bei einer Punktverteilung auf dem quadratischen Gitter ist dies nicht mehr der Fall. Wir schließen daher solch spezielle Punktverteilungen aus. Der Graph der Delauney–Tesselation ist dual zum Graphen der Voronoi–Tesselation der gleichen Punktmenge (Okabe et al. 1992). Wir werden hier nicht näher auf diesen interessanten Zusammenhang und auf Voronoi–Tesselationen selbst eingehen.

In drei Dimensionen ist durch eine endliche Punktmenge  $\mathcal{X} \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$  eine eindeutige Tetraedrisierung als Teilmenge einer Delauney–Tesselation des gesamten Raumes  $\mathbb{E}^3$  gegeben, in zwei Dimensionen eine eindeutige Triangulation (siehe Abbildung 2.26).

## Minkowskifunktionale

Als Seitencharakteristiken verwenden wir die Minkowskifunktionale einzelner Polytope. Da wir an der Verteilung von Galaxien im Raum  $\mathbb{E}^3$  interessiert sind, betrachten wir nur die Minkowskifunktionale der Tetraeder  $\mathcal{P}_i$ , aus denen die Delauney–Tessellation in drei Dimensionen aufgebaut ist. Für einen Tetraeder  $\mathcal{P}$  erhalten wir mit dem Satz von Steiner 2.5.1

$$\begin{aligned}
 V_0(\mathcal{P}) &= |\mathcal{P}| \\
 V_1(\mathcal{P}) &= \frac{1}{6} \sum_{\mathcal{S}^2 \in \mathcal{P}} A(\mathcal{S}^2) \\
 V_2(\mathcal{P}) &= \frac{1}{6\pi^2} \sum_{\mathcal{S}^1 \in \mathcal{P}} L(\mathcal{S}^1) \gamma(\mathcal{S}^1) \\
 V_3(\mathcal{P}) &= 1.
 \end{aligned} \tag{2.135}$$

Mit  $|\mathcal{P}|$  bezeichnen wir das Volumen des Tetraeders  $\mathcal{P}$ , mit  $A(\mathcal{S}^2)$  den Flächeninhalt einer Seitenfläche  $\mathcal{S}^2 \subset \mathcal{P}$ , mit  $L(\mathcal{S}^1)$  die Länge einer Kante  $\mathcal{S}^1 \subset \mathcal{P}$  und mit  $\gamma(\mathcal{S}^1)$  den äußeren Winkel an dieser Kante (siehe auch Møller 1989). Wir betrachten einen Tetraeder, einen konvexen Polyeder, daher sind alle Minkowskifunktionale  $V_\mu(\mathcal{P}_i) \geq 0$ , und  $V_2(\mathcal{P})$  gibt die mittlere Breite des Tetraeders  $\mathcal{P}$  an (Hadwiger 1957). Weiterhin sind die Minkowskifunktionale bewegungsinvariant und somit Seitencharakteristiken. Im folgenden interessieren wir uns für die Verteilungsfunktion  $F_\mu(\cdot)$ , bzw. deren Dichte  $f_\mu(\cdot)$  der Minkowskifunktionale  $V_\mu(\mathcal{P}_i)$  für Tetraeder einer Delauney–Tessellation.  $f_0(x) dx$  gibt dann die Wahrscheinlichkeit an, daß ein zufällig ausgewählter Tetraeder ein Volumen im Bereich  $[x, x + dx]$  besitzt.

*Für eine gegebene Punktverteilung eines stationären Punktprozesses können wir die Dichten der Verteilungsfunktion  $f_\mu$  als Häufigkeitsverteilung (Histogramm) der Minkowskifunktionale  $V_\mu(\mathcal{P})$  der Tetraeder schätzen. Møller (1989) zeigte, daß selbst wenn wir alle Tetraeder einer Delauney–Tetraedrisierung verwenden, die Häufigkeitsverteilungen erwartungstreue Schätzer für die Dichten der Verteilungsfunktionen sind. Eine zusätzliche Randkorrektur ist daher nicht notwendig.*

## Poisson–Delauney–Tessellation

In Abbildung 2.26 ist die Delauney–Tessellation von fünfzig zufällig verteilten Punkten in zwei Dimensionen zu sehen. Wir interessieren uns für die Minkowskifunktionale einer „typischen“<sup>16</sup> Delauneyzelle. Mit Hilfe einer geschickten Darstellung der Verteilungsfunktion von Miles (1974) für die Größe und Form einer Delauneyzelle konnte Muche (1996) unter anderem die Verteilungsfunktionen für das Volumen in einer Poisson–Delauney–Tessellation

<sup>16</sup>Der Begriff „typisch“ läßt sich ähnlich wie bei Punktverteilungen (siehe Abschnitt 2.2.2) mit einer Palmverteilung für Zellen  $\mathcal{P}$  oder deren Seiten  $\mathcal{S}^i$  definieren (Møller 1989).

bestimmen:

$$f_0^{\bar{\varrho}}(v) = \frac{35}{2} \bar{\varrho}^2 v \int_0^{2\pi} d\alpha_1 \int_0^{2\pi-\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^\pi d\beta \sin(\beta) \\ \times \exp\left(\frac{-2\pi\bar{\varrho}v}{\sin(\alpha_1/2)\sin(\alpha_2/2)\sin(\alpha_1/2 + \alpha_2/2)(1 + \cos(\beta))\sin^2(\beta)}\right). \quad (2.136)$$

Numerisch liefert diese Verteilungsfunktion die gleichen Werte wie die von Rathie (1992) auf anderem Wege bestimmte Reihenentwicklung für  $f_0^{\bar{\varrho}}(v)$ . Die Dichte  $f_0^{\bar{\varrho}}$  hängt für einen Poissonprozeß nur von der Teilchendichte  $\bar{\varrho}$  ab. Wir können die Teilchendichte herauskalisieren:

$$f_0^{\bar{\varrho}}\left(\frac{v_0}{\bar{\varrho}}\right) = \bar{\varrho} f_0^1(v_0). \quad (2.137)$$

In Abbildung 2.27 sind die numerisch geschätzten Dichten  $f_\mu$  der Minkowskifunktionale einer typischen Delauneyzelle für Poissonverteilte Punkte abgebildet. Die Volumendichte  $f_0$  zeigt noch ein stark asymmetrisches Verhalten, das bei der Oberflächendichte  $f_1$  deutlich kleiner wird und bei der Dichte der mittleren Krümmung fast verschwindet. Da jede Delauneyzelle konvex ist und deren Eulercharakteristik immer gleich eins ist, zeigt die Dichte der Eulercharakteristik  $f_3$  eine Spitze bei eins.

### Delauney–Tessellation eines Matérn–Cluster–Prozesses

Die Delauney–Tessellation eines Matérn–Cluster–Prozesses (Abschnitt 2.2.6) zeigt, wie in Abbildung 2.28 zu sehen ist, ein vollständig anderes Erscheinungsbild als die Delauney–Tessellation des Poissonprozesses (Abbildung 2.26). Dies äußert sich auch in drei Dimensionen in den Verteilungen der Minkowskifunktionale. In Abbildung 2.29 werden die numerisch geschätzten Dichten  $f_\mu$  der Minkowskifunktionale einer typischen Delauneyzelle eines Matérn–Cluster–Prozesses mit den Dichten  $f_\mu$  eines Poissonprozesses verglichen. Bereits für das Volumen  $V_0(\mathcal{P})$ , aber noch deutlicher für die Oberfläche  $V_1(\mathcal{P})$ , verschiebt sich das Maximum der Dichte zu kleineren Werten. Dies ist auch noch für die integrale mittlere Krümmung (mittlere Breite)  $V_2(\mathcal{P})$  zu beobachten. Für  $V_1(\mathcal{P})$  und  $V_2(\mathcal{P})$  wird die Verteilung breiter, vor allem hin zu größeren Werten der Funktionale.

Verkleinern wir den Clusterradius  $R$  von 0.05 über 0.02 nach 0.01, wie in Abbildung 2.30, so verschiebt sich das Maximum in  $f_0$  zu immer kleineres Volumina. Die Dichte der Verteilung der integralen mittleren Krümmung  $f_2$  wird bimodal. Interessanterweise ist das erste Maximum von  $f_2$  bei einem Wert der mittleren Breite  $V_2(\mathcal{P})$  gleich dem Clusterradius  $R$  zu finden. Eine bimodale Verteilung deutet sich auch für die Dichte der Oberfläche  $f_1$  an.

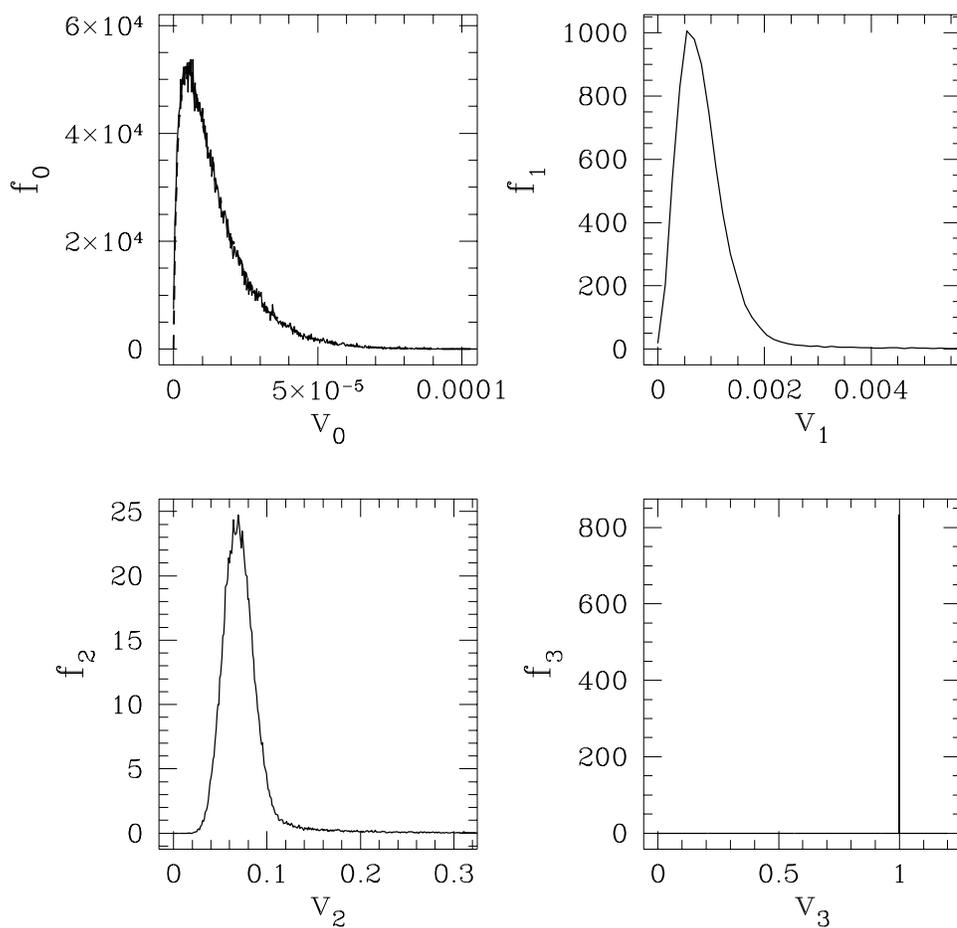


Abbildung 2.27: Die Dichten  $f_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  der Minkowskifunktionale eines typischen Tetraeders des Poisson–Delauney–Komplexes, bestimmt aus einer Realisierung von 10.000 zufällig verteilten Punkten (durchgezogenen Linien). Zusätzlich ist die Dichte  $f_0$  der Volumina nach Gleichung (2.136) dargestellt (gestrichelte Linie).

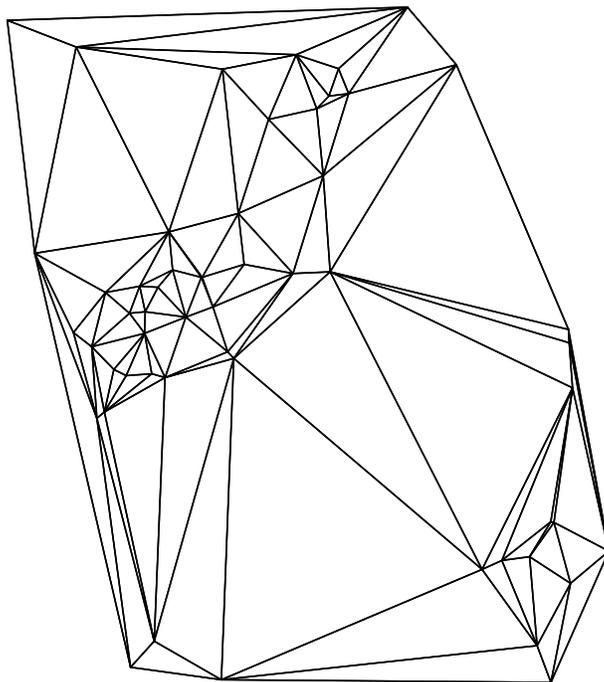


Abbildung 2.28: Die Delauney–Tesselation von 54 Punkten einer Realisierung eines Matérn–Cluster–Prozesses mit  $\mu = 5$  und  $R = 0.1$ .

### Numerische Methoden

Aus einer gegebenen Punktverteilung  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$  bestimmen wir die Delauney–Tetraedrierung mittels des frei verfügbaren Programms `qhull`<sup>17</sup> von Barber et al. (1996). Verwenden wir das Programm `hull`<sup>18</sup> von Ken Clarkson, das einen anderen Algorithmus zur Konstruktion der Delauney–Tetraedrisierung verwendet, erhalten wir weiterhin die gleichen Resultate.

Ein Tetraeder  $\mathcal{P}$  der nun vorhandenen Delauney–Tesselation ist eindeutig durch seine vier Eckpunkte  $\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2, \mathbf{c}^3, \mathbf{c}^4 \in \mathbb{R}^3$ , jeweils mit den euklidischen Koordinaten  $\mathbf{c}^i = (c_1^i, c_2^i, c_3^i)$  gegeben. Wir erhalten dann das Volumen von  $\mathcal{P}$

$$V_0(\mathcal{P}) = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 & 1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & 1 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 & 1 \\ c_1^4 & c_2^4 & c_3^4 & 1 \end{pmatrix} \right|. \quad (2.138)$$

Die Gesamtoberfläche von  $\mathcal{P}$  erhalten wir als Summe über den Flächeninhalt  $A(i, j, k)$  der Seitendreiecke bestimmt durch die Vektoren  $\mathbf{c}^i, \mathbf{c}^j, \mathbf{c}^k$ . Die Summe läuft über alle geordneten

<sup>17</sup>Das Programm `qhull` kann von <http://www.geom.umn.edu/software/qhull/> mit Dokumentation bezogen werden.

<sup>18</sup>Das Programm `hull` kann von <http://cm.bell-labs.com/netlib/voronoi/hull.html> ebenfalls mit Dokumentation bezogen werden.

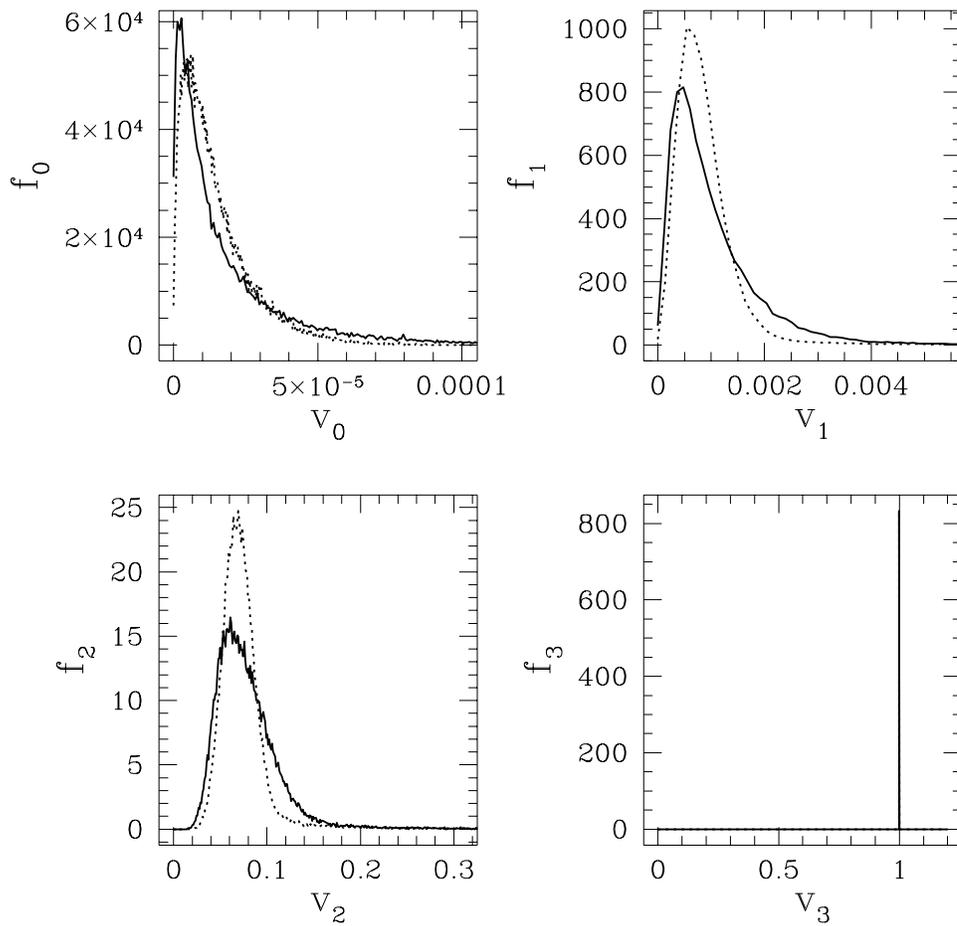


Abbildung 2.29: Die Dichten  $f_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  der Minkowskifunktionale eines typischen Tetraeders einer Delauney-Tessellation einer Realisierung von 10.000 Punkten eines Matérn-Cluster-Prozesses mit  $\mu = 5$  und  $R = 0.05$  (durchgezogen) im Vergleich zu den Dichten  $f_\mu$  eines Poissonprozesses (gepunktet).

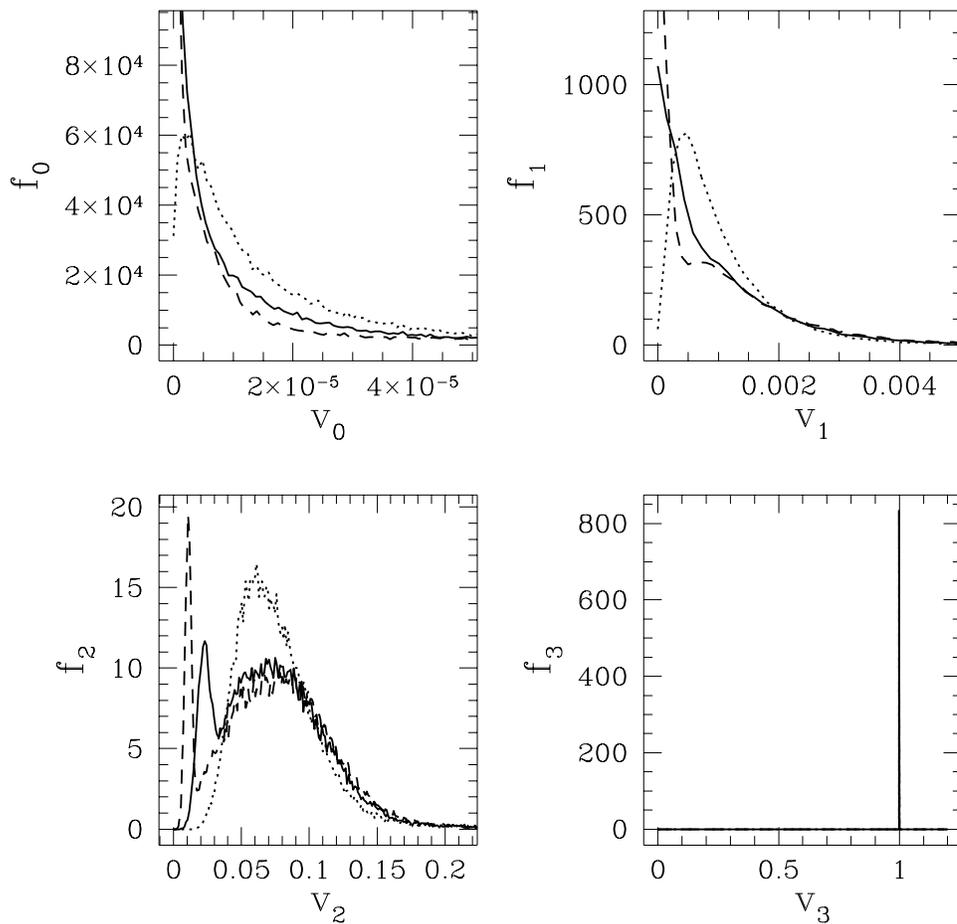


Abbildung 2.30: Die Dichten  $f_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  der Minkowskifunktionale eines typischen Tetraeders einer Delaunay-Tessellation einer Realisierung von 10.000 Punkten eines Matérn-Cluster-Prozesses mit  $\mu = 5$  und  $R = 0.05$  (gepunktet), mit  $R = 0.02$  (durchgezogen) und mit  $R = 0.01$  (gestrichelt).

Tupel  $(i, j, k)$  mit  $1 \leq i < j < k \leq 4$ :

$$V_1(\mathcal{P}) = \frac{1}{6} \sum_{(i,j,k)} A(i, j, k). \quad (2.139)$$

Der Flächeninhalt eines Dreieck wird mit  $A(i, j, k) = \frac{1}{2} \|(\mathbf{c}^i - \mathbf{c}^k) \times (\mathbf{c}^j - \mathbf{c}^k)\|$  berechnet. Für die integrale mittlere Krümmung des Tetraeders  $\mathcal{P}$  erhalten wir

$$V_2(\mathcal{P}) = \frac{1}{3\pi} \sum_{(i,j)} \|\mathbf{c}^i - \mathbf{c}^j\| \gamma(i, j). \quad (2.140)$$

Die Summe läuft über die geordneten Tupel  $(i, j)$  mit  $1 \leq i < j \leq 4$ ;  $\gamma(i, j)$  ist der äußere Winkel an die Strecke  $(\mathbf{c}^i, \mathbf{c}^j) \subset \mathcal{P}$ , d.h. der Winkel zwischen den beiden nach außen zeigenden Normalen auf die Seitenflächen der Dreiecke, die beide die Punkte  $\mathbf{c}^i$  und  $\mathbf{c}^j$  beinhalten. Die Eulercharakteristik eines abgeschlossenen konvexen Körpers ist immer eins, somit erhalten wir für jeden Tetraeder  $\mathcal{P}$ :

$$V_3(\mathcal{P}) = 1. \quad (2.141)$$

### Ausblick

Wie wir bereits am Beispiel des Matérn–Cluster–Prozesses gesehen haben, unterscheiden sich die Verteilungsfunktionen der Minkowskifunktionale einer typischen Delauneyzelle  $f_0$ ,  $f_1$  und  $f_2$  deutlich für unterschiedliche Punktprozesse. Auch andere Seitencharakteristiken können zur Charakterisierung des Punktprozesses herangezogen werden (siehe Ohser & Lorz 1996 und Referenzen dort).

Mit Seitencharakteristiken ist das Anwendungsgebiet der Delauney–, sowie auch anderer Tesselationen noch nicht erschöpft. Wir können Zellen  $\mathcal{P}_i$ , oder auch deren Seiten  $\mathcal{S}_i^j$  auswählen und uns dann für die Minkowskifunktionale des Zellkomplexes, der Vereinigung dieser Mengen, interessieren. Dies entspräche einer Verallgemeinerung der Methoden von Likos et al. (1995) auf ein irreguläres „Gitter“.

Die Delauney–Tesselation wird auch zur Interpolation eingesetzt, einen Überblick gibt hier Okabe et al. (1992), eine erste Anwendung auf Geschwindigkeitsfeldern kosmologischer Simulationen wird bei Bernardeau & van de Weygaert (1996) diskutiert.

# Kapitel 3

## Morphologische Untersuchungen

Im folgenden werden wir die Methoden, wie wir sie im Kapitel 2 besprochen haben zur Untersuchung der Galaxien-, der Cluster- und Superclusterverteilung verwenden. In Abschnitt 3.1 stellen wir kurz die verwendeten Kataloge vor und erläutern die numerischen Verfahren der verwendeten  $N$ -Körperrechnungen. Die Untersuchung der Clusterungseigenschaften des IRAS 1.2 Jy Galaxienkatalogs in Abschnitt 3.2 zeigt, daß selbst auf großen Skalen noch Fluktuationen wesentlich sind. Mit einem Vergleich der Minkowskifunktionale der Galaxienclusterverteilung mit den Minkowskifunktionalen von simulierten Galaxienclustern in Abschnitt 3.3 konnte gezeigt werden, daß das Standard-Kalte-Dunkle-Materie-Modell nicht in der Lage ist die beobachtete Clusterverteilung zu erzeugen, erweiterte Dunkle-Materie-Modelle sind hierzu besser in der Lage. In Abschnitt 3.4 untersuchen wir die Verteilung der Supercluster und finden Hinweise auf eine reguläre Verteilung. Die Paarkorrelationsfunktion der Galaxienverteilung zeigt zumindest auf kleinen Skalen ein skaleninvariantes Verhalten. In Abschnitt 3.5 untersuchen wir, inwieweit ein Schluß auf eine „fraktale“ Verteilung der leuchtenden Materie zulässig ist. Abschließend zeigen wir in Abschnitt 3.6, daß die beobachtete Galaxienverteilung nicht durch ein einfaches, auf großen Skalen „strukturloses“ Modell erklärt werden kann.

### 3.1 Daten

In diesem Abschnitt erläutern wir kurz die typischen Beobachtungsprobleme, die bei der Konstruktion von Galaxienkatalogen auftreten. Wir besprechen einzeln die von uns verwendeten Kataloge und Simulationsdaten.

#### 3.1.1 Beobachtungen

Für die Konstruktion eines Galaxienkatalogs geht man üblicherweise von einer zweidimensionalen Himmelskarte aus, die entweder durch Photoplatten oder durch CCDs gewonnen wurde. Auf diesen Photoplatten werden Quellen bestimmt, und eine Klassifikation nach Punktquellen (Sterne) und ausgedehnten Quellen, etc. durchgeführt. Mit diversen, teils

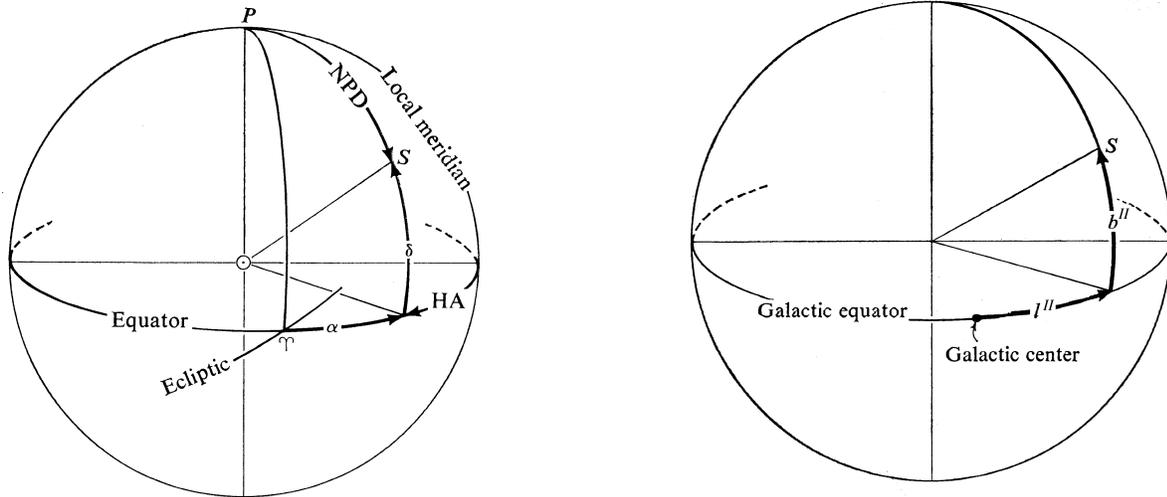


Abbildung 3.1: Links die Koordinaten des äquatorialen Koordinatensystems, rechts die Koordinaten des galaktischen Koordinatensystems (aus van de Kamp 1967).

subjektiven Kriterien werden dann Kandidaten für mögliche Galaxien bestimmt.

In erster Linie werden zwei Koordinatensysteme auf der Kugel verwendet (siehe Abbildung 3.1): Das äquatoriale Koordinatensystem mit den Koordinaten Deklination  $\delta$  und rechter Aszension  $\alpha$ , und das (neue) galaktische Koordinatensystem mit galaktischer Breite  $b''$  und Länge  $l''$ . Umrechnungsformeln und Tabellen findet man bei Lang (1980). Für extragalaktische Anwendungen erweist sich das galaktische Koordinatensystem als besonders praktisch, da hier der Bereich starker Extinktion (verursacht durch unsere Milchstraße) eine besonders einfache Gestalt annimmt. Manchmal wird auch das supergalaktische Koordinatensystem verwendet (siehe z.B. Peebles 1993).

Von den Galaxienkandidaten wird dann die scheinbare Leuchtkraft bestimmt, meist angegeben in der negativen logarithmischen Einheit, den scheinbaren Magnituden (Größenklassen), oder durch den scheinbaren Fluß. Ein Galaxienkatalog wird magnitudenlimitiert genannt, wenn alle Galaxien mit  $m \leq m_{\text{lim}}$  in der zweidimensionalen Stichprobe enthalten sind. Üblicherweise sind gute Galaxienkataloge zu  $\approx 95\%$  vollständig. Information über die radiale Entfernung erhalten wir meist durch die Rotverschiebung

$$z = \frac{\lambda_{\text{Galaxie}} - \lambda_{\text{lokal}}}{\lambda_{\text{lokal}}} = \frac{v}{c} \quad (3.1)$$

wobei  $\lambda_{\text{lokal}}$  die lokal bei uns gemessene Wellenlänge einer bestimmten Absorptions- oder Emissionslinie ist.  $\lambda_{\text{Galaxie}}$  ist die bei uns beobachtete Wellenlänge derselben Linie der untersuchten Galaxie. Mit der Hubblebeziehung können wir dann die Relativgeschwindigkeit

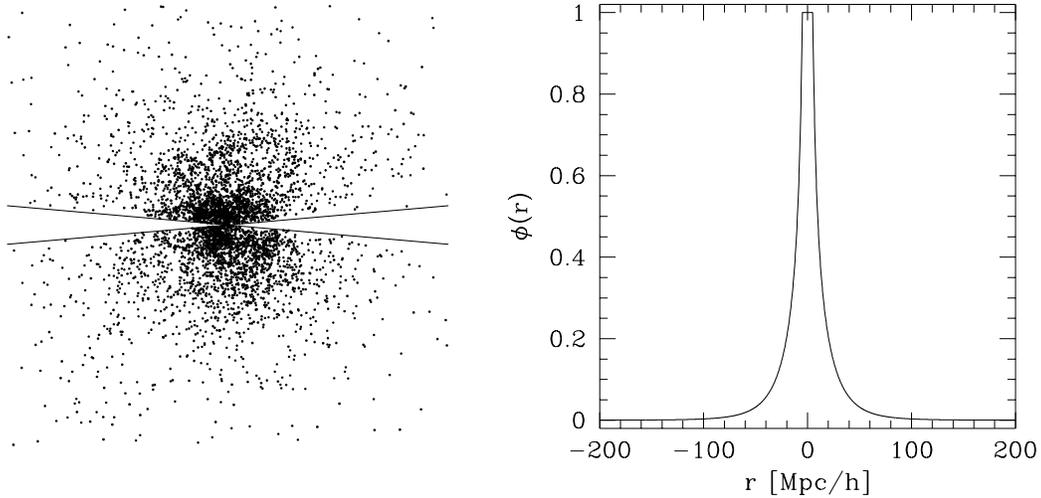


Abbildung 3.2: Links die orthogonale Projektion aller Galaxien des IRAS 1.2 Jy bis  $200h^{-1}\text{Mpc}$ , rechts die geschätzte Selektionsfunktion.

$v$  in den radialen Abstand  $r$  umrechnen<sup>1</sup>,

$$r = \frac{v}{H_0}, \quad (3.2)$$

wobei  $H_0 = 100h\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$  ist. Unsere Unkenntnis des genauen Wertes für die Hubblezahl subsumieren wir in dem dimensionslosen Faktor  $h$ , der in unserer lokalen Umgebung derzeit einen Wert von 0.5–0.7 annimmt.

### Leuchtkraft- und Selektionsfunktion

Der Großteil der bestehenden Galaxienkataloge ist fluß- bzw. magnitudenlimitiert. Das heißt, in großer radialer Entfernung beobachten wir nur noch die leuchtkräftigen Galaxien. Die beobachtete Dichte der Galaxien nimmt daher mit zunehmender Entfernungen ab. Wir können dies mit der Selektionsfunktion quantifizieren. In Abbildung 3.2 sehen wir diesen radialen Abfall und den Bereich ohne Beobachtungen, verursacht durch starke Absorption in der Nähe der galaktischen Ebene („Zone of Avoidance“). Die scheinbare Leuchtkraft ist der beobachtete Fluß, die absolute Leuchtkraft der Fluß auf der „Oberfläche“ der Galaxie (des Sterns, etc.). Die scheinbare Leuchtkraft  $l$  hängt mit der absoluten Leuchtkraft  $L$  über die Entfernung  $r$  zusammen:

$$L = 4\pi r^2 l. \quad (3.3)$$

<sup>1</sup>Dies Beziehung ist nur im Mittel und nicht für nur eine Galaxie erfüllt, da sich Galaxien relativ zum Hubbleflu bewegen.

Die Leuchtkraftfunktion  $\Phi(L)dL$  gibt die mittlere Anzahl der Galaxien pro Einheitsvolumen mit Leuchtkraft im Intervall  $[L, L + dL]$  an. Nach Press & Schechter (1974) kann sie wie folgt parametrisiert werden:

$$\Phi(L)dL = \Phi_* \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{L}{L_\odot}\right) d\left(\frac{L}{L_\odot}\right), \quad (3.4)$$

$L_\odot$  ist die absolute Leuchtkraft unserer Sonne. Die Selektionsfunktion  $\phi(r)$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß eine Galaxie in Abstand  $r$  im Katalog enthalten ist. Für  $r \leq r_{\text{vollst.}}$  sei jede Galaxie in der Stichprobe enthalten und somit  $\phi(r) = 1$ . Mit der Leuchtkraftfunktion  $\Phi(L)$  läßt sich die Selektionsfunktion für Entfernungen jenseits der Vollständigkeit  $r > r_{\text{vollst.}}$  definieren,

$$\phi(r) = \frac{\int_{L_{\min}(r)}^{\infty} \Phi(L)dL}{\int_{L_{\min}(r_{\text{vollst.}})}^{\infty} \Phi(L)dL} \quad (3.5)$$

mit  $L_{\min}(r) = 4\pi r^2 l_{\min}$ , wobei  $l_{\min}$  die minimale scheinbare Leuchtkraft angibt die noch detektiert werden kann. Es werden auch andere Parametrisierungen der Selektionsfunktion  $\phi(r)$  verwendet. In Abbildung 3.2 ist die Selektionsfunktion aufgetragen, wie sie von Fisher et al. (1995) für den IRAS 1.2 Jy Galaxienkatalog bestimmt wurde.  $\phi(r)$  gibt den Anteil der Galaxien an, die aufgrund der Flußbeschränkung in den Katalog aufgenommen werden. Interpretiert man die Selektionsfunktion auf diese Weise, so nimmt man an, daß die Positionen der Galaxien eine Realisierung eines stationären Punktprozesses sind, aus dem entfernungs gewichtet der Katalog extrahiert wird. Da die Selektion systematisch mit der Leuchtkraft erfolgt, geht als weitere Annahme die Unabhängigkeit der absoluten Leuchtkraft vom Abstand und somit von einer zeitlichen Entwicklung ein.

### Volumenlimitierte Stichproben

Der radiale Abfall der Dichte verkompliziert eine Analyse mit geometrischen Größen wie Minkowskifunktionalen. Einen Ausweg bieten volumenlimitierte Stichproben. Solch eine Teilmenge eines flußlimitierten Kataloges enthält Galaxien mit  $r \leq r_0$ . Die Stichprobe ist vollständig für Galaxien mit einer absoluten Leuchtkraft  $L \geq L_0$ , wobei für gegebene minimale scheinbare Leuchtkraft  $l_{\min}$  folgender Zusammenhang zwischen  $L_0$  und  $r_0$  (bzw.  $v_0$ ) besteht:

$$L_0(r_0) = 4\pi r_0^2 l_{\min} = 4\pi \left(\frac{v_0}{H_0}\right)^2 l_{\min}. \quad (3.6)$$

In dieser Arbeit verwenden wir entweder die Kataloge pur und modellieren die Selektionseffekte auf die simulierten Punktmengen, mit denen wir vergleichen, oder wir verwenden volumenlimitierte Stichproben. Wir führen somit *keine* Wichtung mit der inversen Selektionsfunktion durch.

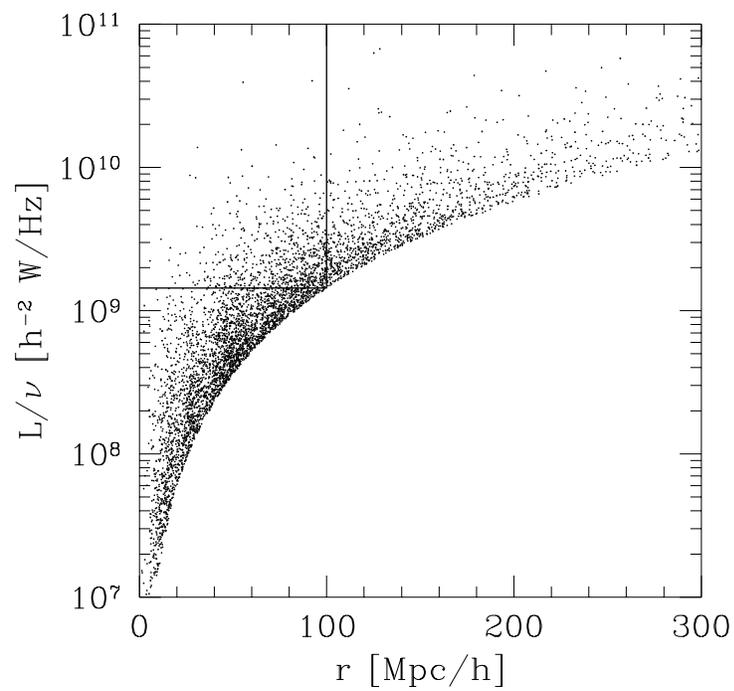


Abbildung 3.3: Die Spektraldichte der beobachteten Galaxien bei  $60\mu\text{m}$ , aufgetragen gegen den Abstand. Der Ausschnitt links oben markiert die Galaxien, die in die volumenlimitierte Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe aus Abbildung 3.4 eingehen.

### 3.1.2 Die untersuchten Kataloge

Im folgenden werden die einzelnen Kataloge, die in dieser Arbeit untersucht werden, kurz vorgestellt.

#### Der IRAS 1.2 Jy Galaxienkatalog

Im Jahr 1983 wurde mit dem Infrared Astronomical Satellite (IRAS) eine Durchmusterung des Himmels in vier Wellenlängenbereichen im Infraroten durchgeführt. Aus diesen Daten wurde unter anderem der IRAS Point Source Catalog (PSC) gewonnen (Beichman et al. 1988), der bei einer Wellenlänge von  $60\mu\text{m}$  vollständig bis zum Fluß  $0.6\text{ Jy}$  ist<sup>2</sup>.

Ausgehend von diesem zweidimensionalen Katalog wurden die Rotverschiebungen von Galaxien bestimmt und zuerst ein Galaxienkatalog vollständig bis  $2.0\text{ Jy}$ , anschließend bis  $1.2\text{ Jy}$  erstellt (siehe Fisher et al. 1995 und die Referenzen dort). Dieser Katalog enthält 5313 Galaxien und überdeckt fast die gesamte Himmelskugel mit  $b^{\text{II}} > 5^\circ$ . Er ist derzeit einer der größten verfügbaren Kataloge. Alle Rotverschiebungen sind auf das heliozentrische Koordinatensystem bezogen, also nicht auf die Bewegung gegenüber dem Mikrowellenhintergrund korrigiert.

Wir extrahieren eine Serie von volumenlimitierten Stichproben, wobei wir uns vor allem mit Stichproben mit  $60h^{-1}\text{Mpc}$ ,  $100h^{-1}\text{Mpc}$  und  $200h^{-1}\text{Mpc}$  beschäftigen (siehe Abbildung 3.4). Spezielle Erläuterungen zu dieser und abgeleiteter Stichproben werden dann in Abschnitt 3.2 gegeben.

#### Der CfA1 Galaxienkatalog

Der CfA1 Galaxienkatalog (Huchra et al. 1983) ist wahrscheinlich der bis heute am häufigsten untersuchte Galaxienkatalog. Die zugrundeliegenden zweidimensionalen Daten sind dem Galaxienkatalog von Zwicky et al. (1968) entnommen.

Wir betrachten den magnitudenlimitierten Teil des Kataloges mit Magnitude  $m \leq 14.5$  und mit galaktischer Breite  $b^{\text{II}} > 40^\circ$  und Deklination  $\delta > 0^\circ$ . Der gesamte Katalog enthält 2401 Galaxien. Hieraus extrahieren wir dann volumenlimitierte Stichproben mit Tiefen  $40h^{-1}\text{Mpc}$  (360 Galaxien),  $60h^{-1}\text{Mpc}$  (215 Galaxien),  $80h^{-1}\text{Mpc}$  (185 Galaxien) und  $100h^{-1}\text{Mpc}$  (99 Galaxien).

Die Resultate in dieser Arbeit basieren auf unkorrigierten Rotverschiebungen, d.h. die Bewegung der Sonne gegenüber dem Mikrowellenhintergrund wurde nicht korrigiert. Bei der Analyse mit der  $J$ -Funktion zeigte sich, daß eine Korrektur keinen Einfluß auf das Ergebnis hat.

#### Der Perseus–Pisces–Galaxien– und Gruppenkatalog

Der Perseus–Pisces–Galaxienkatalog wurde von Giovanelli & Haynes (1991) und Wegner et al. (1993) zusammengestellt. Der Katalog ist magnitudenlimitiert bis (Zwicky) Magnitude  $m \leq 15.7$ ,

<sup>2</sup>Jansky (Jy) ist eine Einheit des spektralen Flußes  $f$ , bezogen auf die Frequenz  $\nu$ . Diese Einheit wird oft in der Radioastronomie verwendet;  $1\text{ Jy} = 10^{-26}\text{W}/(\text{m}^2\text{Hz})$ .

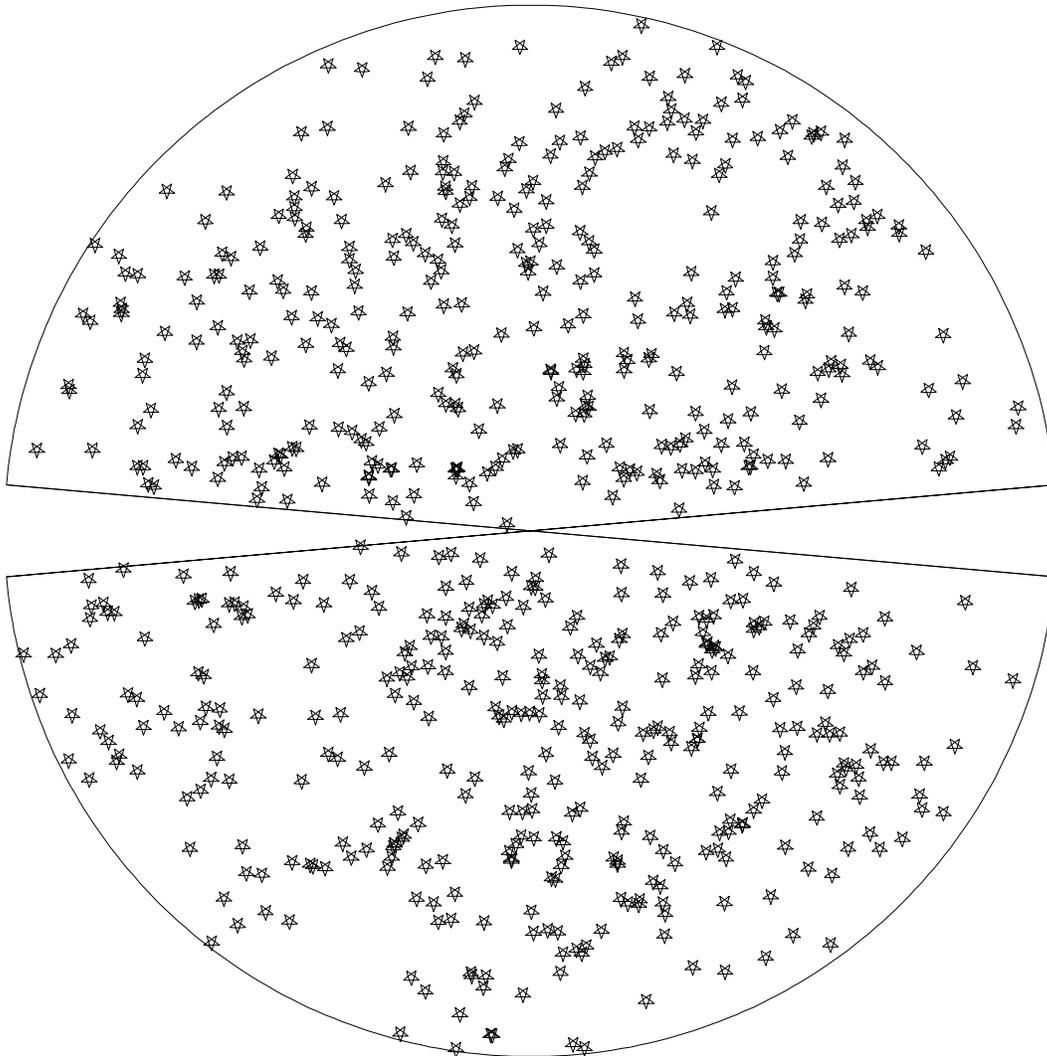


Abbildung 3.4: Die orthogonale Projektion der volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe des IRAS 1.2 Jy auf die  $x-z$  Ebene des galaktischen Koordinatensystems.

und erstreckt sich über den Bereich  $-2^h.00 \leq \alpha \leq +4^h.00$  und  $0^\circ \leq \delta \leq 50^\circ$ . Wir verwenden extinktionskorrigierte Magnituden nach Burstein & Heiles (1978). Weiterhin schließen wir Gebiete mit erhöhter Extinktion aus und beschränken uns daher auf das Gebiet  $-1^h.50 \leq \alpha \leq +3^h.00$  und  $0^\circ \leq \delta \leq 40^\circ$ . Der Raumwinkel beträgt  $0.76\text{sr}$  und der Katalog ist zu mehr als 95% vollständig. Die Rotverschiebungen wurden auf die Bewegung der Sonne gegenüber dem Mikrowellenhintergrund korrigiert (Peebles 1993). Wir betrachten eine volumenlimitierte Stichprobe mit 817 Galaxien und Tiefe  $79h^{-1}\text{Mpc}$ .

Analog zu den (losen) Gruppen im magnitudenlimitierten Perseus–Pisces Galaxienkatalog (Trasarti–Battistoni 1997), wurden ebenfalls von Roberto Trasarti–Battistoni die Gruppen in der volumenlimitierten Stichprobe mit  $79h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe bestimmt (Kerscher et al. 1998). Hierzu wurde ein angepaßter Friends–of–Friends Algorithmus von Huchra & Geller (1982) verwendet. Dieser Algorithmus verwendet in radialer Richtung und transversaler Richtung zwei unterschiedliche Längen der Links,  $V$  und  $D$ . Mit  $D = 0.52h^{-1}\text{Mpc}$  und  $V = 600\text{ km/s}$  ergibt sich eine gute Übereinstimmung der Eigenschaften (Anzahl der Galaxien pro Gruppe, Geschwindigkeitsdispersion) dieser Gruppen, mit denen die in magnitudenlimitierten Stichproben bestimmt wurden (Trasarti–Battistoni 1997). Unser Gruppenkatalog besteht aus 230 Galaxien in 48 losen Gruppen. Im Mittel enthält eine lose Gruppe somit 5.1 Galaxien.

### Der Abell/ACO–Galaxiencluster–Katalog

Von Abell (1958) und später von Abell et al. (1989) wurden Galaxiencluster in zweidimensionalen Himmelskarten identifiziert. Über die Jahre hinweg wurden viele Rotverschiebungen von Clustergalaxien bestimmt und mit diesen die Rotverschiebung der Cluster selbst geschätzt (siehe Andernach & Tago 1998). Wir verwenden die Zusammenstellung von Plionis & Valdarnini (1991). Eine detaillierte Beschreibung dieses Katalogs wird in Plionis & Valdarnini (1995) gegeben.

Die galaktische Extinktion modellieren wir mit einer Selektionsfunktion abhängig von der galaktischen Breite  $b^{\text{II}}$ :

$$\phi_b(b^{\text{II}}) = 10^{\alpha(1-\csc|b^{\text{II}}|)} \quad (3.7)$$

mit  $\alpha \approx 0.3$  für die Abell–Stichprobe und  $\alpha \approx 0.2$  für die ACO–Stichprobe. Um den Einfluß der galaktischen Extinktion zu minimieren, beschränken wir uns in unserer Analyse auf Cluster mit  $|b^{\text{II}}| \geq 30^\circ$ . Die Rotverschiebungs–Selektionsfunktion der Cluster  $\phi_z(z)$  wurde unabhängig von der Selektionsfunktion  $\phi_b$  modelliert,

$$\phi_z(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z \leq z_c, \\ A \exp(-z/z_o) & \text{für } z > z_c, \end{cases} \quad (3.8)$$

mit  $A = \exp(z_c/z_o)$ , wobei  $z_c$  die Rotverschiebung markiert, unterhalb derer wir eine volumenlimitierte Stichprobe mit konstanter Clusterdichte erwarten. Wir erhalten  $z_c \approx 0.078$ ,  $z_o \approx 0.012$  und  $z_c \approx 0.068$ ,  $z_o \approx 0.014$  jeweils für die Abell– und ACO–Stichproben. Da die Selektionsfunktion  $\phi_z$  exponentiell abfällt, begrenzen wir unsere Analyse auf ein Gebiet mit radialer Distanz von  $240h^{-1}\text{Mpc}$ .

Wir erhalten dann genau 417 Abell/ACO-Cluster, die obige Kriterien erfüllen. Hier-von sind 262 aus dem Abell-Teil, alle mit gemessener Rotverschiebung, und 155 aus dem ACO-Teil, wobei für 16 die Rotverschiebung mit der  $m_{10}-z$  Relation geschätzt wurde (Plionis & Valdarnini 1991). Dies entspricht einer Teilchenzahldichte von  $\bar{\rho}_{\text{Abell}} = (1.6 \pm 0.25) \times 10^{-5} (h^{-1}\text{Mpc})^{-3}$  und  $\bar{\rho}_{\text{ACO}} = (2.3 \pm 0.3) \times 10^{-5} (h^{-1}\text{Mpc})^{-3}$ .

### Der Supercluster-Katalog

Wir betrachten den Supercluster-Katalog, zusammengestellt von Einasto et al. (1997c), der 220 Supercluster mit Rotverschiebung bis  $z = 0.12$  ( $\approx 370h^{-1}\text{Mpc}$  für  $\Omega = 1$ ) enthält. Die Supercluster wurden aus einer früheren Version des Cluster-Katalogs von Andernach & Tago (1998) bestimmt. Hierzu wurde ein Friends-of-Friends-Verfahren (Single-Linkage) mit einer Verbindungslänge von  $24h^{-1}\text{Mpc}$  verwendet. In den Katalog wurden bereits Supercluster aufgenommen, die aus nur zwei Clustern bestehen. Eine ausführliche Diskussion des Katalogs findet man bei Einasto et al. (1997c). In unserer Analyse verwenden wir nur Supercluster mit galaktischer Breite  $|b^{\text{II}}| > 20^\circ$  und bis zu einem maximalen radialen Abstand von  $330 h^{-1}\text{Mpc}$ . Im nördlichen Teil (galaktische Koordinaten) sind 95 Supercluster enthalten, im südlichen Teil 116 (siehe Abbildung 3.5).

Selektionseffekte wurden mit unabhängigen Radial- und Winkel-Selektionsfunktionen modelliert. Von Einasto et al. (1997a) wurden, im Gegensatz zu Plionis & Valdarnini (1995), lineare Beziehungen verwendet:

$$\begin{aligned} \phi_r(r) &= 1 - 0.5 \frac{r [h^{-1}\text{Mpc}]}{370}, \\ \phi_b(b^{\text{II}}) &= \begin{cases} \frac{|\sin b^{\text{II}}| - 0.12}{1 - 0.12} & \text{für } |\sin b^{\text{II}}| \geq 0.12, \\ 0 & \text{für } |\sin b^{\text{II}}| < 0.12. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Im schlimmsten Fall fällt die Winkel-Selektionsfunktion bei  $b^{\text{II}} = 20^\circ$  auf 0.26 und die radiale Selektionsfunktion bei  $r = 330h^{-1}\text{Mpc}$  auf 0.55.

### 3.1.3 Simulationen

In einem homogen-isotropen Universum gehorcht der Skalenfaktor  $a(t)$  der Friedmann-gleichung:

$$\frac{\dot{a}^2 + c^2 k}{a^2} = \frac{8\pi G \bar{\rho} + \Lambda}{3}, \quad (3.10)$$

mit Newtonschen Gravitationskonstante  $G$ , der Lichtgeschwindigkeit  $c$ , der mittleren Dichte  $\bar{\rho}$  und der kosmologischen Konstanten  $\Lambda$ , und dem Parameter  $k \in \{-1, 0, 1\}$  der die Raumkrümmung bestimmt. Die expliziten Lösungen sind z.B. bei Börner (1993) zu finden. Um Simulationen durchführen zu können nehmen wir nun an, daß unser Universum auf großen Skalen hinreichend homogen ist und die Dynamik des Skalenfaktors  $a(t)$  nicht von kleinskaligen Inhomogenitäten beeinflusst wird. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall (siehe

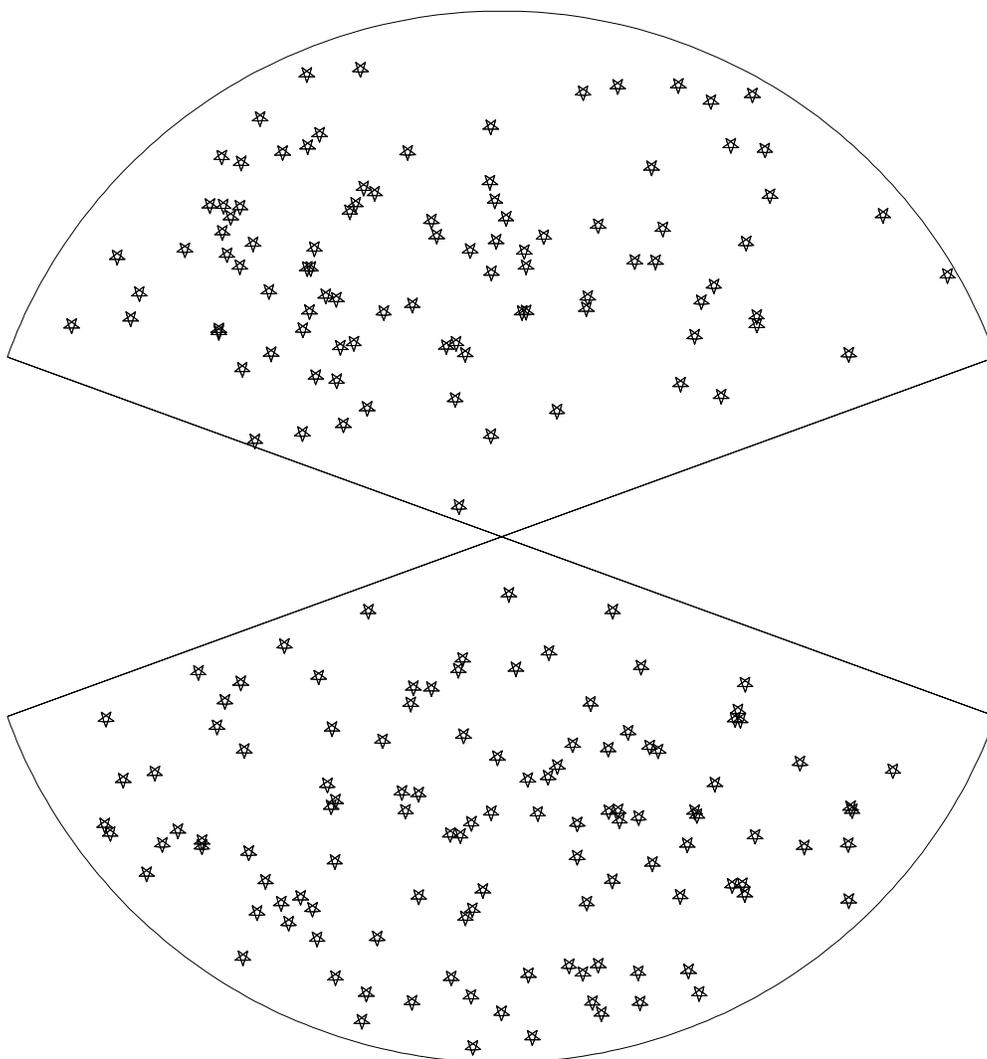


Abbildung 3.5: Die orthogonale Projektion der Koordinaten der Supercluster auf die  $x-z$  Ebene des galaktischen Koordinatensystems.

Buchert & Ehlers 1997 und die Bemerkungen am Schluß dieses Absatzes). Die Entwicklung von Strukturen werden wir als Abweichungen von der homogenen mittleren Dichte  $\bar{\rho}$  beschreiben. Auf Skalen von einigen  $h^{-1}\text{Mpc}$  bis zu etlichen hundert  $h^{-1}\text{Mpc}$  können wir die Strukturbildung gut in Rahmen der Newtonschen Mechanik mit einem hydrodynamischen Ansatz nähern (Peebles 1980).

### Bewegungsgleichungen ...

Wir verwenden hierzu die hydrodynamischen Gleichungen einer selbstgravitierenden, idealen und druckfreien Flüssigkeit („Staub“) mit nichtrotierenden Eulerschen Koordinaten  $\mathbf{x}$ , also der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (3.11)$$

der Eulergleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{g} \quad (3.12)$$

und den Feldgleichungen für die gravitative Wechselwirkung

$$\nabla \times \mathbf{g} = 0 \text{ und } \nabla \cdot \mathbf{g} = \Lambda - 4\pi G\rho, \quad (3.13)$$

oder mit der Poissongleichung

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho - \Lambda. \quad (3.14)$$

Hierbei bezeichnet  $\rho(\mathbf{x}, t)$  das Eulersche Dichtefeld,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  das Eulersche Geschwindigkeitsfeld,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  das Eulersche Beschleunigungsfeld und  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  mit  $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$  das Gravitationspotential.

### ... und ihre numerische Lösung

Um obige Gleichungen numerisch zu lösen, gehen wir zu mitschwimmenden Koordinaten  $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{x}}{a}$ , den pekuliaren Geschwindigkeitsfeldern  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{x} = a\frac{d\mathbf{q}}{dt}$  und dem Dichtekontrast  $\delta = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$  über, wobei der Skalenfaktor  $a(t)$  die Friedmanngleichung löst. Wir betrachten also die Abweichungen von einem homogenen Friedmann–Universum. Aus der Kontinuitätsgleichung und der Eulergleichung wird dann

$$\frac{\partial\delta}{\partial t}\Big|_{\mathbf{q}} + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{q}} \cdot ((1 + \delta)\mathbf{u}) = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\Big|_{\mathbf{q}} + \frac{1}{a}(\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{q}})\mathbf{u} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} = -\frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{q}}\phi, \quad (3.16)$$

mit den partiellen Ableitungen  $\nabla_{\mathbf{q}} = a\nabla$ . Das pekuliare Beschleunigungspotential  $\phi$  ist durch

$$\phi = \Phi - \frac{2}{3}\pi G\bar{\rho}a^2\mathbf{x}^2 \quad (3.17)$$

gegeben. Die Poissongleichung nimmt dann die einfache Gestalt

$$\nabla_q^2 \phi = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta \quad (3.18)$$

an. In der tatsächlichen numerischen Lösung gehen wir zu Teilchen über. Es wird zuerst das Dichtefeld und dann der Dichtekontrast auf einem Gitter durch Konvolution mit einem (üblicherweise) dreieckigen Kern („Cloud in Cells“) aus der räumlichen Verteilung der Punkte bestimmt. Die Poissongleichung (3.18) wird dann durch zweimalige schnelle Fouriertransformation („FFT“) auf dem Gitter gelöst:

$$\phi(\mathbf{q}) = -4\pi G \bar{\rho} a^2 \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} \frac{\widehat{\delta}(\mathbf{k})}{k^2}, \quad (3.19)$$

wobei  $\widehat{\delta}(\mathbf{k})$  die Fouriertransformierte des Dichtekontrasts ist (siehe Abschnitt 2.3.3). Die Kontinuitätsgleichung (3.15) ist in  $N$ -Körperrechnungen äquivalent zur Teilchenzahlerhaltung und daher immer erfüllt. Mit der totalen (konvektiven) Ableitung  $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}|_{\mathbf{q}} + \frac{1}{a}(\mathbf{u} \cdot \nabla_q)\mathbf{u}$  erhalten wir aus Gleichung (3.16) die Pekuliarbeschleunigung der Teilchen

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} = -\frac{1}{a}\nabla_q \phi, \quad (3.20)$$

mit der Pekuliargeschwindigkeit

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}. \quad (3.21)$$

$\nabla_q \phi$  können wir aus dem oben bestimmten Pekuliargeschwindigkeitspotential numerisch bestimmen. Weiterhin ist aus der Hintergrundkosmologie der Skalenfaktor  $a(t)$  bekannt und wir können die gewöhnlichen Differentialgleichungen (3.20) und (3.21) numerisch für einen Zeitschritt integrieren. Die Teilchen befinden sich dann an neuen Orten mit neuen Geschwindigkeiten. Der nächste Zeitschritt beginnt dann wieder mit der Bestimmung des Dichtefeldes auf dem Gitter.

Dieses eben geschilderte numerische Verfahren wird „Particle–Mesh“ (PM) Algorithmus genannt. Alle Simulationen die in dieser Arbeit verwendet wurden sind PM Simulationen. Eine Beschreibung verschiedener numerischer Verfahren im Vergleich mit analytischen Approximationsmethoden findet man bei Sahni & Coles (1995), für technische Details siehe Klypin & Holtzman (1998).

## Anfangsbedingungen

$N$ -Körperrechnungen werden oft bei Rotverschiebung  $z \approx 1000$  gestartet ( $a = 1/(1+z)$ ). Als Anfangsbedingung wählen wir für  $\delta(\mathbf{x})$  ein Gaußsches Zufallfeld. Die Fouriermoden eines Zufallfeldes können wie folgt dargestellt werden:

$$\widehat{\delta}(\mathbf{k}) = |\widehat{\delta}(k)| e^{i\alpha_k} \quad (3.22)$$

mit  $k = |\mathbf{k}|$ . Die Phasen  $\alpha_k$  eines Gaußschen Zufallsfeldes sind in  $[0, 2\pi]$  gleichverteilt, und die Fourieramplituden folgen einer Rayleighverteilung (Sahni & Coles 1995):

$$\frac{k}{\sigma_k^2} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma_k^2}\right) dk, \quad (3.23)$$

wobei  $\sigma_k = P(k)/2$  durch das Leistungsdichtespektrum  $P(k)$  gegeben ist (siehe auch Abschnitt 2.3.3 und Padmanabhan 1993). Als Leistungsdichtespektrum  $P(k)$  werden meist Parametrisierungen z.B. nach Bardeen et al. (1986) verwendet. Siehe hierzu auch die Bemerkungen bei Klypin & Holtzman (1998).

### Prinzipielle Problem von $N$ -Körperrechnungen

Die globale Topologie eines flachen drei-Torus ist durch die Verwendung periodischer Randbedingungen in der schnellen Fouriertransformation vorgegeben<sup>3</sup>. Universen mit anderer globaler Topologie werden daher ausgeschlossen (Lachièze-Rey & Luminet 1995). Als direkte Auswirkung der periodischen Randbedingungen ist der Abstand zweier Punkte innerhalb einer Simulationsbox mit Seitenlänge  $L$  maximal  $L\sqrt{2}/2$ . Von Buchert & Ehlers (1997) wurde gezeigt, daß Inhomogenitäten zu Quelltermen in der Friedmanngleichung führen. Für periodische Ränder sind diese Terme gleich Null. Daher ist die Annahme, daß der Skalenfaktor  $a(t)$  der Friedmanngleichung gehorcht für Simulationen selbstkonsistent richtig. Dies gilt jedoch nur für Newtonsche Universen mit der Topologie eines drei-Torus mit Seitenlänge von der Größe der Simulationsbox. Wir untersuchen somit nur einen Teil der Lösungsmenge.

## 3.2 Fluktuationen in den Clusterungseigenschaften von Galaxien

In diesem Abschnitt<sup>4</sup> werden wir anhand einer Analyse des IRAS 1.2 Jy Galaxienkatalogs (siehe Abschnitt 3.1.2) aufzeigen, daß selbst auf Skalen von mindestens  $200h^{-1}\text{Mpc}$  die Clusterungseigenschaften der leuchtenden Materie sehr stark fluktuieren. Wir zeigen dies, indem wir den nördlichen und südlichen Teil (in galaktischen Koordinaten) getrennt analysieren.

Der IRAS 1.2 Jy Galaxienkatalog eignet sich für eine derartige Untersuchung besonders, da erstens die Flüsse mit einem einzigen Gerät (dem IRAS-Satelliten) bestimmt wurden, und daher im Süden als auch im Norden eine homogene Flußkalibrierung gewährleistet ist. Zweitens wird von diesem Katalog ein großes Volumen überdeckt und nicht wie bei anderen tiefreichenden Katalogen die in erster Linie ein- oder zweidimensionale Schnitte darstellen.

<sup>3</sup>Der drei-Torus ist eine Voraussetzung um in der Newtonschen Kosmologie konsistent pekulare Felder definieren zu können (Buchert & Ehlers 1997).

<sup>4</sup>Teile dieser Analyse wurden bereits in den Arbeiten Kerscher et al. (1997a), Kerscher et al. (1996b) und Kerscher & Schmalzing (1997) publiziert.

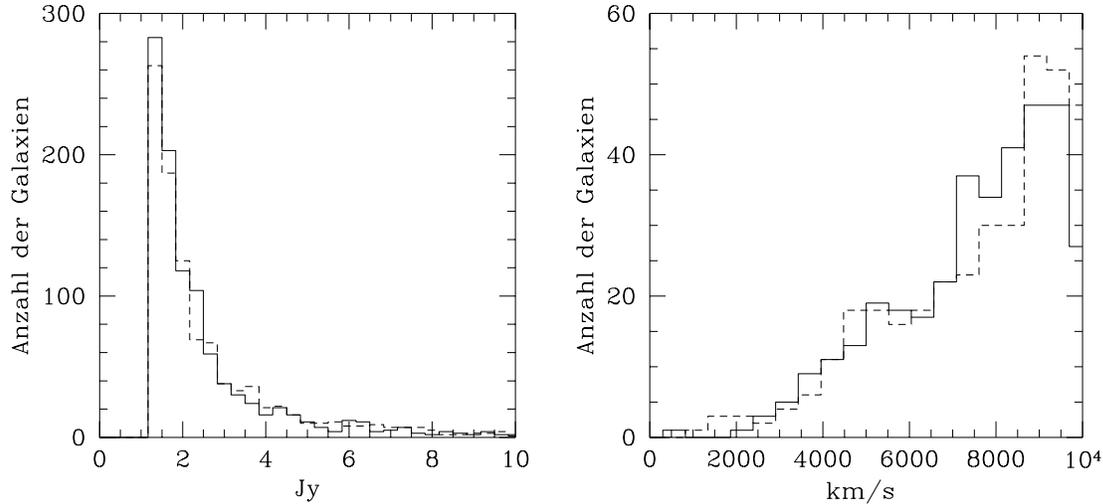


Abbildung 3.6: Links ist das Histogramm der Flüsse der Galaxien in der volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe abgebildet, rechts das Histogramm der Rotverschiebungen (durchgezogen Linien: nördlicher Teil, gestrichelt: südlicher Teil).

Wir betrachten im folgenden eine volumenlimitierte Stichproben mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe (insgesamt 710 Galaxien; 352 im Norden und 358 im Süden; siehe auch Abbildung 3.4) und eine volumenlimitierte Stichproben mit  $200h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe (insgesamt 280 Galaxien; 139 im Norden und 141 im Süden). Aus Abbildung 3.6 erkennen wir, daß sich weder Fluß- noch Rotverschiebungsverteilung signifikant unterscheiden.

### 3.2.1 Fluktuationen der Minkowskifunktionale

Zur Untersuchung der Clusterungseigenschaften verwenden wir hauptsächlich Minkowskifunktionale. Im nächsten Abschnitt werden noch Ergebnisse für  $F(r)$ ,  $G(r)$ ,  $J(r)$ , und  $\sigma(r)^2$  gezeigt. Wir dekorieren die  $N$  Punkte  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ , gegeben durch die Galaxienpositionen, mit Kugeln  $\mathcal{B}_r$ , wobei wir den Radius  $r$  als diagnostischen Parameter verwenden. Mit Minkowskifunktionalen untersuchen wir die Geometrie und Topologie der Vereinigungsmenge  $\mathcal{A}_r = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$  dieser Kugeln. In drei Dimensionen betrachten wir das Volumen ( $M_0$ ), die Oberfläche ( $\propto M_1$ ), die integrale mittlere Krümmung ( $\propto M_2$ ) sowie die Eulercharakteristik ( $\propto M_3$ ) der Vereinigungsmenge  $\mathcal{A}_r$ . Randkorrigierte Schätzer für die Volumendichten der Minkowskifunktionale werden in Anhang A.7 besprochen. Im folgenden werden wir die spezifischen Minkowskifunktionale

$$\Phi_\mu(\mathcal{A}_r) = \frac{M_\mu(\mathcal{A}_r)}{NM_\mu(\mathcal{B}_r)} \quad (3.24)$$

verwenden. Für Poissonverteilte Punkte erhalten wir mit Gleichung (2.123)

$$\begin{aligned}\Phi_0^P(\mathcal{A}_r) &= (1 - e^{-\eta}) \eta^{-1}, & \Phi_2^P(\mathcal{A}_r) &= e^{-\eta} \left(1 - \frac{3\pi^2}{32}\eta\right), \\ \Phi_1^P(\mathcal{A}_r) &= e^{-\eta}, & \Phi_3^P(\mathcal{A}_r) &= e^{-\eta} \left(1 - 3\eta + \frac{3\pi^2}{32}\eta^2\right),\end{aligned}\tag{3.25}$$

wobei der dimensionslose Parameter  $\eta = \bar{\rho}M_0(\mathcal{B}_r) = \bar{\rho} 4\pi r^3/3$  die mittlere Teilchenzahl in einer Kugel mit Radius  $r$  angibt. Die an die Oberfläche gebundenen Funktionale  $\mu = 1, 2, 3$  werden nach Gleichung 3.25 auf großen Skalen exponentiell mit  $e^{-\eta(r)}$  gedämpft. Dies gilt nicht nur für den Poissonprozeß. Da wir an dem Verhalten auf großen Skalen interessiert sind, betrachten wir die Oberflächendichten der Minkowskifunktionale bezüglich des Poissonprozesses:

$$\phi_\mu(\mathcal{A}_r) = \frac{\Phi_\mu(\mathcal{A}_r)}{\Phi_1^P(\mathcal{A}_r)}, \quad \mu \geq 1.\tag{3.26}$$

### Volumenlimitierte Stichprobe mit $100h^{-1}\text{Mpc}$ Tiefe

In Abbildung 3.7 sind die Werte der Minkowskifunktionale der südlichen und nördlichen Hälfte, zusammen mit den Werten eines Poissonprozesses mit der gleichen Anzahl von Teilchen dargestellt. Die Volumendichte  $v_0(\mathcal{A}_r) = F(r)$  wird in Abschnitt 3.2.3 gezeigt. Die Fehler des Poissonprozesses wurden aus zwanzig Realisierungen bestimmt. Um die Fehler in den Werten für den Katalog abzuschätzen, extrahierten wir zufällige Stichproben mit 90% der Galaxien aus der volumenlimitierten Stichprobe. Diese Prozedur wird auch „Jackknife“ genannt, weitere Fehlerabschätzungen werden im folgenden noch diskutiert.

Auf Skalen bis  $10h^{-1}\text{Mpc}$  clustern die Galaxien in beiden Teilen des 1.2 Jy Katalogs stärker als ein Poissonprozeß, wie wir anhand der kleineren Werte der Oberfläche  $\phi_1$ , der integralen mittleren Krümmung  $\phi_2$  und der Eulercharakteristik  $\phi_3$  feststellen können. Darüber hinaus unterscheiden sich der nördliche und der südliche Teil deutlich, wobei der nördliche Teil deutlich schwächer clustert. Am auffälligsten ist sicher die größere Oberfläche im südlichen Teil auf Skalen von 12 bis  $20h^{-1}\text{Mpc}$  und der Knick in der integralen Krümmung  $\phi_2$  bei  $14h^{-1}\text{Mpc}$ . Dieses Verhalten zeigt, daß auf diesen Skalen dichte Substrukturen im Süden aufgefüllt werden (d.h. die Kugeln in den Substrukturen überlappen sich, ohne daß Hohlräume entstehen). Die negative integrale mittlere Krümmung auf Skalen von 15 bis  $20h^{-1}\text{Mpc}$  ist ein Indiz für konkave Strukturen. Im südlichen Teil ist auf diesen Skalen die Eulercharakteristik negativ. Die globale Struktur wird somit von einem System aus vollständig zusammenhängenden Tunneln dominiert. Vollständig umschlossene Hohlräume würden im Gegensatz hierzu einen positiven Beitrag zur Eulercharakteristik liefern. Ähnliche Eigenschaften der Minkowskifunktionale für die Verteilung der Galaxiencluster werden in Abschnitt 3.3 und Kerscher et al. (1997b) diskutiert.

### Volumenlimitierte Stichprobe mit $200h^{-1}\text{Mpc}$ Tiefe

Eines Standardkosmologen Herz ist meist noch von der Hoffnung erfüllt, daß diese Fluktuationen, wie wir sie in Abbildung 3.7 sehen, auf größeren Skalen klein werden (siehe

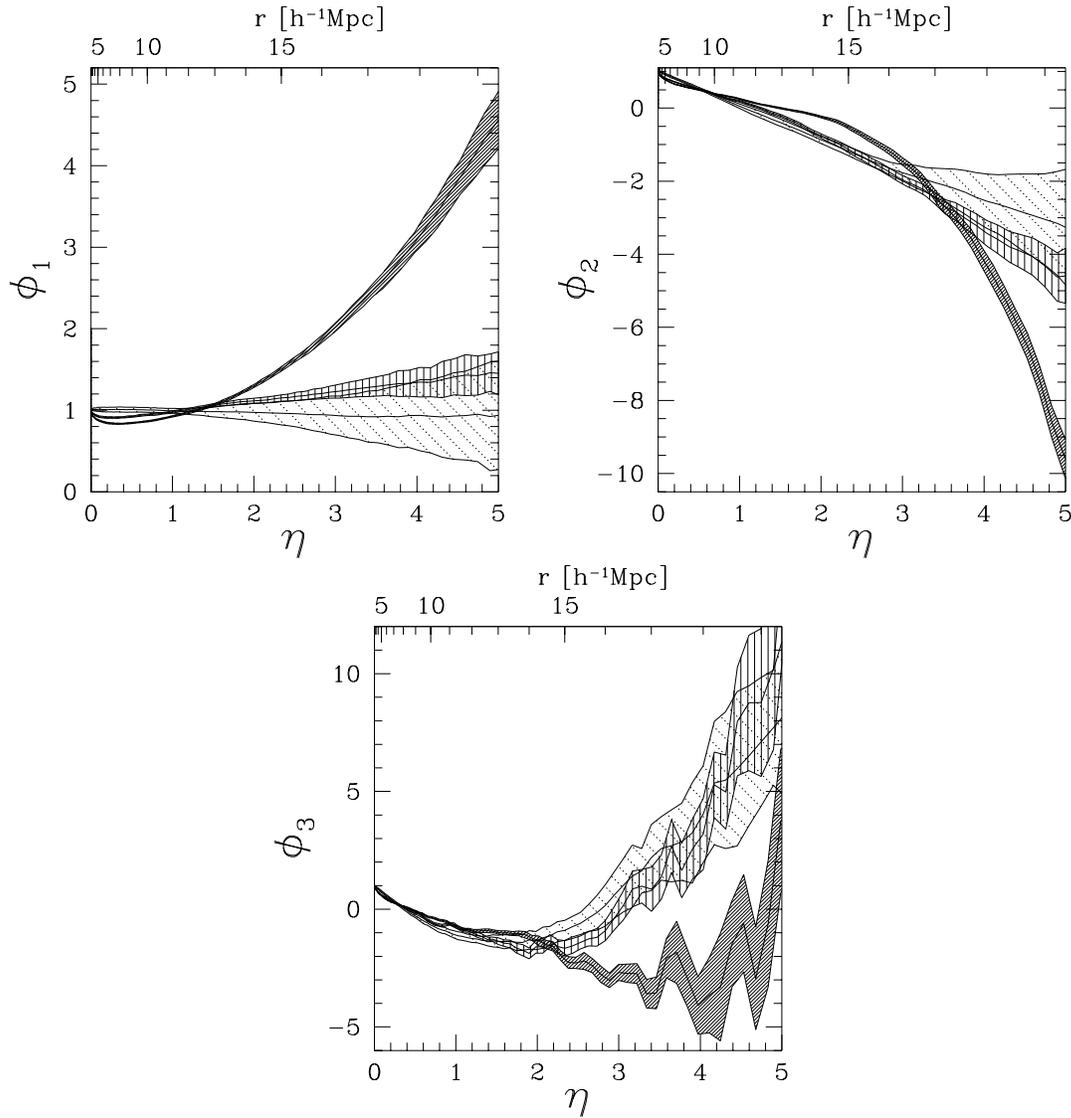


Abbildung 3.7: Die Oberflächendichten der Minkowskifunktionale  $\phi_\mu$  einer volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe; dunkel schraffiert: südlicher Teil, mittel schraffiert: nördlicher Teil, gepunktet: Poissonprozeß mit gleicher Teilchenanzahl. Die schraffierten Flächen entsprechen den  $1\sigma$ -Standardfehlern wie im Text angegeben.

hierzu auch Abschnitt 3.5). Einer definitiven Aussage hierzu stehen meist die geringen Teilchenzahlen in tiefen Stichproben entgegen. In Abbildung 3.8 zeigen wir exemplarisch an den Werten der Oberfläche  $\phi_1$  den Einfluß geringer Teilchenzahl auf die Minkowskifunktionale. Hierzu verwenden wir die volumenlimitierte Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe und ziehen hieraus erneut Stichproben mit 70, 50 und 30% der Galaxien. Wir erkennen, daß nicht nur die Varianz zunimmt, sondern auch die Mittelwerte sich immer mehr denen eines homogenen Poissonprozesses annähern.

In Abbildung 3.9 sind die Werte der Minkowskifunktionale für eine volumenlimitierte Stichprobe mit  $200h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe aufgetragen. Die Anzahl der Galaxien beträgt gerade noch ein Drittel, verglichen mit der Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe. Wir können daher nicht mehr ein derartig eindeutiges Ergebnis wie für die Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe erwarten. Es sind jedoch weiterhin große Schwankungen zwischen Norden und Süden zu erkennen, wobei gerade im südlichen Teil immer noch ein verstärktes Clustern zu sehen ist.

### Fehlerabschätzungen

Um besser abschätzen zu können, wie der Jackknife-Fehler mit der tatsächlichen Varianz des Punktprozesses zusammenhängt, betrachten wir eine Realisierung eines Poissonprozesses mit gleicher Teilchenzahl und im gleichen Fenster wie die Galaxien in der  $100h^{-1}\text{Mpc}$ -Stichprobe. Dann extrahieren wir hieraus Stichproben mit 90% der Punkte. In Abbildung 3.10 erkennen wir, daß der hiermit geschätzte Fehler nur ungefähr halb so groß wie die geschätzte Ensemble-Varianz ist. Besser geeignet ist sicher ein Vergleich mit der Varianz des Poissonprozesses, aber wie bereits aus Abbildung 3.7 zusehen ist, übersteigen die Fluktuation zwischen Norden und Süden die Poisson-Varianz deutlich. Ein analoges Verhalten wurde auch für clusternde Prozesse bei Stoyan et al. (1993) im Zusammenhang mit der Paarkorrelationsfunktion besprochen. Mit den Jackknife-Fehlern und analog den Bootstrap-Fehlern untersuchen wir die Robustheit unserer statistischen Größen, d.h. wir untersuchen wie stark unsere geschätzten Größen von einzelnen Strukturen abhängen, die Fluktuationen (bzw. die wahren Varianzen) werden meist deutlich größer sein.

Um den Einfluß von Beobachtungsfehlern, vor allem in den Messungen der Rotverschiebungen abzuschätzen, randomisieren wir diese, wobei der angegebene Fehler als Standardabweichung benutzt wird. Ist kein Fehler angegeben, verwenden wir den mittleren Fehler. Die hieraus resultierenden Fehler in den Werten der Minkowskifunktionale sind nur halb so groß wie die Jackknife-Fehler. Selbst wenn wir das fünffache der angegebenen Fehler verwenden, bleibt der Fehler in derselben Größenordnung (vergleiche Abbildung 3.11 mit 3.7).

Abgesehen von der 10 Grad breiten „Zone of Avoidance“ in der galaktischen Ebene, deren Einfluß wir durch Verwendung der randkorrigierten Schätzer aus Abschnitt A.7 berücksichtigen, existieren leider noch weitere Bereiche, in denen der IRAS-Satellit keine Daten lieferte oder die starke Emission/Extinktion ein zuverlässiges Signal verhinderte. Im nördlichen Teil umfassen sie 3.2% des Himmels, im südlichen Teil 4.5%. Zur Untersuchung des Einflusses dieser Löcher füllen wir dort Poissonverteilte Punkte mit der gleichen Teil-

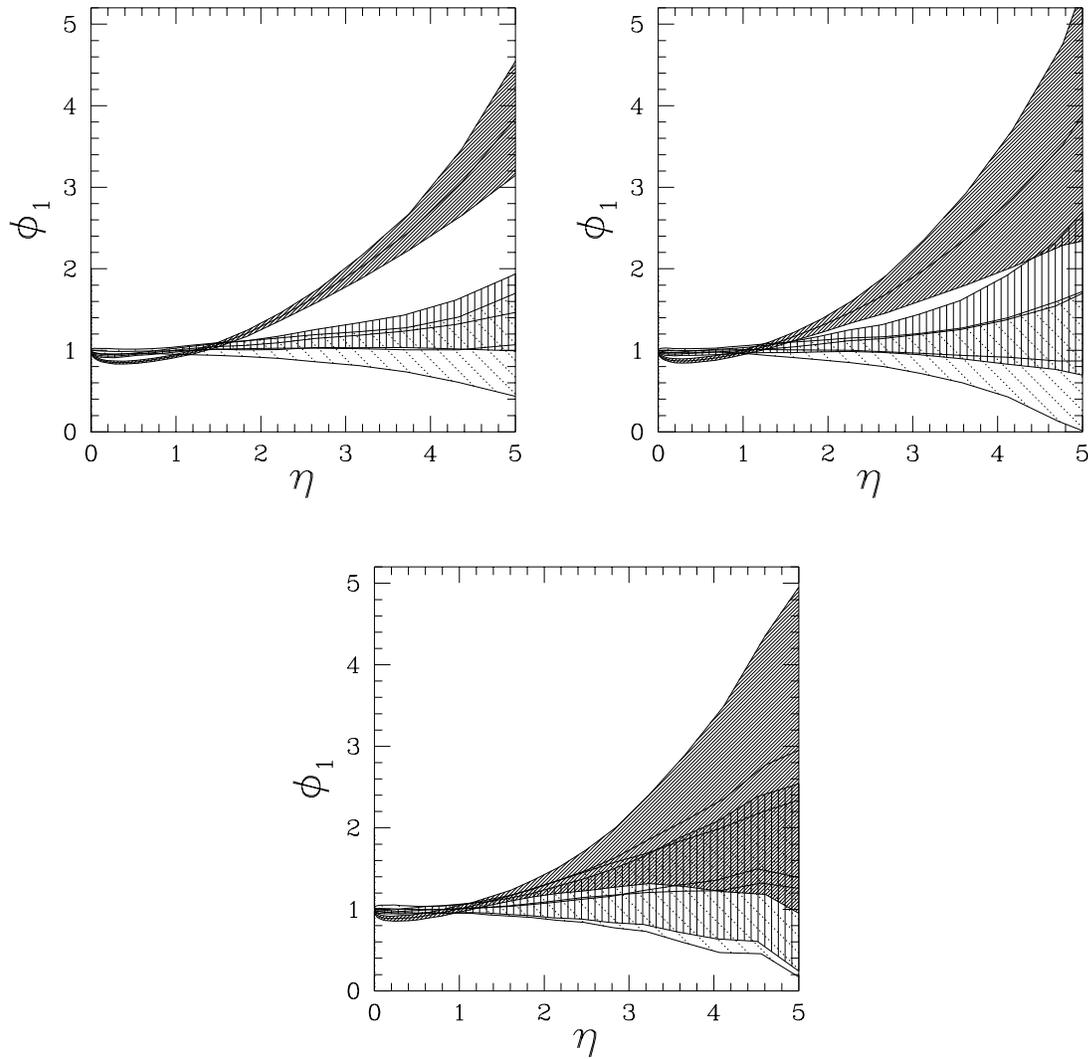


Abbildung 3.8: Dargestellt sind die Werte der Oberflächenfunktionale  $\phi_1$  der volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe, wobei nun zufällige Stichproben mit 70% (linkes Bild), 50% (rechtes Bild) und 30% (unteres Bild) der Galaxien gezogen wurde (Fehlerbereiche wie in Abbildung 3.7).

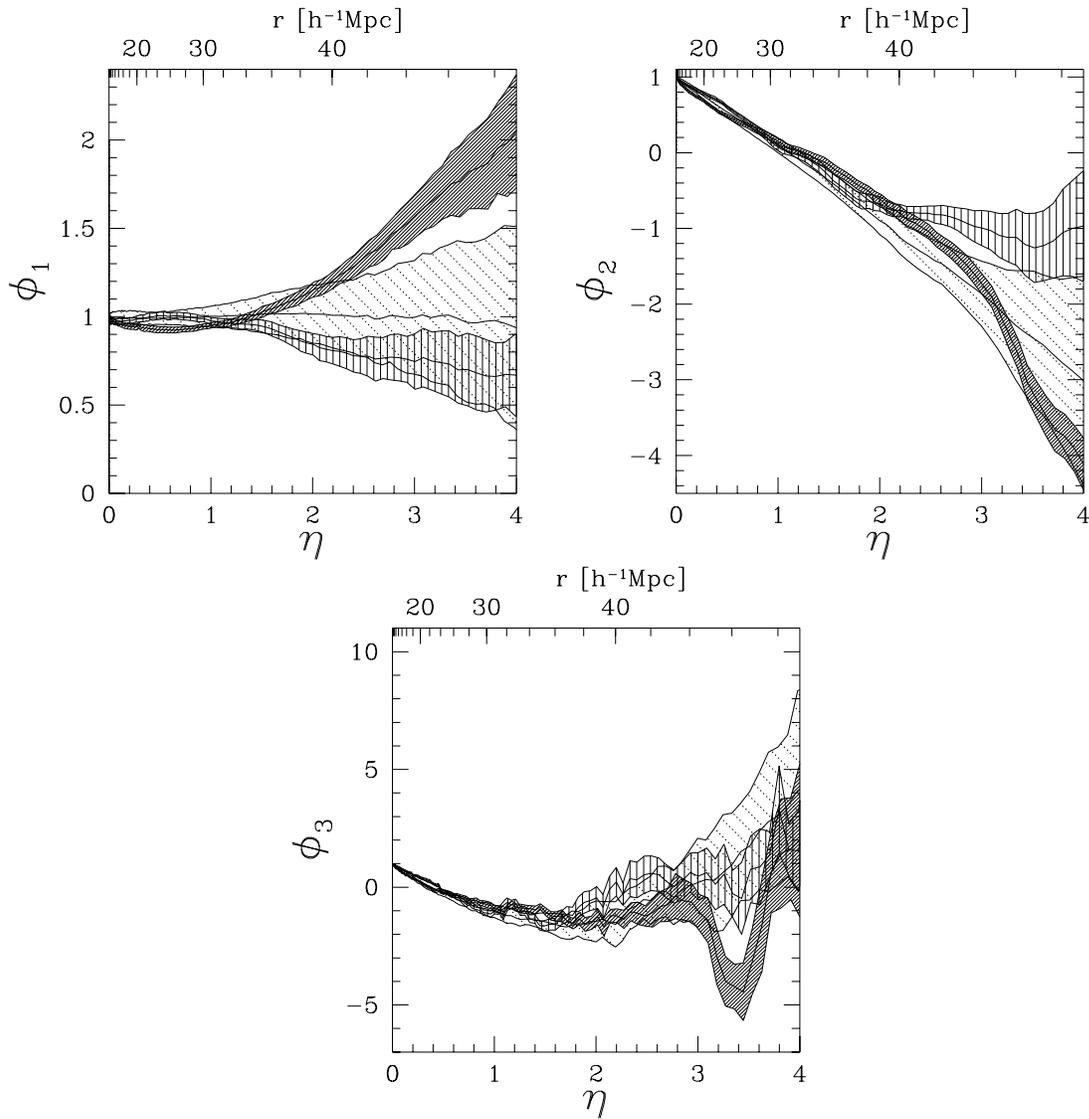


Abbildung 3.9: Die Minkowskifunktionale  $\phi_\mu$  einer volumenlimitierten Stichprobe mit  $200h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe (Fehlerbereiche wie in Abbildung 3.7).

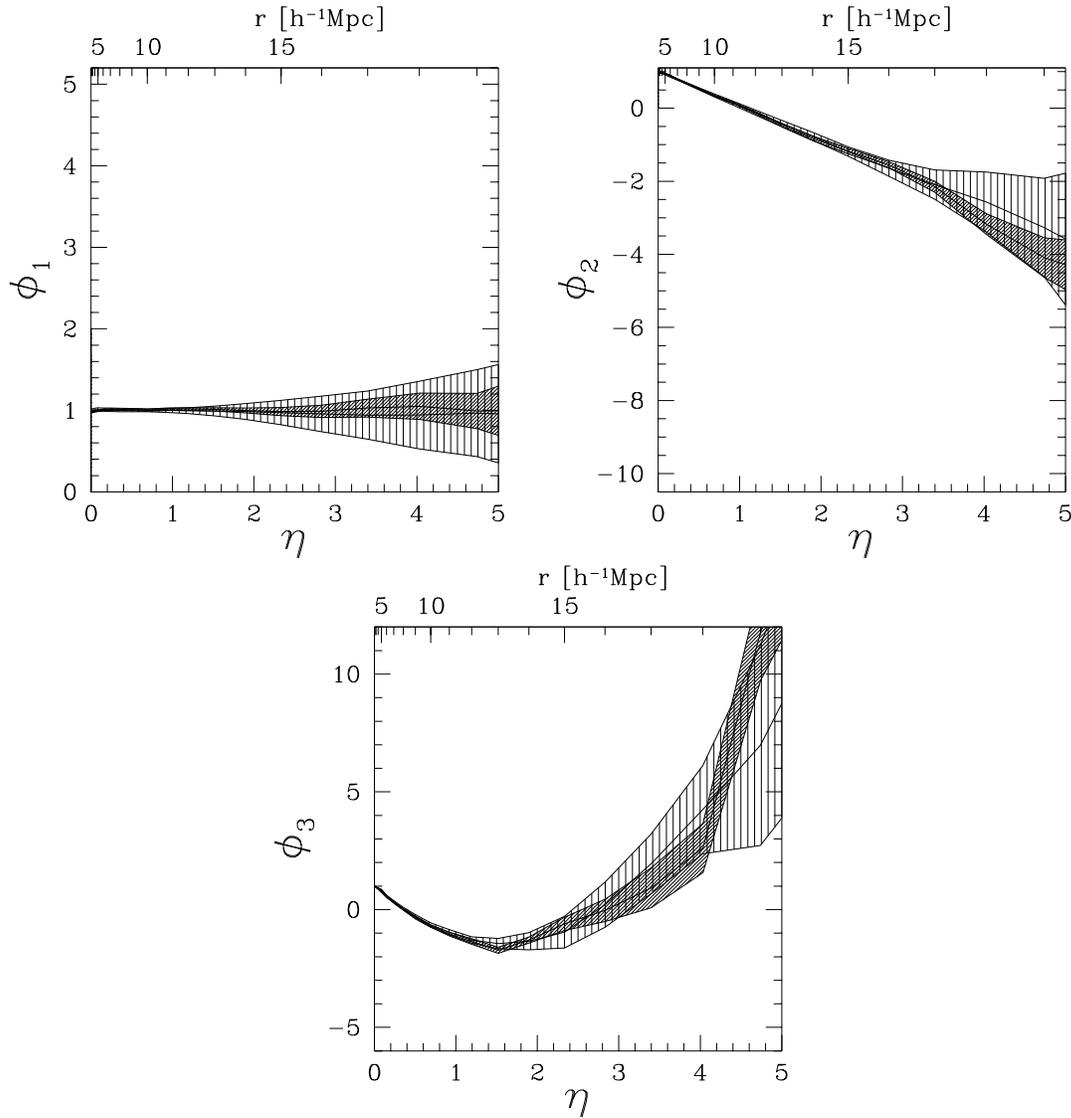


Abbildung 3.10: Minkowskifunktionale  $\phi_\mu$  einer Realisierung eines Poissonprozesses; dunkel schraffiert:  $1\sigma$ -Fehler der Stichproben mit 90%, hell schraffiert:  $1\sigma$ -Ensemble-Fehler, bestimmt aus 20 Realisierungen.

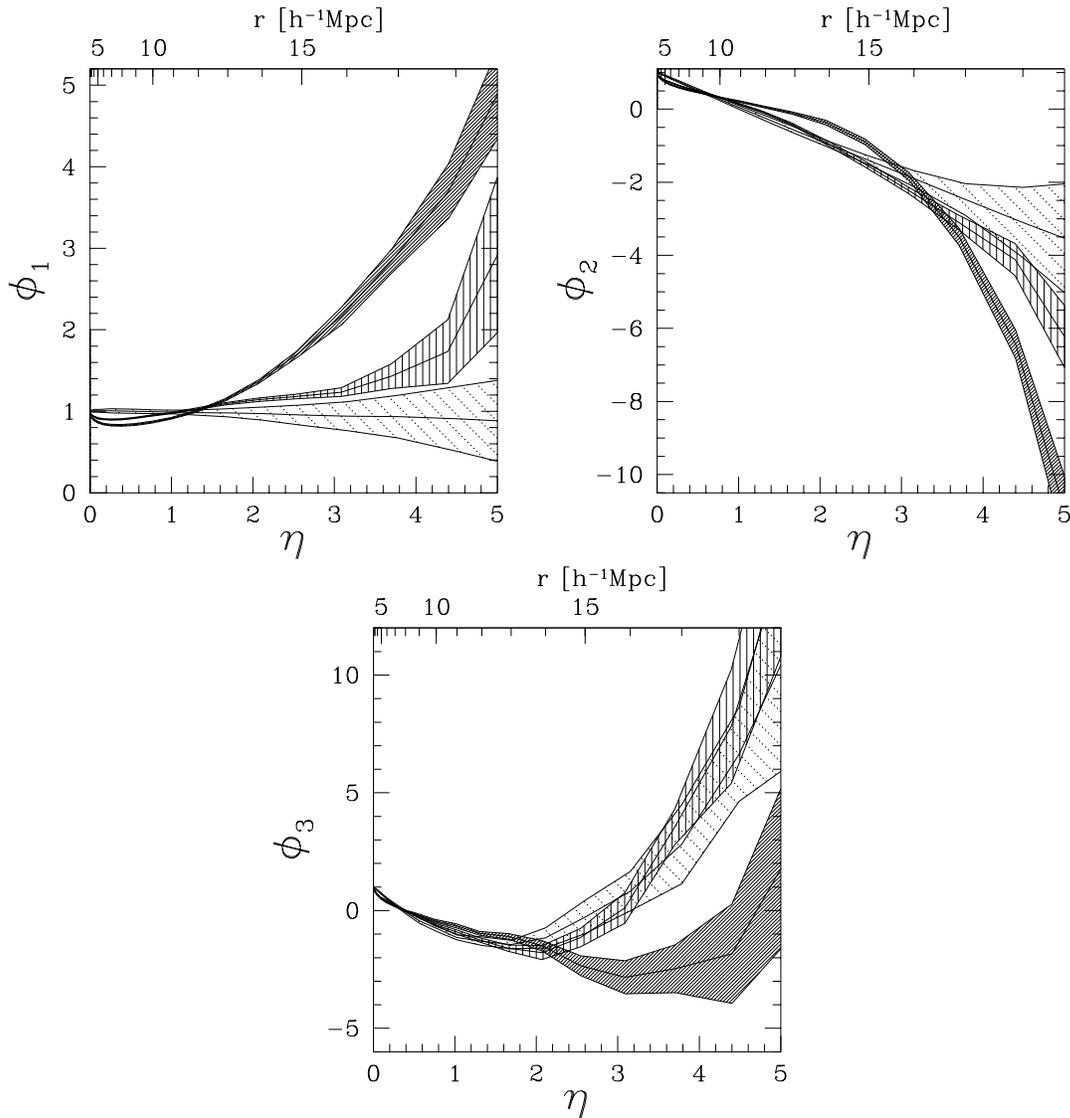


Abbildung 3.11: Die Minkowskifunktionale  $\phi_\mu$  einer volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe. Die  $1\sigma$ -Fehler sind nun durch Randomisierung der Rotverschiebungen mit dem Fünffachen der angegebenen Fehler berechnet (Bezeichnungen wie in Abbildung 3.7).

chenzahldichte wie im restlichen Katalog ein. Der zusätzliche Fehler ist deutlich kleiner als der Jackknife-Fehler. Darüber hinaus sind auch keine systematischen Abweichungen in den Minkowskifunktionalen zu sehen.

### Selektionseffekte

Mehrere Selektionseffekte bei der Konstruktion des Galaxienkatalogs könnten unsere Ergebnisse beeinflussen. Wir untersuchen daher im folgenden den Einfluß von Temperatur- und Flußkriterien.

Wir berechneten hierzu die Minkowskifunktionale einer volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe, aber nun mit limitierendem Fluß 2.0 Jy (Abbildung 3.12). Es sind 129 Galaxien im nördlichen und 141 Galaxien im südlichen Teil enthalten. Aufgrund der geringen Anzahl nehmen die Fehler zu (siehe hierzu auch den vorigen Abschnitt), es sind weiterhin die diskutierten Strukturen in den Minkowskifunktionalen zu erkennen, vor allem deren Unterschiede zwischen Norden und Süden.

Der IRAS-Satellit hat Flüsse bei vier Wellenlängen ( $12\mu\text{m}$ ,  $25\mu\text{m}$ ,  $60\mu\text{m}$ ,  $100\mu\text{m}$ ) aufgenommen. Wir benutzen die Flüsse bei  $60\mu\text{m}$  und  $100\mu\text{m}$ , um *heiße* Galaxien mit  $f_{100}/f_{60} \leq 1.5$  und *warme* Galaxien mit  $1.5 \geq f_{100}/f_{60} \geq 3$  und *kalte* Galaxien mit  $f_{100}/f_{60} \geq 3$ , aus dem 1.2 Jy Katalog zu extrahieren. Von volumenlimitierten Stichproben mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe berechnen wir die Minkowskifunktionale der heißen Galaxien (106 im Norden, 116 im Süden), und der warmen Galaxien (239 im Norden, 227 im Süden). Nur 22 Galaxien sind kalt. Aufgrund der reduzierten Anzahl an Galaxien nehmen die Fehler zu, die Unterschiede zwischen Norden und Süden sind immer noch gut zu erkennen (siehe Abbildung 3.13 und 3.14). Bereits bei Mann et al. (1996) wurde mit ausgefeilteren, aber im wesentlichen vergleichbaren Kriterien nur ein geringer Unterschied in den Clusteringseigenschaften der Galaxien im QDOT, ebenfalls ein IRAS basierter Galaxienkatalog, gefunden.

### Anisotropie oder Fluktuationen?

Die Unterscheidung in nördliche und südliche Hälfte wird von der Geometrie der Stichprobe diktiert. Im folgenden zeigen wir, daß den Fluktuationen keine spezielle Nord-Süd Anisotropie zugrundeliegt. Hierzu zerschneiden wir sowohl den nördlichen, als auch südlichen Teil in zwei Teile, wie in Abbildung 3.15 und in Tabelle 3.1 dargestellt. Die vier resultierenden Stichproben beinhalten im Mittel jeweils  $\approx 155$  Galaxien. Aus Abbildung 3.16 erkennen wir, daß alle vier Teile deutlich unterschiedliche Clusteringseigenschaften aufweisen. Konsistent mit Abbildung 3.7 clustern die beiden südlichen Teile stärker. Der Perseus-Pegasus-Pisces-Supercluster liegt in der Stichprobe *rs*, das stärkste Clustern ist in *ls* zu beobachten.

### Vergleich mit dem CfA1-Katalog

Ein Einwand gegen Ergebnisse, die mit Galaxienkatalogen basierend auf den IRAS-Daten gewonnen wurden, ist der, daß wir in erster Linie nur infrarotaktive Galaxien, also meist

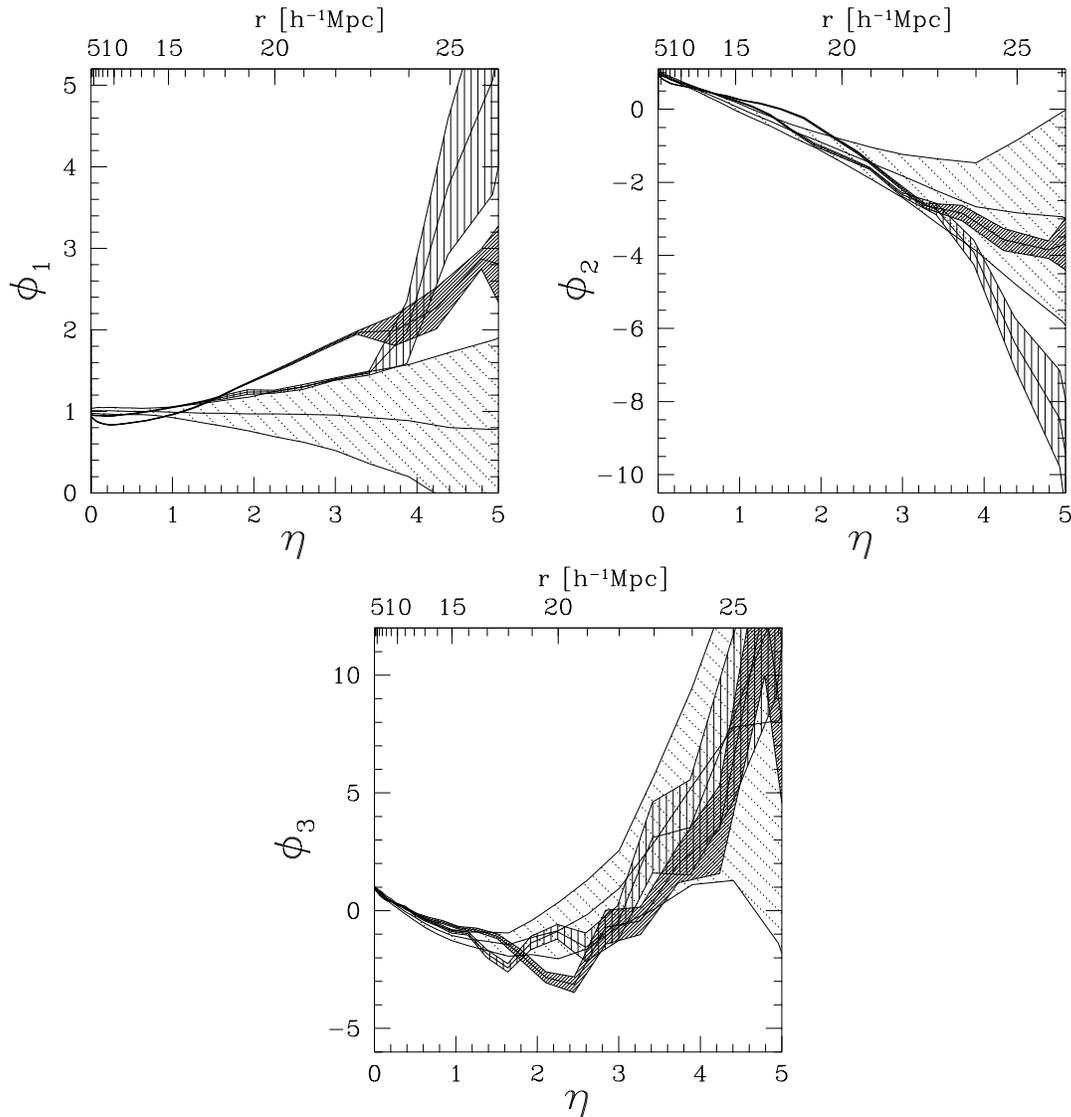


Abbildung 3.12: Die Minkowskifunktionale  $\phi_\mu$  einer volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe mit limitierendem Fluß 2.0 Jy. Die  $1\sigma$ -Fehler sind nun durch Randomisierung der Rotverschiebungen berechnet (Bezeichnungen wie in Abbildung 3.7).

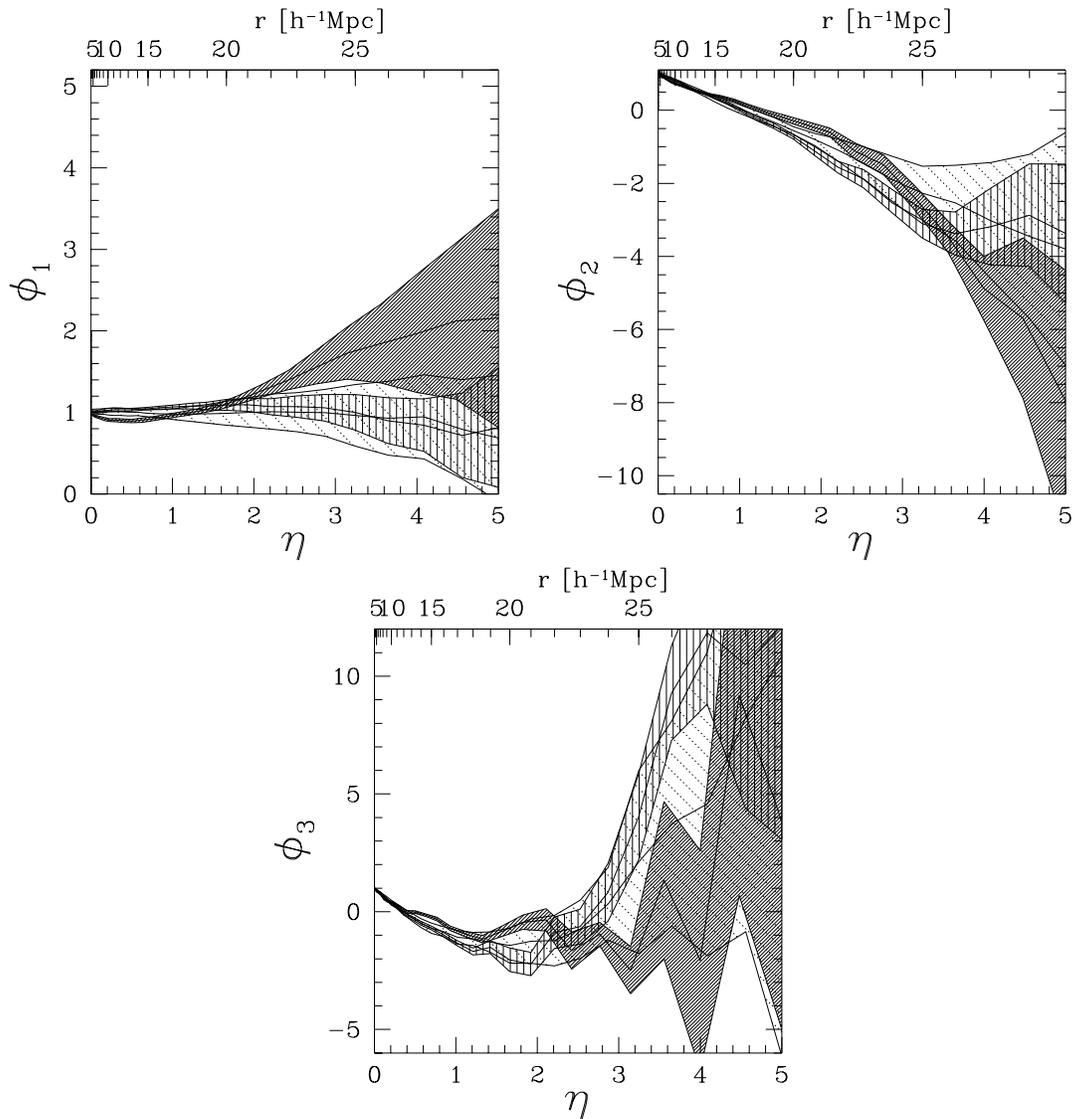


Abbildung 3.13: Die Minkowskifunktionale  $\phi_\mu$  einer volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe von heißen Galaxien; Bezeichnungen wie in Abbildung 3.7.

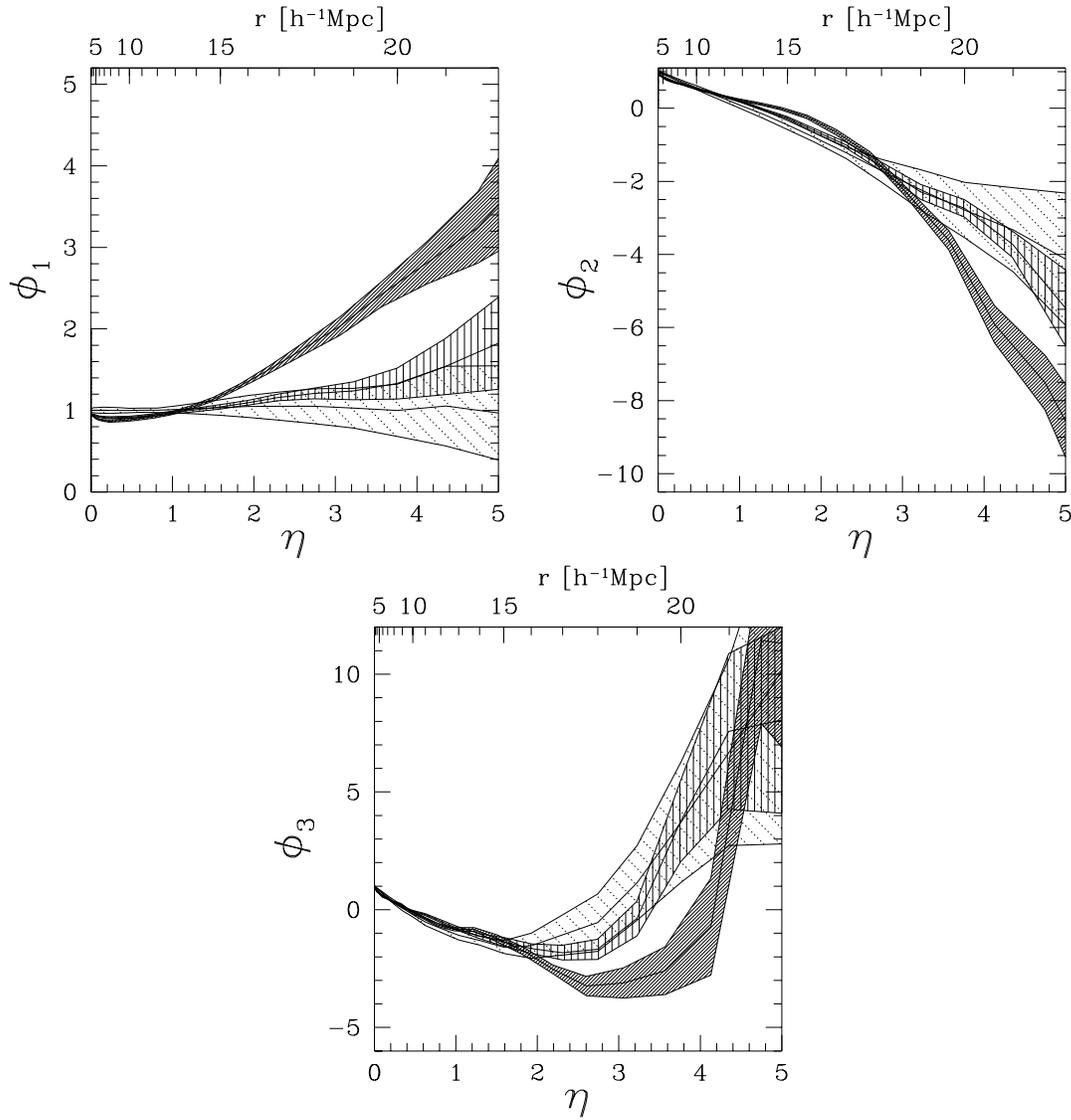


Abbildung 3.14: Die Minkowskifunktionale  $\phi_\mu$  einer volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe von warmen Galaxien; Bezeichnungen wie in Abbildung 3.7.

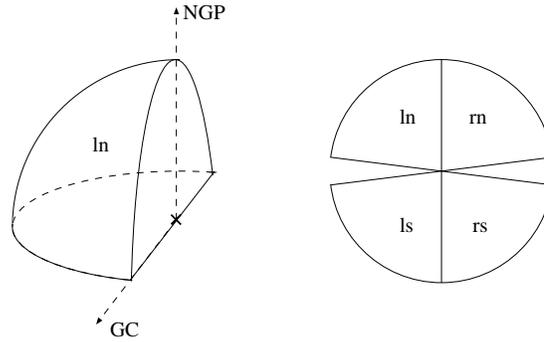


Abbildung 3.15: Skizze der Stichprobegeometrie. Der Schnitt erfolgt entlang der Ebene durch unsere Position, dem galaktischen Zentrum (GC) und dem galaktischen Nordpol (NGP). Im rechten Bild sind die gewählten Bezeichnungen zu sehen.

Tabelle 3.1: Die Winkelbereiche der Stichproben aus Abbildung 3.15.

Bezeichnung	Breite	Länge
$rn$	$5^\circ \leq b^{\text{II}} \leq 90^\circ$	$0^\circ \leq l^{\text{II}} \leq 180^\circ$
$ln$	$5^\circ \leq b^{\text{II}} \leq 90^\circ$	$180^\circ \leq l^{\text{II}} \leq 360^\circ$
$rs$	$-5^\circ \geq b^{\text{II}} \geq -90^\circ$	$0^\circ \leq l^{\text{II}} \leq 180^\circ$
$ls$	$-5^\circ \geq b^{\text{II}} \geq -90^\circ$	$180^\circ \leq l^{\text{II}} \leq 360^\circ$

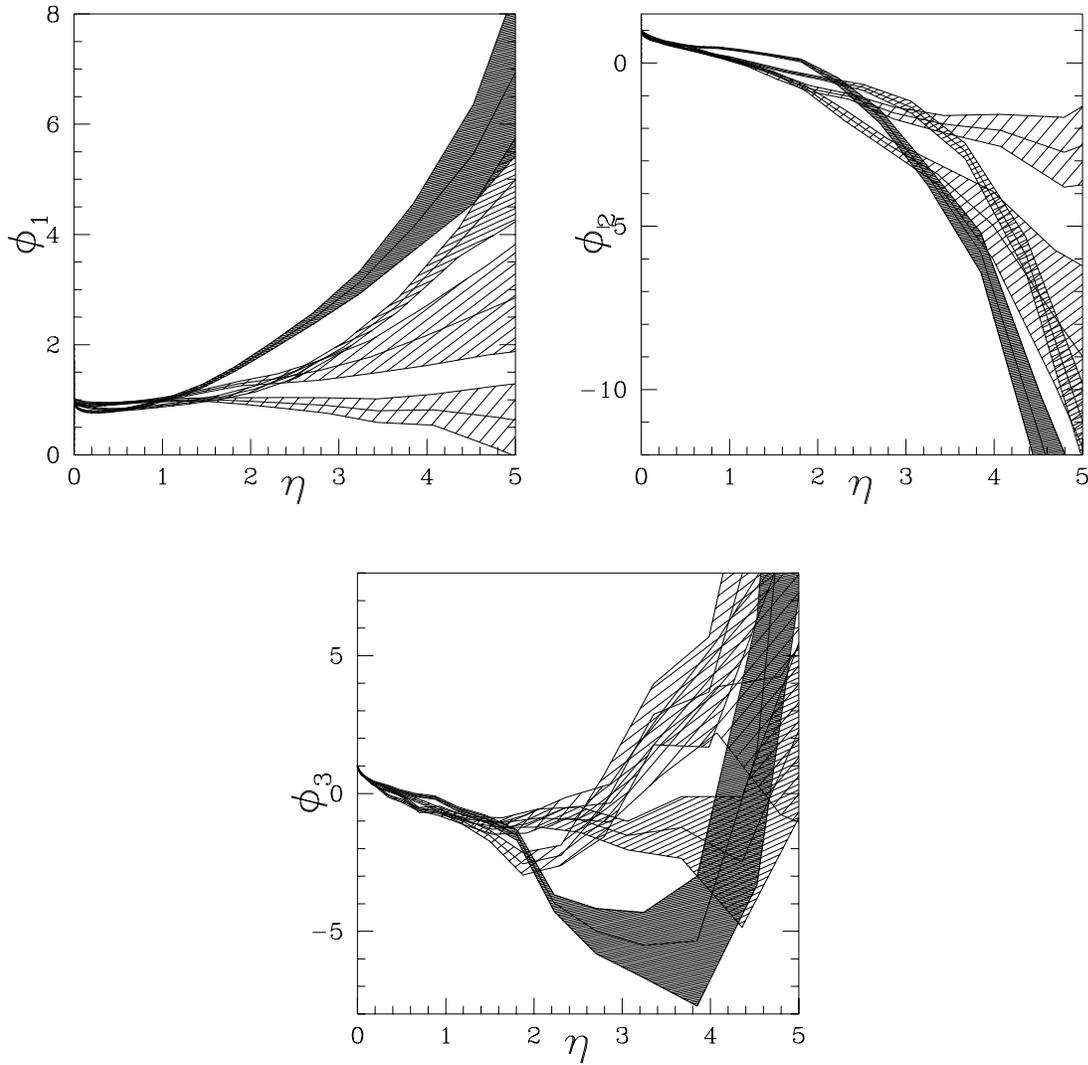


Abbildung 3.16: Die Minkowskifunktionale  $\phi_\mu$  einer volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe; in Teile zerlegt nach Abbildung 3.15. Die schraffierten  $1\sigma$ -Bereiche sind Jackknife-Fehler (90%) und werden dunkler in der Reihenfolge  $ln$ ,  $rn$ ,  $rs$ ,  $ls$ .

Spiralen, betrachten. Im folgenden vergleichen wir Stichproben aus dem optisch selektierten CfA1 (siehe Abschnitt 3.1.2) mit Galaxien des IRAS 1.2 Jy im selben Raumgebiet.

Wir betrachten hierzu eine volumenlimitierte Stichprobe aus dem CfA1 mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe (99 Galaxien). Der volumenlimitierte 1.2 Jy-Katalog, ebenfalls mit Tiefe  $100h^{-1}\text{Mpc}$ , beinhaltet 115 Galaxien im selben Raumgebiet. Um vergleichbare Werte der Minkowskifunktionale (siehe Abbildung 3.17) zu erhalten, ziehen wir Stichproben mit der gleichen Teilchenanzahl aus beiden Katalogen. Der 1.2 Jy-Galaxienkatalog besteht in erster Linie aus Spiralgalaxien, die in Galaxienclustern unterrepräsentiert sind. Dies bedingt ein schwächeres Clustern auf kleinen Skalen bis  $10h^{-1}\text{Mpc}$ , wie aus der deutlich reduzierten Oberfläche  $\phi_1$  des CfA1 geschlossen werden kann. Auf großen Skalen wird das Signal durch die geringe Teilchenzahl dominiert, und sowohl der 1.2 Jy, als auch der CfA1 erscheinen kompatibel miteinander und mit einem Poissonprozeß.

Um eine bessere Statistik auf kleinen Skalen zu erhalten, betrachten wir noch volumenlimitierte Stichproben mit  $60h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe. Der CfA1 enthält nun 215 Galaxien, wohingegen nur noch 115 Galaxien aus dem 1.2 Jy in der Geometrie enthalten sind. Die Tendenz zum stärkeren Clustern ist auf allen Skalen (hier bis  $12h^{-1}\text{Mpc}$ ) zu sehen. Wir betrachten jedoch mit  $60h^{-1}\text{Mpc}$  ein sehr kleines Volumen (nur noch 22% der Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$ ), somit ist nicht klar, inwieweit wir spezielle Eigenschaften unserer lokalen Umgebung beschreiben, oder eine globale Eigenschaft der Galaxienverteilung. Für einen verlässlicheren Vergleich müssen wir auf die Verfügbarkeit von größeren optischen und infrarot selektierten Galaxienkatalogen, wie dem CfA2, dem SSRS2 und dem PSCz warten.

### 3.2.2 Vergleich mit einer CDM-Simulation

In diesem Abschnitt wollen wir klären, inwieweit es möglich ist, die beobachteten Eigenschaften der Minkowskifunktionale, sowie auch deren Fluktuationen mit Simulationen wiederzugeben (siehe auch Abschnitt 3.1.3). Wir erzeugen hierzu simulierte Galaxienkataloge aus den kosmologischen Simulationen von Kolatt et al. (1996), die uns freundlicherweise von Yair Sigad und Avishai Dekel zur Verfügung gestellt wurden. Diese Simulationen wurde für ein  $\Omega_0 = 1$  Universum durchgeführt, wobei das Anfangsdichtefeld durch eine Realisierung eines Gaußschen Zufallsfeldes mit Randbedingungen gegeben ist. Zur Bestimmung der Anfangsbedingungen wurde ein geglättetes Dichtefeld des IRAS 1.2 Jy-Galaxienkatalogs berechnet und dies dann mit einer inversen Zel'dovich-Abbildung rückwärts in der Zeit transportiert. Die kleinskaligen Fluktuationen im Anfangsdichtefeld sind durch ein CDM-Spektrum gegeben, wohingegen große Strukturen durch das Dichtefeld des 1.2 Jy bestimmt sind. Ausgehend von diesem Anfangsdichtefeld wurde dann eine Particle-Mesh-Simulation mit  $128^3$  Teilchen und  $128^3$  Gitterzellen in einem Würfel mit Seitenlänge  $256h^{-1}\text{Mpc}$  und periodischen Randbedingungen durchgeführt. Ein Teilchen erhält ungefähr die Masse einer Galaxie. In Abbildung 3.21 ist eine Skizze der Einbettung des simulierten Galaxienkatalogs in die Würfelgeometrie der Simulation zu sehen. Die Simulation wurde speziell zur Reproduktion der Dichte- und vor allem der Geschwindigkeitsfelder im 1.2 Jy erstellt. Wir modellieren Mock-Kataloge, indem wir zufällig dieselbe Anzahl von Galaxien in der

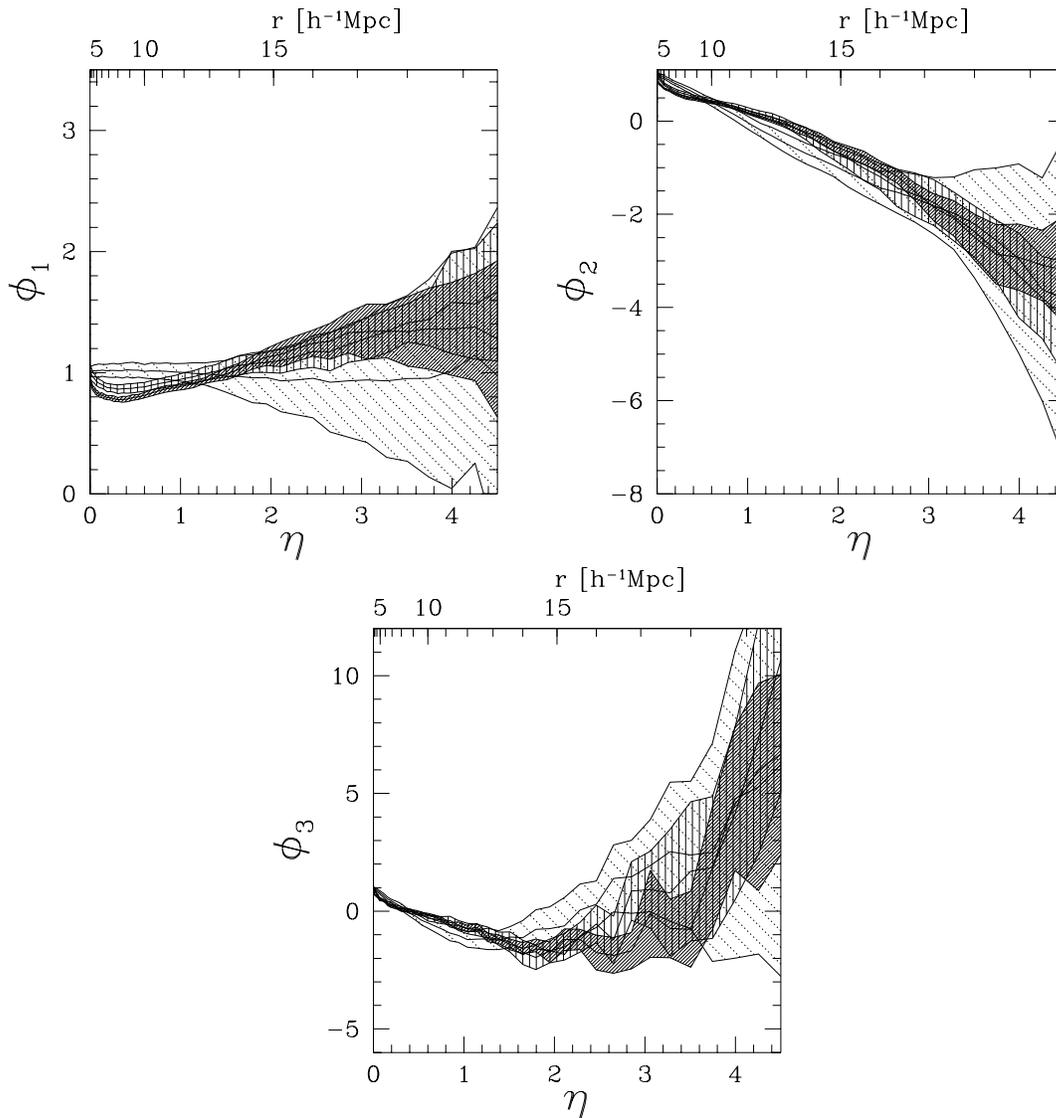


Abbildung 3.17: Die Minkowskifunktionale  $\phi_\mu$  einer volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe aus dem CfA1 (dunkel schraffiert) und dem 1.2 Jy (mittel schraffiert) und einem Poissonprozeß (hell schraffiert). Die  $1\sigma$ -Bereiche wurden aus zufällige Stichproben mit 90% der Galaxien des CfA1 und 77% der Galaxien des 1.2 Jy bestimmt.

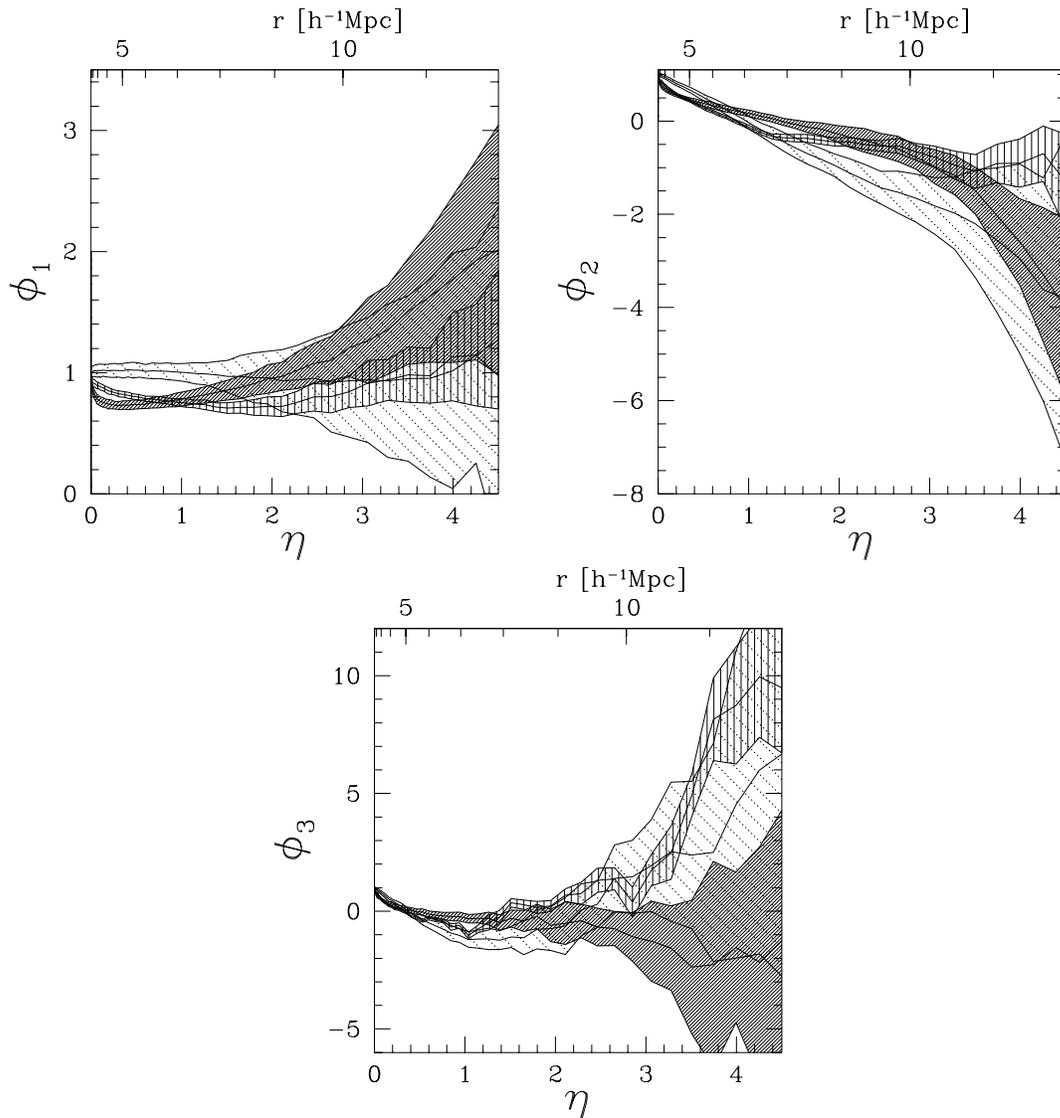


Abbildung 3.18: Die Minkowskifunktionale  $\phi_\mu$  einer volumenlimitierten Stichprobe mit  $60h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe aus dem CfA1 (dunkel schraffiert) und dem 1.2 Jy (mittel schraffiert) und einem Poissonprozeß (hell schraffiert). Die  $1\sigma$ -Bereiche wurden aus zufälligen Stichproben mit 42% der Galaxien des CfA1 und 90% der Galaxien des 1.2 Jy bestimmt.

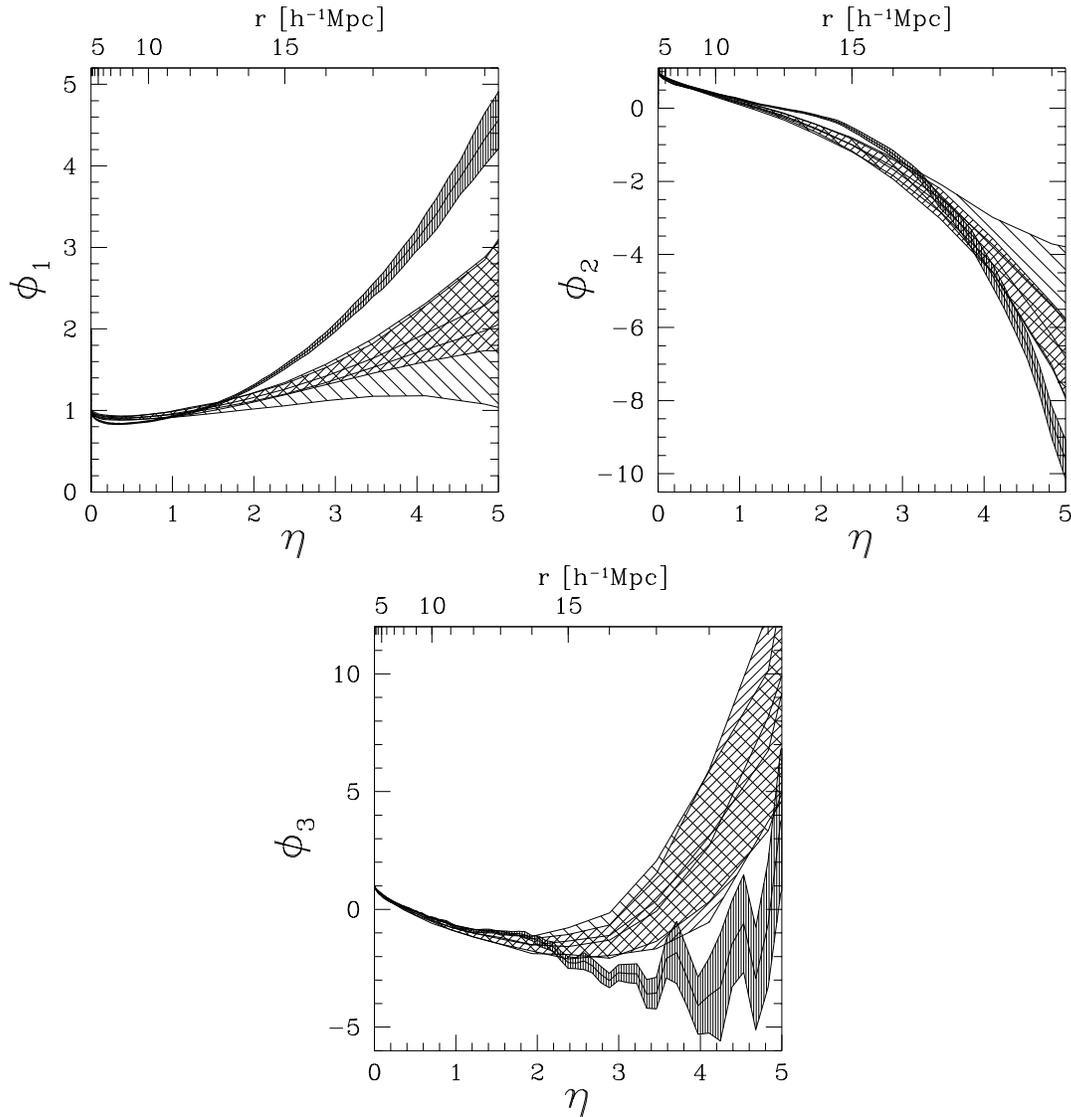


Abbildung 3.19: Die Minkowskifunktionale  $\phi_\mu$  einer volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe und einer simulierten Stichprobe, nur die südlichen Teile. Simulationen im Geschwindigkeitsraum: hell schraffiert, im Ortsraum: mittel schraffiert, IRAS Daten: dunkel schraffiert.

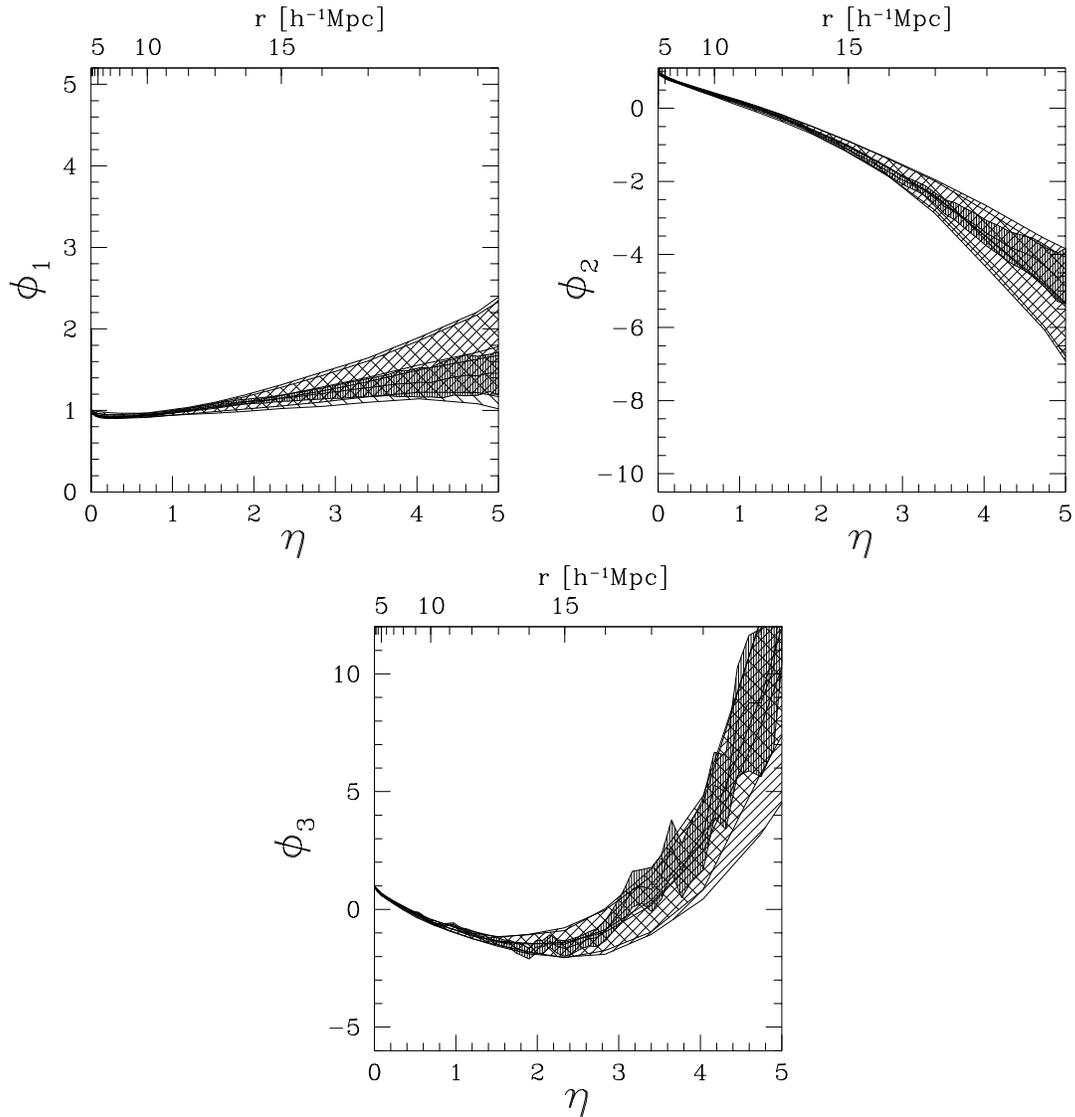


Abbildung 3.20: Die Minkowskifunktionale  $\phi_\mu$  einer volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe und einer simulierten Stichprobe, nur die nördlichen Teile. Simulationen im Geschwindigkeitsraum: hell schraffiert, im Ortsraum: mittel schraffiert, IRAS Daten: dunkel schraffiert.

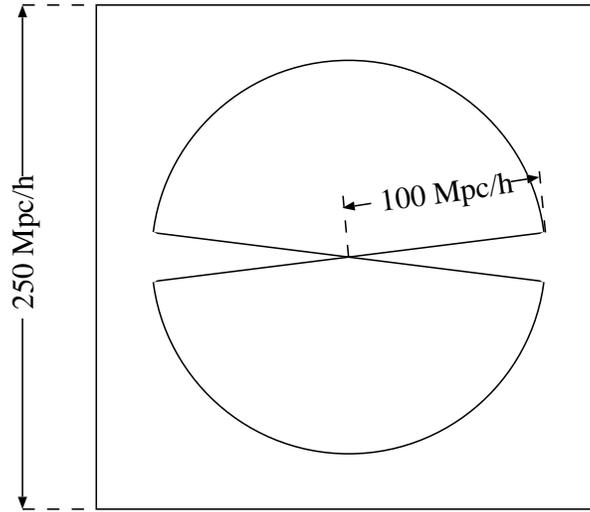


Abbildung 3.21: Skizze des simulierten Galaxienkatalogs im Würfel mit periodischen Randbedingungen der Simulation.

gleichen Geometrie wie die  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Stichprobe aus der Simulation extrahieren (siehe Abbildung 3.21). Wir selektieren die Daten sowohl im Ortsraum als auch im Geschwindigkeitsraum. In den Abbildungen 3.19 und 3.19 sind die Minkowskifunktionale der simulierten Kataloge im Orts- und Geschwindigkeitsraum zusammen mit den Minkowskifunktionalen der 1.2 Jy Daten aus Abbildung 3.7 zu sehen. Die Fehler in den Werten der Simulationen wurden aus zwanzig Stichproben, die wie oben beschrieben aus der Simulation extrahiert wurden, geschätzt. Die Ergebnisse im Orts- und Geschwindigkeitsraum sind innerhalb der Fehler konsistent, wobei die Resultate im Geschwindigkeitsraum eine größere Varianz zeigen. Dies gibt zu der Hoffnung Anlaß, daß die Ergebnisse, die wir aus den Beobachtungsdaten gewonnen haben, nicht von Rotverschiebungseffekten dominiert werden.

Die Minkowskifunktionale des nördlichen Teils können in der Simulation reproduziert werden (siehe Abbildungen 3.20), wohingegen die Werte der Minkowskifunktionale  $\phi_2$  und  $\phi_3$  im südlichen Teil nur bis  $10h^{-1}\text{Mpc}$  konsistent mit den simulierten Galaxienkatalogen sind. Auf größeren Skalen weichen die simulierten Werte drastisch von den beobachteten Werten ab (siehe Abbildung 3.19), wobei Unterschiede in  $\phi_1$  bereits auf kleinen Skalen beobachtbar sind.

Diese Untersuchung zeigt, daß Simulationen in Würfeln mit  $256h^{-1}\text{Mpc}$  Seitenlänge nicht in der Lage sind, die großskaligen Fluktuationen in den Clusterungseigenschaften der leuchtenden Materie zu reproduzieren. Betrachten wir Abbildung 3.21 so sehen wir, daß der simulierte Katalog mit einem Radius von  $200h^{-1}\text{Mpc}$  Durchmesser einen großen Teil des Simulationsvolumens ausfüllt. Andererseits erzwingen die periodischen Randbedingungen Homogenität, spätestens auf der Skala der Seitenlänge des Würfels, und unterdrücken somit Fluktuationen auf großen Skalen. In der Tat verlangen wir zuviel von dieser Simulation, die in erster Linie zur Untersuchung des Verhältnisses von Dichte- und Geschwindigkeits-

feld in unserer näheren Umgebung bis zu  $60h^{-1}\text{Mpc}$  erstellt wurde. Um die beobachteten Fluktuationen reproduzieren zu können, müssen die Simulationen einfach deutlich größer sein.

### 3.2.3 Fluktuationen anderer Maße

Das Hauptergebnis unserer Untersuchungen, die großen Fluktuationen in den Clusterungseigenschaften, wurden bisher nur mit Hilfe der Minkowskifunktionale gewonnen. Im folgenden werden wir zeigen, daß diese Fluktuationen auch mit anderen Methoden detektiert werden können.

#### *J*-Funktion

Wir führen hierzu eine Analyse der volumenlimitierten Stichproben mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  und mit  $200h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe mit der sphärischen Kontaktverteilung  $F(r)$ , der nächsten Nachbarverteilung  $G(r)$  und der  $J(r)$ -Funktion durch. Wir verwenden die Minus-Schätzer, wie sie in den Abschnitten A.4, A.5 und A.6 besprochen werden.

Die Varianzen in Abbildung 3.22 wurden für die Daten aus 15 Stichproben mit 90% der Galaxien geschätzt (Jackknife-Fehler), und für den Poissonprozeß aus 15 Realisierungen. Der Fehler in der  $J(r)$ -Funktion nimmt mit dem Radius  $r$  zu, da  $F(r)$  und  $G(r)$  gegen eins konvergieren und daher  $(1 - G(r))/(1 - F(r))$  divergieren kann. Deutlich unterscheiden sich die sphärischen Kontaktverteilungen  $F(r)$  zwischen nördlichem und südlichem Teil. Vor allem der niedrigere Wert im Süden auf Skalen von 10 bis  $20h^{-1}\text{Mpc}$  zeigt stärkere Clustern an, wohingegen die Werte von  $F(r)$  für den nördlichen Teil verträglich mit einer Poissonverteilung sind. Die Nächste-Nachbarverteilungen  $G(r)$  fallen für den nördlichen und südlichen Teil fast zusammen, unterscheiden sich aber deutlich vom Poisson-Wert. Wie nicht anders erwartet für die clusternde Galaxienverteilung, führt dieses Verhalten von  $F(r)$  und  $G(r)$  zu einem  $J(r) \leq 1$ . Wir erkennen auch das stärkere Clustern des südlichen Teils auf allen Skalen.

In Abbildung 3.23 sind  $F(r)$ ,  $G(r)$  und  $J(r)$  für die volumenlimitierte Stichprobe mit einer Tiefe von  $200h^{-1}\text{Mpc}$  dargestellt. Aufgrund der geringeren Teilchenzahl erhalten wir deutlich größere Varianzen. Im nördlichen Teil kann daher weder  $F$ ,  $G$  noch  $J$  von den Poisson-Werten unterschieden werden. Hingegen unterscheidet sich der südliche Teil weiterhin in  $G$  und  $J$  vom nördlichen Teil und einem Poissonprozeß.

#### Varianz $\sigma^2$

Methoden wie die Minkowskifunktionale sowie  $F$ ,  $G$  und  $J$  enthalten in integraler Form Korrelationen höherer Ordnung (siehe Abschnitt 2.5.2 und 2.4). Im folgenden zeigen wir, daß diese Fluktuationen bereits in Größen zweiter Ordnung deutlich erkennbar sind. Wir verwenden hierzu die Varianz  $\sigma^2(r)$  des Dichtekontrasts, also der Varianz der Anzahl an Punkten in einer Kugel  $\mathcal{B}_r$  bezüglich der Varianz eines Poissonprozesses (siehe Abschnitt 2.3.4).

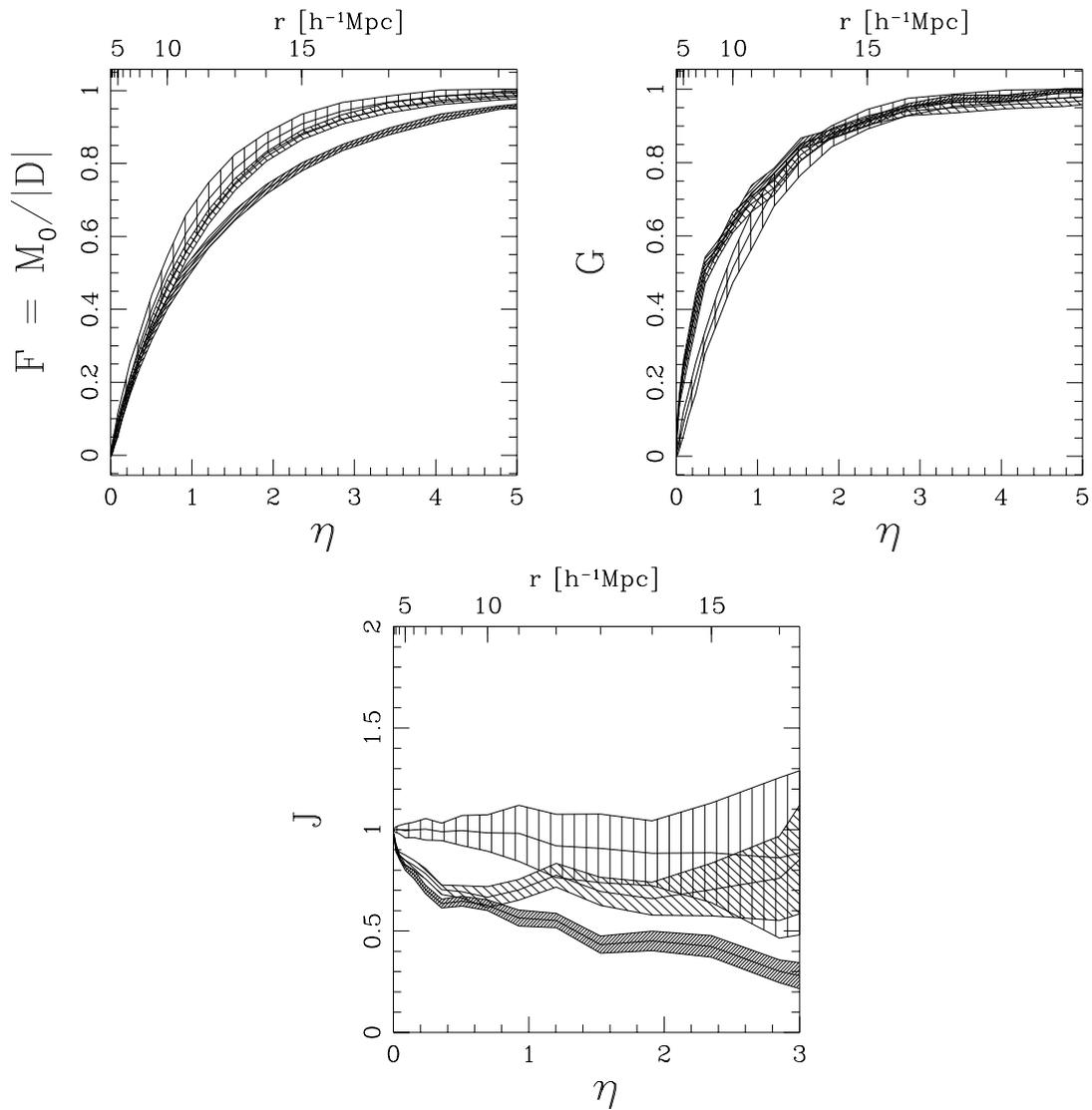


Abbildung 3.22:  $F$ ,  $G$  und  $J$  der volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe; südlicher Teil: dunkel schraffiert, nördlicher Teil: mittel schraffiert, Poissonprozeß: hell schraffiert.

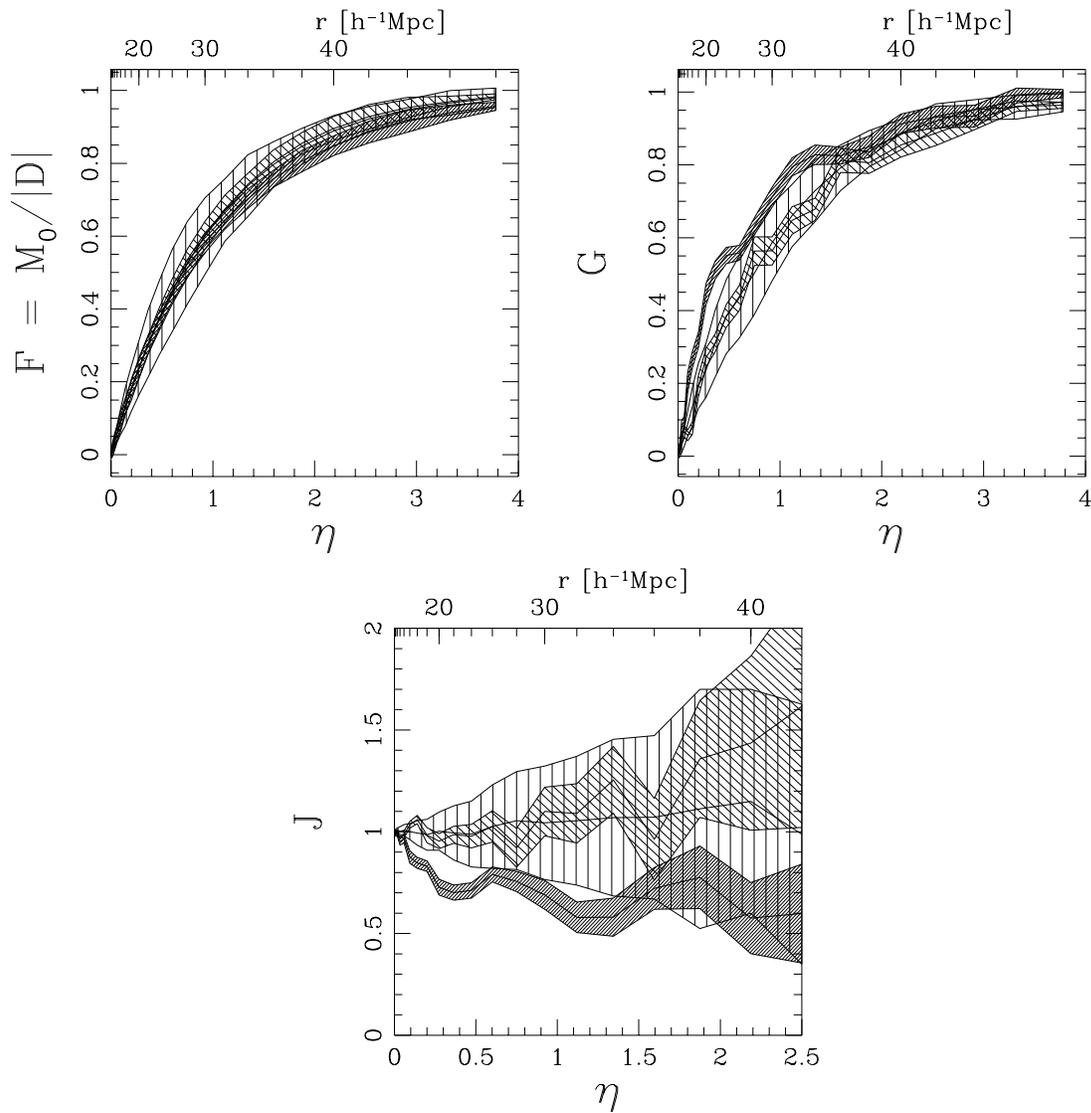


Abbildung 3.23:  $F$ ,  $G$  und  $J$  der volumenlimitierten Stichprobe mit  $200h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe; südlicher Teil: dunkel schraffiert, nördlicher Teil: mittel schraffiert, Poissonprozeß: hell schraffiert.

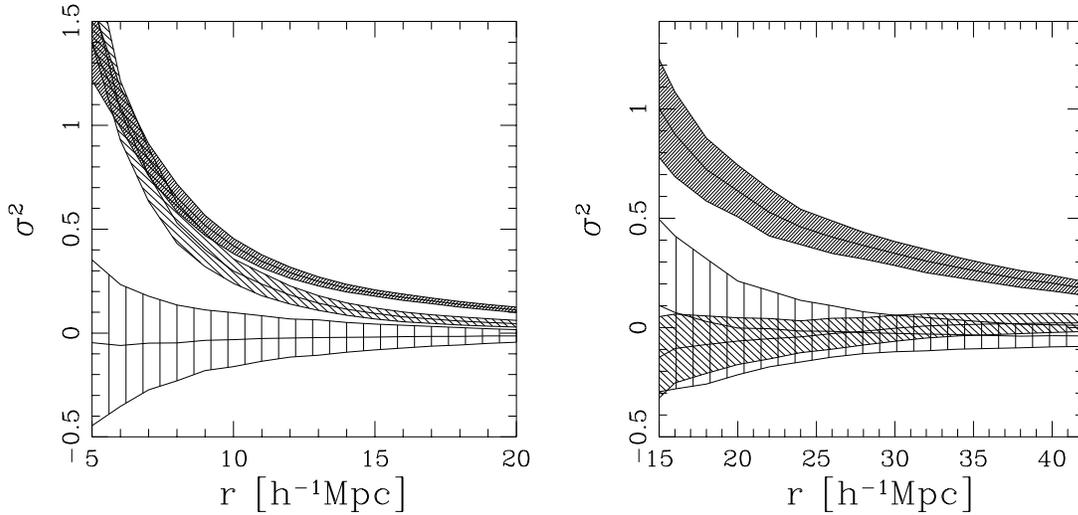


Abbildung 3.24:  $\sigma^2(r)$  der volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe (links) und  $200h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe (rechts); südlicher Teil: dunkel schraffiert, nördlicher Teil: mittel schraffiert, Poissonprozeß: hell schraffiert.

In Abbildung 3.24 ist  $\sigma^2(r)$  für die volumenlimitierten Stichproben mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe und  $200h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe aufgetragen. In der  $100h^{-1}\text{Mpc}$  tiefen Stichprobe zeigen bei  $8h^{-1}\text{Mpc}$  sowohl der nördliche als auch der südliche Teil eine vergleichbare Varianz. Wir erhalten  $\sigma_8 := \sigma(8h^{-1}\text{Mpc}) = 0.81 \pm 0.06$  ( $1\sigma$ -Fehler, südlicher Teil) und  $\sigma_8 = 0.73 \pm 0.07$  (nördlicher Teil). Diese direkt gemessenen Größen stimmen gut mit dem Wert  $\sigma_8 = 0.77 \pm 0.19$  überein, wie er Fisher et al. (1994) mit Gleichung (2.58) und einem vorherigen Fit an die Paarkorrelationsfunktion  $\xi_2$  im Rotverschiebungsraum erhalten. Auf größeren Skalen unterscheiden sich dann die Werte für den nördlichen und den südlichen Teil untereinander und auch vom Poissonprozeß. Für die volumenlimitierten Stichproben mit  $200h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe erhalten wir stark unterschiedliche Varianzen  $\sigma^2(r)$  zwischen dem nördlichen und südlichen Teil, jedoch nur der südliche Teil unterscheidet sich vom Poissonprozeß. Die Ergebnisse der zwei Stichproben mit Tiefe  $100h^{-1}\text{Mpc}$  und  $200h^{-1}\text{Mpc}$  sind *nicht* konsistent (siehe hierzu die Diskussion weiter unten, sowie in Abschnitt 2.3.4).

In Abbildung 3.25 sind die über Norden und Süden gemittelten Varianzen  $\sigma^2$ , zusammen mit den bereits bei Oliver et al. (1996) und Fisher et al. (1994) angegebenen Werten aufgetragen. Die Mittelwerte für die volumenlimitierte Stichprobe mit  $200h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe stimmen gut mit den Ergebnissen von Oliver et al. (1996) überein. Da jedoch  $\sigma^2$  deutliche Fluktuationen zwischen Norden und Süden zeigt, sind die Fehler, wie sie von Oliver et al. (1996) angegeben werden, deutlich zu niedrig. Dies ist vermutlich bedingt durch ihre Methode: Die Autoren berechnen  $\sigma^2$  in Schalen und benutzen die mittlere Teilchenzahldichte *in einer Schale* zur Berechnung der Varianz. Sie wichten daher implizit mit der Selektionsfunktion und machen somit starken Gebrauch von der angenomme-

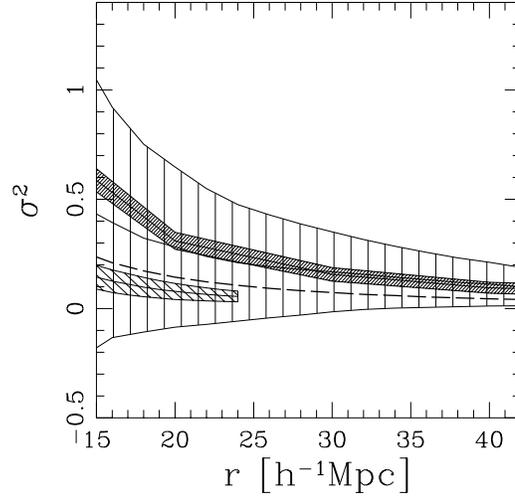


Abbildung 3.25:  $\sigma^2(r)$  der volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe (mittel schraffiert) und  $200h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe (hell schraffiert), über Norden und Süden gemittelt. Der dunkel schraffierte Bereich sind die Resultate von Oliver et al. (1996). Die gestrichelte Linie gibt  $\sigma^2$  nach Gleichung (2.58) an, mit  $r_0 = 4.27h^{-1}\text{Mpc}$  und  $\gamma = 1.68$  (Fisher et al. 1994).

nen Homogenität. Weiterhin ist noch  $\sigma^2(r)$  nach Gleichung (2.58) aufgetragen, mit den Werten  $r_0 = 4.27_{-0.81}^{+0.66}h^{-1}\text{Mpc}$  und  $\gamma = 1.68_{-0.29}^{+0.36}$  wie sie von Fisher et al. (1994) für eine volumenlimitierte Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe bestimmt wurden. Hierzu wurde  $\xi_2(r) = (r_0/r)^\gamma$  im Intervall 1 bis  $13h^{-1}\text{Mpc}$  an die beobachteten Werte gefittet. Innerhalb der angegebenen Fehlerbereiche passen die Werte dieses Fits mit unseren Resultaten für die Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe zusammen. Eine weitere interessante Beobachtung ist, daß sich die Werte von  $\sigma^2$ , bestimmt aus den volumenlimitierten Stichprobe mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe und  $200h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe deutlich unterscheiden. Auch die Ergebnisse von Oliver et al. (1996) und Fisher et al. (1994) sind *nicht* konsistent! Dieser Unterschied belegt die Sensitivität von  $\sigma^2$  bezüglich der Größe ( $100h^{-1}\text{Mpc}$  sowie  $200h^{-1}\text{Mpc}$ ) und der Dichte ( $\bar{\rho}_{100} = 1.84 \times 10^{-4} (h^{-1}\text{Mpc})^{-3}$  sowie  $\bar{\rho}_{200} = 9.05 \times 10^{-6} (h^{-1}\text{Mpc})^{-3}$ ) der Stichproben. Für eine skaleninvariante Galaxienverteilung läßt sich diese Abhängigkeit explizit berechnen (siehe Gleichung (2.60)).

### 3.2.4 Zusammenfassung

Mit einer separaten Untersuchung der nördlichen und südlichen Teile von Stichproben des IRAS 1.2 Jy-Galaxienkatalogs, konnten wir zeigen, daß auf Skalen von  $200h^{-1}\text{Mpc}$  noch deutliche Fluktuationen in der Morphologie der Galaxienverteilung vorherrschen. Eine ausführliche Untersuchung möglicher Fehlerquellen sowie von Selektionseffekten zeigte, daß diese Fluktuationen real in der Verteilung leuchtender Materie vorhanden sind. Ei-

ne Vergleich mit einer  $N$ -Körperrechnung zeigte, daß CDM-Simulationen in periodisch fortgesetzten Würfeln mit  $250h^{-1}\text{Mpc}$  Kantenlänge, diese beobachteten Fluktuationen nicht reproduzieren können. Die Fluktuationen in den Minkowskifunktionalen zwischen den nördlichen und südlichen Teilen ließen sich mit der  $J(r)$ -Funktion und selbst mit der Zweipunktstatistik  $\sigma^2(r)$  bestätigen.

### 3.3 Vergleich der Verteilung von Galaxienclustern mit CDM-Modellen

In diesem Abschnitt fassen wir unsere Untersuchungen zur Verteilung der Galaxiencluster mit Hilfe von Minkowskifunktionalen zusammen (Kerscher et al. 1997b). Die Simulationsrechnungen wurden am AIP in Potsdam von Jörg Retzlaff, Stefan Gottlöber und Volker Müller durchgeführt. Die Erstellung der simulierten Cluster und die Bereitstellung des Cluster Katalogs wurde von Stefano Borgani und Manolis Plionis übernommen.

Es ist bereits seit längerem bekannt, daß das CDM-Modell (siehe unten) die Verteilung leuchtender Materie im Universum nicht erklären kann. Eine etwas positivere Darstellung findet man bei Davis et al. (1993) wo auch einige Rettungsversuche von CDM dokumentiert sind, wie die zusätzliche Berücksichtigung einer kosmologischen Konstanten und später eines „Tilts“ des primordialen Spektrums. Es zeigt sich, daß ein COBE-normiertes SCDM-Modell zu viele Galaxiencluster liefert. Andererseits können Strukturbildungsmodelle auch auf die Anzahldichte der Cluster normiert werden (dies entspricht der  $\sigma_8$  Normierung). Wir interessieren uns im Rahmen dieser Arbeit nicht für die Anzahldichte der Galaxiencluster, sondern wollen untersuchen, wie gut *Strukturen*, wie sie in der beobachteten Clusterverteilung zu sehen sind, durch unterschiedliche CDM-Modelle wiedergegeben werden können. Daher verwenden wir die COBE-Normierung und normieren am Ende der Simulation ein zweites Mal auf die beobachtete Anzahldichte der Galaxiencluster.

#### 3.3.1 Beschreibung der CDM-Simulationen

Wir simulieren die Entwicklung großräumiger Strukturen im Universum mit vier Varianten von räumlich flachen Modellen mit Kalter Dunkler Materie (CDM):

- Das Standard-Kalte-Dunkle-Materie-Modell (SCDM) mit  $\Omega_0 = 1$  und  $h = 0.5^5$ , das wir als Referenzmodell verwenden.
- Ein „getiltetes“-Kalte-Dunkle-Materie-Modell (TCDM) mit primordiales<sup>6</sup> Spektralindex  $\nu = 0.9$ .

<sup>5</sup>Längen werden in Einheiten von  $100 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$  angegeben.

<sup>6</sup>Der Index  $\nu$  in einem skalenfrei angenommenen Leistungsdichtespektrum (siehe Abschnitt 2.3.3) mit  $P(k) \propto k^\nu$ , vor der Multiplikation mit der materieabhängigen Transferfunktion, wird primordialer Spektralindex genannt (siehe z.B. Börner 1993).

Tabelle 3.2: Parameter der Dunklen-Materie-Modelle.

Modell	$h$	$\Omega_0$	$\Omega_\Lambda$	$\nu$	$\sigma_8$
SCDM	0.5	1	0	1	1.37
TCDM	0.5	1	0	0.9	1.25
$\Lambda$ CDM	0.7	0.35	0.65	1	1.30
BSI	0.5	1	0	–	0.60

- Ein Kalte-Dunkle-Materie-Modell ( $\Lambda$ CDM) mit  $\Omega_0 = 0.35$ ,  $h = 0.7$  und mit kosmologischer Konstante, die Anlaß zu dem Term  $\Omega_\Lambda = 0.65$  gibt.
- Ein Kalte-Dunkle-Materie-Modell mit gebrochener Skaleninvarianz (BSI), das mit einen Knick im primordialen Spektrum versehen wurde. Dieses Spektrum wird durch den Ort des Knickes und die relative Amplitude beschrieben. Eine ausführliche Diskussion dieses Modells findet man bei Gottlöber et al. (1994), Amendola et al. (1995) und Kates et al. (1995).

Für das CDM-Modell benutzen wir die parametrisierte Transferfunktion von Bardeen et al. (1986), die eine verschwindende baryonische Komponente annimmt. Auf Skalen kleiner als  $5h^{-1}\text{Mpc}$  wird diese Approximation sicher falsch sein. Auf Skalen  $\gtrsim 10h^{-1}\text{Mpc}$ , die für unsere Untersuchung der Verteilung von Galaxienclustern interessant sind, können wir jedoch den Einfluß von Baryonen vernachlässigen. Die Leistungsdichtespektren wurden auf die Zwei-Jahres-Daten des COBE-Satelliten normiert (siehe Górski et al. 1994 und Stompor et al. 1995). Mögliche Beiträge von Gravitationswellen, wie sie in BSI- und TCDM-Modellen auftreten können, wurden nicht berücksichtigt. Zusätzlich führten wir unsere Analyse auch mit der Ein-Jahres-COBE-Normierung durch und konnten zeigen, daß unsere Ergebnisse kaum von dem genauen Wert der Normierung abhängen. Dies heißt vor allem, daß wir vergleichbare Ergebnisse für die Vier-Jahres-COBE-Normierung erhalten sollten. Die Parameter der Modelle sind in Tabelle 3.2 zusammengefaßt, die entsprechenden Leistungsdichtespektren sind in Abbildung 3.26 dargestellt. Die Simulation wird mit einem Particle-Mesh-Verfahren (siehe Abschnitt 3.1.3) mit  $300^3$  Teilchen der Masse  $1.3 \times 10^{12}h^{-1}M_\odot$  und  $600^3$  Gitterzellen in einer Simulationsbox mit einer (mitschwimmenden) Seitenlänge von  $500h^{-1}\text{Mpc}$  durchgeführt. Dies entspricht einer räumlichen Auflösung von  $\simeq 1.7h^{-1}\text{Mpc}$  (zwei Zellen). Wir beginnen die Simulationen bei einer Rotverschiebung von  $z = 25$ . Wir schätzen den Effekt statistischer Schwankungen ab, indem wir diese Simulationen für vier SCDM- und drei  $\Lambda$ CDM-Realisierungen der Anfangsdichtefelder durchführen. Jeweils eine Realisierung wurde für TCDM und BSI durchgeführt.

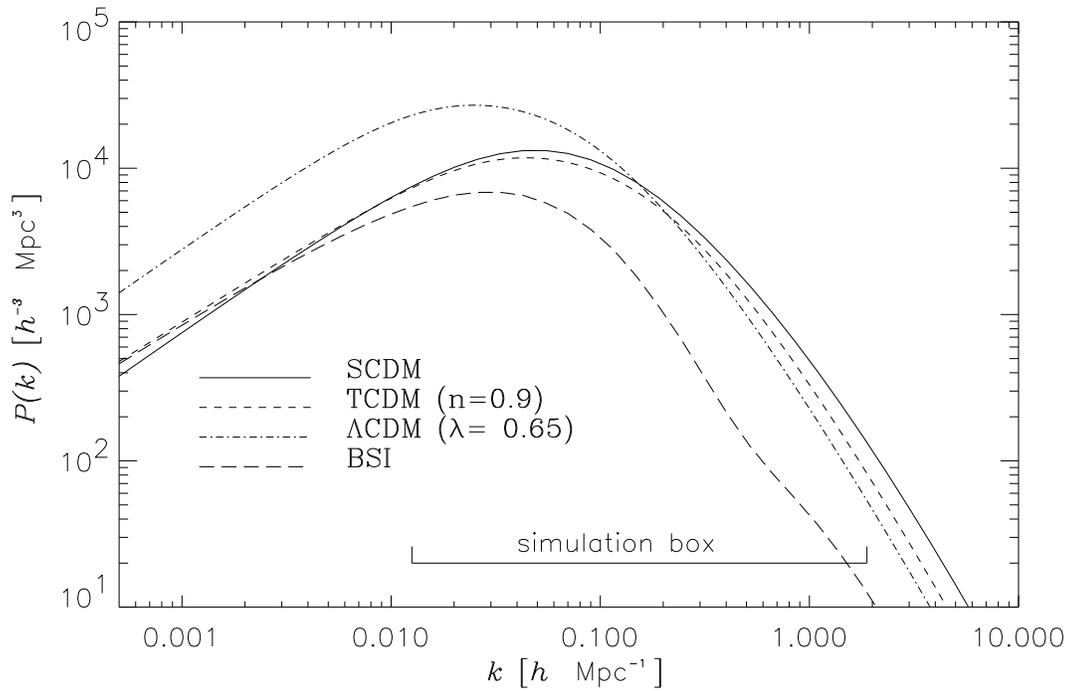


Abbildung 3.26: Die Leistungsdichtespektren für die SCDM-, TCDM-,  $\Lambda$ CDM- und BSI-Modelle. Der horizontale Balken markiert den Bereich zwischen der inversen Boxgröße ( $500h^{-1}\text{Mpc}$ ) und der Nyquist-Frequenz.

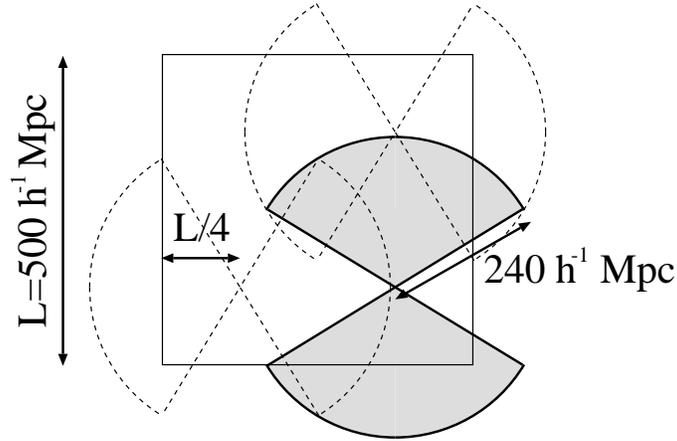


Abbildung 3.27: Die projizierten Positionen von drei Mock-Katalogen in der Simulationsbox.

### 3.3.2 Simulierte Galaxiencluster

Wir identifizieren Cluster in den Punktverteilungen der Simulationen mit einer iterativen Prozedur (Klypin & Rhee 1994). Hierzu konstruieren wir ein Dichtefeld auf einem Gitter mit  $600^3$  Stützstellen mit einem sogenannten „Cloud-in-Cell“ Verfahren (einem Dreieckskern). Wir identifizieren Dichtemaxima, zentrieren eine Kugel mit Radius  $1.5h^{-1}\text{Mpc}$  (dem Abell-Radius) jeweils an einem Maximum und berechnen den Massenschwerpunkt innerhalb dieser Kugel. An diesem Punkt zentrieren wir erneut eine Kugel und iterieren den ganzen Vorgang. Nach ungefähr fünf Schritten konvergiert dieses Verfahren und wir verwenden die Koordinate des letzten Schwerpunktes als potentielles Clusterzentrum. Aus dieser Liste von Clusterkandidaten wählen wir die  $N_{cl}$  massivsten Objekte aus, wobei  $N_{cl} = (L/d_{cl})^3$  die mittlere Anzahl von Clustern in der Simulationsbox mit mittlerem Abstand  $d_{cl}$  ist. Aus dieser Clusterverteilung in der Simulationsbox mit periodischen Randbedingungen extrahieren wir nun Mock-Clusterkataloge, die die gleichen Beobachtungseffekte wie der Abell/ACO-Katalog beinhalten. In jeder Simulationsbox plazieren wir acht Beobachter mit einer Distanz von  $L/4 = 125h^{-1}\text{Mpc}$  von den benachbarten Rändern. Wir betrachten anfangs alle Cluster bis zu einem maximalen Abstand von  $240h^{-1}\text{Mpc}$  innerhalb der Stichprobengeometrie nach Abbildung 3.27. Wir dünne diese Punktverteilung zufällig aus, um die Rotverschiebungsselektionsfunktion (3.8) und die Selektion aufgrund galaktischer Absorption (3.7) zu berücksichtigen. Um den Überlapp der Mock-Kataloge zu minimieren, stehen die galaktischen Ebenen der jeweiligen Beobachter orthogonal aufeinander. Es bleibt immer noch ein signifikanter Überlapp, d.h. die acht Mocksamples sind voneinander nicht statistisch unabhängig.

Minkowskifunktionale reagieren sensitiv auf die Anzahldichte. Im Falle eines Poissonprozeß können die Skalierungseigenschaften mit der Teilchendichte und dem Radius der Bälle  $\mathcal{B}_r$  direkt aus der Homogenität (2.116) abgeleitet werden. Für allgemeine Punkt-

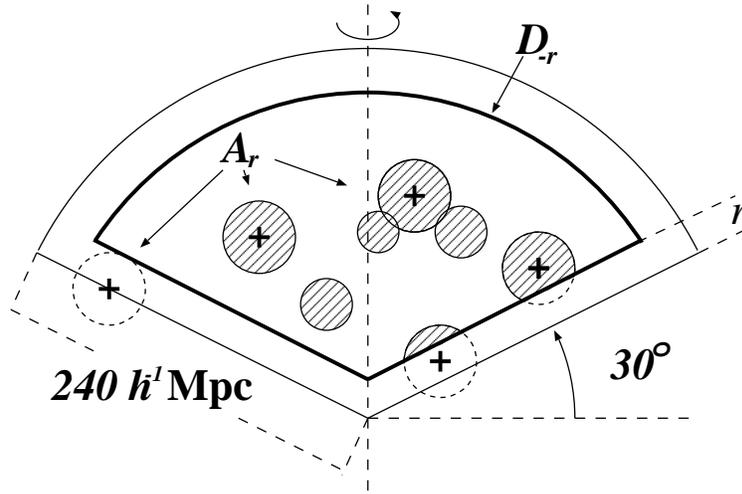


Abbildung 3.28: Ein zweidimensionaler Schnitt durch eine Hälfte der Beobachtungsgeometrie. Der schattierte Bereich ist die Menge  $A_r \cap D_{-r}$ , wobei  $D_{-r}$  das um  $r$  verkleinerte Beobachtungsfenster  $D$  ist.

verteilungen sind die Skalierungseigenschaften nicht bekannt<sup>7</sup>. Daher müssen wir in den Mock-Katalogen jeweils die Anzahl an Abell- und ACO- Clustern reproduzieren. Hierzu verringern wir zufällig die Teilchenzahl im Abell-Teil bis wir den Dichteunterschied  $\bar{\rho}_{\text{Abell}}/\bar{\rho}_{\text{ACO}} \approx 0.7$  zwischen den Katalogen reproduzieren. Da die Teilchenzahl in der gesamten Simulationsbox normiert wurde, fluktuieren die Teilchenanzahlen in den einzelnen Mock-Katalogen im Mittel mit 10%, mit einzelnen Ausreißern bis zu 30%. Wir verwenden dies als eine erste Abschätzung der kosmischen Varianz (der Ensemble Varianz) der Verteilung von Galaxienclustern.

Wie wir sehen werden, wird die Varianz in den Minkowskifunktionalen von der Schwankung zwischen den „Beobachtern“ bereits innerhalb einer Simulationsbox dominiert. Die Fluktuationen zwischen Simulationen mit unterschiedlichen Realisierungen der Anfangsbedingungen eines CDM-Modells sind deutlich geringer.

### 3.3.3 Minkowskifunktionale der Abell/ACO-Galaxiencluster

Wie in Abschnitt 3.2 verwenden wir Minkowskifunktionale zur Untersuchung der Verteilung der Galaxiencluster. Wir dekorieren die Punkte  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ , gegeben durch die Positionen der Galaxiencluster, mit Kugeln  $\mathcal{B}_r$ , wobei wir den Radius  $r$  als diagnostischen Parameter verwenden. Mit den Schätzern aus Anhang A.7 (siehe auch Abbildung 3.28) bestimmen wir die Volumendichten der Minkowskifunktionale  $m_\mu$  der Vereinigungsmenge  $\mathcal{A}_r = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$ .

<sup>7</sup>Zweipunktmaße, wie die Paarkorrelationsfunktion  $\xi_2(r)$ , sind für stationäre Punktprozesse invariant unter Skalierungen der Teilchendichte, oder sie skalieren trivial.

Wir analysieren hierzu den nördlichen Teil und den südlichen Teil des Abell/ACO–Cluster–Katalogs separat, und berechnen anschließend den Mittelwert und die Stichprobenvarianz<sup>8</sup>. Da sich die beiden Hälften nicht überlappen, ist dies äquivalent zur Analyse des gesamten Katalogs. Nach Definition geben wir die Dichten der Minkowskifunktionale in folgenden Einheiten an:

$$\begin{aligned} [m_0] &= 1, & [m_1] &= (h^{-1}\text{Mpc})^{-1}, \\ [m_2] &= (h^{-1}\text{Mpc})^{-2}, & [m_3] &= (h^{-1}\text{Mpc})^{-3}. \end{aligned}$$

In Abbildung 3.29 sind die Dichten der Minkowskifunktionale des kombinierten Abell–ACO–Katalogs zum Vergleich mit den Werten für einen Poissonprozeß dargestellt. Die auffälligste Eigenschaft aller vier Minkowskifunktionale sind ihre breiteren Maxima. Dies ist bereits ein erster Hinweis auf clusternde Strukturen. Wir betrachten nun die beobachteten Eigenschaften der einzelnen Funktionale der Reihe nach:

Mit dem Minkowskifunktional  $m_0$  messen wir die Dichte des von den Kugeln  $\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$  überdeckten Volumens. Auf Skalen von  $25h^{-1}\text{Mpc}$  bis  $40h^{-1}\text{Mpc}$  liegt  $m_0$  als Funktion des Radius unterhalb den Werten eines Poissonprozesses. Die Volumendichte ist durch das Clustern der Galaxiencluster auf diesen Skalen reduziert.

Die Dichte der Oberfläche  $m_1$  hat ein Maximum bei  $20h^{-1}\text{Mpc}$  sowohl für den Poissonprozeß, als auch für die Daten. Dies ist ein Indiz für die granulare Struktur der Vereinigungsmenge  $\mathcal{A}_r$  auf dieser Skala. Bei dieser Skala ist auch die größte Abweichung von einem Poissonprozeß zu beobachten. Die niedrigeren Werte der Clusterverteilung zeigen erneut clusternde Strukturen an. Auf Skalen von  $(35 \dots 50)h^{-1}\text{Mpc}$  zeigt die positive Abweichung von den Poisson–Werten die Ausbildung von großen kohärenten Strukturen, wie Wänden und Filamenten an.

Die Minkowskifunktionale  $m_2$  und  $m_3$  geben ein detaillierteres Bild von der Vereinigungsmenge  $\mathcal{A}_r$  der Kugeln. Die Dichte der integralen mittleren Krümmung  $m_2$  der Daten erreicht ihr Maximum bei  $10h^{-1}\text{Mpc}$ , verursacht durch ein Übergewicht an konvexen Strukturen (positives  $m_2$ ). Die Dichte  $m_2$  am Maximum ist mit nur rund 70% des Poisson–Wertes deutlich außerhalb dessen  $3\sigma$ –Bereichs. Die integrale mittlere Krümmung  $m_2$  hat eine Nullstelle bei  $25h^{-1}\text{Mpc}$  (fast bei der gleichen Skala wie das Maximum von  $m_1$ ), die den Wechsel von überwiegend konvexen zu überwiegend konkaven Strukturen markiert. Deutliche Abweichungen von den Poisson–Werten treten dann bis zu Skalen von  $40h^{-1}\text{Mpc}$  auf. Die geringere mittlere Krümmung wird vermutlich durch vollständig zusammenhängende Leerräume in der Galaxienclusterverteilung hervorgerufen.

Die Dichte der Eulercharakteristik  $m_3$  beschreibt die globale Topologie der Clusterverteilung. Auf kleinen Skalen überlappen die Kugeln nicht, daher liefert jede Kugel den Beitrag eins zur Eulercharakteristik und  $m_3$  ist proportional zur Clusteranzahldichte. Mit größer werdendem Radius überlappen mehr und mehr Bälle und  $m_3$  wird kleiner. Der zu Beginn nahezu lineare Abfall der Eulercharakteristik der Abell/ACO–Daten deutet

<sup>8</sup>Diese Analyse wurde chronologisch vor der Analyse des IRAS 1.2 Jy durchgeführt. Wir haben damals den durchaus sichtbaren Unterschied zwischen Norden und Süden auf die unterschiedlichen Selektionseffekte im Abell– und ACO–Teil der Clusterverteilung geschoben und für nicht relevant erachtet. Unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Abschnitt 3.2, ist dies nicht mehr ohne weiteres möglich.

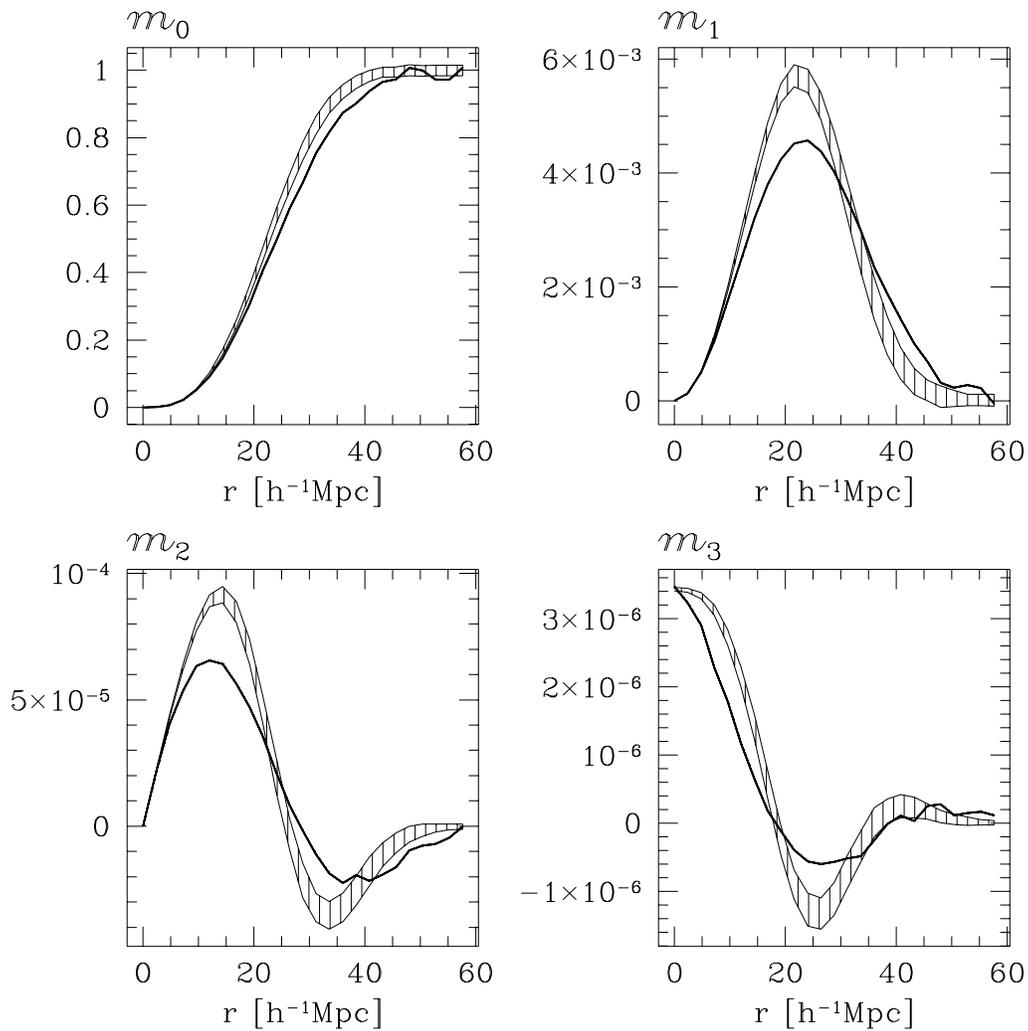


Abbildung 3.29: Dichten der Minkowskifunktionale des Abell/ACO-Galaxiencluster-Katalogs (durchgezogene Linie) und eines Poissonprozesses mit gleicher Teilchenzahl. Der schattierte Bereich gibt den  $1\sigma$ -Bereich geschätzt aus 100 Realisierungen des Poissonprozesses an.

auf verstärktes Clustern auf Skalen bis  $\lesssim 15h^{-1}\text{Mpc}$  hin. Dies bestätigt die Analyse von Bahcall (1988), die aufzeigte, daß Supercluster meist nur aus zwei bis drei nahe zusammenliegenden (reichen) Galaxienclustern bestehen. Durch das Auftreten von Tunneln fällt  $m_3$  bei ungefähr  $20h^{-1}\text{Mpc}$  unter Null (ein Doppeltorus hat Eulercharakteristik  $\chi = -1$ ). Das positive Maximum des Poissonprozesses bei  $\simeq 40h^{-1}\text{Mpc}$  zeigt das Auftreten von Kavitäten an. In  $m_3$  der Clusterdaten ist kein signifikantes Maximum auf großen Skalen auszumachen. Dies legt einen zweidimensionalen Träger der Galaxienverteilung nahe (siehe auch Borgani et al. 1994 und Abschnitt 3.5). Kavitäten, die einen positiven Beitrag zur Eulercharakteristik auf großen Skalen liefern, können sich nicht bilden, wenn die Dimension des Trägers zwei unterschreitet. Die erhöhte Dichte der Oberfläche  $m_1$  und die niedrigere mittlere Krümmung  $m_2$  auf Skalen von 30 bis  $45h^{-1}\text{Mpc}$  deutet auf große Hohlräume hin. Die Eulercharakteristik ist auf diesen Skalen weiterhin negativ. Ein reines Schalenmodell wie es von Bahcall (1988) vorgeschlagen wurde und von Mecke et al. (1994) als „doppelter Poissonprozeß“ benutzt wurde, erscheint daher unwahrscheinlich. Vielmehr deutet dies auf vollständig verbundene Leerräume hin. Da jedoch die Fluktuationen auf Skalen oberhalb von  $45h^{-1}\text{Mpc}$  durchaus beträchtlich sind, muß die letzte Interpretation mit Hilfe von tieferen Daten überprüft werden.

### 3.3.4 Vergleich mit den simulierten Clusterkatalogen

Da in der Konstruktion der Mock-Kataloge aus Abschnitt 3.3.2 bereits die Selektionseffekte berücksichtigt werden, können wir sie mit den gleichen Methoden, wie für Beobachtungsdaten verwendet, analysieren. Die Schwankungen in der Teilchenzahldichte der Mock-Kataloge sind deutlich in den Schwankungen der Dichte der Eulercharakteristik  $m_3$  bei  $r = 0$  zu sehen (siehe die Abbildungen 3.30 und 3.31). Dies zeigt, daß eine Stichprobe von der Größe des Abell/ACO-Katalogs (mit Durchmesser  $480h^{-1}\text{Mpc}$ ) noch immer nicht als „faire Stichprobe“ betrachtet werden kann (siehe auch Buchert & Martínez 1993). Ein Vergleich der vier SCDM- oder der drei  $\Lambda\text{CDM}$ -Realisierungen zeigt, daß die Fluktuationen in der Teilchenzahl der Mock-Kataloge bereits die Varianz in den Minkowskifunktionalen erklären können. Die Ensemble-Varianz, abgeschätzt durch die Fluktuationen zwischen unterschiedlichen Realisierungen, ist gegenüber den Beobachter-Beobachter-Fluktuationen innerhalb einer Simulation vernachlässigbar. In diesem Sinne beinhalten die Fehlerbanden in den Abbildungen die „kosmische Varianz“.

In Abbildung 3.30 vergleichen wir die Dichten der Minkowskifunktionale des SCDM- und TCDM-Modells mit denen der Abell/ACO-Daten. Beide Modelle clustern auf kleinen Skalen zu gering, wie wir an den größeren Maxima der Oberfläche  $m_1$  und der integralen mittleren Krümmung  $m_2$ , sowie am flacheren Abfall der Eulercharakteristik erkennen. Die größeren Werte des Volumens  $m_0$  deuten darüber hinaus auf schwächeres Clustern auf großen Skalen hin. Für das  $\Lambda\text{CDM}$ - und das BSI-Modell ist der gleiche Vergleich in Abbildung 3.31 dargestellt. Kleine Abweichungen von den Werten des Abell/ACO sind weiterhin zu sehen. Diese deuten ebenfalls auf ein zu schwaches Clustern hin. Beide Modelle verhalten sich jedoch deutlich besser als SCDM und TCDM.

Dieses Verhalten finden wir in Abbildung 3.32 bestätigt. Dort ist die Differenz vom

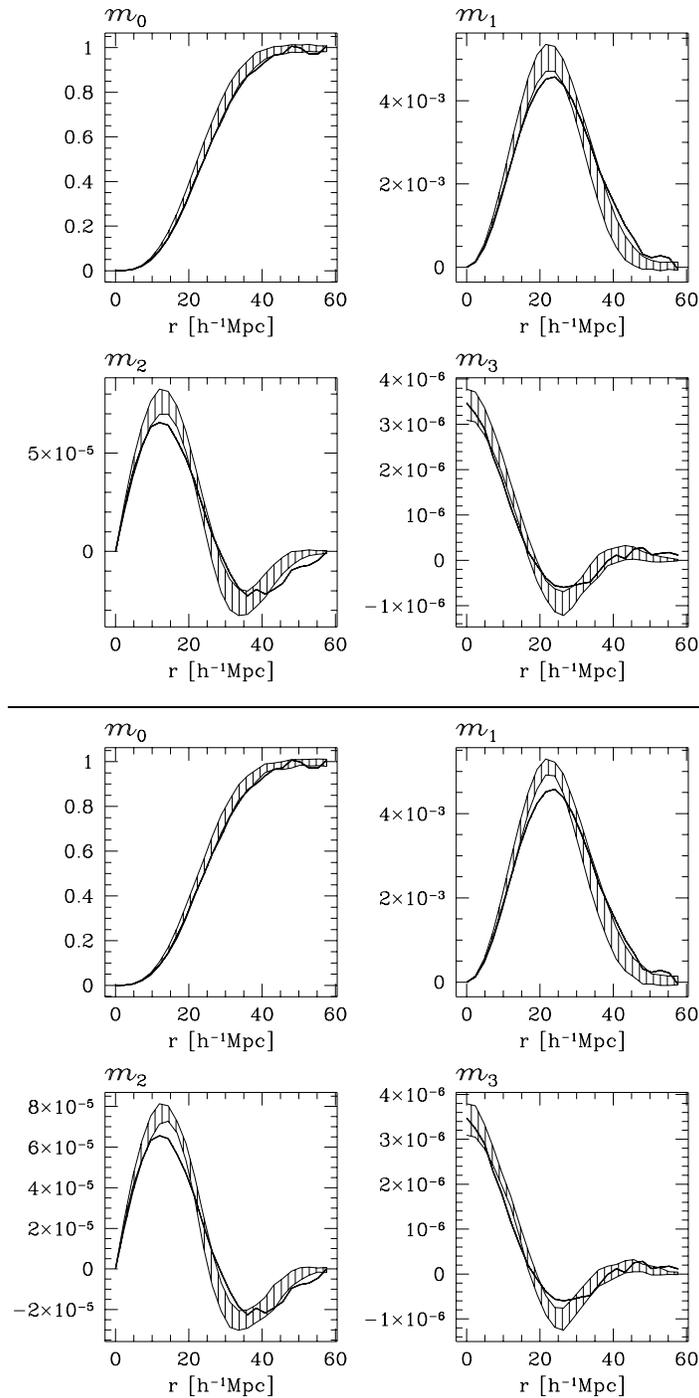


Abbildung 3.30: Dichten der Minkowskifunktionale des Abell/ACO-Katalogs (durchgezogene Linie) verglichen mit SCDM (schattierter Bereich, oben) und TCDM (schattierter Bereich, unten). Die  $1\sigma$ -Bereiche wurden mit dem Standardfehler der Mock Kataloge geschätzt.

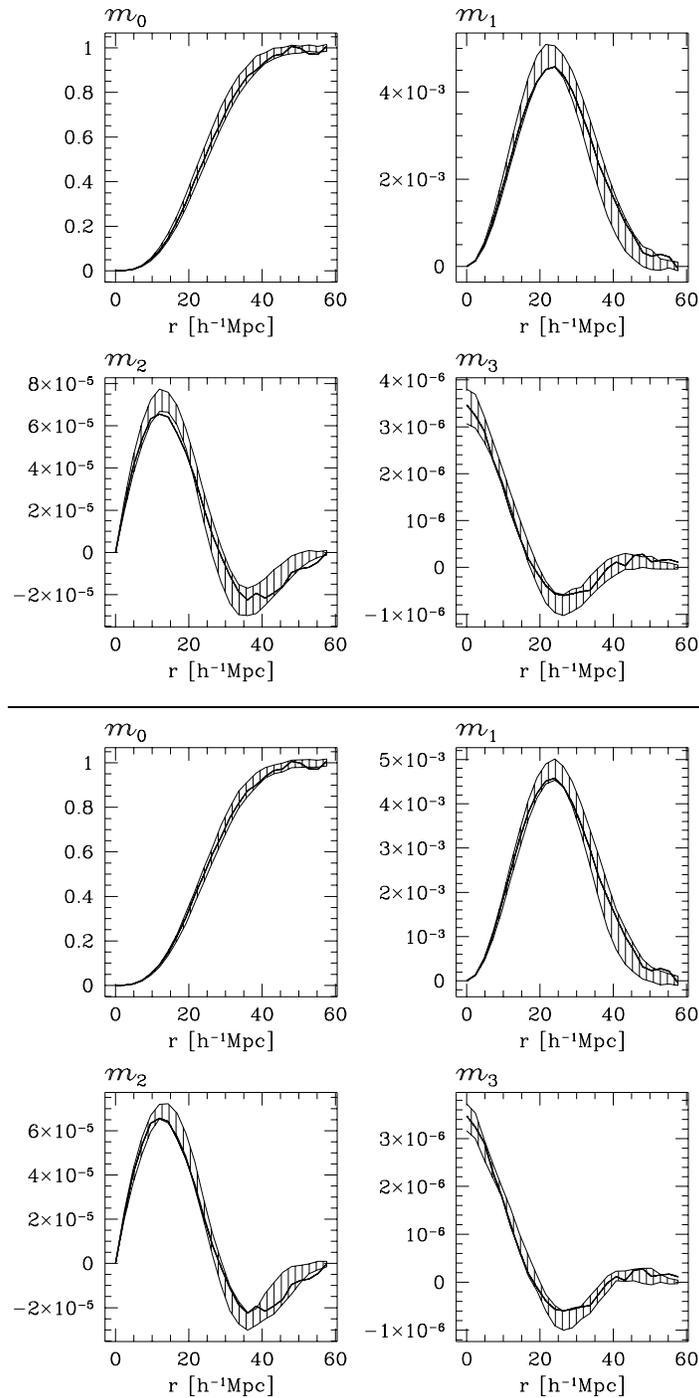


Abbildung 3.31: Dichten der Minkowskifunktionale des Abell/ACO-Katalogs (durchgezogene Linie) verglichen mit  $\Lambda\text{CDM}$  (schattierter Bereich, oben) und BSI (schattierter Bereich, unten). Die  $1\sigma$ -Bereiche wurden mit dem Standardfehler der Mock Kataloge geschätzt.

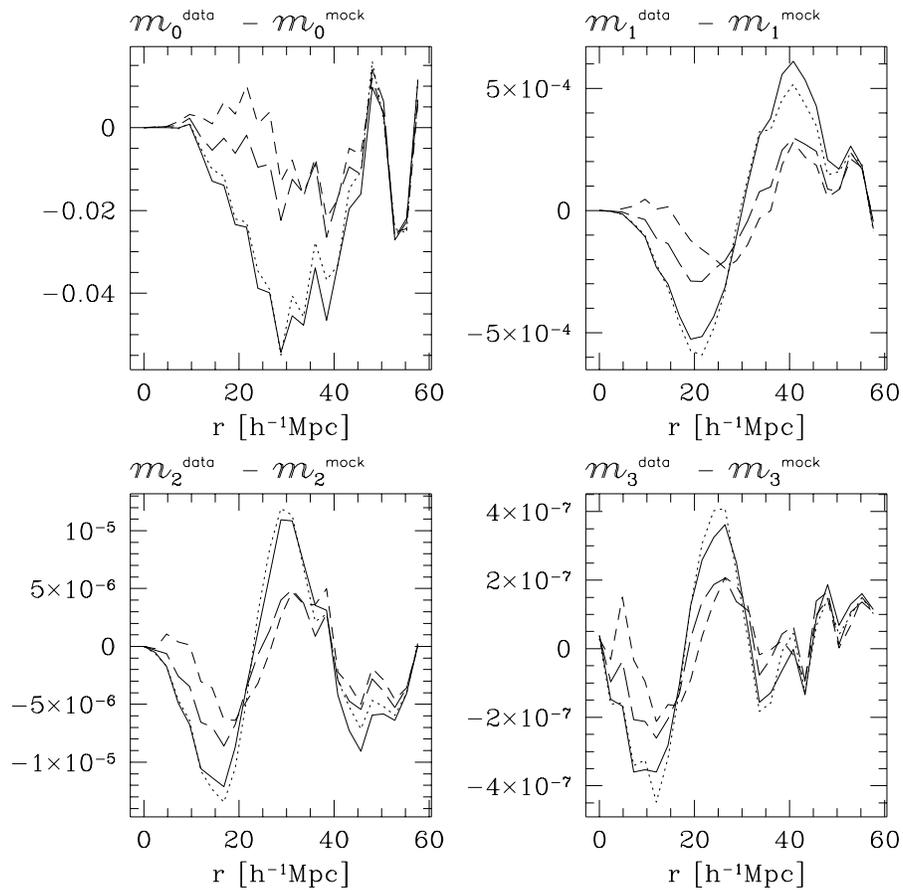


Abbildung 3.32: Differenz der Dichten der Minkowskifunktionale zwischen den Modellen und den Daten, in Abhängigkeit vom Radius. SCDM (durchgezogen), TCDM (gepunktet),  $\Lambda$ CDM (lang gestrichelt) und BSI (kurz gestrichelt).

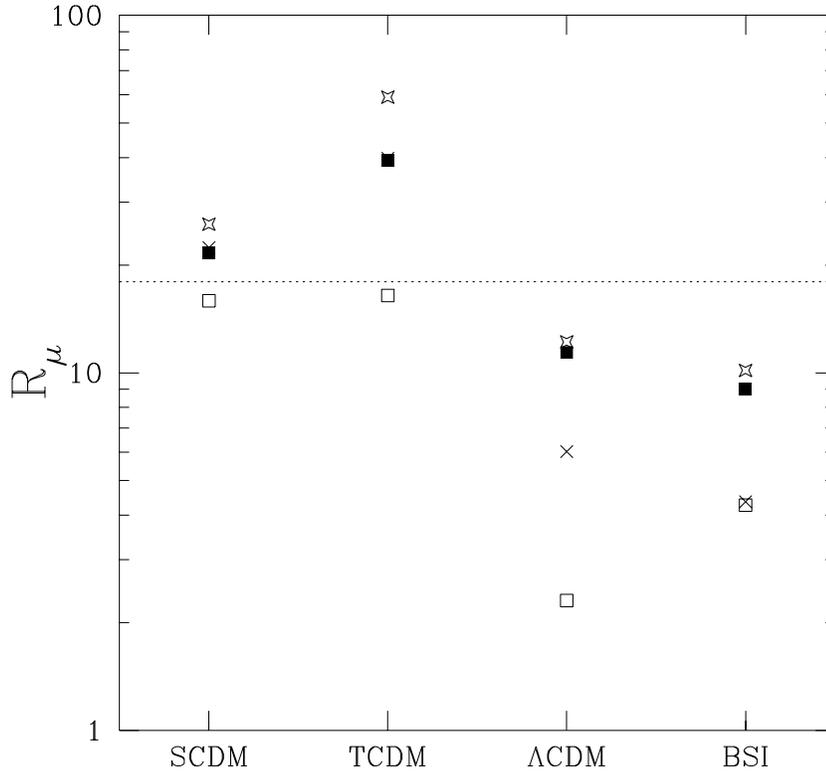


Abbildung 3.33: Die Statistik  $R_\mu$  der Simulationen im Vergleich mit den Abell/ACO-Daten: Für das Volumen  $R_0$  (leere Quader), die Oberfläche  $R_1$  (Kreuze), die mittlere integrale Krümmung  $R_2$  (Sterne) und der Eulercharakteristik  $R_3$  (gefüllte Quader).

$m_\mu^{\text{mock}} - m_\mu^{\text{data}}$  aufgetragen. Erneut wird die Galaxienclusterverteilung besser von  $\Lambda$ CDM- und BSI-Modellen, im Gegensatz zu SCDM- und TCDM-Modellen beschrieben. Auf Skalen größer als  $45h^{-1}\text{Mpc}$  sind die Resultate durch Fluktuationen in den Beobachtungsdaten dominiert.

Um die Signifikanz zu quantifizieren, berechnen wir das Risiko  $R_\mu$  mit einer fehlergewichteten Kostenfunktion von allen Minkowskifunktionalen  $m_\mu$  für jedes CDM-Modell. Dieses Risiko ist gleich dem  $\chi^2$ , wie es bei Maximum-Likelihood-Untersuchungen verwendet wird (Frieden 1991). Für  $N_r$  Radien erhalten wir

$$R_\mu = \sum_{i=1}^{N_r} \frac{(m_\mu^{\text{mock}}(r_i) - m_\mu^{\text{data}}(r_i))^2}{\sigma_\mu^{\text{mock}}(r_i)^2}, \quad (3.27)$$

wobei  $\sigma_\mu^{\text{mock}}(r)$  der Standardfehler der Minkowskifunktionale bei Radius  $r$ , bestimmt aus

den Mock-Katalogen, ist:

$$\sigma_{\mu}^{\text{mock}}(r) = \sqrt{\langle m_{\mu}^{\text{mock}}(r)^2 \rangle - \langle m_{\mu}^{\text{mock}}(r) \rangle^2}. \quad (3.28)$$

Diese Größen sind in Abbildung 3.33 aufgetragen. Wir beschränken uns auf 18 Radialwerte mit  $0 < r < 45h^{-1}\text{Mpc}$ . Daher sollte eine konstante  $1\sigma$ -Abweichung zu einem Risiko  $R_{\mu} = 18$  führen, wie auch gestrichelt eingezeichnet ist. Das SCDM-Modell zeigt deutliche Abweichungen vom Abell/ACO-Katalog jenseits des  $1\sigma$ -Wertes (außer für das Volumenfunktional). Die Differenz wird noch deutlich größer bis jenseits von  $3\sigma$  für das TCDM-Modell. Hingegen können sowohl das  $\Lambda\text{CDM}$ - als auch das BSI-Modell die Minkowskifunktionale der Abell/ACO-Daten deutlich besser reproduzieren. Weiterhin sind jedoch systematische Abweichungen zu erkennen. Die Volumendichte  $m_0$  selbst unterscheidet die Punktverteilungen nur ungenügend, im Gegensatz hierzu ist die integrale mittlere Krümmung  $m_2$  sogar noch deutlich sensitiver als die Eulercharakteristik  $m_3$ .

### 3.3.5 Zusammenfassung

In dieser Untersuchung wurden die skalenabhängigen Minkowskifunktionale für die Punktverteilung eines Abell/ACO-Galaxiencluster-Katalogs berechnet. Wir finden signifikante Abweichungen von Poissonverteilten Punkten auf Skalen von  $15h^{-1}\text{Mpc}$  bis  $50h^{-1}\text{Mpc}$ . Die Daten im Bereich von  $15h^{-1}\text{Mpc}$  bis  $50h^{-1}\text{Mpc}$  deuten auf verstärktes clustern auf einem Träger mit Dimension kleiner drei hin (siehe auch Borgani et al. 1994). Auf Skalen von  $(25 \dots 45)h^{-1}\text{Mpc}$  kann das Verhalten der Oberfläche  $m_1$ , der integralen mittleren Krümmung  $m_2$  und der Euler Charakteristik  $m_3$  als Anzeichen für eine Galaxiencluster-Verteilung gesehen werden, die zusammenhängende Hohlräume und Tunnel zuläßt, jedoch keine vollständig isolierten Kavitäten. Unser Vergleich mit CDM-Modellen der Strukturbildung brachte die erwarteten Ergebnisse, nämlich daß SCDM- und TCDM-Modelle die Stärke des Clusters nicht wiedergeben können. Darüber hinaus wird die Bildung eines vollständig zusammenhängenden Netzes von Hohlräumen nicht reproduziert. Im Gegensatz hierzu können das  $\Lambda\text{CDM}$ - und das BSI-Modell die Daten gut, wenn auch nicht perfekt approximieren.

In der Analyse des IRAS 1.2 Jy in Abschnitt 3.2 haben wir gesehen, daß selbst auf Skalen von  $200h^{-1}\text{Mpc}$  nach wie vor deutliche Fluktuationen in den Minkowskifunktionalen der Galaxienverteilung vorhanden sind. Wir finden diese Fluktuationen auch in Abell/ACO-Werten zwischen Norden und Süden *und* auch zwischen unterschiedlichen Beobachtern in einer Simulationsbox.

## 3.4 Supercluster

Vor kurzem wurde von Einasto et al. (1997b) ein spitzes Maximum im Leistungsdichtespektrum der Galaxiencluster und Superclusterverteilung auf Skalen von  $120h^{-1}\text{Mpc}$  gefunden. Analog hierzu wurde eine um Null oszillierende Paarkorrelationsfunktion  $\xi_2(r)$

schon seit längerem diskutiert (Kopylov et al. 1988, Fetisova et al. 1993, Mo et al. 1992, und Einasto et al. 1997a). Eine vergleichbare Periodizität in der Galaxienverteilung wurde von Broadhurst et al. (1990) bei einer Analyse von „Pencil-Beam“-Katalogen gefunden. Gerade die Signifikanz der Ergebnisse dieser letzten Arbeit wurde als gering angesehen (Kaiser & Peacock 1991) und konnte mit Standardszenarien der Strukturbildung mit selbstgravitierender Materie, ausgehend von Gaußschen Anfangsbedingungen erklärt werden (Weiß & Buchert 1993). Siehe hierzu jedoch die Diskussion bei Szalay (1997). Bei den bisherigen Analysen mit der Paarkorrelationsfunktion sowie dem Leistungsdichtespektrum wurden Schätzer verwendet, die Randeffekte durch Gewichte korrigieren und vor allem auf großen Skalen stark von der Annahme der Stationarität und Isotropie Gebrauch machen. Siehe hierzu auch die Diskussion in Abschnitt A.2. Ebenfalls wurden Selektionseffekte durch Gewichte korrigiert.

Aus dem Galaxiencluster-Katalog von Andernach & Tago (1998) konstruierten Einasto et al. (1997c) einen Katalog der Superclusterzentern (siehe auch Abschnitt 3.1.2). Galaxien zu Galaxiencluster zusammenzufassen, ist ein wohldefiniertes Konzept. Hingegen ist die Verwendung von Superclustern zur Beschreibung der Strukturen auf größten Skalen immer noch umstritten. Für die nun folgenden Untersuchung<sup>9</sup> mit den nächsten Nachbarmethoden  $F(r)$ ,  $G(r)$ ,  $G_n(r)$ ,  $J(r)$  und der Paarkorrelationsfunktion  $g(r)$  verwenden wir nur die Minus-Schätzer. Es werden somit keine Annahmen über die Superclusterverteilung außerhalb des Beobachtungsfensters gemacht.

### 3.4.1 Regularität

Die  $J(r)$ -Funktion aus Abschnitt 2.4.3 liefert einer Methode zur Unterscheidung regulärer Punktverteilungen mit  $J(r) \geq 1$  von clusternden Punktverteilungen ( $J(r) \leq 1$ ). Die Trennlinie bei  $J(r) = 1$  wird hierbei durch eine zufällige Verteilung der Punkte markiert. Eine periodische Anordnung von Punkten ist in diesem Sinne natürlich regulär. Andererseits ist auch die stochastische Verteilung der Zentren eines Harte-Kugel-Flüssigkeitsmodells regulär.

Wir bestimmen  $F(r)$ ,  $G(r)$  und  $J(r)$  für die Superclusterverteilung mit den jeweiligen Minus-Schätzern (siehe Anhang A). In Abbildung 3.34 ist  $J(r)$  für die Superclusterverteilung dargestellt. Da sowohl im nördlichen als auch im südlichen Teil  $J(r) \geq 1$  ist und für Skalen von  $15h^{-1}\text{Mpc}$  bis mindestens  $50h^{-1}\text{Mpc}$  außerhalb des  $1\sigma$ -Bereichs des Poissonprozesses liegt, vermuten wir eine reguläre Verteilung der Supercluster. Der Knick von  $J(r)$  bei  $45h^{-1}\text{Mpc}$  im Süden und bei  $50h^{-1}\text{Mpc}$  im Norden markiert die Skala, bei der sich typischerweise der nächste Supercluster befindet. Diese Skala von  $45h^{-1}\text{Mpc}$  wurde bereits von Einasto et al. (1997c) als der Median des Abstands zum nächsten Supercluster bestimmt. Da  $J(r)$  als Quotient definiert ist, nimmt die Varianz für größere  $r$  zu. Mit einem (nichtparametrischen) Monte-Carlo Test (Besag & Diggle 1977) können wir mit einer Signifikanz<sup>10</sup> von 95% sowohl für den Süden als auch den Norden eine Poissonverteilung

<sup>9</sup>Teile dieser Untersuchung finden sich in den Arbeiten Kerscher (1998a) und Kerscher (1998b).

<sup>10</sup>Eine Diskussion des Signifikanzniveaus findet sich bei Marriott (1978).

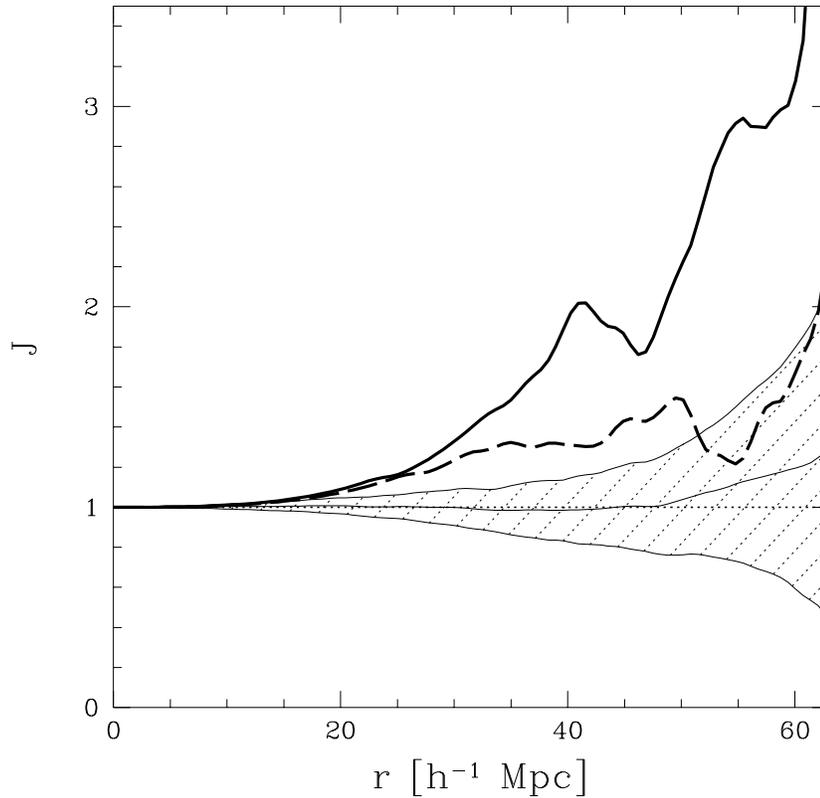


Abbildung 3.34:  $J(r)$  der Superclusterverteilung (nördlicher Teil: gestrichelte Linie, südlicher Teil: durchgezogene Linie,  $1\sigma$ -Bereich eines Poissonprozesses: schraffiert). Die Kurven wurden mit einem dreieckigen Kern mit totaler Breite  $3h^{-1}\text{Mpc}$  geglättet.

der von Einasto et al. (1997c) bestimmten Superclusterzentern ausschließen. Im folgenden werden wir jedoch sehen, daß dieser Vergleich mit einem homogenen Poissonprozeß irreführend ist. Unter Berücksichtigung von Selektions- und Konstruktionseffekten ist eine derartig eindeutige Aussage nicht mehr möglich.

### Ausdünnung

Als einen ersten Test untersuchen wir, inwieweit einzelne wenige Strukturen unsere Analyse beeinflussen. Wir extrahieren hierzu zufällig (ohne zurückzulegen) Stichproben mit 90% Prozent der Supercluster aus der ursprünglichen Stichprobe (solch ein Verfahren wird auch „Jackknife“ genannt). In Abbildung 3.35 sind die Mittelwerte und die Fluktuationen, bestimmt aus hundert solcher Stichproben, aufgetragen. Die Eigenschaften einer regulären Verteilung sind weiterhin klar zu erkennen, wie ein gegenüber dem Poissonprozeß reduziertes  $G(r)$  und ein größeres  $F(r)$ , die zusammen in einem  $J(r) > 1$  resultieren.

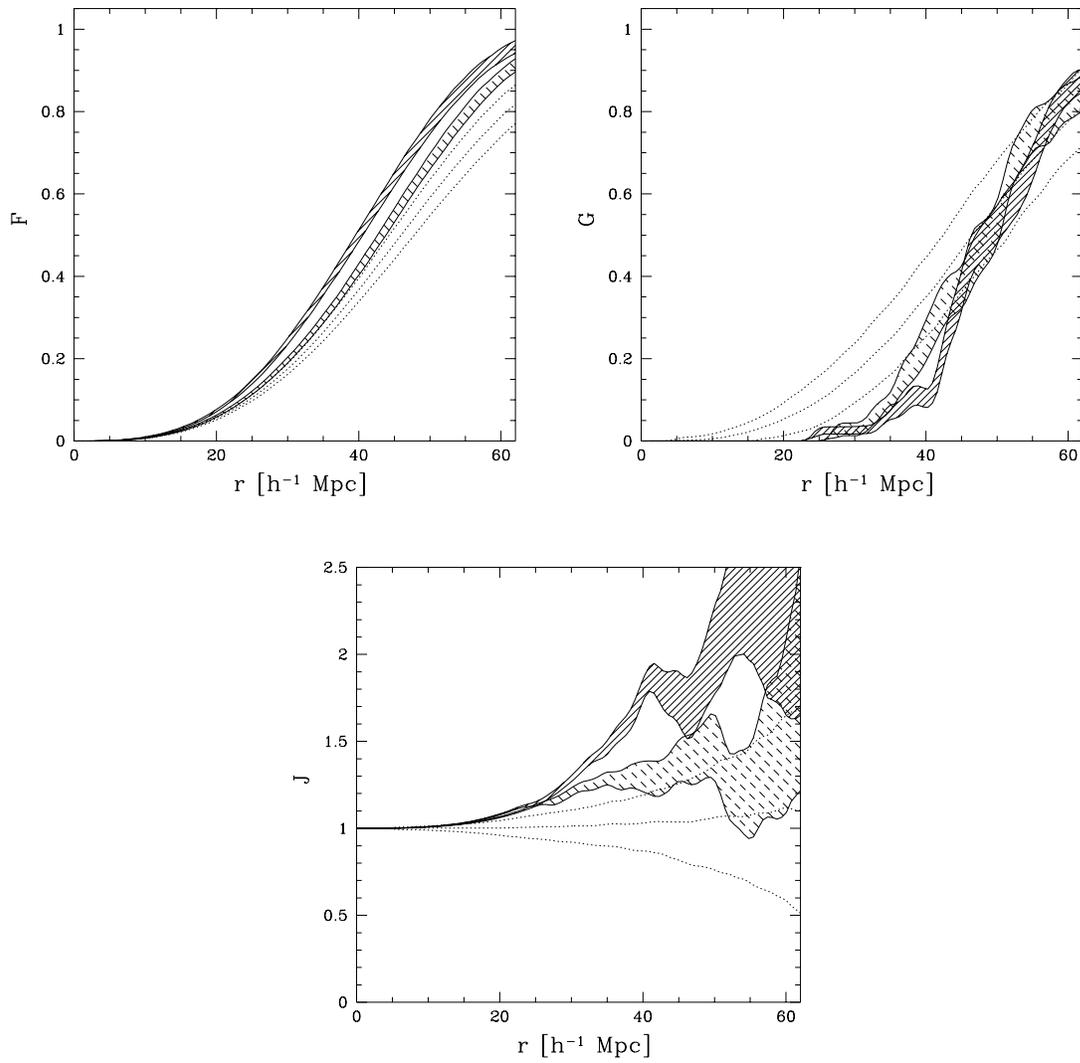


Abbildung 3.35: Links ist  $F(r)$ , in der Mitte  $G(r)$  und rechts  $J(r)$  für den nördlichen Teil (hell schraffiert) den südlichen Teil (dunkel schraffiert) und für einen Poissonprozeß (weißer Bereich) dargestellt. Die Kurven wurden mit einem dreieckigen Kern mit Gesamtbreite  $3h^{-1}\text{Mpc}$  geglättet.

### Selektions- und Konstruktionseffekte

Als einen weiteren *wichtigen* Test betrachten wir simulierte Supercluster-Kataloge. Wir starten mit einem homogenen Poissonprozeß innerhalb einer Kugel mit Radius  $370h^{-1}\text{Mpc}$ . Diese Punktverteilung dünne wir mit einem Verwerfungsalgorithmus so aus, daß wir die radiale und Winkelselektionsfunktion nach Gleichung (3.9) der beobachteten Galaxiencluster reproduzieren. Anschließend extrahieren wir aus dieser Punktverteilung „Supercluster“ mit einem „Friend-of-Friends“-Algorithmus mit Verbindungslänge  $24h^{-1}\text{Mpc}$ , ebenfalls analog zur Konstruktion des Supercluster-Katalogs von Einasto et al. (1997c). Mit dem Friend-of-Friends-Algorithmus erzeugen wir einen leeren Raumbereich mit einem Radius von mindestens  $24h^{-1}\text{Mpc}$  um einen Supercluster. Es kann somit *kein* nächster Nachbar innerhalb dieses radialen Bereiches gefunden werden. Dies führt zu einer künstlichen Antikorrelation der Supercluster, wie wir Anhand von  $J(r) > 1$  in Abbildung 3.36 erkennen. Die reguläre Verteilung der Supercluster im Norden kann zumindest bis Skalen von  $60h^{-1}\text{Mpc}$  als Artefakt der Konstruktion mit einem Friend-of-Friends-Algorithmus angesehen werden. Im Süden ist jedoch  $J(r)$  auf Skalen größer  $30h^{-1}\text{Mpc}$  deutlich außerhalb des  $1\sigma$ -Bereichs der simulierten Supercluster. Ein solches Verhalten deutet sich für den Norden auch auf Skalen jenseits von  $60h^{-1}\text{Mpc}$  an. Es bleibt noch anzumerken, daß es zwar plausibel ist, daß die  $J(r)$ -Funktion für die simulierten Supercluster die Grenze zwischen einer regulären und einer clusternden Verteilung der Supercluster beschreibt, einen Beweis hierfür kann jedoch nicht geführt werden.

#### 3.4.2 Typische Skalen

Wir betrachten nun die  $n$ -ten Nachbarverteilungen  $G_n(r)$  der Supercluster, wie wir sie in Abschnitt 2.4.1 eingeführt haben. Die  $n$ -ten Nachbarverteilungen  $G_n(r)$  bis  $n = 3$  der Superclusterverteilung wurden bereits von Einasto et al. (1997c) mit Schätzern ohne Randkorrektur berechnet. Anhand von Abbildung A.8 erkennen wir, daß Randkorrekturen für die Nächste-Nachbarverteilung wesentlich sind. Wir verwenden die Minus-Schätzer aus Abschnitt A.4. Die Anzeichen einer regulären Verteilung in  $G_1(r) = G(r)$  haben wir bereits weiter oben diskutiert. Darüber hinaus erkennen wir aus Abbildung 3.37, daß auch  $G_2(r)$  gegenüber dem Wert des Poissonprozesses abgesenkt ist. Die  $G_n(r)$  für  $n \geq 3$  sind um die Werte des Poissonprozesses zentriert, zeigen jedoch einen steileren Anstieg. Um diese Beobachtungen zu quantifizieren, bestimmen wir die Dichten  $g_n(r)$  aus den  $n$ -ten Nachbarverteilungen  $G_n(r)$ , wie in Abschnitt A.4 beschrieben ist. Zum Glätten verwenden wir einen dreieckigen Kern mit einer Breite von  $12h^{-1}\text{Mpc}$ . Mit diesen Dichten berechnen wir dann die mittleren Abstände zum  $n$ -ten Nachbarn  $\overline{r_{(n)}}$ , sowie die Varianz  $\sigma_n^2$  der  $n$ -ten Nachbarverteilung (siehe hierzu auch Abschnitt 2.4.1). Anhand von Tabelle 3.3 sehen wir, daß für  $n = 1$  (und auch für  $n = 2$  im Süden) der mittlere Abstand  $\overline{r_{(n)}}$  größer als der entsprechende Wert für einen Poissonprozeß ist. Für  $n > 2$  sind die  $\overline{r_{(n)}}$  konsistent mit den Poisson-Werten, aber die Verteilungen zeigen eine kleinere Varianz  $\sigma_n$ . Dies ist ebenfalls ein Zeichen für Regularität (Stoyan & Stoyan 1992). Darüber hinaus zeigt  $g_1(r)$  und im Norden auch  $g_2(r)$  eine bimodale Struktur, wie sie auch in einer Harte-Kugel-Flüssigkeit

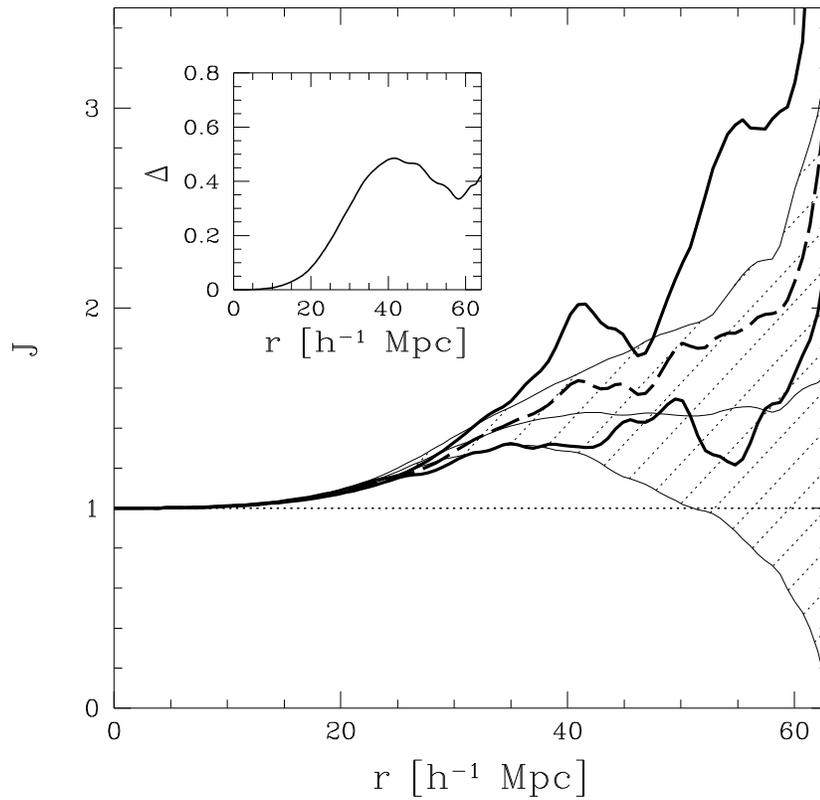


Abbildung 3.36:  $J(r)$  der Superclusterverteilung (obere durchgezogene Linie – südlicher Teil, untere durchgezogene Linie – nördlicher Teil, gestrichelte Linie – Norden und Süden gemeinsam; schattiert –  $1\sigma$ -Bereich der simulierten Supercluster). Die Kurven wurden mit einem dreieckigen Kern mit totaler Breite  $3h^{-1}\text{Mpc}$  geglättet. Die kleinere Abbildung zeigt die Differenz der Mittelwerte  $\Delta$ , der simulierten Supercluster zum homogenen Poissonprozeß.

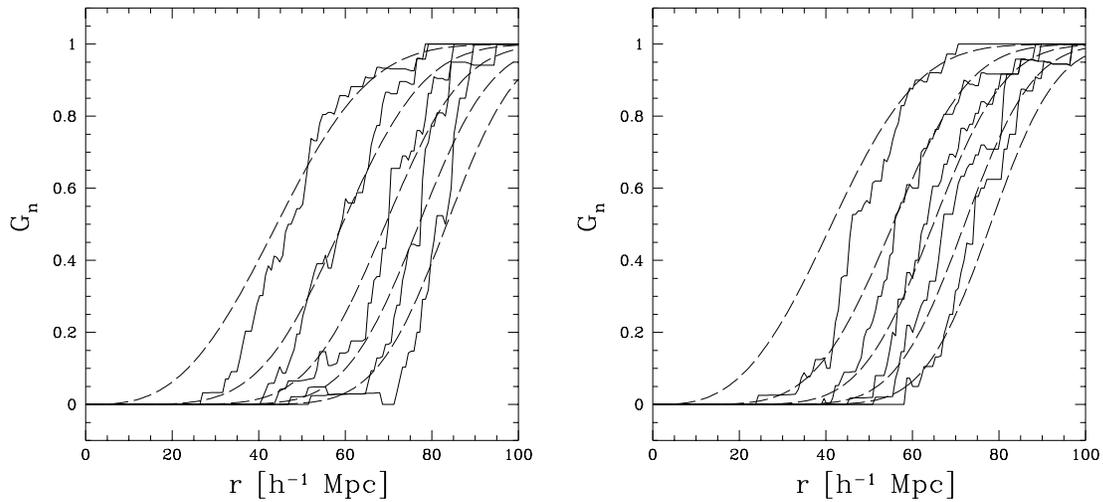


Abbildung 3.37: Die  $n$ -ten Nachbarverteilungen  $G_n(r)$  mit  $n = 1, \dots, 5$  (von links nach rechts), links für die nördliche Stichprobe, rechts für die südliche (Supercluster Verteilung: durchgezogene Linie, Poissonprozeß mit der gleichen Teilchenanzahl: gestrichelte Linie).

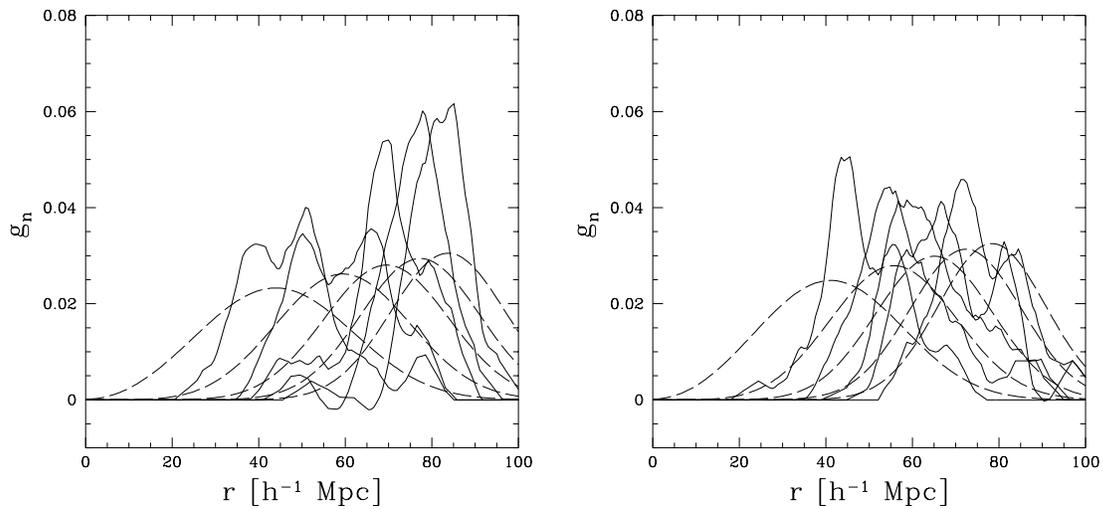


Abbildung 3.38: Die Dichten der  $g_n(r)$   $n$ -ten Nachbarverteilungen, Benennungen wie in Abbildung 3.37.

Tabelle 3.3: Der mittlere Abstand  $\overline{r_{(n)}}$  und die Varianz  $\sigma_n$  (in  $h^{-1}\text{Mpc}$ ) für die Supercluster-Verteilung und die entsprechenden Werte eines Poissonprozesses nach Gleichung (2.76) und (2.77).

	Norden		Süden	
$n$	$\overline{r_{(n)}}$	$\overline{r_{(n)}}$ Poisson	$\overline{r_{(n)}}$	$\overline{r_{(n)}}$ Poisson
1	48.4	44.6	49.2	41.7
2	59.5	59.4	59.4	55.6
3	69.5	69.4	65.4	64.9
4	75.8	77.0	70.2	72.0
5	81.6	83.5	75.9	78.1
$n$	$\sigma_n$	$\sigma_n$ Poisson	$\sigma_n$	$\sigma_n$ Poisson
1	12.4	16.2	10.2	15.2
2	10.8	14.7	11.8	13.8
3	10.4	13.8	10.9	12.9
4	8.4	13.2	11.2	12.3
5	7.8	12.7	10.0	11.9

nahe beim Gefrierpunkt beobachtet wird. Die Signifikanz dieser Beobachtungen ist jedoch eher gering.

In Abbildung 3.39 ist die Summe  $\sum_{n=1}^{10} g_n(r)$  zu sehen, die nach Gleichung (2.72) die Paarkorrelationsfunktion  $g(r) = \overline{\rho}4\pi r^2$  approximiert. Für einen Poissonprozeß ist diese Approximation bis zu einer Skala von  $80h^{-1}\text{Mpc}$  nahezu perfekt. Wahrscheinlich am interessantesten ist der Einbruch bei  $60h^{-1}\text{Mpc}$ , der eine geringere Anzahl von Superclustern im Abstand von  $60h^{-1}\text{Mpc}$  um einen Supercluster anzeigt. Für eine Harte-Kugel-Flüssigkeit zeigt dieses Minimum in  $g(r)$  das Ende der ersten Schale an (Mazur 1992). Übertragen wir diese Interpretation auf die Supercluster-Verteilung, so sehen wir, daß die erste Schale vor allem durch den ersten und zweiten Nachbarn gebildet wird. Wir erhalten hiermit eine Erklärung für die Skala von  $60h^{-1}\text{Mpc}$ , die von Mo et al. (1992) in nahezu allen derzeit verfügbaren Galaxienkatalogen gefunden wurde. In der Tat ist ihr  $\Delta\theta(r)$  die erste Ableitung von  $g(r)/\overline{\rho}$ . Nullstellen in  $\Delta\theta(r)$  bei  $60h^{-1}\text{Mpc}$  entsprechen Extrema in  $g(r)$ , die wir hier als Minima identifizieren können. Im Süden und teilweise auch im Norden sind weitere Skalen bei  $45h^{-1}\text{Mpc}$  und  $80h^{-1}\text{Mpc}$  zu sehen.

### 3.4.3 Clustern auf kleinen – Regularität auf großen Skalen?

Obige Untersuchung zeigt, daß es, trotz aller Probleme mit diesem Superclusterkatalog, Hinweise auf eine reguläre Verteilung auf großen Skalen gibt. Andererseits ist es wohl bekannt und wir werden es auch im Abschnitt 3.6 zeigen, daß Galaxien clustern. Die

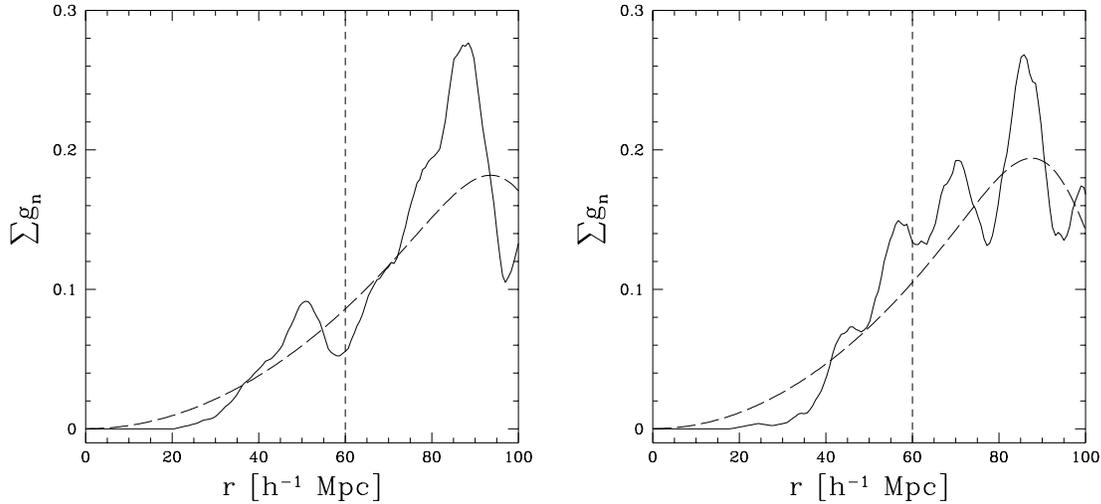


Abbildung 3.39: Die Summe der  $n$ -ten Nachbardichten  $\sum_{n=1}^{10} g_n(r)$  für die Supercluster (durchgezogen) und einen Poissonprozeß mit der gleichen Teilchenanzahl (gestrichelt). Links wieder der nördliche Teil, rechts der südliche.

Verteilung leuchtender Materie zeigt daher auf unterschiedlichen Skalen ein entgegengesetztes Verhalten. In Abschnitt 2.4.3 wurden die  $J_n(r)$ -Funktionen vorgeschlagen, um das Verhalten auf verschiedenen Skalen zu untersuchen.

Als einen ersten Versuch in diese Richtung untersuchen wir mit den  $J_n(r)$  Funktionen die volumenlimitierte Stichprobe des IRAS 1.2 Jy Galaxienkatalogs mit  $200h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe (siehe Abschnitt 3.1.2). In Abbildung 3.40 erkennen wir eine clusternde Verteilung der Galaxien auf kleinen Skalen bis  $40h^{-1}\text{Mpc}$  anhand von  $J_n(r) \leq 1$  für  $n = 1, 3, 5$ . Es ergibt sich ein qualitativ ähnliches Bild wie für den Matérn-Cluster-Prozeß, bei dem  $J_n(r)$  mit den  $n$  wächst (vergleiche Abbildung 2.18). Hingegen sind die Fluktuationen in  $J_n(r)$  für große  $n = 10, 15, 20$  und somit auf großen Skalen mit  $50h^{-1}\text{Mpc}$  aufwärts, so groß, daß mit diesem Katalog keine überzeugenden Aussagen zur Regularität möglich sind. Dies gilt genauso für den nördlichen Teil, sowie für volumenlimitierte Stichproben des IRAS 1.2 Jy mit  $100$  und  $150h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe.

### 3.4.4 Zusammenfassung

Anhand der Untersuchung mit der  $J$ -Funktion erkennen wir, daß die statistischen Eigenschaften des Superclusterkatalogs von Einasto et al. (1997c) zu großen Teilen von Konstruktionseffekten bestimmt sind. Dies ist nicht verwunderlich, da die verwendete Linklänge von  $24h^{-1}\text{Mpc}$  des Friend-of-Friends Algorithmus in derselben Größenordnung wie auch die vermutete Regularitätsskala bei  $\approx 60h^{-1}\text{Mpc}$ , den Ende der ersten Schale, bzw.  $\approx 120h^{-1}\text{Mpc}$  dem zweiten Maximum in der Paarkorrelationsfunktion ist. Berücksichtigen

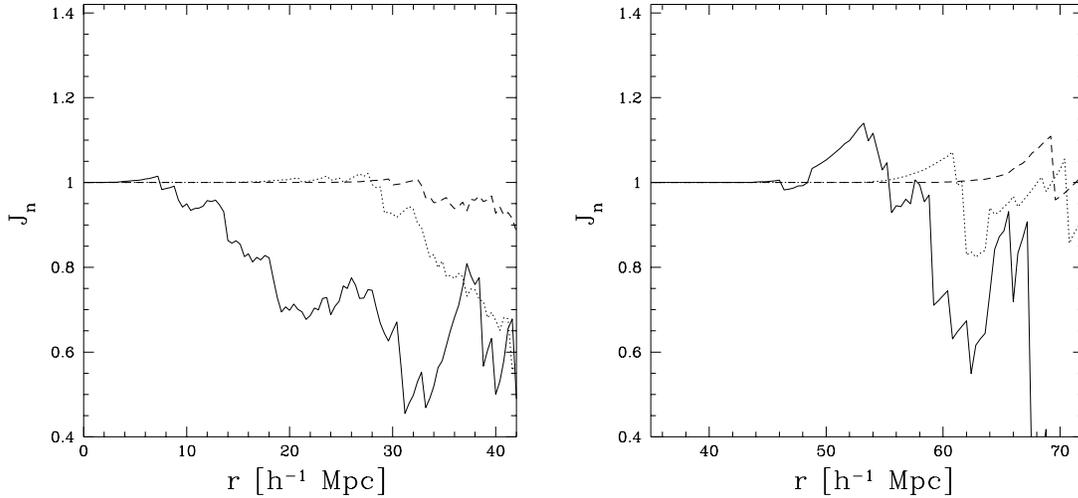


Abbildung 3.40: Die  $J_n$ -Funktion für Galaxien aus dem südlichen Teil der volumenlimitierten Stichprobe des IRAS 1.2 Jy mit  $200h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe. Links sind die  $J_n(r)$  mit  $n = 1, 3, 5$  aufgetragen, und rechts die  $J_n(r)$  mit  $n = 10, 15, 20$ .

wir dieselben Selektionseffekte auch in der Konstruktion der Mock-Supercluster, so verliert sich die anfängliche Signifikanz, und nur noch ein zarter Hinweis auf reguläre Strukturen bleibt. Ähnlich ist auch die Signifikanz einer typischen Skala bei  $60h^{-1}\text{Mpc}$  zu bewerten. Clusternde Struktur, wie wir sie bei einer skaleninvarianten Verteilung auch auf großen Skalen beobachten sollten, würden zu einem  $J(r)$  kleiner als die Poisson-Werte führen. Die Tendenz geht jedoch in die andere Richtung. Bei der Untersuchung des IRAS 1.2 Jy Galaxienkatalog mit den  $J_n(r)$ -Funktionen konnte wegen der geringen Zahl an Galaxien in dieser Stichprobe ebenfalls keine signifikante Regularität auf großen Skalen nachgewiesen werden.

### 3.5 Fraktale

Eine nach wie vor lebhaft diskutierte Frage ist, inwieweit die Verteilung der Galaxien selbstähnlich/fraktal ist (siehe z.B. Pietronero et al. 1996, Davis 1996 und McCauley 1997) und vor allem ab welcher Skala die Galaxienverteilung „homogen“ wird. Eine skaleninvariante Punktverteilung ist nicht mit einem stationären („homogenen“) Punktprozess verträglich (Daley & Vere-Jones 1988). Eine skaleninvariante und somit inhomogene Materieverteilung rüttelt essentiell an den Grundfesten des Standardmodells der Kosmologie und wird daher oft vehement bekämpft. Skaleninvariante Weltmodelle werden zum Beispiel bei Mandelbrot (1982) diskutiert, wobei die diesem Modell zugrundeliegenden Ideen bis auf Kant, Fourier d’Albe ... zurückreichen (Kanitscheider 1991). All diese Modelle sind jedoch nur durch kinematische und nicht dynamische Überlegungen motiviert.

Das Interesse an Fraktalen und selbstähnlichen Verteilungen hat auch in der Kosmologie zu lebhafter literarischer Aktivität geführt. Die Debatte konzentriert sich in erster Linie auf die Interpretation der Zweipunktkorrelationsfunktion. Sie wurde von Pietronero (1987) eröffnet, eine erste Datenanalyse auf fraktales Skalieren hin wurde von Coleman et al. (1988) durchgeführt, gefolgt von einem Übersichtsartikel von Coleman & Pietronero (1992). Über die Jahre hinweg wurden dann viele verfügbaren Kataloge untersucht und die Methoden verfeinert (Sylos Labini et al. 1997a). Eine erste Analyse auf multifraktale Eigenschaften hin wurde von Jones et al. (1988) und Atmansbacher et al. (1989) durchgeführt, wobei letztere auch eine ausführliche Fehleranalyse präsentieren (siehe hierzu auch Wiedenmann 1991). Es folgten ebenfalls Analysen anderer Kataloge (Martínez & Coles 1994, Borgani et al. 1994), von Simulationen (Ueda et al. 1993) und eine Verfeinerung der Methodik und Theorie (Balian & Schaeffer 1989a, Balian & Schaeffer 1989b, Borgani 1993, Dubrulle & Lachièze-Rey 1994a), um nur wenige zu nennen.

### 3.5.1 Selbstähnliche Punktverteilungen

#### Punktprozesse?

Wir nennen ein zufälliges Maß  $\mu$  selbstähnlich, wenn es unter einer Ähnlichkeitstransformation  $R_a^h$  mit  $a \in \mathbb{R}^+$  invariant ist (Daley & Vere-Jones 1988):

$$\mu(\mathcal{C}) = R_a^h \mu(\mathcal{C}) = a^{-h} \mu(a\mathcal{C}). \quad (3.29)$$

Ist  $\mu$  ein Zählmaß, wie wir es z.B. durch einen Punktprozeß erhalten (siehe Abschnitt B), so ist im allgemeinen  $a^{-h} \mu(a\mathcal{C})$  keines. Aus diesem langweiligen, technischen Grund gibt es keine selbstähnlichen Punktprozesse.

#### Poissonprozeß auf einem Fraktal

Obiger Definition am nächsten kommt ein Poissonprozeß auf einem (einfachen) Fraktal  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$  mit der Hausdorff-Dimension  $D_H \leq d$ . Zur Definition des Hausdorff-Maßes  $\mu_{D_H}$  und der Hausdorff-Dimension  $D_H$  siehe Falconer (1990). Seien nun  $N$  Punkte  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ ,  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{D}$  im Beobachtungsfenster  $\mathcal{D}$  unabhängig und identisch auf  $\mathcal{F}$  verteilt. Dieses Modell wurde bereits bei Dubrulle & Lachièze-Rey (1994b) diskutiert (siehe auch Dubrulle & Lachièze-Rey 1994a). In Abhängigkeit von der linearen Stichprobengröße  $L = |\mathcal{D}|^{1/d}$  erhalten wir die Stichprobendichte

$$\hat{\rho}(L) = \frac{N}{|\mathcal{D}|} = \frac{N}{L^d}. \quad (3.30)$$

Weiterhin ist die Anzahl der Punkte in  $\mathcal{D}$  und somit auf  $\mathcal{F} \cap \mathcal{D}$  gleich  $N$ , und wir können eine Dichte  $\rho_{\mathcal{F}}$  auf dem Fraktal  $\mathcal{F}$  definieren<sup>11</sup>

$$\rho_{\mathcal{F}} = \frac{N}{L^{D_H}} \propto \frac{N}{\mu_{D_H}(\mathcal{D} \cap \mathcal{F})}. \quad (3.31)$$

<sup>11</sup>Für glatte  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten  $\mathcal{C}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq d$  ist  $\mu_n(\mathcal{C}) = \omega_n \lambda_n(\mathcal{C})$ , mit  $\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$  und  $\lambda_n$ , dem  $n$ -dimensionalen Lebesguemaß.

Für dieses Poisson–Modell ist  $\rho_{\mathcal{F}}$  unabhängig von der Größe und Form der Stichprobe  $\mathcal{D}$ . Dies gilt nicht mehr für die Stichprobendichte  $\widehat{\rho}(L)$ , die wie folgt von  $\rho_{\mathcal{F}}$  abhängt:

$$\widehat{\rho}(L) = \rho_{\mathcal{F}} L^{D_H-d}. \quad (3.32)$$

In einem Raumgebiet  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ ,  $|\mathcal{C}| = l^d$  sind dann im Mittel

$$\rho_{\mathcal{F}} l^{D_H} = \frac{N}{L^{D_H}} l^{D_H} \propto \rho_{\mathcal{F}} \mu_{D_H}(\mathcal{C} \cap \mathcal{F}) \quad (3.33)$$

Punkte enthalten. Diese Beziehung haben wir bereits in Abschnitt 2.3.4 benutzt, um  $\sigma^2(r)$  für einen Poissonprozeß auf einem Fraktal zu berechnen.

Ein Poissonprozeß auf einem Multifraktal ist analog definiert, wobei ein Multifraktal als Vereinigung mehrerer Fraktale mit unterschiedlichen Hausdorff–Dimensionen aufgefaßt wird (Falconer 1990). Von Dubrulle & Lachièze–Rey (1994a) wurde innerhalb dieses Modells gezeigt, daß eine Analyse auf multifraktales Skalieren hin mit den üblichen „Box counting“-Methoden (siehe Abschnitt 3.5.1) zu Misinterpretationen und Fehlern führen kann.

### Punktprozesse auf singulären Dichtefeldern

Multifraktale werden oft zur Charakterisierung der Verteilung von Singularitäten in Dichtefeldern (meist für Phasenraumdichten) benutzt. Wir werden multifraktales Skalieren auch für Punktverteilungen definieren. Sei  $\mathcal{X}$  eine endliche Menge von Punkten in  $\mathcal{D}$  (siehe Abschnitt 2.1), die wir, wie in Abschnitt 2.2.6, als eine Realisierung eines Punktprozesses betrachten, der von einem Dichtefeld  $\varrho(\mathbf{x})$  getrieben wird. Wie für Cox–Prozesse sei  $\varrho(\mathbf{x})$  die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt eines stationären Poissonprozesses tatsächlich in die Punktverteilung aufgenommen wird. Dieses Vorgehen wird auch oft „Poisson–Modell“ genannt (Peebles 1980). Im Gegensatz zu Abschnitt 3.5.1 nehmen wir *nicht* mehr die Gleichverteilung auf dem Träger von  $\varrho(\mathbf{x})$  an. Der Träger von  $\varrho: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  kann immer noch  $\mathbb{R}^d$  sein oder aber ein Fraktal mit  $D_H \leq d$ .  $\varrho(\mathbf{x})$  weist nun Singularitäten auf, deren Stärke, d.h. deren Exponenten wir bestimmen wollen (Halsey et al. 1986). Formal ist  $\varrho(\mathbf{x})$  dann keine Wahrscheinlichkeitsdichte mehr. Um  $\varrho(\cdot)$  auf  $\mathcal{D}$  weiterhin als Wahrscheinlichkeitsdichte für die Erzeugung eines derartigen Punktprozesses benutzen zu können, müssen wir  $\varrho(\cdot)$  trunkieren. Dies ist physikalisch sinnvoll, da z.B. singuläre Massendichten, wie sie im Rahmen der Zel’dovich–Approximation (siehe Zel’dovich 1970, Buchert 1992) auftreten, durch zusätzliche physikalische Prozesse unterbunden werden können (siehe z.B. Zel’dovich & Shandarin 1982). Wir vermeiden Probleme dieser Art und gehen zu einer Beschreibung mittels einer Partitionierung über (Halsey et al. 1986, McCauley 1990 und McCauley 1997).

Wir betrachten  $M^{(n)}$  disjunkte Volumina  $\mathcal{C}_i^{(n)} \subset \mathcal{D}$ , so daß der Träger von  $\varrho$  in  $\bigcup_{i=1}^{M^{(n)}} \mathcal{C}_i^{(n)}$  enthalten ist und  $|\mathcal{C}_i^{(n)}| = (l_i^{(n)})^d \leq (l^{(n)})^d$  für alle  $1 \leq i \leq M^{(n)}$ . Mit  $n \in \mathbb{N}$  numerieren wir die Verfeinerung mit  $M^{(n+1)} > M^{(n)}$  und  $l^{(n+1)} < l^{(n)}$  durch, wobei  $l^{(n)} = \max_i l_i^{(n)}$ . Für eine Realisierung  $\varphi$  eines wie oben beschriebenen Punktprozesses mit  $N$  Punkten gilt

dann  $N = \varphi \left( \bigcup_{i=1}^{M^{(n)}} \mathcal{C}_i^{(n)} \right)$ . Die Wahrscheinlichkeit, einen Punkt in  $\mathcal{C}_i^{(n)}$  zu finden, kann dann durch

$$p_i^{(n)} = \frac{1}{N} \varphi \left( \mathcal{C}_i^{(n)} \right) \quad (3.34)$$

abgeschätzt werden<sup>12</sup>. Für integrierbare  $\varrho$ , also für die trunkierten  $\varrho$  mit  $\int_{\mathbb{R}^d} d^d x \varrho(\mathbf{x}) = 1$  gilt

$$\mathbb{E} p_i^{(n)} = \int_{\mathcal{C}_i^{(n)}} d^d x \varrho(\mathbf{x}). \quad (3.35)$$

Einen Skalierungsexponenten  $\alpha_i$  definieren wir durch (Halsey et al. 1986)

$$p_i^{(n)} \cong \left( l_i^{(n)} \right)^{\alpha_i}, \quad (3.36)$$

sowie eine Erzeugendenfunktion

$$\chi^{(n)}(q) = \sum_{i=1}^{M^{(n)}} \left( p_i^{(n)} \right)^q. \quad (3.37)$$

Die verallgemeinerten fraktalen Dimensionen  $D_q$  können nun über

$$\chi^{(n)}(q) \cong \left( l^{(n)} \right)^{(q-1)D_q} \quad (3.38)$$

definiert werden. Eine Motivation für Gleichung (3.36), die Definition des in diesem Zusammenhang oft verwendeten  $f(\alpha)$ -Spektrums und die Ableitung von Gleichung 3.38 findet man z.B. bei McCauley (1990). Es bestand die Hoffnung (wie es noch bei Halsey et al. (1986) zum Ausdruck kommt), daß  $D_q$  unabhängig von der Wahl der Partitionierung  $\mathcal{C}_i^{(n)}$  ist. Dies ist im allgemeinen *nicht* der Fall (McCauley 1997).

### Berechnungsmethoden für $D_0$ und $D_q$

Wir betrachten nun wieder unsere Stichprobe  $\mathcal{X}$  von  $N$  Punkten im Beobachtungsfenster  $\mathcal{D}$  (Abschnitt 2.1). Zur Abschätzung der Hausdorff-Dimension  $D_H$  wird oft die Box-Dimension  $D_B$  verwendet. Hierzu unterteilen wir unsere Stichprobe  $\mathcal{D}$  in Würfel der Kantenlänge  $l$ .  $M_l$  sei die Anzahl der Würfel, die mindestens einen Punkt enthalten. Wir erhalten dann die Box-Dimension<sup>13</sup>

$$D_B = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln M_l}{\ln l}. \quad (3.39)$$

<sup>12</sup>Dies ist die geeignete Analogie zur Definition von  $p_i$  für ein dynamisches System über die Trefferhäufigkeit von Trajektorien in  $\mathcal{C}_i^{(n)}$  (McCauley 1990).

<sup>13</sup>Strenggenommen erhalten wir eine *obere* und eine *untere* Box-Dimension, nur wenn diese zusammenfallen, spricht man von *der* Box-Dimension.

Im Limes  $N \rightarrow \infty$  und  $l \rightarrow 0$  liefert  $D_B$  eine obere Schranke an die Hausdorff-Dimension  $D_H$  (Falconer 1990). Genau diese Grenzübergänge sind in einer empirischen Analyse der Galaxienverteilung nicht durchführbar. Einen Zusammenhang mit der Definition (3.38) von  $D_q$  erhalten wir, wenn wir die Partitionierung  $\mathcal{C}_i^{(n)}$  aus  $M^{(n)} = M_l$  Würfeln mit der Seitenlänge  $l_i^{(n)} = l^{(n)}$  betrachten. Für  $q = 0$  gilt dann mit Gleichung (3.37) und (3.38)

$$\chi^{(n)}(0) = M^{(n)} \cong (l^{(n)})^{-D_0}. \quad (3.40)$$

Erstreckt sich dieser Skalierungsbereich bis nach  $l^{(n)} \rightarrow 0$ , mit notwendigerweise  $N \rightarrow \infty$ , gilt  $D_B = D_0$ . Bei Falconer (1990) werden einige weitere Definitionen der Box-Dimension diskutiert und deren Äquivalenz im Limes  $l^{(n)} \rightarrow 0$  gezeigt.

Eng verwandt zur Box-Dimension ist die Minkowski-Dimension  $D_M$ . Wir betrachten nun, wie beim Satz von Steiner aus Abschnitt 2.5.1, die  $r$ -Parallelmenge  $\mathcal{F}_r = \mathcal{F} \uplus \mathcal{B}_r$  eines Fraktals  $\mathcal{F}$ . Für das Skalenverhalten des Volumens, also des ersten Minkowskifunktional  $|\mathcal{F}_r| = V_0(\mathcal{F}_r)$ , gilt mit der Einbettungsdimension  $d$  (Falconer 1990)

$$D_M = d - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln V_0(\mathcal{F}_r)}{\ln r}. \quad (3.41)$$

Im Limes  $r \rightarrow 0$  gilt  $D_M = D_B$  (Falconer 1990). Mit  $\mathcal{A}_r = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$  bezeichnen wir die Vereinigungsmenge der Kugeln mit Radius  $r$  um die Punkte  $\mathbf{x}_i$  des Prozesses auf dem Fraktal  $\mathcal{F}$ . Weiterhin sei der Punktprozeß auf  $\mathcal{F}$  so gewählt, daß für große  $N$ ,  $|\mathcal{A}_r| \rightarrow |\mathcal{F}_r|$  geht. Dies ist z.B. für einen Poissonprozeß auf dem Fraktal der Fall. Wir erhalten

$$D_M = d - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln V_0(\mathcal{A}_r)}{\ln r}, \quad (3.42)$$

wobei natürlich  $N$  nach unendlich gehen muß. Da die sphärische Kontaktverteilung  $F(r)$  nichts anderes als die Volumendichte  $v_0(\mathcal{A}_R)$  des Volumens  $V_0(\mathcal{A}_R)$  ist, erhalten wir im Limes  $r \rightarrow 0$  natürlich auch<sup>14</sup>

$$D_M = d - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln F(r)}{\ln r}. \quad (3.43)$$

Unterschiede zwischen den verschiedenen Definitionen der Box-Dimension und der Minkowski-Dimension sind durch unterschiedliche Partitionierung  $\mathcal{C}_i^{(n)}$  gegeben. McCauley (1997) diskutiert am Beispiel einer Teilmenge der Cantormenge, wie eine ungünstig gewählte Partitionierung zum falschen Skalierungsverhalten in (3.38) führt. Es ist daher bei einer empirischen Analyse wesentlich, zuerst die „richtige“ Partitionierung zu finden, um anschließend das Skalierungsverhalten zu bestimmen. Für den Attraktor eines dynamischen Systems ist dies zumindest prinzipiell möglich (Cvitanovic et al. 1988, McCauley 1990). Die Partitionierung ist dann eine Diskretisierung des natürlichen Maßes auf dem Attraktor, soweit dieses existiert (Leven et al. 1989).

<sup>14</sup>Die Beiträge von unterschiedlichen Normierungen verschwinden im Limes  $r \rightarrow 0$ .

Analog zum Zusammenhang zwischen  $D_B$  und  $D_0$  werden oft mit (3.34) und (3.38) die „Dimensionen“  $\tilde{D}_q$  über

$$\tilde{D}_q = \lim_{l^{(n)} \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \chi^{(n)}(q)}{\ln l^{(n)}}. \quad (3.44)$$

definiert. Diese Definition ist nicht direkt auf endliche Punktmengen anwendbar, da sie ebenfalls für endliche  $l^{(n)}$  von der speziellen Wahl der Partitionierung abhängt.

### Die Korrelationsdimension

Die Korrelationsdimension  $D_C$  wird über das Korrelationsintegral  $C(r)$

$$C(r) \propto r^{D_C} \quad (3.45)$$

definiert, wobei wie in Abschnitt 2.3.1

$$C(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N N_i(r) \quad (3.46)$$

ist, mit dem lokalen Korrelationsintegranden

$$N_i(r) = \sum_{j=1; j \neq i}^N \mathbb{1}_{[0,r]}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|). \quad (3.47)$$

Mit dem Korrelationsintegral  $C(r)$  verwenden wir eine Partitionierung  $\mathcal{C}_i = \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$  aus überlappenden Sphären. Im Gegensatz zu Abschnitt 3.5.1 jedoch mit einer *konstanten* Anzahl  $M^{(n)} = N$  an Mengen  $\mathcal{C}_i$ .

Für kleine  $r$  ist  $C(r)/N$  die Wahrscheinlichkeit, Paare von Punkten im Abstand  $r$  zu finden. Andererseits erhalten wir mit Gleichung (3.37) und  $q = 2$

$$\chi(2) = \sum_{i=1}^{M^{(n)}} \left( p_i^{(n)} \right)^2, \quad (3.48)$$

wobei  $\left( p_i^{(n)} \right)^2$  die Wahrscheinlichkeit ist, daß zwei verschiedene Punkte im Gebiet  $\mathcal{C}_i^{(n)}$  mit  $|\mathcal{C}_i^{(n)}| \leq (l^{(n)})^d$  enthalten sind. Da im Poisson-Modell (siehe Abschnitt 2.2.6, Cox-Prozesse) die Punkte unabhängig gezogen werden, können die  $p_i$  einfach multipliziert werden<sup>15</sup>. Daher ist für kleine  $l^{(n)}$  und somit großen  $M^{(n)}$ ,  $\sum_{i=1}^{M^{(n)}} \left( p_i^{(n)} \right)^2$  die Wahrscheinlichkeit, Paare von Punkten mit einem Abstand kleiner als  $l^{(n)}$  zu finden. Es folgt  $D_2 = D_C$  für  $l^{(n)} \rightarrow 0$ , respektive  $r \rightarrow 0$  (Grassberger & Procaccia 1984).

<sup>15</sup>Bei dynamischen Systemen wird gefordert, daß die Trefferwahrscheinlichkeit von zwei Trajektorien in  $\mathcal{C}_i^{(n)}$  für große Zeiten unabhängig voneinander ist (Grassberger & Procaccia 1984).

Wir nehmen nun an, daß jeder „Integrand“  $N_i(r)$  approximativ mit dem lokalen Korrelationsindex  $\nu(i)$  skaliert,  $N_i(r) \propto r^{\nu(i)}$ :

$$C(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_i r^{\nu(i)}. \quad (3.49)$$

Für einen Monofraktal ist  $\nu(i) \approx D_C$  und die Skalierungseigenschaft aus Gleichung (3.45) folgt direkt. Fluktuieren hingegen die  $\nu(i)$ , so kann  $C(r)$  nicht skalieren. Nur im *nicht durchführbaren* Limes  $r \rightarrow 0$  wird *ein* Skalierungsindex dominieren.

Abbildung 3.41 zeigt, daß ein doppelt-logarithmischer Plot von  $C(r)$  gegen  $r$  über nur zwei Dekaden ein skaleninvariantes Verhalten von  $C(r)$  vortäuschen kann (gleiches gilt für einen doppelt-logarithmischen Plot von  $\Gamma(r)$  gegen  $r$ , McCauley 1997). Unter Verwendung mehrerer Summanden mit unterschiedlichen Exponenten, wie sie in Gleichung (3.49) auftreten können, ist solch ein vorgetäushtes Skalieren noch leichter zu erreichen. Ist hingegen  $C(r)$  über einen großen Bereich (mehrere Dekaden) skaleninvariant, so kann auf eine fraktale Geometrie des Trägers des Punktprozesses geschlossen werden. Siehe hierzu auch die Abbildung 3 bei Grassberger & Procaccia (1984), in der ein Skalierungsbereich von 15 Dekaden erkennbar ist. In solch einem Fall erwarten wir auch  $\nu(i) \approx D_C$ .

Da mit  $\mathcal{C}_i = \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$  nur eine spezielle und überlappende Partitionierung gewählt wurde, ist ein multifraktales Spektrum nicht aus der Erzeugendenfunktion

$$G(q) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{n_i(r)}{N} \right)^{q-1} \quad (3.50)$$

ableitbar. Die Wahl einer passenden (optimalen oder effizienten im Sinne von McCauley 1997) Partitionierung ist wesentlich für die Bestimmung der verallgemeinerten Dimensionen  $D_q$  und des hier nicht diskutierten  $f(\alpha)$ -Spektrums. Ergebnisse für die  $D_q$ -Verteilung in Borgani et al. (1994) wurden einerseits mit dem Korrelationsintegral und andererseits mit einer Methode basierend auf der Nächsten-Nachbarverteilung gewonnen. Diese Methoden verwenden unterschiedliche Partitionierungen und führen auch zu unterschiedlichen Resultaten für die  $D_q$ , wie an der Sprungstelle bei  $q = 2$  in Abbildung 11 in Borgani et al. (1994) zu sehen ist. Eine multifraktale Analyse ohne eine effiziente Partitionierung gibt somit keine klare Auskunft über die Verteilung und Art der Singularitäten.

### 3.5.2 Analyse von Galaxienkatalogen

Wir werden nun Galaxienkataloge mit dem Korrelationsintegral  $C(r)$  auf Skalierung hin untersuchen. Vor allem interessieren wir uns für die lokalen Skalierungsindizes  $\nu(i)$ , wie wir sie in Abschnitt 3.5.1 eingeführt haben.

#### IRAS 1.2 Jy

Im folgenden untersuchen wir drei volumenlimitierte Stichproben des IRAS 1.2 Jy Galaxienkatalogs (siehe Abschnitt 3.1.2) mit Tiefen von  $60h^{-1}\text{Mpc}$ ,  $80h^{-1}\text{Mpc}$  und  $100h^{-1}\text{Mpc}$ .

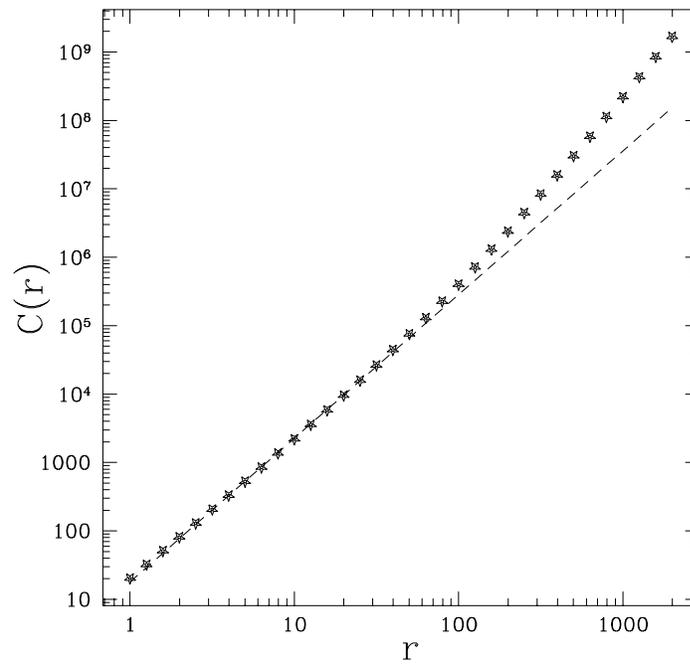


Abbildung 3.41: Die doppelt-logarithmische Darstellung der Funktion  $C(r) = 20 r^{\nu(1)} + 0.2 r^{\nu(2)}$  (Sternchen), mit  $\nu(1) = 2$  und  $\nu(2) = 3$  zusammen mit der Funktion  $18 r^{2.1}$  (gestrichelt).

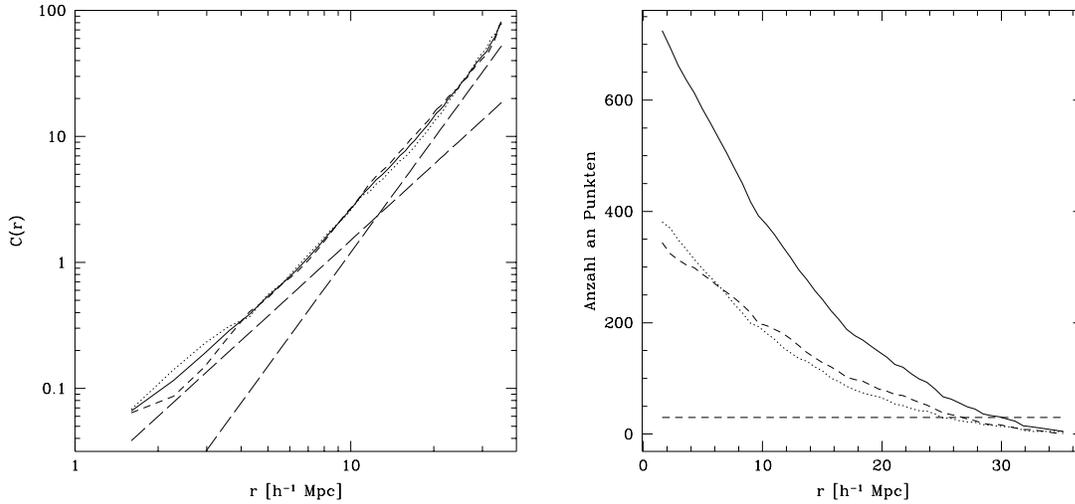


Abbildung 3.42: Links ist das Korrelationsintegral  $C(r)$  für eine volumenlimitierte Stichprobe des IRAS 1.2 Jy mit  $80h^{-1}$ Mpc Tiefe aufgetragen (Norden: gepunktet, Süden: gestrichelt, zusammen: durchgezogen). Die zwei lang gestrichelten Geraden sind für  $C(r) \propto r^2$  und  $C(r) \propto r^3$ . Rechts ist die Anzahl der Galaxien aufgetragen, die weiter als  $r$  vom Rand entfernt sind. Die dünne gestrichelte Linie markiert die Anzahl dreißig.

Um direkt mit Arbeiten aus der Gruppe um Pietronero vergleichen zu können, bestimmen wir das Korrelationsintegral  $C(r)$  mit dem Schätzer  $\widehat{C}_1(r)$  (siehe Abschnitt A). Die lokalen Skalierungsindizes  $\nu(i)$  der Korrelationsintegranden und deren Amplituden  $c_i$  aus Gleichung (3.49) werden durch einen  $\chi^2$ -Fit (Press et al. 1987) an die Korrelationsintegranden  $N_i(r)$  nach Gleichung 3.47 bestimmt. Wir fordern, daß ein Punkt  $\mathbf{x}_i$ , der als Zentrum zur Bestimmung von  $N_i(r)$  dient, mindestens den Abstand  $\Delta$  vom Rand der Stichprobe hat, sowie daß mindestens ein weiterer Punkt des Prozesses einen Abstand kleiner  $\Delta$  zu  $\mathbf{x}_i$  hat. Der Wert von  $\Delta$  wird später angegeben.

In der Abbildung 3.42 ist das Korrelationsintegral  $C(r)$  für die volumenlimitierte Stichprobe mit Tiefe  $80h^{-1}$ Mpc aufgetragen. Eine zuverlässige Schätzung ist noch bis  $25h^{-1}$ Mpc möglich, da dann noch mindestens 30 Galaxien weiter als  $r = 25h^{-1}$ Mpc vom Rand entfernt sind. Ein ausgeprägter Skalierungsbereich ist nicht erkennbar. Einzig im Bereich von  $(2-10)h^{-1}$ Mpc könnten wir  $r_C^D$  mit einem Exponenten  $D_C = 2 \pm 0.1$  anfitten, wie von Sylos Labini et al. (1997b) für die gleiche Stichprobe behauptet wurde. Die Beobachtung, daß kein ausgeprägter Skalierungsbereich vorhanden ist, wird von der breiten Häufigkeitsverteilung der  $\nu(i)$  in Abbildung 3.44 nur noch bestätigt.

Ebenfalls sind weit streuende Häufigkeitsverteilungen in Abbildung 3.45 und 3.46 für die Stichproben mit  $60h^{-1}$ Mpc und  $100h^{-1}$ Mpc Tiefe zu sehen. In beiden Fällen ist ein Skalierungsbereich mit  $C(r) \propto r^2$  nur bis  $10h^{-1}$ Mpc erkennbar, also erneut nur mit maximal einer Dekade in  $r$ . Im Falle des IRAS 1.2 Jy wird von Sylos Labini et al. (1996)

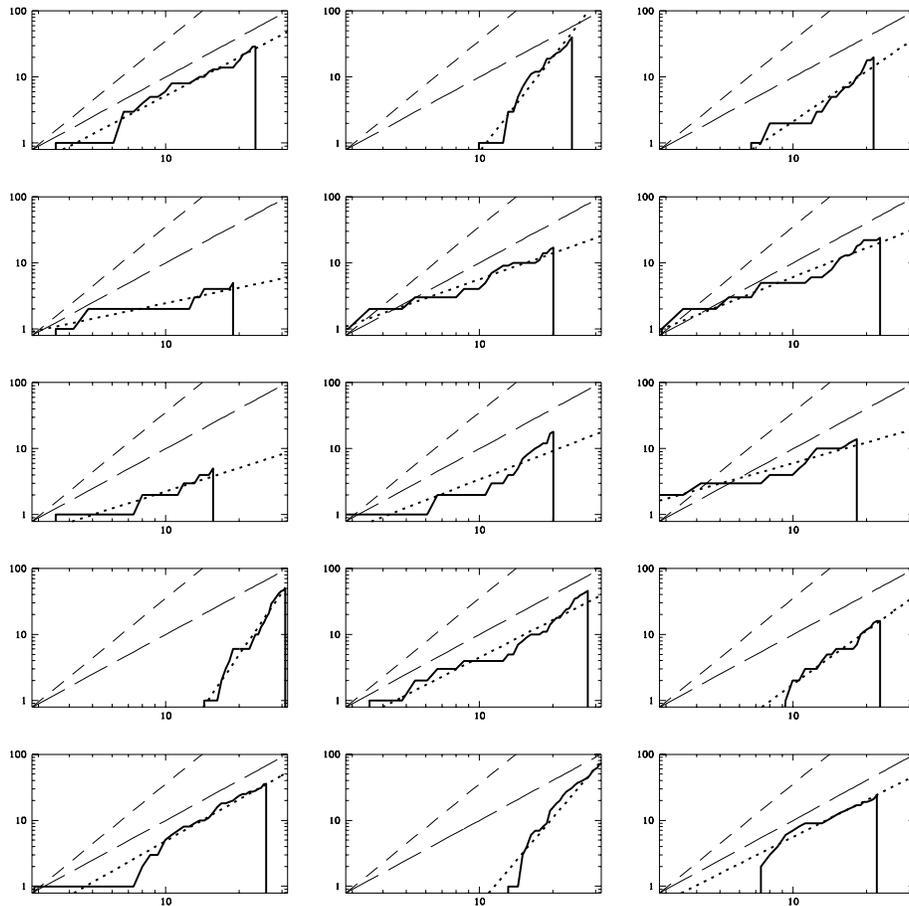


Abbildung 3.43: Volumenlimitierte Stichprobe des IRAS 1.2 Jy mit  $80h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe: Die Korrelationsintegranden  $N_i(r)$  für fünfzehn zufällig ausgewählte Zentren  $\mathbf{x}_i$  mit Skalierungsbereich  $\Delta \geq 12.6h^{-1}\text{Mpc}$  sind zu sehen (Daten: durchgezogen, Fit: gepunktet,  $\propto r^2$  und  $\propto r^3$ : gestrichelt). Eine Approximation durch  $c_i r^{\nu(i)}$  über nur eine Dekade ist gefährlich, aber wie man erkennt nicht schlecht.

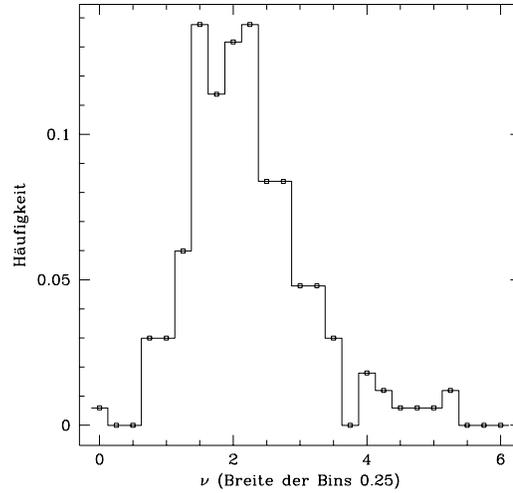


Abbildung 3.44: Volumenlimitierte Stichprobe des IRAS 1.2 Jy mit  $80h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe: Die Häufigkeitsverteilung der lokalen Skalierungsindizes  $\nu(i)$  für 167 Galaxien der Stichprobe mit  $\Delta \geq 12.6h^{-1}\text{Mpc}$  ist dargestellt.

argumentiert, daß nur volumenlimitierte Stichproben mit  $60h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe und kleiner relevante Ergebnisse liefern, da die Stichproben mit  $80h^{-1}\text{Mpc}$  und  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe zu sehr ausgedünnt sind (siehe jedoch Sylos Labini et al. 1997b für eine Analyse der Stichprobe von  $80h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe).

### CfA1

Die ersten Analysen auf Skaleninvarianz hin wurden anhand des CfA1-Katalogs (siehe Abschnitt 3.1.2) bereits von Coleman et al. (1988), Davis & Peebles (1983) und Jones et al. (1988) durchgeführt. Im folgenden untersuchen wir eine volumenlimitierte Stichprobe des CfA1 mit  $40h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe sowohl mit dem Korrelationsintegral als auch mit den lokalen Korrelationsintegranden auf dieselbe Weise wie oben den IRAS 1.2 Jy Galaxienkatalog. Nach Abbildung 3.47 erscheint eine skaleninvariante Approximation mit  $C(r) \propto r^2$  als möglich. Erneut ist der Skalierungsbereich nur unwesentlich größer als eine Dekade. In Abbildung 3.49 ist wieder eine breite Häufigkeitsverteilung für die lokalen Skalierungsindizes  $\nu(i)$  zu erkennen.

### 3.5.3 Skaliert $\xi_2(r)$ ?

In der Kosmologie wird in der Regel eine Analyse der Skalierungseigenschaften der Galaxienverteilung *inkonsistenterweise* mit der normierten Kumulanten  $\xi(r) = \xi_2(r)$  durchgeführt und nicht mit der (normierten) Dichte–Dichte–Korrelation  $g(r)$  oder dem Korrelationsintegral  $C(r)$  (bzw.  $\Gamma(r)$  oder  $\Gamma^*(r)$ , Coleman & Pietronero 1992). Für  $g(r)$  ist bekannt,

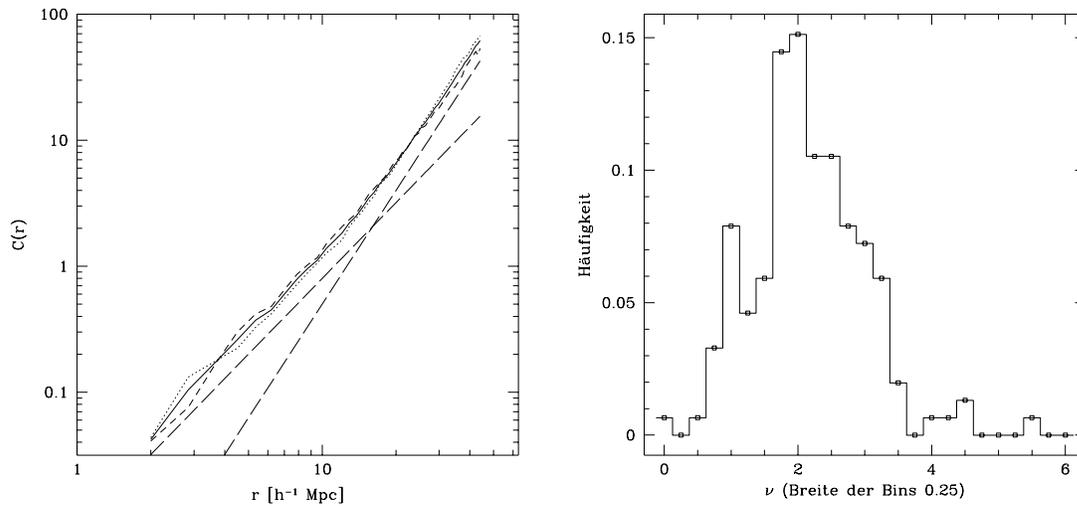


Abbildung 3.45: Volumenlimitierte Stichprobe des IRAS 1.2 Jy mit  $100h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe: Links das Korrelationsintegral  $C(r)$ , rechts die Häufigkeitsverteilung der lokalen Skalierungsindizes  $\nu(i)$  für die Galaxien mit Skalierungsbereich  $\Delta \geq 19.6h^{-1}\text{Mpc}$ .

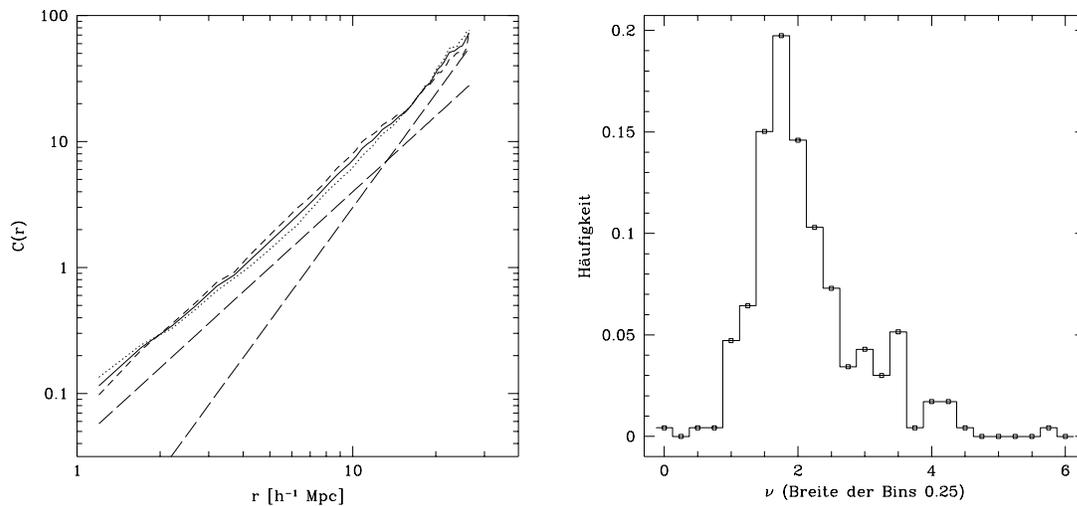


Abbildung 3.46: Volumenlimitierte Stichprobe des IRAS 1.2 Jy mit  $60h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe: Links das Korrelationsintegral  $C(r)$ , rechts die Häufigkeitsverteilung der lokalen Skalierungsindizes  $\nu(i)$  für die Galaxien mit Skalierungsbereich  $\Delta \geq 9.4h^{-1}\text{Mpc}$ .

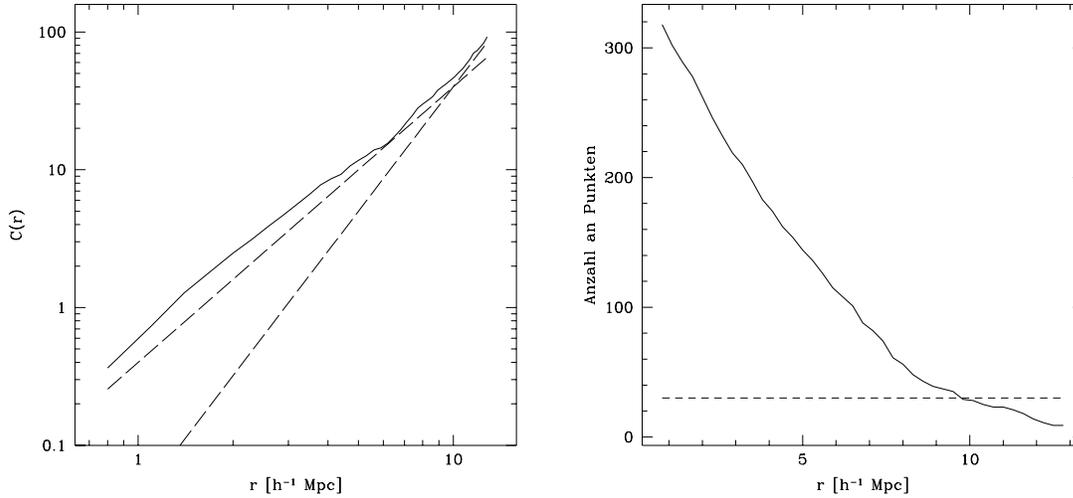


Abbildung 3.47: Volumenlimitierte Stichprobe des CfA1 mit  $40h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe: Es sind die gleichen Größen wie in Abbildung 3.42 aufgetragen.

daß es für einen Monofraktal mit Dimension  $D_2$  wie  $r^{D_2-3}$  geht.  $\xi_2(r)$  skaliert dann nur im nicht durchführbaren Limes  $r \rightarrow 0$ . Mit  $g(r) = \xi_2(r) + 1$  kann also Skaleninvarianz auch für endliche  $r$  untersucht werden. Bereits für einen stationären Poissonprozeß mit  $D_2 = 3$  und  $g(r) = 1$  sieht man, daß  $\log \xi(r) = \log(g(r) - 1)$  nicht definiert ist, wohingegen  $\log g(r) \propto (D_2 - 3) \log r$  für  $D_2 = 3$  erfüllt ist. Für einen Poissonprozeß auf einem Fraktal wird die mittlere Dichte skalenabhängig, wie in Gleichung 3.32 gezeigt ist. Es wird dann der Dichtekontrast und somit  $\xi_2(r)$  abhängig von der Stichprobengröße (Pietronero 1987).

Die Paarkorrelationsfunktion  $\xi_2(r)$  als Funktion von  $r$  ist durchaus zur Analyse der Zweipunkteigenschaften der Galaxienverteilung geeignet, da sie denselben Informationsgehalt wie  $g(r)$  (sowie  $C(r)$ , etc.) hat:

$$g(r) = \xi_2(r) + 1.$$

Da bei clusternden Prozessen  $\xi_2(r)$  auf großen Skalen negativ wird, kann eine logarithmische Darstellung von  $\xi_2(r)$  gegen  $\log r$  zu Fehlinterpretationen führen. Dies wurde bereits ausführlich von Lemson & Sanders (1991) diskutiert. Diese Autoren konnten zeigen, daß der mit  $\xi_2$  bestimmte Skalierungsexponent *nicht* das Skalierungsverhalten der Punktverteilung wiedergibt; angewendet auf den CfA1 Katalog finden sie als Skalierungsbereich knapp einhalb Dekaden mit  $D_2 \approx 2$  in Übereinstimmung mit den neueren Analysen von Sylos Labini et al. (1997a) und unseren Ergebnissen in Abbildung 3.47. In Abbildung 3.50 erkennen wir, daß dies vor allem bei der Untersuchung auf großen Skalen, wenn  $\xi_2(r)$  bereits in der Größenordnung von eins oder kleiner als eins ist, wesentlich wird. Wir sehen, daß nicht der Dichtekontrast und somit auch nicht  $\xi_2(r)$ , sondern, wenn überhaupt, die Dichte und somit  $g(r)$  skaliert. Deutet sich für kleine  $r$  und für  $\xi_2(r) \gg 1$  ein Skalie-

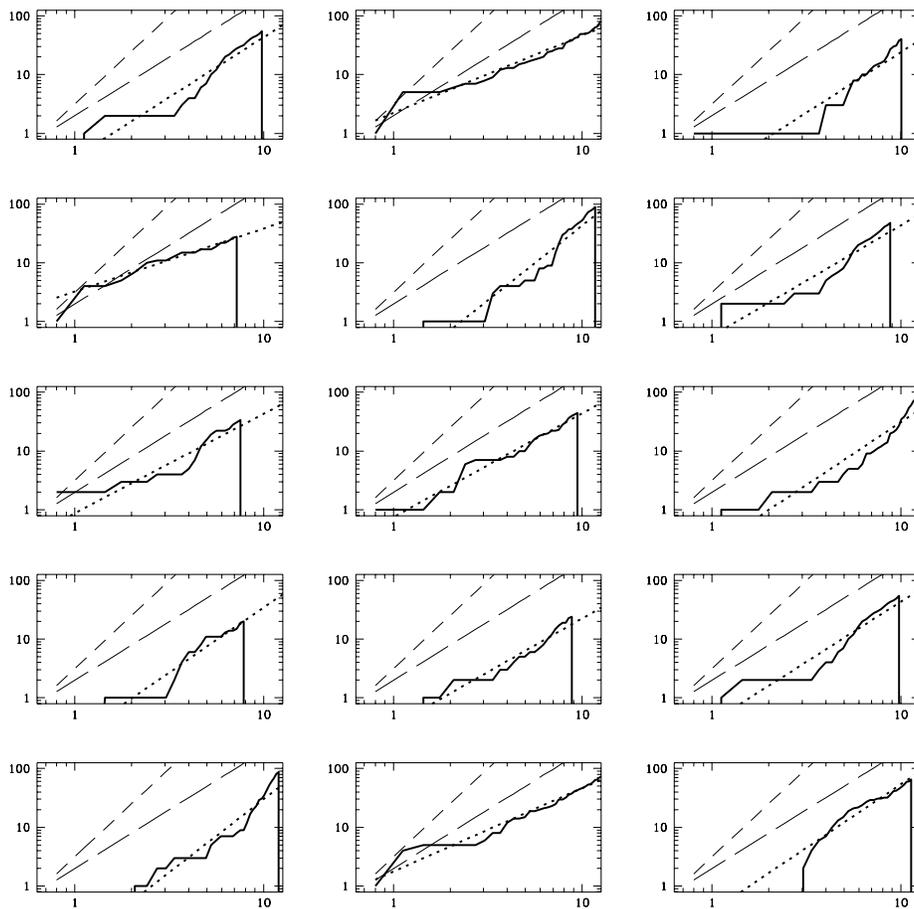


Abbildung 3.48: Volumenlimitierte Stichprobe des CfA1 mit  $40h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe: Es sind die gleichen Größen wie in Abbildung 3.43 aufgetragen, wobei der Skalierungsbereich mindestens  $\Delta \geq 6.2h^{-1}\text{Mpc}$  groß ist.

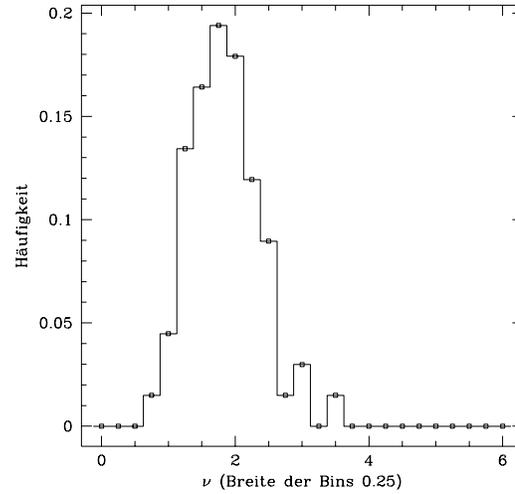


Abbildung 3.49: Volumenlimitierte Stichprobe des CfA1 mit  $40h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe: Es sind die gleichen Größen wie in Abbildung 3.44 aufgetragen, wobei der Skalierungsbereich mindestens  $\Delta \geq 6.2h^{-1}\text{Mpc}$  groß ist und 67 Galaxien in die Häufigkeitsverteilung eingehen.

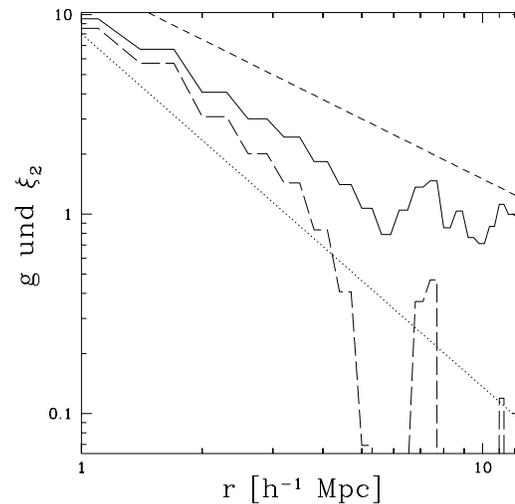


Abbildung 3.50:  $g(r)$  (durchgezogene Linie) und  $\xi_2(r)$  (gestrichelte Linie) für eine volumenlimitierte Stichprobe des CfA1-Katalogs mit  $40h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe.  $g(r)$  wurde mit dem Minus-Schätzer aus Anhang A.2.2 bestimmt. Die dünnen Linien markieren  $r^{-1.77}$  (gepunktet) und  $r^{-1}$  (gestrichelt).

rungsbereich in einer doppelt logarithmischen Darstellung an, so sollte dies Anlaß sein, die Skalierungseigenschaften von  $g(r)$  oder  $C(r), \Gamma(r), \Gamma^*(r)$  zu untersuchen.

### 3.5.4 Skaliert's nun?

Genau diese Frage können wir mit einer Analyse basierend auf dem Korrelationsintegral  $C(r)$  oder der Paarkorrelationsfunktion  $g(r)$  mit den derzeit verfügbaren Daten nicht beantworten. Was wir jedoch sicher sagen können, ist, daß die Verteilung der Galaxien, wie sie durch die derzeit verfügbaren Kataloge gegeben ist, durch große Fluktuationen dominiert wird. Dies erkennen wir an den breiten Histogrammen der lokalen Skalierungsindizes. Auch in einem Fraktal können große Fluktuationen auftreten. Nicht nur in dieser Analyse auf Skaleninvarianz, sondern auch mit der Untersuchung mit Minkowskifunktionalen und der  $J(r)$ -Funktion in Abschnitt 3.2 beobachten wir, daß große Fluktuationen die Clusterungseigenschaften der Galaxienverteilung bestimmen.

Wir haben hier nur das Korrelationsintegral  $C(r)$  auf Skalierungseigenschaften untersucht und sind durch die Ränder der Stichproben auf einen radialen Bereich von maximal  $30h^{-1}\text{Mpc}$  beschränkt. Sylos Labini et al. (1996) finden auch in „Number Counts“ ein fraktales Skalieren bis zu mehreren hundert  $h^{-1}\text{Mpc}$ . Einen detaillierten Kommentar bezüglich der Signifikanz dieser Resultate findet man bei (Guzzo 1998). Die Analyse des Superclusterkatalogs aus Abschnitt 3.4 liefert erste Hinweise, daß auf großen Skalen die Verteilung der Supercluster regulär wird. Dies deutet auf ein Abbrechen der möglicherweise vorhandenen Skalierungshierarchie auf Skalen in der Größenordnung von wenigen  $100h^{-1}\text{Mpc}$  hin. Andererseits haben wir in Abschnitt 3.2 gezeigt, daß die Clusterungseigenschaften der Galaxien auch auf Skalen bis  $200h^{-1}\text{Mpc}$  von Fluktuationen dominiert sind. Große Fluktuationen treten in Fraktalen auf, sind jedoch kein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer skaleninvarianten Verteilung.

## 3.6 Clusternde Galaxien

In Abschnitt 2.4.3 haben wir die  $J(r)$ -Funktion kennengelernt. Zur Berechnung dieser Größen für Galaxienkataloge verwenden wir die Minusschätzer aus Abschnitt A.6. Wie wir bereits in Abschnitt 2.4.3 gesehen haben, wird es nicht möglich sein, mit der  $J(r)$ -Funktion eine Skala in der Größenordnung von  $1\text{--}10h^{-1}\text{Mpc}$  in der Galaxienverteilung zu bestimmen. Darüber hinaus stellt sich in Abschnitt 3.6.2 heraus, daß ein Poisson-Cluster-Prozeß gemischt mit Poissonverteilten „Feldgalaxien“ nur ungenügende die statistischen Eigenschaften der beobachteten Galaxienverteilung wiedergeben kann.

### 3.6.1 $J(r)$ von Galaxienkatalogen

Wir untersuchen den CfA1 und den Perseus-Pisces-Galaxienkataloge mit der  $J$ -Funktion. In Abschnitt 3.2 werden ebenfalls die Clusterungseigenschaften des IRAS 1.2 Jy-Galaxienkatalog und vor allem deren Fluktuationen mit der  $J$ -Funktion untersucht.

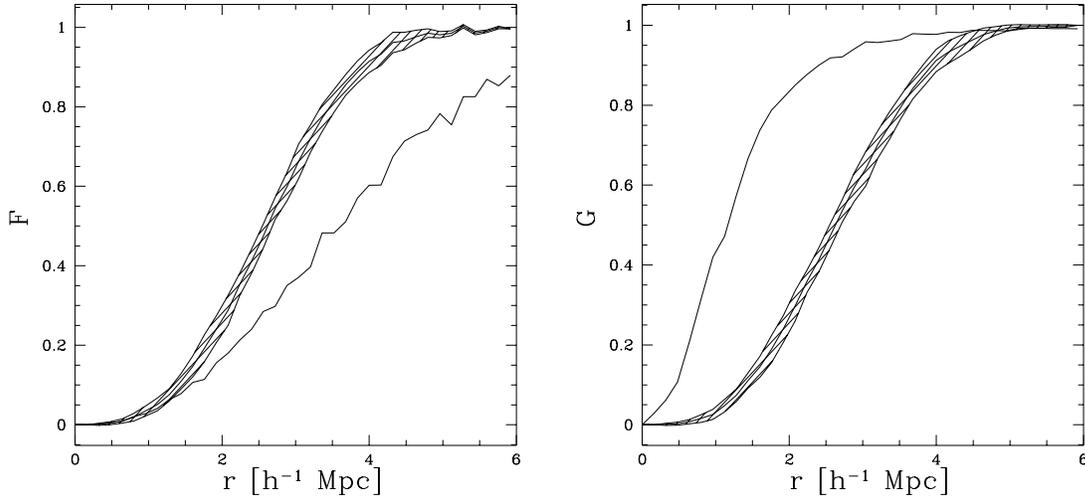


Abbildung 3.51: Die Nächste Nachbarverteilung  $G(r)$  und die sphärische Kontaktverteilung  $F(r)$  für Galaxien der volumenlimitierten Stichprobe des CfA1 mit  $40h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe (durchgezogene Linie). Der  $1\sigma$ -Bereich eines Poissonprozesses mit gleicher Teilchenzahl (schraffierter Bereich) wurde aus fünfzehn Realisierungen geschätzt.

### CfA1 Galaxienkatalog

Wir betrachten eine Abfolge von volumenlimitierten Stichproben des CfA1 Galaxienkatalogs (siehe Abschnitt 3.1.2) mit  $40h^{-1}\text{Mpc}$ ,  $60h^{-1}\text{Mpc}$  und  $80h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe, jeweils mit 360, 218 und 185 Galaxien. Bereits in Abbildung 3.51 sind mit der sphärischen Kontaktverteilung  $F(r)$  und der nächsten Nachbarverteilung  $G(r)$  die typischen Eigenschaften einer clusternden Punktverteilung zu sehen (siehe Abschnitt 2.4.3). Wie in Abbildung 3.52 oben zu sehen ist, äußert sich dieses Verhalten von  $F(r)$  und  $G(r)$  in einem  $J(r) \leq 1$ . Die Stichprobe mit  $40h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe zeigt ein deutlich stärkeres Clustern mit einem kleineren  $J(r)$ , als die Stichproben mit 60 und  $80h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe. Vermutlich ist die Stichprobe mit  $40h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe durch den Virgo Cluster dominiert. Einzig in der Stichprobe mit  $60h^{-1}\text{Mpc}$  ist  $J(r) \approx \text{konstant}$  für  $r > 4h^{-1}\text{Mpc}$  zu erkennen. Mit gutem Willen könnte solch ein Bereich auch in der Stichprobe mit  $80h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe gefunden werden, jedoch erst ab  $r > 7h^{-1}\text{Mpc}$ . Es läßt sich daher keine konsistente Skala aus der Galaxienverteilung ablesen. Siehe hierzu auch die Untersuchungen zum Matérn-Cluster Prozeß in Abschnitt 2.4.3. Die Stärke des Clusters der Galaxienverteilung ab  $r > 6h^{-1}\text{Mpc}$  in den beiden Stichproben mit 60 und  $80h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe ist vergleichbar – die Werte der  $J(r)$ -Funktion bewegen sich in beiden Fällen in der Größenordnung von 0.3.

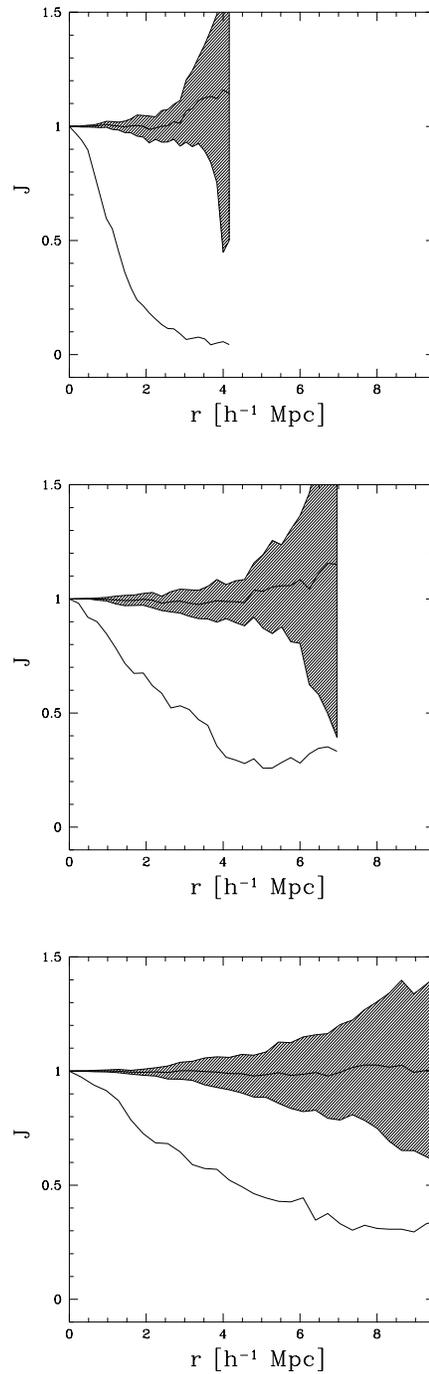


Abbildung 3.52: Die  $J$ -Funktion für Galaxien der volumenlimitierten Stichproben des CfA1 (durchgezogene Linien) mit  $40h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe (Oben), mit  $60h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe (Mitte) mit  $80h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe (Unten), sowie der  $1\sigma$ -Bereich von Poissonprozessen mit gleicher Teilchenzahl (schraffierter Bereich) geschätzt aus fünfzehn Realisierungen.

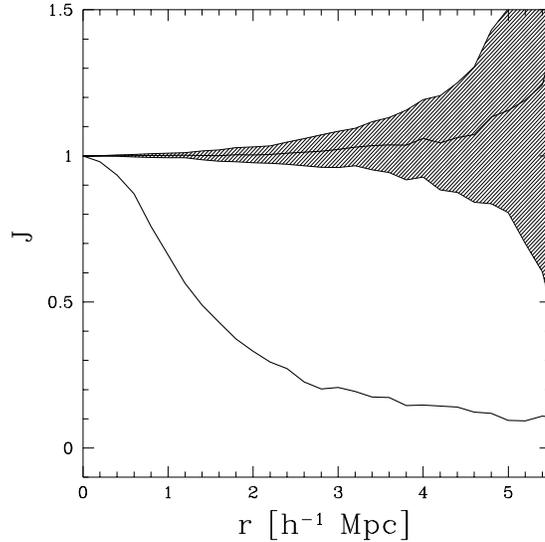


Abbildung 3.53: Die  $J$ -Funktion für Galaxien der volumengrenzten Stichprobe des PPS mit  $79h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe (durchgezogene Linie) sowie der  $1\text{-}\sigma$  Bereich eines Poissonprozesses mit gleicher Teilchenzahl (schraffierter Bereich).

### Perseus–Pisces Galaxien– und Gruppenkatalog

Wir werden nun die Verteilung der Galaxien in einer volumengrenzten Stichprobe des Perseus–Pisces Galaxienkatalogs (PPS) (siehe Abschnitt 3.1.2) mit  $79h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe sowie des daraus abgeleiteten Gruppenkatalogs untersuchen<sup>16</sup>. Diese Stichprobe ist mit 817 Galaxien deutlich größer als alle oben untersuchten Stichproben des CfA1. In Abbildung 3.53 ist  $J(r)$  für die Galaxien der volumengrenzten Stichprobe mit  $79h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe zu sehen. Die  $J$ -Funktion zeigt ein deutlich stärkeres Clustern, als in den CfA1 Stichproben mit  $60$  und  $80h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe, jedoch ein schwächeres als in der (lokalen) Stichprobe mit  $40h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe. Dies verwundert nicht, da der PPS–Galaxienkatalog auf den Perseus Supercluster mit einigen sehr reichen Clustern zentriert ist. Ein Abflachen von  $J(r)$  und somit eine Skala in der Galaxienverteilung ist nicht zu erkennen. Dies ist kein Widerspruch zu der sogenannten “Korrelationslänge“ von  $5h^{-1}\text{Mpc}$ , die einzig die Amplitude der Paarkorrelationsfunktion festlegt, und keine intrinsische Länge des Systems definiert.

In Abbildung 3.54 ist die  $J$ -Funktion für die 230 Galaxien in den 48 losen Gruppen zu sehen, die mit einem Friend–of–Friends Algorithmus aus der volumengrenzten Stichprobe mit  $79h^{-1}\text{Mpc}$  Tiefe bestimmt wurden (siehe Abschnitt 3.1.2). In radialer Richtung wurde hierzu eine Link–Länge von  $6h^{-1}\text{Mpc}$  und in transversaler Richtung mit  $0.52h^{-1}\text{Mpc}$  verwendet. Im Mittel befinden sich 5.1 Galaxien in einer Gruppe. Es ist daher nicht verwun-

<sup>16</sup>Die numerische Berechnung der  $J$ -Funktion für die PPS Galaxien und Gruppendaten wurde von Maria Jesús Pons–Bordería durchgeführt, siehe auch Kerscher et al. (1998).

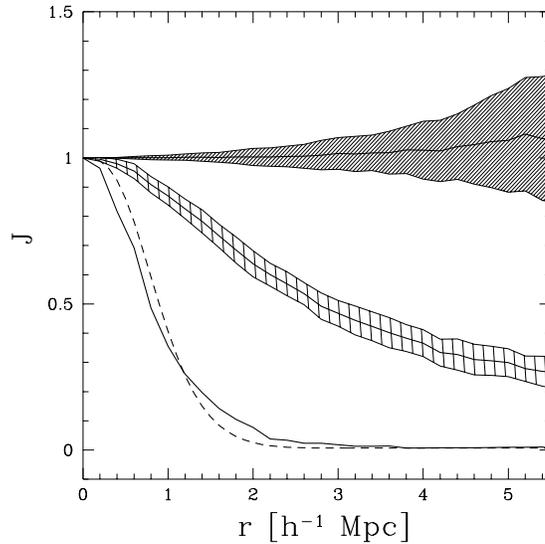


Abbildung 3.54: Die  $J$ -Funktion für Galaxien *in* Gruppen (durchgezogene Linie), und die  $J$ -Funktion für einen Matérn-Prozeß mit  $\mu = 5$  und  $R = 1.5h^{-1}\text{Mpc}$  (gestrichelte Linie). Weiterhin ist ein Poissonprozeß mit gleicher Teilchenzahl (dunkel schraffiert) und der Mittelwert von 50 Stichproben mit 230 zufällig gewählten Galaxien aus der volumenlimitierten Stichprobe (hell schraffiert).

derlich, daß die  $J$ -Funktion eines Matérn-Cluster Prozesses<sup>17</sup> mit Radius  $R = 1.5h^{-1}\text{Mpc}$  und mit im Mittel  $\mu = 5$  Galaxien pro Cluster eine ähnlich Gestalt wie die beobachtete  $J$ -Funktion der Galaxien in Gruppen zeigt. Ein direkter  $\chi^2$  Fit mit der  $J$ -Funktion für einen Matérn-Cluster Prozeß mit den Parametern  $\mu$  und  $R$  schlägt fehl (siehe auch Abschnitt 3.6.2). Da die  $J$ -Funktion im Allgemeinen von der Teilchenzahldichte abhängt (van Lieshout & Baddeley 1996), ist ein Vergleich der Galaxien in Gruppen nur mit einer zufällig ausgedünnten Stichprobe des gesamten volumenlimitierten Galaxienkatalogs möglich. Wie bereits durch die Erzeugung des Gruppenkatalogs nahegelegt, erkennen wir in Abbildung 3.54, daß die Verteilung der Galaxien in Gruppen stärkeres Clustern zeigt als die Verteilung „aller“ Galaxien.

### 3.6.2 Ein *zu* einfaches Modell der Galaxienverteilung

Neyman-Scott Prozesse (Neyman & Scott 1958) sind vermutlich die ersten stochastischen Modelle, die zur Beschreibung der Galaxienverteilung benutzt wurden. Ein ähnlicher Ansatz wurde von Soneira & Peebles (1978) in Form eines speziellen Poisson-Cluster Prozesses verfolgt. Wir untersuchen nun als einfaches Modell für die Galaxienverteilung, dem Matérn-Cluster Prozeß, gemischt mit einem davon unabhängigen Poissonprozeß. Ein Matérn-

<sup>17</sup>Diese Parameter wurden zielstrebig geraten.

Tabelle 3.4: Die Werte für  $J_{\min}$  und  $\mu_{\max}$  der .

Katalog	$J_{\min}$	$\mu_{\max}$
CfA $40h^{-1}$ Mpc Tiefe	0.09	2.4
CfA $60h^{-1}$ Mpc Tiefe	0.26	1.3
CfA $80h^{-1}$ Mpc Tiefe	0.30	1.2
PPS $79h^{-1}$ Mpc Tiefe	0.14	1.9
PPS Gruppen	0.007	5.0 ,

Cluster Prozeß als einfacher Neyman–Scott Prozeß und somit als Poisson–Cluster Prozeß kann nach Abbildung 3.54 einige Eigenschaften der beobachteten Verteilung der Galaxien in losen Gruppen reproduzieren. Darüber hinaus unterscheidet sich die  $J$ -Funktion eines Poisson–Cluster Prozesses auf großen Skalen nicht von der  $J$ -Funktion eines vergleichbaren Matérn–Cluster Prozesses. Es gilt

$$J(r) = \frac{P(M = 1)}{\mu} = \text{konstant mit } r \geq 2R \quad (3.51)$$

für einen Poisson–Cluster Prozeß, in dessen Clustern sich die Galaxien mit Wahrscheinlichkeit eins innerhalb des Radius  $R$  um das Clusterzentrum befinden (van Lieshout & Baddeley 1996).  $P(M = 1)$  ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Cluster genau eine Galaxie enthält, und  $\mu$  die mittlere Anzahl an Galaxien pro Cluster. Ist die Anzahl der Galaxien  $M$  pro Cluster Poissonverteilt wie bei einem Matérn–Cluster Prozeß, so gilt  $J(r) = e^{-\mu}$ . Für die beobachtete Galaxienverteilung bestimmen wir  $J(r) > J_{\min}$  und  $\mu_{\max} = -\ln J_{\min}$  (siehe Tabelle 3.4). Mit der Annahme einer Poissonverteilung für  $M$  liefert  $\mu_{\max}$  eine obere Schranke an die mittlere Anzahl  $\mu$  von Galaxien pro Cluster. Für die Verteilung der Galaxien in Gruppen ist  $\mu_{\max} = 5$  konsistent mit der tatsächlichen mittleren Anzahl an Galaxien pro Cluster  $230/48 \approx 4.8$ . Die Verteilung „aller“ Galaxien zeigt jedoch nur ein  $\mu_{\max} = 1 \dots 2.5$ . Es werden aber Galaxiencluster mit mehreren hunderten Galaxien beobachtet, daher scheinen reine Matérn–Cluster Prozesse und auch allgemeiner ein Poisson–Cluster Prozesse vollkommen untauglich zur Beschreibung der Verteilung von Galaxien.

Um dieses Modell zu „retten“, mischen wir diese Cluster–Prozesse noch mit zufällig verteilten Punkten, die als ein Modell für „Feldgalaxien“ dienen sollen. Sei nun  $J_M(r; \mu, R)$  die  $J$ -Funktion eines Matérn–Cluster Prozesses mit Clusterradius  $R$  und mittlerer Teilchenzahl  $\mu$  pro Cluster. Weiterhin sei  $J_P(r) = 1$  die  $J$ -Funktion eines unabhängigen Poissonprozesses. Mischen wir diese beiden Prozesse mit jeweils der Teilchendichte  $\overline{\rho_M}$  und  $\overline{\rho_P}$ , so erhalten wir nach Gleichung (2.96)

$$J_{\text{misch}}(r; \mu, R, \lambda) = \lambda J_M(r; \mu, R) + (1 - \lambda) J_P(r) = \lambda J_M(r; \mu, R) + (1 - \lambda) \quad (3.52)$$

mit  $\lambda = \frac{\overline{\rho_M}}{\overline{\rho_M} + \overline{\rho_P}}$ . In Abbildung 3.55 ist  $J_{\text{misch}}(r; \mu, R, \lambda)$  für einen variablen Anteil  $\lambda$  bei festem  $\mu$  und  $R$  aufgetragen. Mit  $1 - \lambda$  kontrollieren wir den Anteil an Poissonverteilten

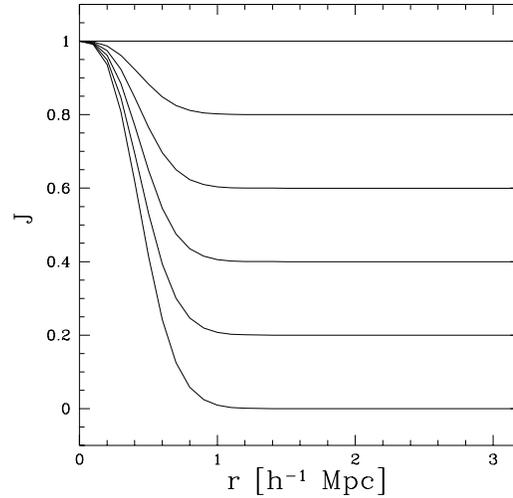


Abbildung 3.55: Die  $J$ -Funktion  $J_{\text{misch}}(r; \mu, R, \lambda)$  für eine Mischung eines Matérn-Cluster Prozesses mit  $\mu = 30$  und  $R = 1.5h^{-1}\text{Mpc}$  und einem Poissonprozeß. Der Anteil  $\lambda$  des Matérn-Prozesses wird von oben nach unten mit  $\lambda = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$  geändert

Galaxien und erhalten  $J_{\text{misch}} \rightarrow 1$  für  $\lambda \rightarrow 0$ . Ein direkter  $\chi^2$ -Fit (Press et al. 1987) von  $J_{\text{misch}}(r; \mu, R, \lambda)$  an  $J(r)$  der Galaxienverteilungen nach Abbildung 3.52 und 3.53 konvergiert nicht für sinnvoller Parameter  $\mu, R, \lambda$ . Dies ist ein erstes Indiz, daß dieses erweiterte Modell ebenfalls *zu* einfach ist und *nicht* die Clusterungseigenschaften der Galaxienverteilung wiedergeben kann. Wie bereits in Abschnitt 2.4.3 besprochen, ist eine intrinsische Skala (soweit überhaupt vorhanden) aus den derzeit verfügbaren Daten nicht bestimmbar.

Mit diesem erweiterten Modell versuchen wir nun den Anteil  $\lambda$  an Galaxien in Clustern (im Unterschied zu Feldgalaxien) zu bestimmen. Für  $\mu \geq 4$  erhalten wir  $J_M(r > 2R; \mu, R) < 0.02$  und somit  $J_{\text{misch}}(r > 2R; \mu, R, \lambda) \approx (1 - \lambda)$  Mit den in Tabelle 3.4 angegebenen Werten für  $J_{\text{min}}$  erhalten wir ein  $\lambda = 0.7 \dots 0.9$ , d.h. 70 bis 90% der Galaxien befinden sich in Clustern. Dies steht im direkten Widerspruch zum Anteil der PPS Galaxien in Gruppen mit nur 28% ( $230/817 = 0.28$ ). Die Galaxienverteilung wird daher nur äußerst ungenügend durch einen Poisson-Cluster Prozeß mit Poissonverteilten Feldgalaxien modelliert. Dies wird auch durch den visuellen Eindruck eines Matérn-Cluster Prozesses (siehe Abbildung 2.5) unterstrichen, der keine großen Strukturen zeigt, wie sie jedoch in der Galaxienverteilung (siehe Abbildung 1.2) beobachtet werden.



# Kapitel 4

## Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurden zuerst die Grundlagen einer statistischen Analyse von Punktverteilungen erläutert (Abschnitt 2). Da durch die Galaxien in unserem Universum nur *eine* Punktverteilung gegeben ist, gingen wir speziell auf den Zusammenhang zwischen einer rein statistischen Beschreibung mit Ensemblemittelwerten und einer Beschreibung mittels räumlicher Mittelwerten ein. Als deskriptive Methoden zur Beschreibung einer Punktverteilung betrachteten wir Größen zweiter Ordnung wie die Paarkorrelationsfunktion, die Verteilung nächster Nachbarn und verwandte Größen, sowie Minkowskifunktionale. Diese unterschiedlichen Verfahren aus den Abschnitten 2.3 bis 2.6 beleuchten verschiedene Aspekte der räumlichen Verteilung der leuchtenden Materie in unserem Universum.

Wir untersuchten dann die beobachtete Galaxien-, Cluster- und Superclusterverteilung und vergleichen diese mit Modellen und Ergebnissen von  $N$ -Körperrechnungen:

- Sicher eines der interessantesten Resultate dieser Arbeit ist das Existenz großer Fluktuationen in den Clusterungseigenschaften der Galaxien bis hinauf zu Skalen von  $200h^{-1}\text{Mpc}$  (Abschnitt 3.2). „Kleine“ Simulationen sind nicht in der Lage, die beobachteten Fluktuationen zu reproduzieren. Aus der statistischen Physik kennen wir große Fluktuationen in der Nähe des kritischen Punktes. In diesem Fall divergiert die Korrelationslänge, wir haben es dann mit einer skaleninvarianten Paarkorrelationsfunktion zu tun (Abschnitt 3.5). Wir konnten zeigen, daß mit den derzeit verfügbaren Galaxienkatalogen der Schluß auf eine „fraktale“ Verteilung der Galaxien *nicht* möglich ist. Eine „Homogenitätsskala“ ist jedoch ebenfalls nicht aus der Galaxienverteilung mit Hilfe der Paarkorrelationsfunktion ablesbar.
- Mit der Untersuchung der Verteilung der Galaxiencluster und einem Vergleich mit  $N$ -Körperrechnungen konnte gezeigt werden, daß zwei gängige Modelle der Strukturbildung (SCDM und TCDM, siehe Abschnitt 3.3) die beobachtete Verteilung der Galaxiencluster nicht wiedergeben können, wohingegen ein  $\Lambda$ CDM- und ein BSI-Modell konsistente Ergebnisse erzielen.
- Mit der Untersuchung der Superclusterverteilung in Abschnitt 3.4 gingen wir zu noch größeren Skalen. Wir fanden Hinweise auf eine reguläre (antikorrelierte) Ver-

teilung der Supercluster, sowie auf eine typische Skala bei  $60h^{-1}\text{Mpc}$ . Da die statistischen Eigenschaften des Supercluster-Kataloges von Einasto et al. (1997c) durch Konstruktions- und Selektionseffekte dominiert sind, ist die Signifikanz dieser Ergebnisse als gering zu bewerten.

- In Abschnitt 3.6 untersuchten wir nochmals die Galaxienverteilung und verglichen deren statistischen Eigenschaften mit denen einfacher Punktprozeßmodelle. Es stellt sich heraus, daß Punktprozesse, die keine Struktur auf großen Skalen zeigen, die Galaxienverteilung nicht konsistent beschreiben können.
- Im Anhang A besprachen wir die Methoden, mit denen die verwendeten statistischen Größen aus Punktverteilungen geschätzt wurden. Für die Schätzer der Paarkorrelationsfunktion konnten wir deren geometrische Eigenschaften klären und zeigen, daß ein weitverbreiteter Schätzer nicht erwartungstreu ist.

### Geplante Arbeiten

In dieser Arbeit wurden einige statistischen Methoden nur vorgeschlagen und noch nicht auf die Untersuchung der beobachteten Galaxienverteilung, etc. angewandt:

Ein erster Versuch, den Übergang von clusternden zu regulären Strukturen mit den  $J_n$ -Funktionen zu vermessen, schlug wegen der geringen Teilchenzahl fehl (Abschnitt 3.4.3). Die Untersuchung des großen Cluster-Kataloges von Andernach & Tago (1998) verspricht hier signifikantere Ergebnisse. Ebenfalls können wir mit den Minkowskifunktionale untersuchen, inwieweit die Clusterverteilung durch einen Poisson-Gauß-Prozeß approximiert werden kann.

In Abschnitt A.2 wurden unterschiedliche Schätzer für die Paarkorrelationsfunktion, sowie deren Vor- und Nachteil diskutiert. Eine Anwendung auf Galaxienkataloge soll klären wie stark die Schätzwerte von den unterschiedlichen Randkorrekturen abhängen.

In Abschnitt 2.2.5 haben wir die Markenproduktichte kennengelernt. Als eine erste Anwendung ist die Untersuchung der Galaxienverteilung geplant, wobei die Marken die absoluten Leuchtkräfte der Galaxien sind. Dies kann neues Licht auf die sogenannte „Luminosity Segregation“ werfen.

Die Untersuchung von Punktverteilungen mit der Delauney-Tesselation wurde nur exemplarisch am Beispiel des Poissonprozesses und von verschiedenen Matérn-Cluster-Prozessen gezeigt (Abschnitt 2.6). Eine Anwendung auf Galaxienkataloge steht noch aus.

### Visionen

Ein durchgängiges und konsistentes Bild von der Galaxienverteilung in unserem Universum deutet sich erst an. Mit einem rein stochastischen Zugang, wie er unter anderem in dieser Arbeit präsentiert wurde, dürfte es schwierig sein, „passende“ Punktprozeßmodelle zu finden. Ohne eine verstärkte Einbeziehung der Dynamik erscheint dies auch nicht besonders sinnvoll. Als Modell für die dynamische Entwicklung der Materieverteilung bietet sich die

Zel'dovich–Approximation an (Zel'dovich 1970). Große Strukturen können mit den Kaustiken der Zel'dovich–Abbildung in Verbindung gebracht werden (Arnol'd et al. 1982). Eine Vermessung der Geometrie dieser Singularitäten und ein Vergleich mit den beobachteten Strukturen könnte helfen, dieses Bild zu quantifizieren. Hier bieten sich die Minkowskifunktionale an. In den zukünftigen Katalogen werden deutlich mehr Galaxien enthalten sein, so daß die „Stärke“ der Singularitäten auch mit dem multifraktalen Spektrum sinnvoll untersucht werden kann.



# Anhang A

## Schätzer

Bisher sind nur die Definitionen und die statistischen Eigenschaften von Punktprozessen diskutiert worden. Soweit möglich wurden auch die entsprechenden Größen diskutiert, die für eine einzige Realisierung  $\mathcal{X}$  (siehe Abschnitt 2.1) wohldefiniert sind. Solch eine rein an den Daten orientierte Beschreibung ist nahe mit der Frage nach Schätzern für statistische Größen verwandt. Betrachten wir Schätzer, so nehmen wir bereits an, daß die Punktmenge  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$  eine Realisierung eines Punktprozesses  $\Phi$  im Beobachtungsfenster  $\mathcal{D}$  ist.

### Erwartungstreue –

Wir wollen nun eine statistische Größe, z.B. die (homogen und isotrop angenommene) Zweipunktdichte  $\rho_2(r)$  für eine gegebene Punktverteilung  $\mathcal{X}$  im Beobachtungsfenster  $\mathcal{D}$  schätzen. Ein Schätzer, in unserem Fall  $\hat{\rho}_2$ , ist erwartungstreu, sobald

$$\rho_2(r) = \mathbb{E} \hat{\rho}_2(r) \tag{A.1}$$

gilt<sup>1</sup>. Das heißt unter anderem, daß der Mittelwert von  $\hat{\rho}_2(r)$  nicht mehr von der Stichprobengeometrie abhängt. In diesem Sinn sind erwartungstreue Schätzer randkorrigiert. Wollen wir geschätzte statistische Größen mit entsprechenden theoretischen Resultaten, die oft nur als Ensemblemittelwerte bekannt sind, vergleichen, so müssen wir erwartungstreue Schätzer verwenden. Auch ist eine Interpretation von Resultaten, die mit erwartungstreuen Schätzern erzielt wurden, einfacher möglich als von Resultaten, die noch Randeffekte beinhalten.

### – oder auch nicht!

Die Erwartungstreue ist nur *eine* Eigenschaft eines Schätzers. Eine kleine Varianz des Schätzers ist oft wichtiger, gerade wenn wir nicht an der funktionalen Gestalt, sondern in erster Linie an einem Vergleich von Beobachtungen mit z.B. simulierten Punktverteilungen aus N-Körperrechnungen interessiert sind. Die diskriminierenden Eigenschaften der Statistik sind uns dann wichtiger. In diesem Fall muß die simulierte Punktverteilung in

---

<sup>1</sup> $\rho_2(r)$  selbst ist bereits als Ensemble-Mittelwert definiert (siehe Abschnitt 2.2.3.)

der gleichen Stichprobengeometrie und mit den gleichen Selektionseffekten wie die beobachteten Daten betrachtet werden. Für solche Schätzer ist eine direkte Interpretation der funktionalen Gestalt schwierig.

## Nichtparametrische Schätzer – parametrische Schätzer

In dieser Arbeit werden nichtparametrische Schätzer für statistische Größen diskutiert, z.B. interessieren wir uns für die Zweipunktkorrelationsfunktion  $\xi_2(r)$  für jeden Wert  $r$ .

Parametrisiert man  $g(r) = 1 + \xi_2(r) = Ar^{-\gamma}$ , so werden üblicherweise die Amplitude  $A$  und der Skalierungsexponent  $\gamma$  durch einen  $\chi^2$ -fit (oder durch einen  $\chi$ -by-eye-fit Davis & Peebles 1983) an die nicht parametrisch geschätzte Paarkorrelationsfunktion bestimmt<sup>2</sup>. Zuverlässigere Schätzwerte sowie Konfidenzbereiche erhält man mit Maximum-Likelihood-Methoden. Speziell für obige Parametrisierung der Zweipunktkorrelationsfunktion wird dies von Ogata & Katsura (1991) diskutiert.

Modelle für die Galaxienverteilung, wie das eben diskutierte skaleninvariante Modell, sind oft nur geometrisch motiviert (z.B. Neyman & Scott 1958 oder Mandelbrot 1982) und entbehren meist einer physikalischen Herleitung. Ein höher gestecktes Ziel ist die Bestimmung von physikalischen Parametern, die direkt die Entwicklung der Galaxienverteilung beschreiben. Im Rahmen des kosmologischen Standardmodells wären dies z.B. die Hubblefunktion  $H_0$ , die normierte Massendichte  $\Omega$ , etc.. Die Abhängigkeit der Punktverteilung von diesen Parametern ist *indirekt*, oft ist nur ein statistischer Vergleich von Punktverteilungen aus Simulationen mit beobachteten Galaxienverteilungen möglich. Der (hochdimensionale) Parameterraum wird meist nur sehr spärlich durchmustert.

## A.1 Schätzer für das Korrelationsintegral

In Abschnitt 2.3.1 haben wir das Korrelationsintegral  $C(r)$  als die die mittlere Anzahl der Punkte in einer Kugel mit Radius  $r$  um einen Punkt der Verteilung definiert.

### A.1.1 Der „naive“ Schätzer für $C(r)$

Der naive, aber nicht erwartungstreue Schätzer  $\widehat{C}_0(r)$  des Korrelationsintegrals einer Punktmenge  $\mathcal{X}$  im Beobachtungsfenster  $\mathcal{D}$  ist wie folgt definiert:

$$\widehat{C}_0(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N N_i(r), \quad (\text{A.2})$$

wobei

$$N_i(r) = \sum_{j=1; j \neq i}^N \mathbb{1}_{[0,r]}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) \quad (\text{A.3})$$

---

<sup>2</sup>Inkonsistenterweise wird in vielen Publikationen in der Kosmologie nicht  $1 + \xi_2$  sondern  $\xi_2$  selbst wie oben parametrisiert, siehe hierzu auch Abschnitt 3.5.3.

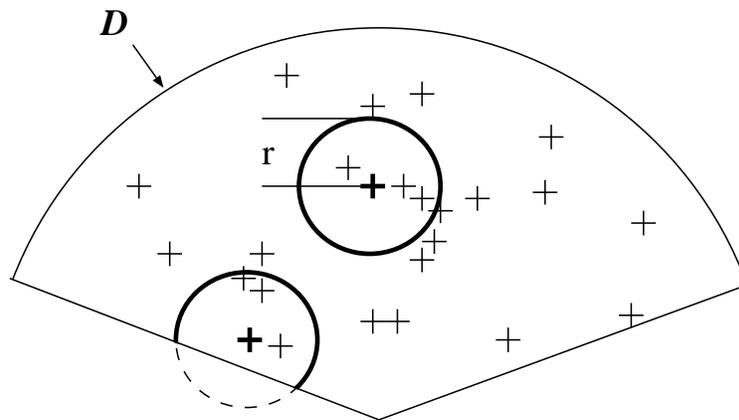


Abbildung A.1: Der naive Schätzer  $\widehat{C}_0(r)$  verwendet alle Punkte als Zentren für die  $N_i(r)$ .

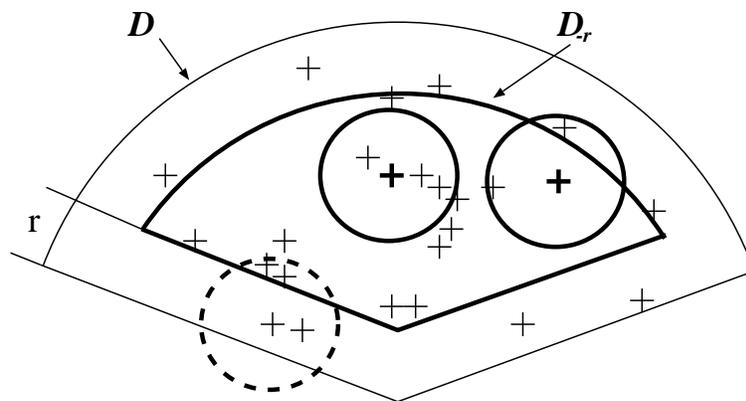


Abbildung A.2: Nur Punkte innerhalb von  $D_{-r}$  werden als Zentren zur Bestimmung von  $N_i(r)$  benutzt.

die Anzahl der Punkte in einer Kugel mit Radius  $r$  um den Punkt  $\mathbf{x}_i$  ist.

$$\mathbb{1}_A(s) = \begin{cases} 1 & s \in A, \\ 0 & s \notin A \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

ist die Indikatorfunktion der Menge  $A \subset \mathbb{R}$ .  $\widehat{C}_0(r)$  ist nichts anderes als der Mittelwert von  $N_i(r)$  über alle Punkte  $\mathbf{x}_i$ . Gerade für Punkte  $\mathbf{x}_i$  nahe dem Rand von  $D$  und für große Radien  $r$  unterschätzen wir die Anzahl der Punkte  $N_i(r)$  (siehe Abbildung A.1).

### A.1.2 Minus-Schätzer für $C(r)$

Als naheliegende Einschränkung fordern wir, daß nur Punkte als Zentren zur Berechnung von  $N_i(r)$  benutzt werden, die weiter als  $r$  vom Rand entfernt sind. Wir sorgen also dafür,

daß wir jeden möglichen Punkt in der Kugel mit Radius  $r$  um den Punkt  $\mathbf{x}_i$  sehen können. Sei  $\mathcal{D}_{-r}$  das verkleinerte Fenster

$$\mathcal{D}_{-r} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \geq r, \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{D}\} \quad (\text{A.5})$$

und  $N_r$  die Anzahl von Punkten in  $\mathcal{X}$  mit einem Abstand größer als  $r$  vom Rand  $\partial\mathcal{D}$ , also die Anzahl der Punkte in  $\mathcal{D}_{-r}$

$$N_r = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{-r}}(\mathbf{x}_i). \quad (\text{A.6})$$

Der Minus-Schätzer  $\widehat{C}_1(r)$  ist dann wie folgt gegeben:

$$\widehat{C}_1(r) = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{-r}}(\mathbf{x}_i) N_i(r). \quad (\text{A.7})$$

Für stationäre Punktprozesse ist dieser Schätzer ratio-unverfälscht, d.h. er ist als Bruch zweier erwartungstreuer Größen definiert. In diesem Fall sind dies die erwartungstreuen Schätzer  $N_r$  für  $\bar{\rho}|\mathcal{D}_{-r}|$  und  $\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{-r}}(\mathbf{x}_i) N_i(r)$  für  $\bar{\rho}|\mathcal{D}_{-r}| C(r)$  (Baddeley et al. 1993). Für große Radien benutzen wir nur einen Bruchteil der Punkte als Zentren. Wir sind daher auf Bereiche in  $r$  bis zum Radius der größten Kugel, die in die Stichprobengeometrie paßt, eingeschränkt. Der Hauptvorteil dieses erwartungstreuen Schätzers ist, daß wir keine Annahmen über die Verteilung der Punkte außerhalb von  $\mathcal{D}$  machen. Daher ist dieser Schätzer vor allem für die Untersuchung inhomogener Punktverteilungen, wie von skaleninvarianten Verteilungen, geeignet (siehe Abschnitt 3.5). Pietronero und Mitarbeiter verwenden diesen Typ von Minus-Schätzern, um ihr  $\Gamma^* = C(r)/(\frac{4\pi}{3}r^3)$  zu schätzen (Sylos Labini et al. 1997b).

Wir wollen eine Variante dieses Minus-Schätzers betrachten, sowie Probleme von  $\widehat{C}_1(r)$  ansprechen. Weiterhin sollen keine Annahmen über die Punktverteilung außerhalb von  $\mathcal{D}$  gemacht werden. Die beste Schätzung der mittleren Teilchendichte in  $\mathcal{D}$  ist

$$\widehat{\bar{\rho}} = \frac{N}{|\mathcal{D}|}. \quad (\text{A.8})$$

Wir erhalten dann

$$\widehat{C}_2(r) = \frac{1}{\widehat{\bar{\rho}}|\mathcal{D}_{-r}|} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{-r}}(\mathbf{x}_i) N_i(r). \quad (\text{A.9})$$

$\widehat{C}_2(r)$  ist ebenfalls ratio-unverfälschter Schätzer. Schätzen wir die Dichte jedoch nicht mit Gleichung (A.8), sondern durch  $N_r/|\mathcal{D}_{-r}|$ , so wird  $\widehat{C}_2(r)$  identisch zu  $\widehat{C}_1(r)$ . In  $\widehat{C}_2(r)$  verwenden wir einen genaueren Schätzwert der Stichprobendichte  $\bar{\rho}$ . Die Werte von  $\widehat{C}_2(r)$  sollten daher eine zuverlässigere Schätzung von  $C(r)$  liefern. Dies kann wichtig werden,

sobald der untersuchte Galaxienkatalog auf einen oder mehrere große Galaxiencluster zentriert ist, wie es beispielsweise beim CfA1- und Perseus-Pisces-Katalog der Fall ist. Es ist dann  $N_r \geq |\mathcal{D}_{-r}| \widehat{\rho}$  und wir unterschätzen mit  $\widehat{C}_1(r)$   $C(r)$  systematisch für große  $r$ . Andererseits betrachten wir in  $\widehat{C}_1(r)$  sowohl im Nenner als auch im Zähler dieselben Punkte, was zu einer „Stabilisierung“ der Varianz des Schätzers führt (siehe Abbildung A.5).

### A.1.3 Ripley-Schätzer für $C(r)$

Mit dem isotropen Ripley-Schätzer nutzen wir alle Punkte in  $\mathcal{D}$  als Zentren, wie es in Abbildung A.1 für den nicht erwartungstreuen Schätzer  $\widehat{C}_0(r)$  dargestellt wird. Der Bias in  $\widehat{C}_0(r)$  wird mit Gewichten korrigiert und wir erhalten

$$\begin{aligned} \widehat{C}_3(r) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1; j \neq i}^N \mathbb{1}_{[0,r]}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) \times \\ &\quad \times \omega_l(\mathbf{x}_i, \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) \omega_g(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

mit den *lokalen* Gewichten (Ripley 1976)

$$\omega_l(\mathbf{x}_i, s) = \begin{cases} \frac{4\pi s^2}{A(\partial\mathcal{B}_s(\mathbf{x}_i) \cap \mathcal{D})} & \text{für } \partial\mathcal{B}_s(\mathbf{x}_i) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{für } \partial\mathcal{B}_s(\mathbf{x}_i) \cap \mathcal{D} = \emptyset \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

und den *globalen* Gewichten

$$\omega_g(s) = \frac{|\mathcal{D}|}{|\{\mathbf{x} \in \mathcal{D} \mid \partial\mathcal{B}_s(\mathbf{x}) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset\}|}, \quad (\text{A.12})$$

wie es von Ohser (1983) eingeführt wurde. Hierbei ist  $\partial\mathcal{B}_s(\mathbf{x})$  die Oberfläche der Kugel  $\mathcal{B}_s(\mathbf{x})$  und  $A(\partial\mathcal{B}_s(\mathbf{x}_i) \cap \mathcal{D})$  der Anteil der Oberfläche einer Kugel bei  $\mathbf{x}_i$  mit Radius  $s$ , der sich innerhalb der Stichprobengeometrie  $\mathcal{D}$  befindet (siehe Abbildung A.3). Mit  $\omega_l(\mathbf{x}_i, s)$  korrigieren wir *lokal* auf mögliche Punkte innerhalb der Kugel  $\mathcal{B}_{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}(\mathbf{x}_i)$ , die sich jedoch außerhalb von  $\mathcal{D}$  befinden. Das *globale* Gewicht  $\omega_g(s)$  wird nur für große  $s$  wichtig, wenn die Oberfläche der Kugel mit Radius  $s$  um einen Punkt innerhalb der Stichprobe nicht mehr die Stichprobengeometrie  $\mathcal{D}$  schneidet.  $\omega_g(s)$  ist der inverse Volumenanteil an Punkten aus  $\mathcal{D}$ , für die dies möglich ist. Bei einer kubischen Stichprobe mit Seitenlänge  $L$  ist dies für  $s > L/\sqrt{2}$  der Fall, ist  $s \leq L/\sqrt{2}$  so gilt  $\omega_g(s) = 1$ . Ohser (1983) zeigte, daß  $\widehat{C}_3(r)$  für einen stationären und isotropen Punktprozeß ratio-unverfälscht ist. In Abschnitt A.1.6 behandeln wir die numerische Implementation von  $\omega_l$  und  $\omega_g$ .

### A.1.4 Ohser-Schätzer für $C(r)$

Für stationäre und isotrope Punktprozesse wurde von Ohser (1983) noch ein weiterer ratio-unverfälschter Schätzer eingeführt:

$$\widehat{C}_4(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1; j \neq i}^N \mathbb{1}_{[0,r]}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) \frac{|\mathcal{D}|}{\gamma_{\mathcal{D}}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)}. \quad (\text{A.13})$$

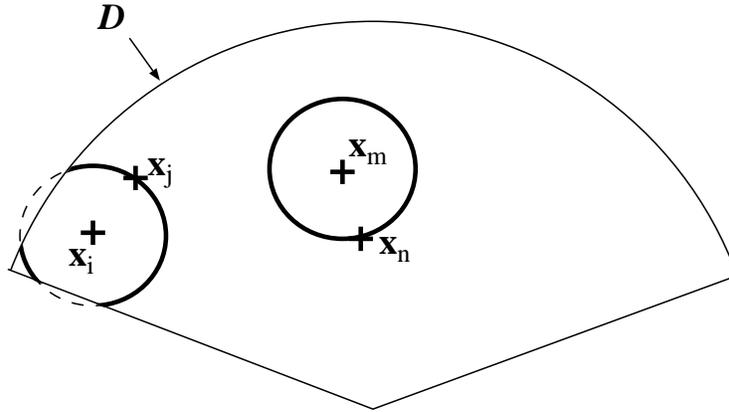


Abbildung A.3: Das lokale Gewicht  $\omega_l(\mathbf{x}_m, s)$  ist gleich eins für den Punkt  $\mathbf{x}_m$  mit  $r < s = \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\|$ . Für den Punkt  $\mathbf{x}_i$  mit  $r > s = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$  ist es größer als eins, gleich dem Inversen des Oberflächenanteils der Kugel innerhalb von  $\mathcal{D}$  (dicke Linie).

$\overline{\gamma}_{\mathcal{D}}(r)$  ist die isotropisierte Mengenkovarianz der Stichprobengeometrie  $\mathcal{D}$  mit Abstand  $r$ :

$$\overline{\gamma}_{\mathcal{D}}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta d\phi \gamma_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}(r, \theta, \phi)). \quad (\text{A.14})$$

Der Punkt  $\mathbf{x} = (r, \theta, \phi)$  sei in Kugelkoordinaten gegeben. Die Mengenkovarianz  $\gamma_{\mathcal{D}}(\mathbf{x})$

$$\gamma_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}) = |\mathcal{D} \cap \mathcal{D} + \mathbf{x}| \quad (\text{A.15})$$

ist das Volumen des Schnittes der Stichprobengeometrie  $\mathcal{D}$  mit dem um  $\mathbf{x}$  verschobenen Fenster  $\mathcal{D} + \mathbf{x}$  (siehe Abbildung A.4). Eng verwandt ist ein Schätzer den Stoyan et al. (1995) und Martínez et al. (1997) diskutieren. Hierbei wird lokal mit der Mengenkovarianz  $\gamma_{\mathcal{D}}(\mathbf{x})$  gewichtet.

### A.1.5 Vergleich der Schätzer für $C(r)$

In Abbildung A.5 vergleichen wir die Schätzer  $\widehat{C}_1(r)$ ,  $\widehat{C}_2(r)$  und  $\widehat{C}_3(r)$  für einen Poissonprozess. Die niedrigste Varianz erreichen wir mit dem Ripley-Schätzer  $\widehat{C}_3(r)$ , der abgewandelte Minus-Schätzer  $\widehat{C}_2(r)$  zeigt die größte Varianz.

### A.1.6 Berechnung der Gewichte

Zur Berechnung des lokalen Gewichtes  $\omega_l(\mathbf{x}_i, s)$  aus Abschnitt A.1.3 können Monte-Carlo-Verfahren verwendet werden. Die weitverbreitete Methode, zuerst eine zufällige Punktverteilung in  $\mathcal{D}$  zu erzeugen und mit deren Hilfe dann den Oberflächenanteil innerhalb von  $\mathcal{D}$  approximativ zu bestimmen, liefert, vor allem für kleine Radien  $r$ , nur dann genaue Werte, wenn die Anzahl der zufälligen (Poisson-verteilten) Punkte sehr hoch ist. Für rechteckige

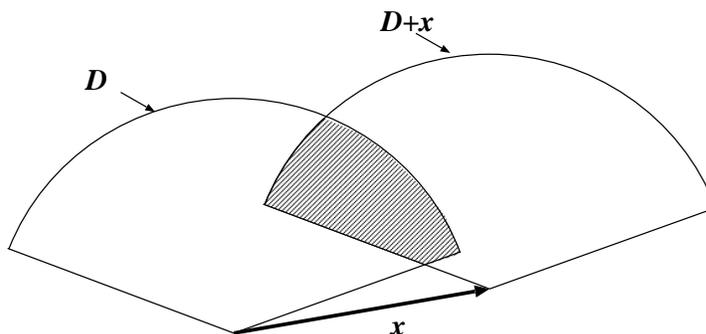


Abbildung A.4: Illustration zur Mengenkovarianz  $\gamma_{\mathcal{D}}(\mathbf{x})$ , der schraffierte Bereich markiert die Menge  $\mathcal{D} \cap \mathcal{D} + \mathbf{x}$ .

Stichprobengeometrien geben Baddeley et al. (1993) das lokale und das globale Gewicht an. Solange wir noch eine „einfache“ Parametrisierung der Schnittlinien des Randes der Kugeln  $\partial\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$  mit der Stichprobengeometrie  $\mathcal{D}$  finden können, läßt sich das lokale Gewicht mit Hilfe des numerisch auswertbaren Integrals über die Radialfunktion zur Schnittlinie bestimmen (Schmalzing 1996). Oft ist es einfacher, aber meist auch rechenzeitintensiver, die Oberfläche der Kugel  $\partial\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$  in kleine Flächenstücke gleichen Flächeninhalts zu zerlegen und dann die Anzahl dieser Flächenstücke innerhalb der Stichprobengeometrie zu zählen.

Das globale Gewicht  $\omega_g(r)$  läßt sich am einfachsten mit Monte–Carlo–Methoden bestimmen. Die isotropisierte Mengenkovarianz  $\overline{\gamma_{\mathcal{D}}}(r)$  kann für rechteckige und sphärische Mengen  $\mathcal{D}$  berechnet werden (siehe Stoyan & Stoyan 1992 in zwei Dimensionen). Für andere Stichprobengeometrien können Monte–Carlo–Methoden verwendet werden. In Abschnitt A.2.5 zeigen wir den Zusammenhang von  $\overline{\gamma_{\mathcal{D}}}(r)$  mit der Anzahl von Paaren  $RR(r)$  zufälliger Punkte in  $\mathcal{D}$ .

## A.2 Schätzer für die Paarkorrelationsfunktion

In einer stationären und isotropen Punktverteilung ist  $g(r) \bar{\rho} 4\pi r^2 dr$  die Wahrscheinlichkeit einen Punkt in der Schale  $[r, r + dr]$  um einen Punkt der Verteilung herum zu finden (siehe Abschnitt 2.3.2). Im Gegensatz zu den oben angeführten Schätzern für das Korrelationsintegral  $C(r)$  sind Schätzer für die Paarkorrelationsfunktion nie erwartungstreu, da sie immer endliche „Bins“  $\Delta$  verwenden. Eine Eigenschaft vergleichbar mit der Erwartungstreue ist, daß der Schätzer für  $\Delta \rightarrow 0$  gegen das „wahre“  $g(r)$  konvergiert. Wir diskutieren der Einfachheit halber keine Kern–Methoden, wie sie von Stoyan & Stoyan (1992) und Martínez et al. (1997) vorgeschlagen wurden.

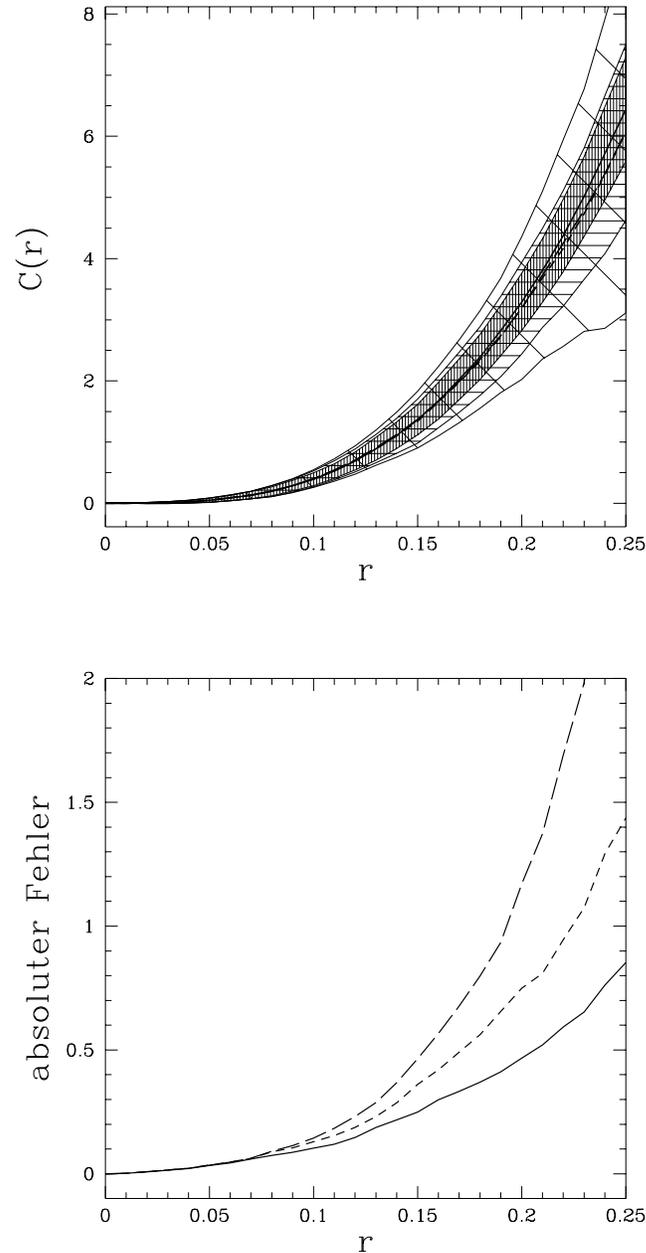


Abbildung A.5: In der oberen Abbildung sehen wir die Mittelwerte des Ripley-Schätzers  $\widehat{C}_3(r)$  (durchgezogene Linie, dunkel schraffiert), des Minus-Schätzers  $\widehat{C}_1(r)$  (kurz gestrichelt, mittel schraffiert) und von  $\widehat{C}_2(r)$  (lang gestrichelt, hell schraffiert) für einen Poissonprozeß mit  $\bar{\rho} = 100$  im Einheitswürfel. Die schraffierten Bereiche markieren die  $1\sigma$ -Fehler der Schätzer, bestimmt aus 100 Realisierungen. In der unteren Abbildung sind die absoluten Fehler aufgetragen.

### A.2.1 Der „naive“ Schätzer für $g(r)$

Den naiven Schätzer  $\widehat{g}_0(r)$  für Paarkorrelationsfunktion erhalten wir analog zum Schätzer  $\widehat{C}_0(r)$  für das Korrelationsintegral:

$$\widehat{g}_0(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{n_i^\Delta(r)}{4\pi r^2 \Delta \widehat{\rho}}, \quad (\text{A.16})$$

wobei

$$n_i^\Delta(r) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbb{1}_{[r, r+\Delta]}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) = N_i(r + \Delta) - N_i(r) \quad (\text{A.17})$$

die Anzahl der Punkte in einer Kugelschale mit Radius in  $[r, r + \Delta]$  um einen Punkt des Prozesses ist.  $\widehat{\rho} = \frac{N}{|\mathcal{D}|}$  ist der Schätzwert für die mittlere Teilchenzahldichte  $\bar{\rho}$ . Für genügend glatte  $N_i(r)$  konvergiert der Quotient  $\frac{n_i(r)}{\Delta}$  gegen  $\frac{dN_i(r)}{dr}$  und wir erhalten

$$4\pi r^2 \widehat{\rho} \widehat{g}_0(r) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \frac{d\widehat{C}_0(r)}{dr}. \quad (\text{A.18})$$

Wie mit  $\widehat{C}_0(r)$  unterschätzen wir für große  $r$  mit  $\widehat{g}_0(r)$  die Paarkorrelationsfunktion  $g(r)$ .

### A.2.2 Minus-Schätzer für $g(r)$

Die Minus-Schätzer für  $g(r)$  sind wie folgt gegeben:

$$\widehat{g}_1(r) = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{-r}}(\mathbf{x}_i) \frac{n_i^\Delta(r)}{4\pi r^2 \Delta \widehat{\rho}} \quad (\text{A.19})$$

und

$$\widehat{g}_2(r) = \frac{1}{|\mathcal{D}_{-r}| \widehat{\rho}} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{-r}}(\mathbf{x}_i) \frac{n_i^\Delta(r)}{4\pi r^2 \Delta \widehat{\rho}}. \quad (\text{A.20})$$

Wie in Abschnitt A.2.1 für den naiven Schätzer  $\widehat{g}_0(r)$  gezeigt, lassen sich die beiden Minus-Schätzer als Ableitungen der entsprechenden Schätzer für das Korrelationsintegral schreiben. Weder  $\mathbb{1}_{\mathcal{D}_{-r}}(\mathbf{x}_i)$ ,  $N_r$  noch  $|\mathcal{D}_{-r}|$  dürfen hierbei abgeleitet werden, nur die Anzahl der Punkte in der Kugel  $N_i(r)$  wird abgeleitet, um den Zuwachs an Punkten in der Kugelschale zu erhalten. Die Gruppe um Pietronero benutzt üblicherweise  $\widehat{\rho} \widehat{g}_1(r)$ , um  $\Gamma(r)$  zu schätzen. Wie bereits im Abschnitt A.1.2 besprochen, können wir mit  $\widehat{g}_1(r)$  die Paarkorrelationsfunktion  $g(r)$  für Galaxienkataloge mit Clustern im Zentrum unterschätzen.

### A.2.3 Rivolo–Schätzer für $g(r)$

Rivolo (1986) schlug folgenden Schätzer für die Paarkorrelationsfunktion vor:

$$\widehat{g}_3(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{n_i^\Delta(r)}{4\pi r^2 \Delta \widehat{\rho}} \omega_l(\mathbf{x}_i, r) = \frac{|\mathcal{D}|}{N^2} \sum_{i=1}^N \frac{n_i^\Delta(r)/\Delta}{\Lambda(\partial\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i) \cap \mathcal{D})}. \quad (\text{A.21})$$

Setzen wir in Gleichung (A.10) für  $\widehat{C}_3(r)$  das globale Gewicht  $\omega_g = 1$  auf eins, dann erhalten wir für infinitesimales  $\Delta$

$$\frac{n_i(r)^\Delta}{\Delta} \omega_l(\mathbf{x}_i, r) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \sum_{j=1; j \neq i}^N \delta(r - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) \omega_l(\mathbf{x}_i, \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|). \quad (\text{A.22})$$

Der Rivolo–Schätzer konvergiert somit für  $\Delta \rightarrow 0$  gegen die Ableitung des ratio unverfälschten Ripley–Schätzers:

$$4\pi r^2 \widehat{\rho} \widehat{g}_3(r) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \frac{d}{dr} \widehat{C}_3(r). \quad (\text{A.23})$$

### A.2.4 Der Ohser–Schätzer für $g(r)$

Wie in Abschnitt A.2.3 für den Rivolo– und den Ripley–Schätzer gezeigt, können wir einen Schätzer für die Paarkorrelationsfunktion  $g(r)$  aus dem Ohser–Schätzer für das Korrelationsintegral  $\widehat{C}_4(r)$  ableiten (siehe auch Stoyan & Stoyan 1992 und Ohser & Tscherny 1988):

$$\widehat{g}_4(r) = \frac{|\mathcal{D}|^2}{N^2 4\pi r^2 \overline{\gamma_{\mathcal{D}}}(r)} \sum_{i=1}^N \frac{n_i^\Delta(r)}{\Delta}. \quad (\text{A.24})$$

Im Unterschied zu Ohser & Tscherny (1988) verwenden wir mit  $n_i^\Delta(r)$  einen rechteckigen Kern.

### A.2.5 Schätzer für $g(r)$ mit $DD$ , $DR$ und $RR$

Die Paar–Schätzer  $DD/RR$  und  $DD/DR$  sind wahrscheinlich die in der Kosmologie am häufigsten verwendeten Schätzer für die Paarkorrelationsfunktion. Mit der üblichen Notation ist

$$DD(r) = \sum_{i=1}^N n_i^\Delta(r), \quad (\text{A.25})$$

die Anzahl der Daten–Datenpunktpaare im Abstand  $[r, r + \Delta]$ . Die einzelnen Paare werden doppelt gezählt. Zuerst zeigen wir, daß  $DR(r)$  und  $RR(r)$  Monte–Carlo–Schätzer für wohldefinierte geometrische Größen sind und stellen dann den Zusammenhang mit den oben bereits definierten Schätzern  $\widehat{g}_3(r)$  und  $\widehat{g}_4(r)$  her.

### A.2.6 Die Geometrie von $DR$ und $RR$

Um  $DR(r)$  und  $RR(r)$  zu definieren, benutzen wir ein Menge von Poisson-verteilten Punkten  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_M\}$  innerhalb der Stichprobengeometrie  $\mathbf{y}_j \in \mathcal{D}$ . Mit  $\overline{\rho_R} = \frac{M}{|\mathcal{D}|}$  bezeichnen wir die Teilchendichte der zufälligen Punkte. Sei nun

$$DR(r) = \sum_{i=1}^N dr_i^\Delta(r) \quad (\text{A.26})$$

die Anzahl der Datenpunkt-Zufallspunktpaare mit Abstand in  $[r, r + \Delta]$ , wobei

$$dr_i^\Delta(r) = \sum_{j=1}^M \mathbb{1}_{[r, r+\Delta]}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j\|) \quad (\text{A.27})$$

die Anzahl zufälliger Punkte  $\mathbf{y}_j$  in der Kugelschale der Dicke  $\Delta$  um den Datenpunkt  $\mathbf{x}_i$  mit Radius in  $r$  ist. Für große  $M$  und kleine  $\Delta$  gilt

$$dr_i^\Delta(r) \rightarrow \overline{\rho_R} A(\partial\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i) \cap \mathcal{D}) \Delta, \quad (\text{A.28})$$

und wir erhalten

$$DR(r) = \overline{\rho_R} \Delta \sum_{i=1}^N A(\partial\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i) \cap \mathcal{D}) = 4\pi r^2 \Delta \overline{\rho_R} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_l(\mathbf{x}_i, r)}, \quad (\text{A.29})$$

proportional zu den gemittelten inversen lokalen Gewichten  $\omega_l$ .

Analog sei

$$RR(r) = \sum_{i=1}^M rr_i^\Delta(r) \quad (\text{A.30})$$

die Anzahl der Paare zufällig verteilter Punkte mit Abstand in  $[r, r + \Delta]$ . Die einzelnen Paare werden doppelt gezählt.

$$rr_i^\Delta(r) = \sum_{j=1, j \neq i}^M \mathbb{1}_{[r, r+\Delta]}(\|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|) \quad (\text{A.31})$$

ist die Anzahl der zufälligen Punkte  $\mathbf{y}_j \in \mathcal{D}$  in der Kugelschale mit Radius in  $[r, r + \Delta]$  um einen zufälligen Punkt  $\mathbf{y}_i$ . Schreiben wir die Mengenkovarianz nach Gleichung (A.15) als eine Monte-Carlo-Integration, so erhalten wir für  $M \rightarrow \infty$

$$\gamma_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}) = \frac{|\mathcal{D}|}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}). \quad (\text{A.32})$$

Die isotropisierte Mengenkovarianz nach Gleichung (A.14) ist dann das Mittel über die Winkelpositionen

$$\begin{aligned}\overline{\gamma_{\mathcal{D}}}(r) &= \frac{|\mathcal{D}|}{4\pi M} \sum_{i=1}^M \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta d\phi \int_0^\infty dr' \delta^D(r' - r) \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(\mathbf{y}_i + \mathbf{x}(r', \theta, \phi)) \\ &= \frac{|\mathcal{D}|}{4\pi r^2 M} \sum_{i=1}^M \int_{\mathbb{R}^3} d^3 z_i \delta^D(\|\mathbf{z}_i - \mathbf{y}_i\| - r) \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(\mathbf{z}_i).\end{aligned}\quad (\text{A.33})$$

Indem wir das Volumenintegral erneut als eine Monte–Carlo–Integration (mit denselben Punkten) schreiben, erhalten wir

$$\overline{\gamma_{\mathcal{D}}}(r) = \frac{|\mathcal{D}|^2}{4\pi r^2 M(M-1)} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M \delta(\|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\| - r).\quad (\text{A.34})$$

Für großes  $M$  und kleines  $\Delta$  gilt

$$\overline{\gamma_{\mathcal{D}}}(r) = \frac{|\mathcal{D}|^2}{4\pi r^2 M^2} \sum_{i=1}^M \frac{r r_i^\Delta(r)}{\Delta}.\quad (\text{A.35})$$

$RR(r)$  ist somit direkt proportional zur isotropisierten Mengenkovarianz. Zusammenfassend folgt:

$$RR(r) = 4\pi r^2 \Delta \overline{\rho_R}^2 \overline{\gamma_{\mathcal{D}}}(r),\quad (\text{A.36})$$

$$DR(r) = 4\pi r^2 \Delta \overline{\rho_R} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_l(\mathbf{x}_i, r)}.\quad (\text{A.37})$$

### A.2.7 Der $DD/RR$ –Schätzer für $g(r)$

Einer der ältesten Schätzer für die Paarkorrelationsfunktion ist der  $DD/RR$ –Schätzer:

$$\widehat{g}_5(r) = \frac{M^2 DD(r)}{N^2 RR(r)}.\quad (\text{A.38})$$

Mit den Gleichungen (A.25) und (A.36) sehen wir, daß  $\widehat{g}_5(r)$  eine Monte–Carlo–Version des für  $\Delta \rightarrow 0$  erwartungstreuen Ohser–Schätzers  $\widehat{g}_4(r)$  ist.

### A.2.8 Der $DD/DR$ –Schätzer für $g(r)$

In letzter Zeit wurde für Untersuchungen von Galaxienkatalogen mit der Paarkorrelationsfunktion immer häufiger der  $DD/DR$ –Schätzer verwendet. Im Widerspruch zu Blanchard & Alimi (1988) haben bereits Landy & Szalay (1993) gezeigt, daß der  $DD/DR$  Schätzer nicht erwartungstreu ist. Wir erhalten das gleiche Resultat auf unterschiedlichem Wege, wobei wir zusätzlich

zeigen können, welche (nicht erfüllbaren) Annahmen in den  $DD/DR$ -Schätzer eingehen. Wir definieren

$$\widehat{g}_6(r) = \frac{M}{N} \frac{DD(r)}{DR(r)}. \quad (\text{A.39})$$

Mit den Gleichung (A.25) und (A.29) erhalten wir

$$\widehat{g}_6(r) = \frac{|\mathcal{D}|}{N^2} \frac{\sum_{i=1}^N n_i^\Delta(r)/\Delta}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A(\partial\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i) \cap \mathcal{D})} = \frac{|\mathcal{D}|}{N^2} \frac{\sum_{i=1}^N n_i^\Delta(r)/\Delta}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{4\pi r^2}{\omega_l(\mathbf{x}_i, r)}}. \quad (\text{A.40})$$

Vergleichen wir dies nun mit der Definition (A.21)

$$\widehat{g}_3(r) = \frac{|\mathcal{D}|}{N^2} \sum_{i=1}^N \frac{n_i^\Delta(r)/\Delta}{A(\partial\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i) \cap \mathcal{D})} = \frac{|\mathcal{D}|}{N^2} \sum_{i=1}^N \frac{n_i^\Delta(r)/\Delta}{\frac{4\pi r^2}{\omega_l(\mathbf{x}_i, r)}}$$

des Rivolo-Schätzers, der für  $\Delta \rightarrow 0$  erwartungstreu ist, dann sehen wir, daß *fälschlicherweise* die lokalen Gewichte  $\omega_l$  durch ein Mittel über diese lokalen Gewichte ersetzt werden. Mit dem  $DD/DR$ -Schätzer nehmen wir an, daß das lokale Gewicht, das einer Galaxie im Rivolo-Schätzer zugewiesen wird, unabhängig von der relativen Position zum Rand angenommen wird, was *nie* erfüllt ist. Vor allem für Galaxienkataloge mit großen Clustern und/oder wenn große Strukturen wie Wände und Filamente die Stichprobengeometrie schneiden, wird der  $DD/DR$ -Schätzer einen Bias zeigen.

Sowohl im  $DD/DR$ -Schätzer als auch im Rivolo-Schätzer setzen wir das globale Gewicht  $\omega_g$  auf eins. Werden sie daher auf sehr großen Skalen benutzt, wird die Paarkorrelationsfunktion unterschätzt.

### A.2.9 Der Landy–Szalay–Schätzer für $g(r)$

Landy & Szalay (1993) führten einen neuen Schätzer für die Korrelationsfunktion ein (siehe auch Szapudi & Szalay 1997):

$$\widehat{g}_7(r) = \frac{M^2}{N^2} \frac{DD(r)}{RR(r)} - 2 \frac{M}{N} \frac{DR(r)}{RR(r)} + 2. \quad (\text{A.41})$$

Landy & Szalay (1993) zeigen, daß dieser Schätzer für Poisson- und Binomialprozesse erwartungstreu ist. Wir können  $\widehat{g}_7(r)$  durch die Schätzer  $\widehat{g}_5(r)$  und  $\widehat{g}_6(r)$  ausdrücken.

$$\widehat{g}_7(r) = \widehat{g}_5(r) - 2 \frac{M}{N} \frac{DR(r)}{RR(r)} + 2 = \widehat{g}_5(r) - 2 \frac{\widehat{g}_5(r)}{\widehat{g}_6(r)} + 2. \quad (\text{A.42})$$

Mit Gleichung (A.36) und (A.37) erhalten wir

$$\widehat{g}_7(r) = \widehat{g}_5(r) - 2 \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_l(\mathbf{x}_i, r)}}{\overline{\gamma_{\mathcal{D}}(r)}/|\mathcal{D}|} + 2. \quad (\text{A.43})$$

Der Hauptgrund, warum Landy & Szalay (1993), Szapudi & Szalay (1997) und auch Hamilton (1993) neue Schätzer für  $g(r)$  eingeführt haben, liegt in deren kleineren Varianz. Landy & Szalay 1993 zeigten, daß die Varianz ihres Schätzers für Poisson- und Binomialprozesse proportional zu  $1/N^2$  ist, wohingegen die Varianz des  $DD/RR$ -Schätzers proportional zu  $1/N$  ist ( $N$  ist die Anzahl der Punkte in der Stichprobe).

### Erwartungstreue

Da  $\hat{g}_5(r)$  und ebenso  $\hat{g}_4(r)$  für  $\Delta \rightarrow 0$  erwartungstreu sind, ist dies  $\hat{g}_7(r)$  nur dann, wenn im Ensemblemittel

$$1 = \mathbb{E} \frac{M DR(r)}{N RR(r)} = \mathbb{E} \frac{\hat{g}_5(r)}{\hat{g}_6(r)} = \mathbb{E} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_l(\mathbf{x}_i, r)}}{\overline{\gamma_{\mathcal{D}}(r)}/|\mathcal{D}|} \quad (\text{A.44})$$

gilt. In Übereinstimmung mit Landy & Szalay (1993) ist es möglich, die Erwartungstreue (für  $\Delta \rightarrow 0$ ) für einen Poissonprozeß in eine kugelförmigen Stichprobengeometrie  $\mathcal{D} = \mathcal{B}_R(0)$  zu zeigen. Leider war es bisher nicht möglich die Erwartungstreue für beliebige stationäre und isotrope Punktprozesse in allgemeinen Stichprobengeometrien zu zeigen. In Abbildung A.6 erkennen wir, daß für einen Poisson-, einen Binomial- und einen Matérn-Cluster-Prozeß mit Teilchendichte  $\bar{\rho} = 100$  im Einheitswürfel, der Summand  $\frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_l(\mathbf{x}_i, r)}}{\overline{\gamma_{\mathcal{D}}(r)}/|\mathcal{D}|}$  im Mittel eins ist. Empirisch scheint daher der Landy-Szalay Schätzer für Prozesse die keine großen Strukturen aufweisen, erwartungstreu zu sein.

### A.2.10 Der Hamilton-Schätzer für $g(r)$

Mit der gleichen Intention wie Landy & Szalay (1993) schlug Hamilton (1993) folgenden Schätzer für die Paarkorrelationsfunktion vor

$$\hat{g}_8(r) = \frac{DD(r)RR(r)}{DR(r)^2}. \quad (\text{A.45})$$

Landy & Szalay (1993) zeigten bereits für Poissonprozesse, daß dieser Schätzer nicht erwartungstreu ist. Mit Gleichung (A.25), (A.36) und (A.37) erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{g}_8(r) &= \frac{\overline{\gamma_{\mathcal{D}}(r)}/|\mathcal{D}|}{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_l(\mathbf{x}_i, r)}\right)^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{n_i^\Delta(r)}{\bar{\rho} 4\pi r^2 \Delta} \\ &= \frac{\overline{\gamma_{\mathcal{D}}(r)}/|\mathcal{D}|}{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_l(\mathbf{x}_i, r)}\right)^2} \hat{g}_0(r) = \frac{\overline{\gamma_{\mathcal{D}}(r)}/|\mathcal{D}|}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_l(\mathbf{x}_i, r)}} \hat{g}_6(r). \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Interessanterweise taucht der gleiche Term  $\frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_l(\mathbf{x}_i, r)}}{\overline{\gamma_{\mathcal{D}}(r)}/|\mathcal{D}|}$ , wie bereits beim Landy-Szalay-Schätzer diskutiert, als Faktor vor dem *nicht* erwartungstreuen Schätzer  $\hat{g}_6(r)$  auf.

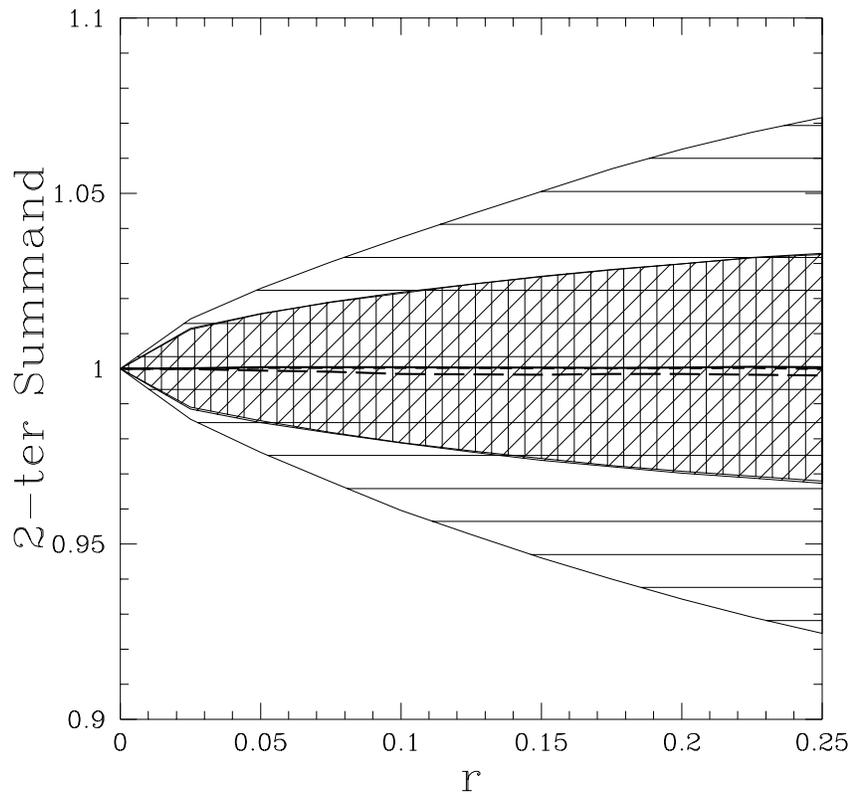


Abbildung A.6: Es sind die Mittelwerte von  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\gamma_{\mathcal{D}}(r)/|\mathcal{D}|}$  für einen Poissonprozeß (vertikal schraffiert), für einen Binomialprozeß (diagonal schraffiert) und für einen Matérn-Clusterprozeß (horizontal schraffiert; Clusterradius  $R = 0.1$  und mittlerer Anzahl an Galaxien pro Cluster  $\mu = 5$ ). Die  $1-\sigma$  Fehlerbereiche wurden aus 500 Realisierungen der Prozesse mit Teilchendichte  $\bar{\rho} = 100$  im Einheitswürfel geschätzt.

### A.3 Schätzer für $\sigma(r)^2$

Nach Definition 2.56 gilt für  $\sigma(r)^2 = \sigma(\mathcal{B}_r)^2$

$$\sigma(r)^2 = \frac{\mathbb{E}(\varphi(\mathcal{B}_r) - \bar{\rho}|\mathcal{B}_r|)^2 - \bar{\rho}|\mathcal{B}_r|}{(\bar{\rho}|\mathcal{B}_r|)^2}. \quad (\text{A.47})$$

Wir wollen  $\sigma(r)^2$  für eine Verteilung von  $N$  Punkten  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$  innerhalb der Stichprobengeometrie  $\mathcal{D}$  schätzen. Die mittlere Teilchendichte ist durch  $\hat{\rho} = \frac{N}{|\mathcal{D}|}$  gegeben. Seien  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_M\}$  mit  $\mathbf{y}_j \in \mathcal{D}_{-r}$  zufällig verteilte Punkte innerhalb der geschrumpften Stichprobengeometrie  $\mathcal{D}_{-r}$ , die Kugeln  $\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_j)$  sind dann echte Teilmengen von  $\mathcal{D}$ . Weiterhin sei

$$N_j(r) = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{[0,r]}(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j\|) \quad (\text{A.48})$$

die Anzahl der Punkte in einer Kugel mit Radius  $r$  um den zufälligen Punkt  $\mathbf{y}_j$ . Der Minus-Schätzer ist nun wie folgt definiert:

$$\hat{\sigma}(r)^2 = \frac{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (N_j(r) - \hat{\rho}|\mathcal{B}_r|)^2 - \hat{\rho}|\mathcal{B}_r|}{(\hat{\rho}|\mathcal{B}_r|)^2}. \quad (\text{A.49})$$

### A.4 Schätzer für $G(r)$ , $G_n(r)$

Die Punkte  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$ , gegeben durch die Koordinaten der Galaxien etc. im Beobachtungsfenster  $\mathcal{D}$ , bilden die Menge  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$  mit  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{D}$ . Mit  $\mathcal{X}_i$  bezeichnen wir die Menge  $\mathcal{X} \setminus \{\mathbf{x}_i\}$ . Der Abstand vom Punkt  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$  zum nächsten Punkt aus  $\mathcal{X}$  ist dann

$$l_i = \min_{\mathbf{x}_j \in \mathcal{X}_i} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|. \quad (\text{A.50})$$

#### A.4.1 Schätzer ohne Randkorrektur

Als „naiven“ Schätzer für  $G(r)$  erhalten wir

$$\tilde{G}(r) = \frac{1}{N} |\{\mathbf{x}_i \in \mathcal{X} \mid l_i < r\}|, \quad (\text{A.51})$$

wobei  $|\{\dots\}|$  die Anzahl der Elemente in der Menge  $\{\dots\}$  ist. Dieser Schätzer ist nicht erwartungstreu, da wir nicht sicher sein können, daß jeder Punkt seinen nächsten Nachbarn, der möglicherweise auch außerhalb von  $\mathcal{D}$  liegt, „sieht“.

#### A.4.2 Der Minus-Schätzer

Mit dem Minus-Schätzer berücksichtigen wir Randeffekte, indem wir nur Nachbarn um Punkte im verkleinerten Fenster  $\mathcal{D}_{-r}$  suchen (siehe Abbildung A.7):

$$\mathcal{D}_{-r} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \geq r \text{ für alle } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{D}\}. \quad (\text{A.52})$$

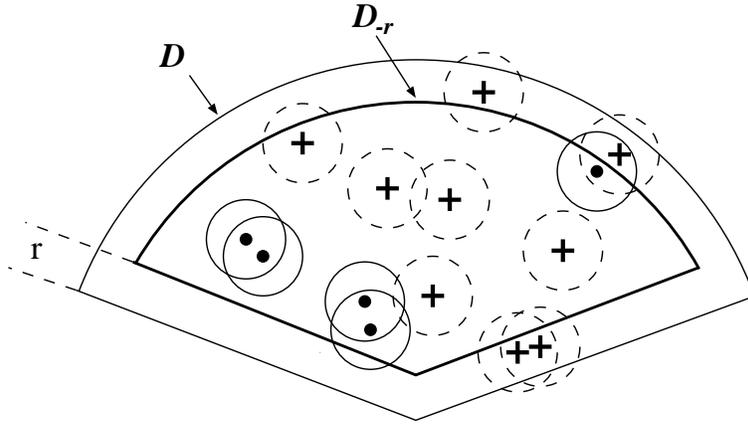


Abbildung A.7: Mit dem Minus-Schätzer  $\widehat{G}(r)$  zählen wir die Anzahl der Punkte, die innerhalb von  $\mathcal{D}_{-r}$  liegen und einen nächsten Nachbarn in  $\mathcal{D}$  im Abstand von höchstens  $r$  haben (die Punkte mit durchgezogener Kreislinie) und teilen dann durch die Gesamtzahl von Punkten in  $\mathcal{D}_{-r}$ .

Wir erhalten den ratio-unverfälschten Minus-Schätzer

$$\widehat{G}(r) = \frac{|\{\mathbf{x}_i \in \mathcal{X} \mid l_i \leq r \text{ und } \mathbf{x}_i \in \mathcal{D}_{-r}\}|}{|\{\mathbf{x}_i \in \mathcal{X} \mid \mathbf{x}_i \in \mathcal{D}_{-r}\}|}. \quad (\text{A.53})$$

### A.4.3 Ein Hanisch-Schätzer

Von Hanisch (1984) wurden zwei Schätzer für die Verteilung nächster Nachbarn vorgeschlagen. Wir betrachten

$$\overline{G}(r) = \frac{|\{\mathbf{x}_i \in \mathcal{X} \mid l_i \leq r \text{ und } \mathbf{x}_i \in \mathcal{D}_{-l_i}\}|}{|\{\mathbf{x}_i \in \mathcal{X} \mid \mathbf{x}_i \in \mathcal{D}_{-l_i}\}|}. \quad (\text{A.54})$$

Siehe auch Baddeley et al. (1993), für die explizite Gestalt in drei Dimensionen. Zusätzlich zu den Punkten in  $\mathcal{D}_{-r}$ , wie sie der Minus-Schätzer verwendet, werden noch weitere Punkte verwendet, sobald mindestens ein nächster Nachbar mit Abstand kleiner  $l_i$  gefunden wird. Es stellt sich heraus, daß dieser Schätzer nicht erwartungstreu ist. Hingegen ist der andere von Hanisch (1984) vorgeschlagene Schätzer erwartungstreu.

### A.4.4 Vergleich der Schätzer

In Abbildung A.8 vergleichen wir Schätzer für  $G(r)$ . Der Mittelwert des Minus-Schätzers fällt direkt mit den theoretischen Wert zusammen, wohingegen der Bias des Schätzers ohne Randkorrektur in Richtung reguläre Strukturen klar zu sehen ist. Der von uns verwendete Hanisch Schätzer zeigt einen deutlichen Bias in Richtung clusternde Strukturen. Eine empirische Analyse des anderen erwartungstreuen Hanisch-Schätzer in drei Dimensionen

zeigt, daß dessen Varianz nur unwesentlich geringer als die Varianz des Minus-Schätzers ist<sup>3</sup>. Vor kurzem schlugen Baddeley & Gill (1996) einen neuen Typ an Schätzern für  $F(r)$ ,  $G(r)$ ,  $G_n(r)$  und  $K(r)$  vor. Eine Anwendung auf Galaxienkataloge steht noch aus.

Unglücklicherweise ist der Minus-Schätzer  $\widehat{G}(r)$  nicht immer monoton, obwohl dies  $G(r)$  als Verteilungsfunktion immer ist. Die Ursache dieses Defekts wird in Abbildung A.9 erläutert. Dies beeinträchtigt jedoch nicht die Erwartungstreue.

#### A.4.5 Schätzer für $G_n(r)$ und $g_n(r)$

Zur Konstruktion von Schätzern für die  $n$ -te Nachbarverteilung  $G_n(r)$  betrachten wir

$$N_i(r) = |\{\mathbf{x}_j \in \mathcal{X}_i \mid \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \leq r\}|, \quad (\text{A.55})$$

die Anzahl der Punkte in einer Kugel mit Radius  $r$  um einen Punkt der Punktverteilung. In Analogie zum Minus-Schätzer  $\widehat{G}(r)$  definieren wir

$$\widehat{G}_n(r) = \frac{|\{\mathbf{x}_i \in \mathcal{X} \mid N_i(r) \geq n \text{ und } \mathbf{x}_i \in \mathcal{D}_{-r}\}|}{|\{\mathbf{x}_i \in \mathcal{X} \mid \mathbf{x}_i \in \mathcal{D}_{-r}\}|} \quad (\text{A.56})$$

mit  $\widehat{G}(r) = \widehat{G}_1(r)$ . Stoyan & Stoyan (1992) benutzen in zwei Dimensionen eine Erweiterung des (erwartungstreuen) Hanisch-Schätzers. Um die Dichten  $g_n(r)$  zu bestimmen, differenzieren wir  $\widehat{G}_n(r)$  numerisch. Da die geschätzten  $\widehat{G}_n(r)$  Treppenfunktionen sind, glätten wir  $(\widehat{G}_n(r + \Delta) - \widehat{G}_n(r))/\Delta$ . Hierzu verwenden wir die Konvolution mit einem Kern  $k(r)$ ,

$$\widehat{g}_n(r) = \int ds \frac{\widehat{G}_n(s + \Delta) - \widehat{G}_n(s)}{\Delta} k(r - s) \quad (\text{A.57})$$

mit  $\int dr k(r) = 1$ . Dies entspricht der direkten Schätzung von  $g_n(r)$  mit Kern-Schätzern (Stoyan & Stoyan 1992).

### A.5 Schätzer für $F(r)$ , $F_n(r)$

Wie in Abschnitt A.4 sei  $\mathcal{X}$  die Menge der Punkte in der Stichprobengeometrie.  $F(r)$  ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Punkt aus der Punktverteilung in einer Kugel mit Radius  $r$  um einen zufällig plazierten Punkt zu finden. Wir betrachten daher eine Menge an Poisson-verteilten Punkten  $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_a\}_{a=1}^{N_p}$  mit  $\mathbf{p}_a \in \mathcal{D}$  in der Stichprobengeometrie. Der Abstand von einem zufälligen Punkt  $\mathbf{p}_a$  zum nächsten Punkt der Punktverteilung  $\mathcal{X}$  sei

$$l_a = \min_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}} \|\mathbf{p}_a - \mathbf{x}_i\|. \quad (\text{A.58})$$

---

<sup>3</sup>Diese Untersuchung des erwartungstreuen Hanisch-Schätzers im Vergleich zu  $\overline{G}$  und  $\widehat{G}$  wurde von D. Stoyan durchgeführt und mir freundlicherweise mitgeteilt.

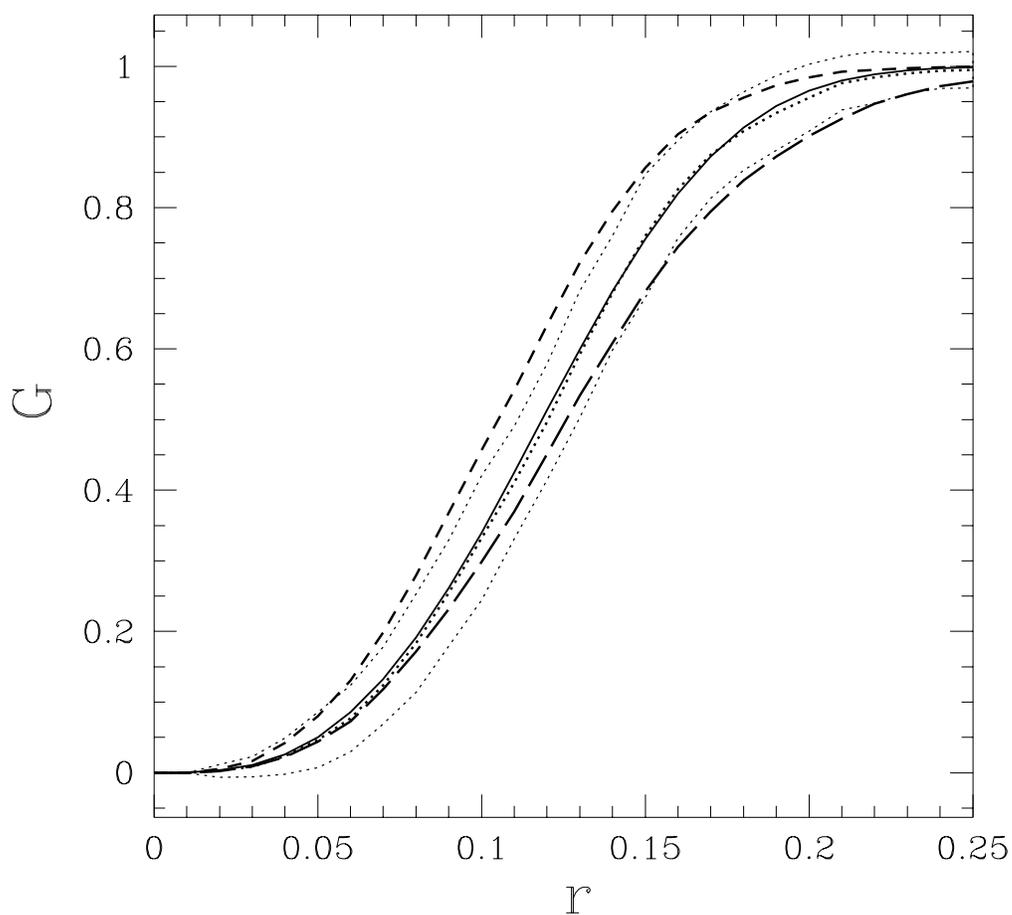


Abbildung A.8: Wir zeigen den Mittelwert des Minus-Schätzers  $\hat{G}(r)$  (gepunktet, mit  $1\sigma$ -Bereich), des Hanisch-Schätzers  $\bar{G}(r)$  (kurz gestrichelt) und des Schätzers ohne Randkorrektur  $\tilde{G}(r)$  (lang gestrichelt) für 50 Realisierungen eines Poissonprozesses mit 100 Punkten im Einheitswürfel. Die Stichprobenvarianz von  $\bar{G}$  und  $\tilde{G}$  ist vergleichbar mit der von  $\hat{G}$ . Der Poisson-Wert nach Gleichung (2.73) wird durch die durchgezogene Linie markiert.

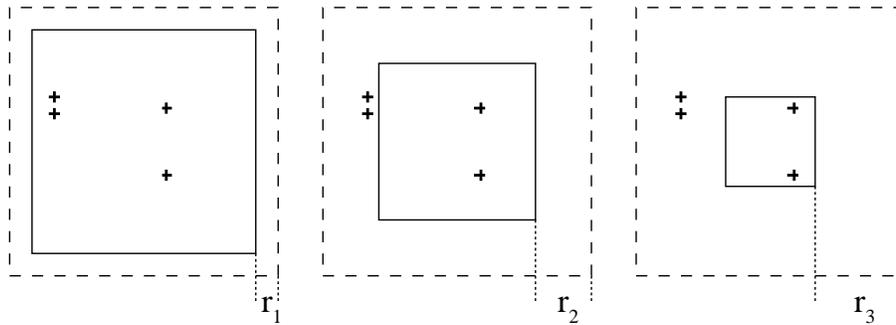


Abbildung A.9: Wir betrachten eine Verteilung von vier Punkten innerhalb eines Quadrats. Bei der Anwendung des Minus-Schätzers  $\widehat{G}(r)$  müssen wir das Fenster um den Radius  $r$  verkleinern, wie wir es für drei Radiuswerte  $r_1, r_2$  und  $r_3$  dargestellt haben. Wir beobachten ein nicht monotonen Verhalten von  $\widehat{G}(r)$ ; Links erhalten wir  $\widehat{G}(r_1) = 1/2$ , in der Mitte  $\widehat{G}(r_2) = 0$  und rechts  $\widehat{G}(r_3) = 1$ .

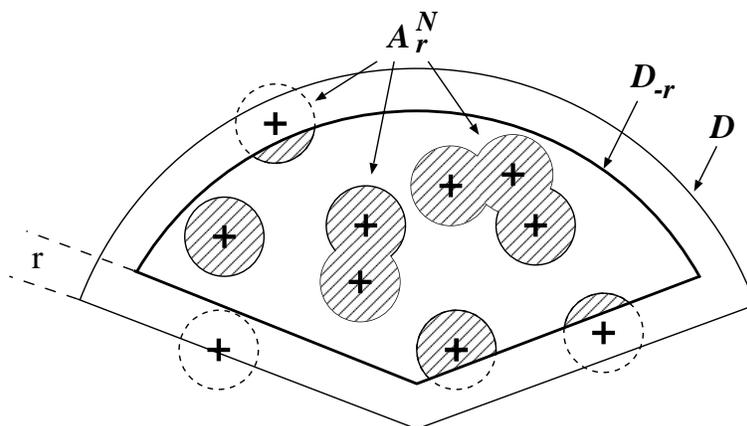


Abbildung A.10:  $\widehat{F}(r)$  ist eine Monte-Carlo-Integration des Volumens von  $\mathcal{A}_r^N \cap \mathcal{D}_{-r}$  (schraffiert).

### A.5.1 Schätzer ohne Randkorrektur

Mit dem „naiven“ Schätzer ohne Randkorrektur

$$\tilde{F}(r) = \frac{1}{N_p} |\{\mathbf{p}_a \in \mathcal{P} \mid l_a < r\}| \quad (\text{A.59})$$

unterschätzen wir  $F(r)$ , vor allem für große  $r$ .

### A.5.2 Der Minus-Schätzer

Um die Idee hinter dem Minus-Schätzer  $\hat{F}(r)$  zu verdeutlichen, betrachten wir die Vereinigungsmenge  $\mathcal{A}_r^N = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$  von Kugeln mit Radius  $r$ , die auf den Punkten  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$  zentriert sind. Der „naive“ Schätzer ohne Randkorrektur kann dann wie folgt geschrieben werden:

$$\tilde{F}(r) = \frac{1}{N_p} |\{\mathbf{p}_a \in \mathcal{P} \mid \mathbf{p}_a \in \mathcal{A}_r \cap \mathcal{D}\}|. \quad (\text{A.60})$$

Wir erkennen, daß  $\tilde{F}(r)$  nichts anderes als eine Monte-Carlo-Volumenintegration von  $\mathcal{A}_r^N \cap \mathcal{D}$  mit  $N_p$  Punkten ist. Um einen randkorrigierten Schätzer für  $F(r)$  zu erhalten, verkleinern wir wieder das Beobachtungsfenster (siehe Abbildung A.10). Seien nun  $\mathcal{P}_{-r} = \{\mathbf{p}_a\}_{a=1}^{N_p}$  mit  $\mathbf{p}_a \in \mathcal{D}_{-r}$  ebenfalls  $N_p$  zufällig im geschrumpften Fenster  $\mathcal{D}_{-r}$  verteilte Punkte.

$$\hat{F}(r) = \frac{1}{N_p} |\{\mathbf{p}_a \in \mathcal{P}_{-r} \mid \mathbf{p}_a \in \mathcal{A}_r\}|, \quad (\text{A.61})$$

ist ein erwartungstreuer Schätzer für  $F(r)$ . In der Tat ist es der gleiche Schätzer, den wir auch für die Bestimmung der Volumendichte des  $v_0(\mathcal{A}_r)$  ersten Minkowskifunktional, dem Volumen benutzen (siehe Abschnitt A.7).

### A.5.3 Schätzer für $F_n(r)$

Zur Konstruktion von Schätzern für die  $n$ -te sphärische Kontaktverteilung  $F_n(r)$  betrachten wir

$$M_a(r) = |\{\mathbf{x}_j \in \mathcal{X} \mid \|\mathbf{p}_a - \mathbf{x}_j\| \leq r\}|, \quad (\text{A.62})$$

die Anzahl der Punkte in einer Kugel mit Radius  $r$  um einen zufälligen Punkt  $\mathbf{p}_a$  aus  $\mathcal{P}_{-r}$ . In Analogie zu den Schätzern  $\hat{G}_n(r)$  definieren wir

$$\hat{F}_n(r) = \frac{1}{N_p} |\{\mathbf{p}_a \in \mathcal{P}_{-r} \mid M_a(r) \geq n\}|. \quad (\text{A.63})$$

Es gilt dann  $\hat{F}(r) = \hat{F}_1(r)$ .

## A.6 Schätzer für $J(r)$ , $J_n(r)$

Bisher sind keine direkten Schätzer für  $J(r)$  und  $J_n(r)$  bekannt. Indirekt bestimmen wir  $J_n(r)$ , indem wir zuerst  $F_n(r)$  und  $G_n(r)$  schätzen und dann den Quotienten bilden. Alle Ergebnisse für  $J(r)$  und  $J_n(r)$  in dieser Arbeit wurden mit den Minus-Schätzern  $\widehat{F}_n(r)$  und  $\widehat{G}_n(r)$  aus Abschnitt A.4 und A.5 und den daraus abgeleiteten Schätzern  $\widehat{J}_n(r)$  gewonnen:

$$\widehat{J}_n(r) = \frac{1 - \widehat{G}_n(r)}{1 - \widehat{F}_n(r)}. \quad (\text{A.64})$$

### A.6.1 $J$ ohne Randkorrektur

Betrachten wir

$$\widetilde{J}(r) = \frac{1 - \widetilde{G}(r)}{1 - \widetilde{F}(r)}, \quad (\text{A.65})$$

als Schätzer für  $J(r)$  ohne Randkorrektur, so finden wir, daß weiterhin  $\widetilde{J}(r) = 1$  für einen Poissonprozeß gilt. Mit einer Formalisierung dieses Konzepts konnten Baddeley et al. (1997) zeigen, daß ebenfalls  $\widetilde{J}(r) \leq 1$  für typische clusternde Prozesse und  $\widetilde{J}(r) \geq 1$  für reguläre Prozesse gilt. In dieser Arbeit untersuchen wir auch die Leistungsfähigkeit von  $\widetilde{J}(r)$  als Teststatistik zur Unterscheidung von Punktprozessen von einem uniformen Poissonprozeß.

## A.7 Schätzer für die Dichten der Minkowskifunktionale

Bereits bei Mecke & Wagner (1991) wurde gezeigt, wie Randkorrekturen an das Boolesche Modell berechnet werden können. Wir werden hier diesen Gedankengang umkehren und zeigen wie Randeinflüsse korrigiert werden können (Schmalzing et al. 1996, Kerscher et al. 1996a, Schmalzing 1996). Sei  $\mathcal{D}$  die Stichprobengeometrie, in der wir  $N$  Galaxien  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$  beobachten.  $\mathcal{A}_r^N = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$  ist die Vereinigungsmenge von Kugeln  $\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$  mit Radius  $r$ , die um die Positionen  $\mathbf{x}_i$  der Galaxien zentriert sind. Wir berechnen nun die Minkowskifunktionale des Schnittes  $M_\mu(\mathcal{A}_r^N \cap \mathcal{D})$  und der Stichprobengeometrie  $M_\mu(\mathcal{D})$ . Die Details der Implementierung, vor allem für die Berechnung der Minkowskifunktionale von Schnitten zwischen Kugeln und Wänden, werden bei Schmalzing (1996) behandelt.

Bereits die Minkowskifunktionale  $M_\mu(\mathcal{A}_r^N \cap \mathcal{D})$  sind für einen Vergleich von Beobachtungs- und Simulationsdaten geeignet. Die Simulationsdaten müssen in der gleichen Stichprobengeometrie betrachtet werden, da vor allem auf großen Skalen der Einfluß der Stichprobengeometrie wesentlich wird. Es gilt  $M_\mu(\mathcal{A}_r^N \cap \mathcal{D}) \rightarrow M_\mu(\mathcal{D})$  für  $r \rightarrow \infty$ . Wir illustrieren dies an einer würfelförmigen Teilmenge des CfA1-Katalogs (siehe Abschnitt 3.1.2 und Abbildung A.11), wie sie bereits von Gott III et al. (1986) bei einer Untersuchung von Isodichteflächen mit dem Genus verwendet wurde. In Abbildung A.12 sind die Minkowski-

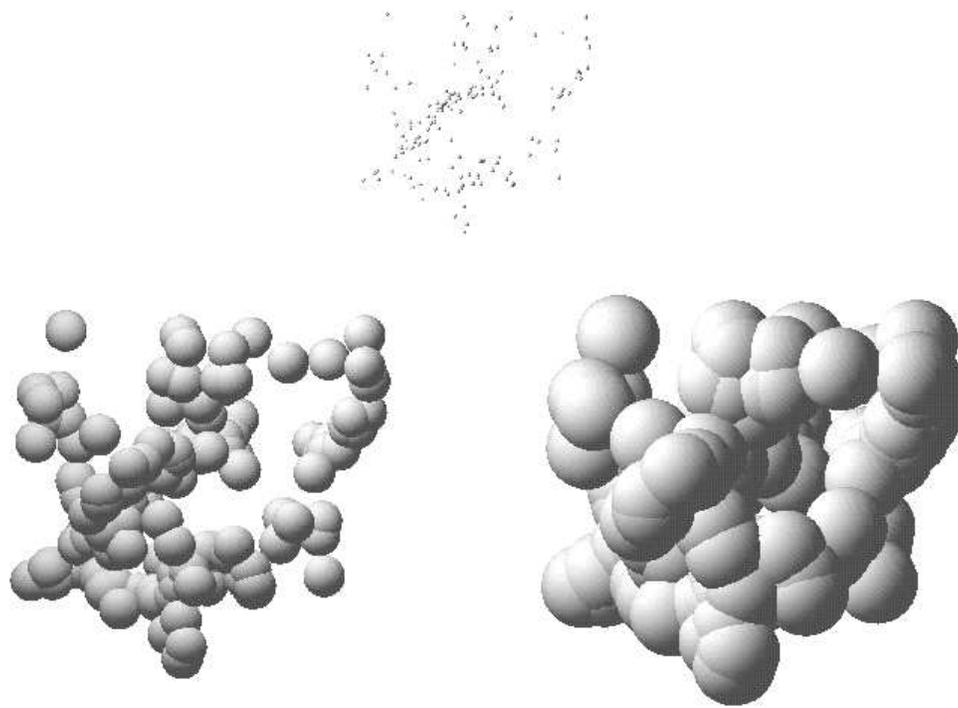


Abbildung A.11: Die Koordinaten der Galaxien des CfA1 innerhalb eines würfelförmigen Ausschnitts, dekoriert mit Kugeln von unterschiedlichem Radius.

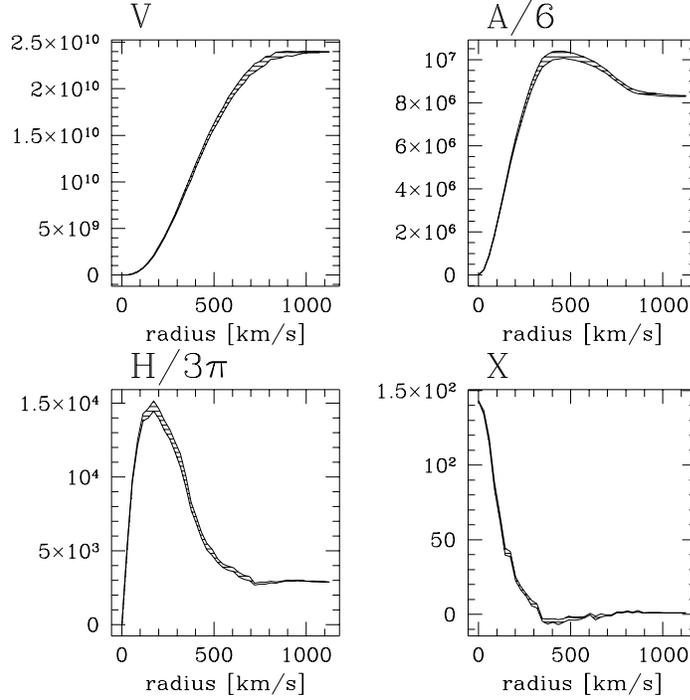


Abbildung A.12: Minkowskifunktionale  $V_\mu(\mathcal{A}_r^N \cap \mathcal{D})$  der Galaxien aus Abbildung A.11.

funktionale  $V_\mu(\mathcal{A}_r^N \cap \mathcal{D})$  der Galaxien aus dem CfA-Würfel zu sehen. Die Konvergenz gegen die Minkowskifunktionale  $V_\mu(\mathcal{D})$  des Würfels mit Seitenlänge  $s_0 = 5000/\sqrt{3}h^{-1}\text{kms}^{-1}$ ,

$$V_0(D) = s_0^3, \quad V_1(D) = s_0^2, \quad V_2(D) = s_0, \quad V_3(D) = 1$$

ist klar zu erkennen. Das differenzierte Verhalten auf großen Skalen wird vollkommen überdeckt. Eine direkte Interpretation ist nicht mehr möglich.

Wir nehmen nun an, daß die Galaxien  $\mathcal{X}$  Teilmenge einer Realisierung  $\varphi$  eines ergodischen (und somit stationären) Punktprozesses sind, weiterhin sei  $\mathcal{A}_r = \bigcup_{\mathbf{x}_i \in \varphi} \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$ . Wie in Abschnitt 2.5.2 sei  $\mathcal{V}$  ein großes Raumgebiet mit  $|\mathcal{V}| \gg |\mathcal{D}|$ . Wir betrachten den räumliche Mittelwert  $\langle M_\mu(\mathcal{A}_r \cap \mathcal{D}) \rangle$  über unterschiedliche Positionen und Orientierungen der Stichprobegeometrie  $\mathcal{D}$ :

$$\langle M_\mu(\mathcal{A}_r \cap \mathcal{D}) \rangle = \frac{1}{|\mathcal{V}|} \int_{\mathcal{G}} dg M_\mu(\mathcal{A}_r \cap g\mathcal{D}). \quad (\text{A.66})$$

Diese Mittelwerte existieren und sind wohldefiniert für einen ergodischen Punktprozeß (Fava & Santaló 1978, Fava & Santaló 1979). Es gilt dann für große  $\mathcal{D}$ ,  $\mathbb{E} M_\mu(\mathcal{A}_r \cap \mathcal{D}) = \langle M_\mu(\mathcal{A}_r \cap \mathcal{D}) \rangle$  (siehe auch Nguyen & Zessin 1979). Mit der kinematischen Hauptformel (2.121)

erhalten wir dann

$$\langle M_\mu(\mathcal{A}_r \cap \mathcal{D}) \rangle = \frac{1}{|\mathcal{V}|} \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} M_\nu(\mathcal{A}_r) M_{\mu-\nu}(\mathcal{D}). \quad (\text{A.67})$$

Lösen wir diese Beziehung nach  $M_\nu(\mathcal{A}_r)$  auf, erhalten wir für die Volumendichten der Minkowskifunktionale<sup>4</sup>  $m_\mu(\mathcal{A}_r) = \frac{M_\mu(\mathcal{A}_r)}{|\mathcal{V}|}$

$$m_\mu(\mathcal{A}_r) = \frac{\langle M_\mu(\mathcal{A}_r \cap \mathcal{D}) \rangle}{M_0(\mathcal{D})} - \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \binom{\mu}{\nu} m_\nu(\mathcal{A}_r) \frac{M_{\mu-\nu}(\mathcal{D})}{M_0(\mathcal{D})}. \quad (\text{A.68})$$

Hiermit korrigieren wir auf Randeffekte der Stichprobengeometrie  $\mathcal{D}$ , sofern wir die gesamte Vereinigungsmenge  $\mathcal{A}_r = \bigcup_{\mathbf{x}_i \in \varphi} \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_i)$  kennen. Im Anwendungsfall ist jedoch nur die Teilmenge  $\mathcal{A}_r^N \subset \mathcal{A}_r$  mit Kugelzentren innerhalb von  $\mathcal{D}$  bekannt. Um sicherzustellen, daß wir alle Schnitte mit dem Fenster erhalten, betrachten wir eine um  $r$  verkleinerte Stichprobengeometrie  $\mathcal{D}_{-r}$  (siehe Gleichung A.52 und Abbildung A.10). Als randkorrigierte (Minus-) Schätzer  $\widehat{m}_\mu(\mathcal{A}_r^N)$  für die Volumendichten der Minkowskifunktionale  $m_\mu(\mathcal{A}_r)$  erhalten wir

$$\widehat{m}_\mu(\mathcal{A}_r) = \frac{M_\mu(\mathcal{A}_r^N \cap \mathcal{D}_{-r})}{M_0(\mathcal{D}_{-r})} - \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \binom{\mu}{\nu} \widehat{m}_\nu(\mathcal{A}_r) \frac{M_{\mu-\nu}(\mathcal{D}_{-r})}{M_0(\mathcal{D}_{-r})}. \quad (\text{A.69})$$

Für periodische Ränder ist  $M_\nu(\mathcal{D}_{-r}) = 0$  für  $\nu \in \{1, \dots, d\}$  und es gilt  $\widehat{m}_\mu(\mathcal{A}_r) = \frac{M_\mu(\mathcal{A}_r \cap \mathcal{D}_{-r})}{M_0(\mathcal{D}_{-r})}$ . Allgemein gilt für die Dichte des Volumens  $\widehat{m}_0(\mathcal{A}_r) = \frac{M_0(\mathcal{A}_r \cap \mathcal{D}_{-r})}{M_0(\mathcal{D}_{-r})}$ , jedoch trifft dies nicht für die anderen Minkowskifunktionale zu. Wollen wir die Eulercharakteristik einer  $m_d(\mathcal{A}_r)$  schätzen, so benötigen wir alle Minkowskifunktionale mit  $\mu < d$ . Wir wenden nun diese Schätzer auf die Galaxien aus dem CfA1-Würfel an. In Abbildung A.13 erkennen wir einen deutlichen Unterschied zu Abbildung A.12. Die typischen Eigenschaften einer Galaxienverteilung, wie wir sie in Abschnitt 3.2 besprochen haben sind nur in Abbildung A.13 zu erkennen. Diese Randkorrektur ist auch auf Minkowskifunktionale von Isodichtekonturen übertragbar (Schmalzing & Buchert 1997) und liefert somit eine Möglichkeit zur Randkorrektur bei Genus-Untersuchungen, die über würfelförmige Geometrien hinausgeht (Adler 1981, Coles et al. 1996).

---

<sup>4</sup>Wir verwenden die Konvention  $\sum_{i=0}^{-1} a_i = 0$ .

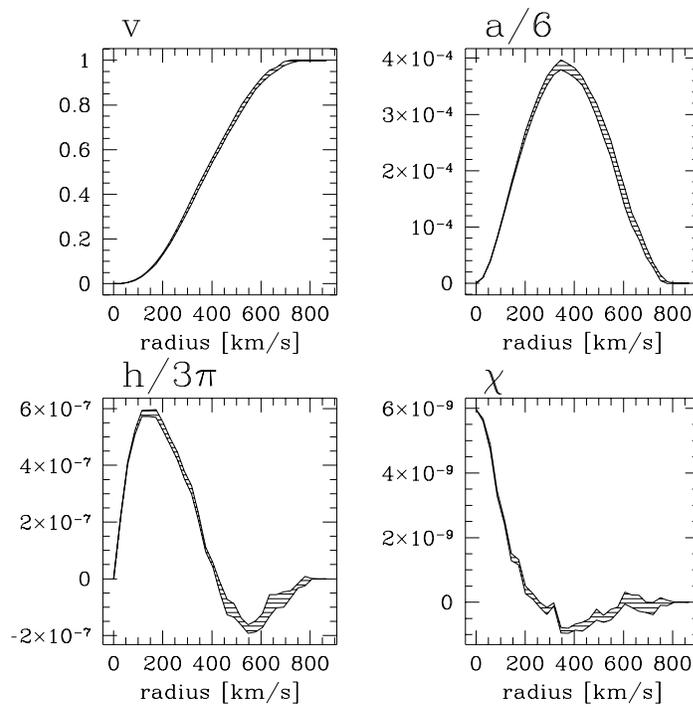


Abbildung A.13: Geschätzte Dichten der Minkowskifunktionale  $\hat{v}_\mu(\mathcal{A}_r)$  der Galaxien aus Abbildung A.11.

# Anhang B

## Nochmals Punktprozesse

Im diesem Abschnitt werden wir die Diskussion von Punktprozesse aus Abschnitt 2.2 vertiefen. Der Schwerpunkt liegt jetzt mehr auf der formalen Beschreibung, und es soll ein Brückenschlag zur mathematischen Literatur wie Stoyan et al. (1995), Daley & Vere-Jones (1988) und Cressie (1991) versucht werden. Zusätzlich betrachten wir noch die in der Kosmologie üblichen Korrelationsfunktionen sowie die bedingten Dichten. Die maß- und wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe, die wir im folgenden verwenden werden, sind z.B. bei Gänsler & Stute (1977) erläutert. Weiterhin seien die Mengen  $\mathcal{C}, \mathcal{C}_i \subset \mathbb{R}^d$  immer Borel-meßbar.

### B.1 Definition

Ein Punktprozeß  $\Phi$  liefert eine zufällige Menge von Punkten  $\Phi = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$  mit  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ .

- $\Phi$  soll *lokal endlich* sein, d.h. in jeder abgeschlossenen (Borel-meßbaren) Menge seien nur endlich viele Punkte  $\mathbf{x}_i$  enthalten.
- Wir wollen geometrische Aussagen treffen und betrachten daher nur *einfache* Punktprozesse, so daß immer  $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$  für  $i \neq j$  gilt.

$\Phi$  kann als eine (meßbare) Abbildung von einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{K}, P)$  mit dem Ereignisraum  $\Omega$ , der zugehörigen  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{K}$  und dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  in den Meßraum  $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$  eingeführt werden:

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{N} = (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}. \tag{B.1}$$

Mit  $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$  Bezeichnen wir die Menge der Punktfolgen  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$  mit  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ . Wir können  $\Phi$  auch als *zufälliges* Zählmaß auffassen, d.h. für Mengen  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$  ist  $\varphi(\mathcal{C})$  die Anzahl von Punkten des Prozesses  $\mathbf{x} \in \varphi$ , die im Fenster  $\mathcal{C}$  enthalten sind:

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{N} = \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d), \tag{B.2}$$

wobei wir mit  $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$  die Menge aller Zählmaße  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{N}_0^\infty$  bezeichnen.

$\varphi = \Phi(\omega) \in \mathcal{N}$  mit  $\omega \in \Omega$  sei eine Realisierung des Punktprozesses  $\Phi$ . Die Verteilung von  $\varphi$  ist durch das Bildmaß  $\mathbb{P} = P \circ \Phi^{-1}$  gegeben, und wir sind beim Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathcal{N}, \mathfrak{N}, \mathbb{P})$  angelangt. Mit  $\mathbb{E}$  bezeichnen wir den Erwartungswert bezüglich  $\mathbb{P}$ . Es gilt dann für integrierbare Funktionen  $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{E}f(\varphi) = \int_{\mathcal{N}} f(\varphi) \mathbb{P}(d\varphi). \quad (\text{B.3})$$

Wir nennen einen Punktprozeß stationär, wenn seine statistischen Eigenschaften invariant unter Translationen sind. Dies heißt, daß das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  invariant unter Translationen ist,  $\mathbb{P} = P \circ \Phi^{-1} = P \circ \Phi_{\mathbf{x}}^{-1}$ , wobei  $\Phi_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} + \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \in \Phi\}$  der um  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  verschobene Prozeß ist. Ein Punktprozeß heißt isotrop, wenn  $\mathbb{P}$  invariant unter Rotationen ist.

## B.2 Intensitätsmaß, Campbell–Maß und Palmverteilung

Das Intensitätsmaß  $\Lambda$  eines Punktprozesses ist für eine Menge  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$  als die mittlere Anzahl von Punkten in  $\mathcal{C}$  definiert:

$$\Lambda(\mathcal{C}) = \mathbb{E} \varphi(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{N}} \varphi(\mathcal{C}) \mathbb{P}(d\varphi) = \mathbb{E} \sum_{\mathbf{x} \in \varphi} \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}). \quad (\text{B.4})$$

Für stationäre Punktprozesse folgt aus der Bewegungsinvarianz

$$\Lambda(\mathcal{C}) = \bar{\rho} |\mathcal{C}|, \quad (\text{B.5})$$

wobei  $|\mathcal{C}|$  das Volumen von  $\mathcal{C}$  und  $\bar{\rho}$  die mittlere Dichte ist. Für nicht–negative meßbare Funktionen  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  gilt der Satz von Campbell (siehe Stoyan et al. 1995)

$$\mathbb{E} \sum_{\mathbf{x} \in \varphi} f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \Lambda(d^d x). \quad (\text{B.6})$$

Nahe verwandt zum Intensitätsmaß ist das Campbell–Maß  $\mathfrak{C}(\cdot)$ , definiert auf  $\mathbb{R}^d \times \mathcal{N}$  durch

$$\mathbb{E} \sum_{\mathbf{x} \in \varphi} f(\mathbf{x}, \varphi) = \int_{\mathcal{N}} \sum_{\mathbf{x} \in \varphi} f(\mathbf{x}, \varphi) \mathbb{P}(d\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{N}} f(\mathbf{x}, \varphi) \mathfrak{C}(d(\mathbf{x}, \varphi)) \quad (\text{B.7})$$

für alle nicht–negativen meßbaren  $f : \mathbb{R}^d \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Für  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$  und  $L \subset \mathcal{N}$  gilt (Stoyan et al. 1995)

$$\mathfrak{C}(\mathcal{C} \times L) = \mathbb{E} \varphi(\mathcal{C}) \mathbb{1}_L(\varphi).$$

Mit dem Campbell–Maß können Erwartungswerte wie in (B.6), jetzt aber für spezielle Realisierungen  $\varphi$  berechnet werden. Für den Vergleich von Modellen mit Beobachtungsdaten ( $N$  Galaxien im Fenster  $\mathcal{D}$ , siehe Abschnitt 2.1) betrachten wir Realisierungen  $\varphi$

des Punktprozesses  $\Phi$ , die genau  $N$  Punkte im Beobachtungsfenster  $\mathcal{D}$  beinhalten. Ensemblemittelwerte werden dann für Realisierungen mit genau  $N$  Punkten im Fenster  $\mathcal{D}$  bestimmt:

$$\int_{\mathcal{D} \times \{\varphi(\mathcal{D})=N\}} f(\mathbf{x}, \varphi) \mathfrak{C}(d(\mathbf{x}, \varphi)).$$

Für festes  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$  ist  $\mathfrak{C}(\mathcal{D} \times \cdot)$  ein Maß auf  $\mathcal{N}$ , d.h. für eine gegebene Verteilung  $\mathcal{X}$  ist  $\mathfrak{C}(\mathcal{D} \times \cdot) = \mathbb{1}_{\{\varphi \cap \mathcal{D} = \mathcal{X}\}}(\cdot)$ .

Die Palmverteilung  $\mathbb{P}^{\mathbf{x}} : (\mathcal{N}, \mathfrak{N}) \rightarrow [0, 1]$  ist die Verteilung des Punktprozesses unter der Bedingung, daß der Punkt  $\mathbf{x}$  in der Realisierung  $\varphi$  enthalten ist. Die Bedingung  $\mathbf{x} \in \varphi$  hat für einen stationären Prozeß die Wahrscheinlichkeit 0. Es ist daher nicht möglich, die Palmverteilung als Quotient zu definieren. Sie ist jedoch als Dichte des Campbell-Maßes bezüglich des Intensitätsmaßes wohldefiniert (Stoyan et al. 1995). Für  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$  und  $N \subset \mathcal{N}$  ist

$$\mathfrak{C}(\mathcal{C} \times N) = \int_{\mathcal{C}} \mathbb{P}^{\mathbf{x}}(N) \Lambda(d\mathbf{x}). \quad (\text{B.8})$$

Im stationären Fall gilt  $\mathbb{P}^{\mathbf{x}} = \mathbb{P}^0$ , d.h. für stationäre Prozesse kann jeder Punkt, also auch der Ursprung als „typischer“ Punkt gewählt werden.

## B.3 Momentenmaße und $n$ -Punktdichten

Die faktoriellen Momentenmaße  $\alpha_n$  sind für alle integrierbaren  $f \geq 0$  implizit über

$$\int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \alpha_n(d^d x_1, \dots, d^d x_n) = \mathbb{E} \sum_{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \varphi} f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \quad (\text{B.9})$$

definiert, wobei die Summe über alle Tupel  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  mit paarweise disjunkten Elementen läuft. Mit Hilfe der faktoriellen Momentenmaße können wir die  $n$ -Punkt Dichten  $\rho_n$  als Lebesgue-Dichten von  $\alpha_n$  definieren<sup>1</sup>

$$\alpha_n(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n) = \int_{\mathcal{C}_1} d^d x_1 \cdots \int_{\mathcal{C}_n} d^d x_n \rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n). \quad (\text{B.10})$$

*Im folgenden zeigen wir den Zusammenhang zwischen den empirischen Dichten  $\rho_n^{N, \mathcal{D}}(\cdot)$  und den oben definierten  $n$ -Punktdichten  $\rho_n(\cdot)$ .*

*Mit den abgeschlossenen Mengen  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$  definieren wir die Funktion*

$$f(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = \mathbb{1}_{\mathcal{C}_1}(\mathbf{y}_1) \cdots \mathbb{1}_{\mathcal{C}_n}(\mathbf{y}_n).$$

<sup>1</sup>Dies ist nur möglich, wenn das Maß  $\alpha_n$  absolut stetig bezüglich des Lebesguemaßes ist. Ein Maß  $\mu$  ist bezüglich eines Maßes  $\nu$  absolut stetig, wenn  $\nu(A) = 0$  bereits  $\mu(A) = 0$  impliziert (siehe z.B. Gänsler & Stute 1977).

Mit diesem  $f$  und Gleichung (B.10) erhalten wir aus Gleichung (B.9)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{C}_1} d^d y_1 \cdots \int_{\mathcal{C}_n} d^d y_n \rho_n(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = \\ &= \mathbb{E} \sum_{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \varphi} \mathbb{1}_{\mathcal{C}_1}(\mathbf{x}_1) \cdots \mathbb{1}_{\mathcal{C}_n}(\mathbf{x}_n) \\ &= \mathbb{E} \int_{\mathcal{C}_1} d^d y_1 \cdots \int_{\mathcal{C}_n} d^d y_n \sum_{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \varphi} \delta^D(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1) \cdots \delta^D(\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Formal schreiben wir

$$\rho_n(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = \mathbb{E} \sum_{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \varphi} \delta^D(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1) \cdots \delta^D(\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n), \quad (\text{B.12})$$

wobei die Gleichheit nur unter dem Integral wohldefiniert ist. Seien nun die Mengen  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$  Teilmengen des Beobachtungsfensters  $\mathcal{D}$ . Mit der Definition (2.2) der empirischen Dichte

$$\rho_n^{N, \mathcal{D}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = \sum_{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \varphi \cap \mathcal{D}} \delta^D(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1) \cdots \delta^D(\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n)$$

erhalten wir dann formal

$$\rho_n(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = \mathbb{E} \rho_n^{N, \mathcal{D}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n). \quad (\text{B.13})$$

Ebenfalls ist die Gleichheit nur unter dem Integral wohldefiniert.

Wie in Abschnitt 2.2.3 für die Dichten  $\rho_n$  gezeigt, lassen sich die (faktoriellen) Momente  $\alpha_n$  aus einem erzeugenden Funktional bestimmen, das in diesem Fall mit einer anderen Vorzeichenkonvention definiert wird (Stoyan et al. 1995).

### B.3.1 $n$ -Punktdichten mit fester Teilchenzahl

Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung von Punktverteilungen ist durch die  $n$ -Punktdichten  $d_n(\cdot)$  mit fester Teilchenzahl gegeben. Hierbei ist  $d_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) d^d x_1 \cdots d^d x_n$  die Wahrscheinlichkeit, daß *genau*  $n$  Punkte in der Stichprobe enthalten sind und daß diese Punkte in den infinitesimalen Volumina  $d^d x_1, \dots, d^d x_n$ , zentriert um die Punkte  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ , enthalten sind. Diese Dichten sind wie folgt normiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \cdots \int d^d x_n d_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = 1 \quad (\text{B.14})$$

und ihr erzeugendes Funktional ist durch

$$\mathcal{R}[\mu] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \cdots \int d^d x_n d_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \mu(\mathbf{x}_1) \cdots \mu(\mathbf{x}_n) \quad (\text{B.15})$$

gegeben. Der Zusammenhang mit den  $\rho_n(\cdot)$  ergibt sich durch Summation aller  $d_l$  und Ausintegrieren der nicht benötigten Information:

$$\rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int d^d y_1 \cdots \int d^d y_l d_{n+l}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_l). \quad (\text{B.16})$$

Das erzeugende Funktionale  $\mathcal{F}[\mu]$  der  $\rho_n(\cdot)$  aus Abschnitt 2.2.3 hängt wie dann folgt mit dem erzeugenden Funktionale  $\mathcal{R}[\mu]$  zusammen:

$$\mathcal{F}[\mu] = \mathcal{R}[1 + \mu] \quad (\text{B.17})$$

zusammen (Balian & Schaeffer 1989a).

### B.3.2 Kumulanten und Korrelationsfunktionen

Die verbundenen (irreduziblen) Teile der  $n$ -Punktdichten  $\rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  sind die Kumulanten  $c_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ . Die in der Kosmologie üblichen Korrelationsfunktionen  $\xi_n(\cdot)$  sind als normierte Kumulanten durch

$$c_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \rho_1(\mathbf{x}_1) \cdots \rho_1(\mathbf{x}_n) \xi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \quad (\text{B.18})$$

definiert, wobei wir  $\xi_1 = 1$  setzen. Das erzeugende Funktional lautet dann

$$\mathcal{G}[\mu] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \cdots \int d^d x_n c_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \mu(\mathbf{x}_1) \cdots \mu(\mathbf{x}_n) \quad (\text{B.19})$$

und ist mit dem erzeugenden Funktional  $\mathcal{F}[\mu]$  der  $\rho_n(\cdot)$  aus dem Abschnitt 2.2.3 durch

$$\mathcal{F}[\mu] = \exp \mathcal{G}[\mu] \quad (\text{B.20})$$

verbunden (Balian & Schaeffer 1989a). Mit Gleichung 2.13 können wir die  $n$ -Punktdichten durch Kumulanten und Korrelationsfunktionen ausdrücken:

$$\begin{aligned} \rho_1(\mathbf{x}_1) &= c_1(\mathbf{x}_1), \\ \rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= c_1(\mathbf{x}_1)c_1(\mathbf{x}_2) + c_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ &= \rho_1(\mathbf{x}_1)\rho_1(\mathbf{x}_2) \left( 1 + \xi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right), \\ \rho_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= c_1(\mathbf{x}_1)c_1(\mathbf{x}_2)c_1(\mathbf{x}_3) + c_1(\mathbf{x}_1)c_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) + \text{zykl.} + c_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \\ &= \rho_1(\mathbf{x}_1)\rho_1(\mathbf{x}_2)\rho_1(\mathbf{x}_3) \\ &\quad \left( 1 + \xi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \xi_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) + \xi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) + \xi_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \right), \\ \dots &\quad \dots \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

In diesem Zusammenhang wird auch die Notation  $\xi = \xi_2$  und  $\zeta = \xi_3$  verwendet.

### B.3.3 Bedingte Dichten

Das Konzept der bedingten  $n$ -Punktdichten wurde von Stratonovich (1963) für Zeitreihen entwickelt. Eine Anwendung auf Punktprozesse, speziell für die Galaxienverteilung, wurde von White (1979) diskutiert. Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit  $\rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \wedge \mathcal{C}) d^d x_1 \dots d^d x_n$ , daß  $n$  Punkte in den infinitesimalen Volumina  $d^d x_1 \dots d^d x_n$  enthalten sind und daß die Menge  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$  ansonsten leer ist (siehe auch Gleichung (B.16)). Die Integration in Gleichung (B.16) läuft daher nur über  $\bar{\mathcal{C}}$ , das Komplement von  $\mathcal{C}$  (Balian & Schaeffer 1989a, Mecke 1994, Schmalzing 1996):

$$\begin{aligned} \rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \wedge \mathcal{C}) &= \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int_{\bar{\mathcal{C}}} d^d y_1 \dots \int_{\bar{\mathcal{C}}} d^d y_l d_{n+l}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int d^d y_1 \dots \int d^d y_l d_{n+l}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_l) \mathbb{1}_{\bar{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}_1) \dots \mathbb{1}_{\bar{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}_l) \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

mit der Indikatorfunktion der Menge  $\mathcal{C}$

$$\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \\ 0 & \text{für } \mathbf{x} \in \bar{\mathcal{C}}. \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

Die letzte Zeile der Gleichung (B.22) läßt sich auch als Funktionalableitung schreiben

$$\rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \wedge \mathcal{C}) = \frac{\delta^{(n)}}{\delta \mu(\mathbf{x}_1) \dots \delta \mu(\mathbf{x}_n)} \mathcal{R}[\mu] \Big|_{\mu=\mathbb{1}_{\bar{\mathcal{C}}}}, \quad (\text{B.24})$$

und mit Gleichung (B.17), (B.20) und  $\mathbb{1}_{\bar{\mathcal{C}}}(\mathbf{x}) = 1 - \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})$  erhalten wir

$$\rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \wedge \mathcal{C}) = \frac{\delta^{(n)}}{\delta \mu(\mathbf{x}_1) \dots \delta \mu(\mathbf{x}_n)} \exp \mathcal{G}[\mu] \Big|_{\mu=-\mathbb{1}_{\mathcal{C}}}. \quad (\text{B.25})$$

Die bedingten Dichten  $\rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n | \mathcal{C})$  sind über

$$\rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \wedge \mathcal{C}) = \rho_0(\mathcal{C}) \rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n | \mathcal{C}) \quad (\text{B.26})$$

definiert, wobei  $\rho_0(|\mathcal{C}|) = 1$  gesetzt wurde.

## B.4 Markierte Punktprozesse

Zusätzlich zu den Positionen der Galaxien  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  ist meist noch deren Leuchtkraft (Magnitude) etc. bekannt. Diese zusätzliche Information kann mit Hilfe von kontinuierlichen oder diskreten Marken, die an jeder Galaxie „kleben“, formalisiert werden. Sei die Ortsinformation durch den Prozeß  $\Phi$  gegeben. Ein *markierter Punktprozeß*  $\Psi$  ist dann durch die Abbildung in dem Produktraum

$$\Psi : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})^{\mathbb{N}} \quad (\text{B.27})$$

mit der Verteilung  $\mathbb{P}_M = P \circ \Psi^{-1}$  gegeben, wobei  $\mathbb{M}$  der Raum der Marken ist. Mit  $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})^{\mathbb{N}}$  bezeichnen wir die Menge aller Folgen  $\{(\mathbf{x}_1, m_1), (\mathbf{x}_2, m_2), \dots\}$ . Die Marginalverteilung von  $\Psi$  bezüglich des Ortes ist die Verteilung  $\mathbb{P}$  von  $\Phi$ .  $\mathfrak{M} : \mathbb{M} \rightarrow [0, 1]$  sei die Verteilungsfunktion der Marken. Für kontinuierliche Marken mit Dichte  $M(\cdot)$ , wie für Leuchtkräfte von Galaxien, erhalten wir die mittlere Leuchtkraft durch

$$\bar{m} = \int_{\mathbb{M}} m \mathfrak{M}(dm) = \int_{\mathbb{M}} dm m M(m). \quad (\text{B.28})$$

Das Intensitätsmaß  $\Lambda^M$  eines stationären markierten Punktprozesses ist das Produktmaß

$$\Lambda^M = \bar{\rho} \nu_d \times \mathfrak{M}, \quad (\text{B.29})$$

wobei  $\nu_d$  das  $d$ -dimensionale Lebesguemaß ist. Analog zu Abschnitt B.3 lassen sich Momentenmaße für  $\Psi$  definieren (siehe Stoyan et al. 1995 und Stoyan 1984). Für genügend reguläre Prozesse  $\Psi$  sowie  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{N}$  und  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{M}$  hängt das zweite faktorielle Momentenmaß  $\alpha_2^M((\mathcal{C}_1, \mathcal{M}_1), (\mathcal{C}_2, \mathcal{M}_2))$  des markierten Punktprozesses wie folgt mit dem faktoriellen Momentenmaß  $\alpha_2(\cdot)$  des Punktprozesses  $\Phi$  zusammen:

$$\alpha_2^M((\mathcal{C}_1, \mathcal{M}_1), (\mathcal{C}_2, \mathcal{M}_2)) = \int_{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2} M_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \alpha_2(d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)). \quad (\text{B.30})$$

Für zwei Galaxien bei  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  ist  $M_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(m_1, m_2) dm_1 dm_2$  die Wahrscheinlichkeit, daß die Leuchtkraft der Galaxie bei  $\mathbf{x}_1$  im Intervall  $[m_1, m_1 + dm_1]$  und die Leuchtkraft der Galaxie bei  $\mathbf{x}_2$  im Intervall  $[m_2, m_2 + dm_2]$  liegt. Für stationäre und isotrope Punktverteilungen gilt  $M_r(m_1, m_2)$  mit  $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ .

Im folgenden betrachten wir das Marken-Summen-Maß. Wie bereits diskutiert wurde, ist für einen gewöhnlichen Punktprozeß  $\varphi(\mathcal{C})$  die Anzahl der Punkte im Raumgebiet  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ . Für einen markierten Punktprozeß  $\Psi$  definieren wir das Marken-Summen Maß  $\Psi_S$  als die „markengewichtete“ Anzahl der Punkte in  $\mathcal{C}$  für jede Realisierung  $\psi$  aus  $\Psi$  (Stoyan 1984),

$$\psi^S(\mathcal{C}) = \sum_{(\mathbf{x}, m) \in \psi} m \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}). \quad (\text{B.31})$$

Die Intensität  $\bar{\rho}^S$  ist durch

$$\bar{\rho}^S = \mathbb{E} \sum_{(\mathbf{x}, m) \in \psi} m \mathbb{1}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) = \bar{\rho} \bar{m} \quad (\text{B.32})$$

gegeben, wobei die letzte Gleichheit im stationären Fall gilt. Analog definieren wir das zweite faktorielle Momentenmaß  $\alpha_2^S(\cdot)$  und dessen Lebesguedichte  $\rho_2^S(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} \alpha_2^S(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) &= \mathbb{E} \sum_{(\mathbf{x}_1, m_1), (\mathbf{x}_2, m_2) \in \psi} m_1 m_2 \mathbb{1}_{\mathcal{C}_1}(\mathbf{x}_1) \mathbb{1}_{\mathcal{C}_2}(\mathbf{x}_2) \\ &= \int_{\mathcal{C}_1} d^d x_1 \int_{\mathcal{C}_2} d^d x_2 \int_{\mathbb{M}} dm_1 \int_{\mathbb{M}} dm_2 m_1 m_2 M_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(m_1, m_2) \rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ &= \int_{\mathcal{C}_1} d^d x_1 \int_{\mathcal{C}_2} d^d x_2 \rho_2^S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Für die empirische Untersuchung markierter Punktprozessen eignet sich die bedingte Marken-Produktichte

$$\kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int_{\mathbb{M}} dm_1 \int_{\mathbb{M}} dm_2 m_1 m_2 M_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(m_1, m_2). \quad (\text{B.34})$$

Für einen stationären und isotropen Punktprozeß erhalten wir  $\kappa(r) = \kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  mit  $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ . Aus Gleichung B.33 folgt

$$\rho_2^S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \quad (\text{B.35})$$

Sowohl  $\rho_2^S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  als auch  $\rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  können direkt aus den Daten bestimmt werden.

# Anhang C

## Lokale Minkowskifunktionale

### C.1 Eine Zerlegungsformel

Bisher wurden die Minkowskifunktionale zur globalen Beschreibung eines Körpers verwendet. Für konvexe glatte Körper  $\mathcal{K}$  haben wir in Gleichung (2.119) den Zusammenhang mit den lokal auf dem Rand von  $\mathcal{K}$  definierten Krümmungen gesehen. Betrachten wir bereits den Schnitt (oder die Vereinigung) zweier glatter Körper, so können singuläre Punkte und Linien auf der Oberfläche des Schnitt/Vereinigungskörpers auftreten, an denen die Krümmungen als differentialgeometrische Größen nicht mehr definiert sind. Andererseits erlaubt uns der Satz von Steiner die Berechnung der Minkowskifunktionale von konvexen Körpern mit Ecken und Kanten. Dies werden wir benutzen, um *lokale* Minkowskifunktionale auf regulären wie singulären Teilen der Oberfläche eines Körpers zu definieren.

#### C.1.1 Verallgemeinerte Ränder

Für glatte Flächen sind die Normalenvektoren in jedem Punkt eindeutig. Für Körper mit Ecken und Kanten und auch beim Durchschnitt  $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$  zweier glatter Körper existieren Punkte, Linien etc., für die dies nicht mehr gelten muß (siehe Abbildung C.1). Wir betrachten die metrische Projektion eines Punktes  $\mathbf{x}$  auf den Körper  $\mathcal{K}$

$$p_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{K} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \min_{\mathbf{z} \in \mathcal{K}} \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|\}, \quad (\text{C.1})$$

die für abgeschlossene konvexe Körper eindeutig ist. Die inverse Abbildung beinhaltet alle Punkte in  $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{K}$ , deren nächster Punkt auf dem Körper  $\mathcal{K}$   $\mathbf{x}$  ist. Diese Menge nennen wir Normalenkegel:

$$N_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \mid p_{\mathcal{K}}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}\}. \quad (\text{C.2})$$

Ist  $\mathbf{x}$  ein regulärer Punkt der Oberfläche von  $\mathcal{K}$ , so ist  $N_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})$  eine Halbgerade. Auf einem glatten Körper ist jeder Punkt regulär. An Kanten und Ecken wird der Normalenkegel mehrdimensional (siehe Abbildung C.2). Wir benutzen dies zur Klassifizierung der sin-

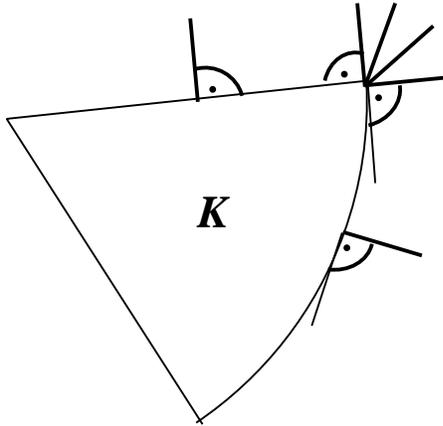


Abbildung C.1: Auf den glatten Teilen des Randes von  $K$  sind die Normalen eindeutig definiert, hingegen nicht an den Ecken.

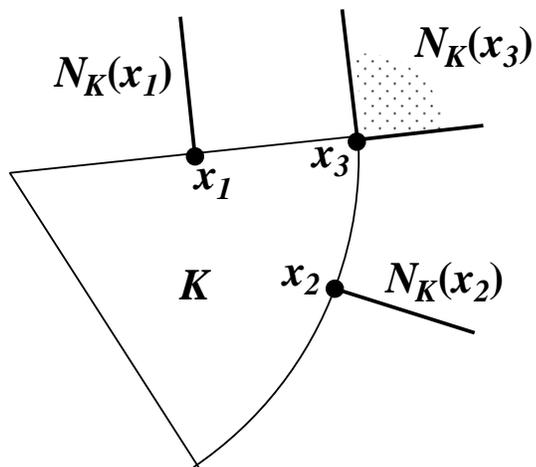


Abbildung C.2: Normale an einen Punkt  $x_1$  des flachen Teils des Randes von  $K$  und an einen Punkt  $x_2$  eines gekrümmten glatten Teils, sowie der Normalenkegel an einen singulären Eckpunkt  $x_3$ .

gulären Punkte und definieren die verallgemeinerten  $\nu$ -dimensionalen Ränder eines abgeschlossenen Körpers  $\mathcal{K}$  durch

$$\partial^\nu \mathcal{K} = \{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{K} \mid \dim(N_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})) \geq \nu\}. \quad (\text{C.3})$$

Sie sind absteigend geordnet,  $\partial^{\nu+1} \mathcal{K} \subset \partial^\nu \mathcal{K}$  und  $(d - \nu)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten.  $\partial^1 \mathcal{K} = \partial \mathcal{K}$  ist der ganze Rand des Körpers, in drei Dimensionen beinhaltet  $\partial^2 \mathcal{K}$  die Kanten und Ecken, und  $\partial^3 \mathcal{K}$  die Ecken. Ist  $\mathcal{K}$  ein Element des Konvexrings  $\mathfrak{K}$ , so besteht er höchstens aus einer endlichen Vereinigung konvexer Körper. Die  $\nu$ -ten verallgemeinerten Ränder sind dann genau durch Punkte auf der Oberfläche gegeben, an denen sich  $\nu$  konvexe Teilkörper schneiden (Mecke 1994).

Wir wollen im folgenden Integrale über die  $\nu$ -ten verallgemeinerten Ränder als Volumenintegrale im  $\mathbb{R}^d$  schreiben. Hierzu betrachten wir die verallgemeinerten charakteristischen Funktionen des  $\nu$ -ten verallgemeinerten Randes des Körpers  $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}$  (Mecke 1994),

$$\chi^\nu(\mathcal{K}, \mathbf{x}) = \int_{\partial^\nu \mathcal{K}} d\lambda_{d-\nu}(\mathbf{y}) \delta^D(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{C.4})$$

wobei  $\lambda_{d-\nu}$  das  $(d - \nu)$ -dimensionale Lebesguemaß ist. Diese Distributionen schränken ein Volumenintegral auf  $\mathbb{R}^d$  genau auf die  $(d - \nu)$ -dimensionalen Integrale auf den  $\nu$ -ten verallgemeinerten Rändern ein. Das  $(d - \nu)$ -dimensionale Volumen des  $\nu$ -ten verallgemeinerten Randes ist somit

$$\int_{\mathbb{R}^d} d^d x \chi^\nu(\mathcal{K}, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} d^d x \int_{\partial^\nu \mathcal{K}} d\lambda_{d-\nu}(\mathbf{y}) \delta^D(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int_{\partial^\nu \mathcal{K}} d\lambda_{d-\nu}(\mathbf{y}). \quad (\text{C.5})$$

### C.1.2 Lokale Minkowskifunktionale

Die Minkowskifunktionale von konvexen Körpern mit Ecken und Kanten können, wie bereits diskutiert, mit dem Satz von Steiner (2.5.1) berechnet werden. Im folgenden werden wir die Funktionale mit  $\mu \geq 1$  durch verallgemeinerte Oberflächenintegrale über *lokale* Minkowskifunktionale ausdrücken (Schneider 1993, Weil 1983, Mecke 1994, Schmalzing 1996, Beisbart 1997).

Wir zerlegen die Parallelmenge  $\mathcal{K}_\epsilon \setminus \mathcal{K}$  an den konvexen Körper  $\mathcal{K}$  in Beiträge der  $\nu$ -ten verallgemeinerten Ränder. Hierzu betrachten wir die Menge der Punkte, die nicht weiter als  $\epsilon$  von  $\mathcal{K}$  entfernt sind und deren metrische Projektion genau in  $\mathcal{M} \subset \partial \mathcal{K}$  liegt:

$$N_\epsilon(\mathcal{K}, \mathcal{M}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{K}_\epsilon \mid p_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{M}\}. \quad (\text{C.6})$$

Aus dem Satz von Steiner erhalten wir für die oberflächengebundenen Funktionale  $\nu \geq 1$

$$\sum_{\nu=1}^d \binom{d}{\nu} W_\nu(\mathcal{K}_\epsilon) \epsilon^\nu = |\mathcal{K}_\epsilon \setminus \mathcal{K}| = \sum_{\nu=1}^d |N_\epsilon(\mathcal{K}, \overset{\circ}{\partial}^\nu \mathcal{K})|, \quad (\text{C.7})$$

wobei die Mengen  $\overset{\circ}{\partial}^\nu \mathcal{K} = (\partial^\nu \mathcal{K}) \setminus \bigcup_{\mu=\nu+1}^d \partial^\mu \mathcal{K} = (\partial^\nu \mathcal{K}) \setminus \partial^{\nu+1} \mathcal{K}$  eine disjunkte Zerlegung des Randes von  $\mathcal{K}$  bilden. Betrachten wir eine disjunkte Zerlegung von  $\overset{\circ}{\partial}^\nu \mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{n_\nu} \beta_i^\nu$  in

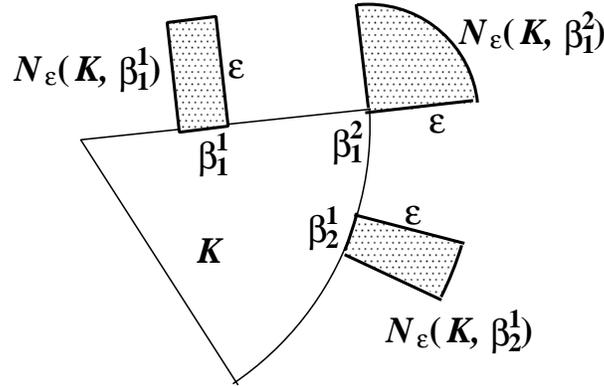


Abbildung C.3: Die Epsilonkegel  $N_\epsilon(\mathcal{K}, \beta_i^\nu)$  an Teilmengen  $\beta_i^\nu$  des Randes von  $\mathcal{K}$  in zwei Dimensionen: Teilmenge  $\beta_1^1$  des flachen Randes; Teilmenge  $\beta_1^2$  eines gekrümmten glatten Teils des Randes; ein singulärer Eckpunkt  $\beta_1^1$ .

Borelmengen  $\beta_i^\nu$ , so folgt

$$\sum_{\nu=1}^d \binom{d}{\nu} W_\nu(\mathcal{K}_\epsilon) \epsilon^\nu = \sum_{\nu=1}^d \sum_{i=1}^{n_\nu} |N_\epsilon(\mathcal{K}, \beta_i^\nu)|, \quad (\text{C.8})$$

und wir erhalten

$$W_\mu(\mathcal{K}) = \sum_{\nu=1}^d \sum_{i=1}^{n_\nu} D^\mu |N_\epsilon(\mathcal{K}, \beta_i^\nu)| \quad (\text{C.9})$$

mit den Differentialoperatoren

$$D^\mu = \frac{1}{\binom{d}{\mu} \mu!} \left. \frac{\partial^\mu}{\partial \epsilon^\mu} \right|_{\epsilon=0}. \quad (\text{C.10})$$

Wir schreiben nun die Summe über die Zerlegungen von  $\overset{\circ}{\partial}^\nu \mathcal{K}$  als  $(d - \nu)$ -dimensionales Oberflächenintegral<sup>1</sup> auf  $\partial^\nu \mathcal{K}$ :

$$W_\mu(\mathcal{K}) = \sum_{\nu=1}^d \int_{\partial^\nu \mathcal{K}} d\lambda_{d-\nu}(\mathbf{x}) W_\mu(\mathcal{K}, \mathbf{x}). \quad (\text{C.11})$$

Die *lokalen* Minkowskifunktionale  $W_\mu(\mathcal{K}, \mathbf{x})$  auf dem  $\nu$ -ten verallgemeinerten Rand sind als die Dichten von  $D^\mu |N_\epsilon(\mathcal{K}, \beta_i^\nu)|$  bezüglich  $\lambda_{d-\nu}$  definiert, speziell gilt (Federer 1959, Weil 1983, Schneider 1993, Mecke 1994 und Schmalzing 1996):

$$D^\mu |N_\epsilon(\mathcal{K}, \beta_i^\nu)| = \int_{\beta_i^\nu} d\lambda_{d-\nu}(\mathbf{x}) W_\mu(\mathcal{K}, \mathbf{x}). \quad (\text{C.12})$$

<sup>1</sup>Die Einschränkung auf  $\overset{\circ}{\partial}^\nu \mathcal{K}$  ist nicht mehr nötig, da die Ränder  $\partial^\mu \mathcal{K}$  mit  $\mu > \nu$  Nullmengen des Maßes  $\lambda_{d-\nu}$  sind.

Mit den verallgemeinerten charakteristischen Funktionen aus Abschnitt C.1.1 können wir die Minkowskifunktionale eines konvexen Körper formal als Volumenintegrale über lokale Minkowskifunktionale schreiben:

$$W_\mu(\mathcal{K}) = \sum_{\nu=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} d^d x \chi^\nu(\mathcal{K}, \mathbf{x}) W_\mu(\mathcal{K}, \mathbf{x}). \quad (\text{C.13})$$

Auf den  $\nu$ -ten verallgemeinerten Rändern ist  $W_\mu(\mathcal{K}, \mathbf{x})$  nur dann von Null verschieden, solange  $D^\mu |N_\epsilon(\mathcal{K}, \beta_i^\nu)| \neq 0$  gilt.  $\beta_i^\nu$  ist nach Definition des  $\nu$ -ten verallgemeinerten Randes (C.3) höchstens  $(d - \nu)$ -dimensional,  $N_\epsilon(\mathcal{K}, \beta_i^\nu)$  immer  $d$ -dimensional und daher mindestens proportional zu  $\epsilon^\nu$ . Wir erhalten dann

$$\left. \frac{\partial^\mu}{\partial \epsilon^\mu} \right|_{\epsilon=0} |N_\epsilon(\mathcal{K}, \beta_i^\nu)| = 0 \quad \text{für } \nu > \mu. \quad (\text{C.14})$$

Die Summe in Gleichung (C.13) läuft dann nur noch bis  $\mu$ :

$$W_\mu(\mathcal{K}) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \int_{\mathbb{R}^d} d^d x \chi^\nu(\mathcal{K}, \mathbf{x}) W_\mu(\mathcal{K}, \mathbf{x}). \quad (\text{C.15})$$

Die Fortsetzung der Zerlegung von  $W_\mu$  auf beliebige Körper des Konvexrings wurde bei Schmalzing (1996) besprochen.

### C.1.3 Eine spezielle Zerlegungsformel

Wir betrachten nun einen Körper  $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_\mathcal{A}} \mathcal{K}_i$ , der aus einer endlichen Vereinigung glatter konvexer Körper  $\mathcal{K}_i$  gebildet werden kann. Zur Berechnung der Minkowskifunktionale zerlegen wir den Körper  $\mathcal{A}$  mittels des Inklusions–Exklusionsprinzip in einzelne konvexe Körper. Wir nützen hierbei aus, daß der  $\nu$ -te verallgemeinerte Rand durch den Schnitt von  $\nu$  Körpern  $\mathcal{K}_i$  gebildet wird. Es folgt für  $\mu \geq 1$  (Mecke 1994):

$$W_\mu(\mathcal{A}) = \sum_{\nu=1}^{\mu} (-1)^{\nu+1} \sum_{\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_\mathcal{A}, |\mathcal{I}|=\nu} \int_{\mathbb{R}^d} d^d x \chi^\nu \left( \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{K}_i, \mathbf{x} \right) W_\mu \left( \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{K}_i, \mathbf{x} \right). \quad (\text{C.16})$$

Diese Zerlegung ist die Grundlage für die numerische Berechnung der Minkowskifunktionale des erweiterten Booleschen Kornmodells (Mecke 1994). Details und die Behandlung von Schnitten mit der Stichprobengeometrie werden ausführlich bei Schmalzing (1996) behandelt.

## C.2 Nochmals Minkowskifunktionale von Punktprozessen

Die Zerlegung von  $M_\mu(\mathcal{A}_r)$  für  $\mu \geq 1$  in lokale Minkowskifunktionale ist durch Gleichung (C.16) gegeben,

$$M_\mu(\mathcal{A}_r) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \sum_{(i_1, \dots, i_\nu)} \int_{\mathcal{V}} d^d x \chi^\nu(\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_{i_1}) \cap \dots \cap \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_{i_\nu}), \mathbf{x}) M_\mu(\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_{i_1}) \cap \dots \cap \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_{i_\nu}), \mathbf{x}). \quad (\text{C.17})$$

Die zweite Summe läuft über alle Tupel  $(i_1, \dots, i_\nu)$  paarweise disjunkten Einträgen aus  $1, \dots, N$ . Gehen wir zu den Erwartungswerten über, so gewichten wir die einzelnen Randbeiträge mit der Wahrscheinlichkeit, daß solch ein (verallgemeinerter) Rand durch den Schnitt von Kugeln zustandekommt *und* daß er nicht überdeckt ist. Wir formulieren diese Wahrscheinlichkeiten mit den bedingten Dichten aus Abschnitt B.3.3:

$$m_\mu(\mathcal{A}_r) = \frac{1}{|\mathcal{V}|} \int_{\mathcal{V}} d^d x \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \int_{\mathcal{V}} d^d x_1 \cdots \int_{\mathcal{V}} d^d x_\nu \rho_\nu(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\nu | \mathcal{B}_r(\mathbf{x})) \rho_0(\mathcal{B}_r(\mathbf{x})) \chi^\nu(\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_1) \cap \dots \cap \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_\nu), \mathbf{x}) M_\mu(\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_1) \cap \dots \cap \mathcal{B}_r(\mathbf{x}_\nu), \mathbf{x}). \quad (\text{C.18})$$

Wir erhalten den Faktor  $\frac{1}{|\mathcal{V}|}$ , da die  $\mathbf{x}_i$  vertauschbar sind.  $\rho_\nu(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\nu | \mathcal{B}_r(\mathbf{x}))$  ist die Wahrscheinlichkeit, genau  $\nu$  Punkte bei  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\nu$  zu finden unter der Bedingung, daß  $\mathcal{B}_r(\mathbf{x})$  ansonsten leer ist.  $\rho_0(\mathcal{B}_r(\mathbf{x}))$  ist die Wahrscheinlichkeit, daß  $\mathcal{B}_r(\mathbf{x})$  leer ist. Mit den Resultaten aus Abschnitt B.3.3 können wir nun  $m_\mu(\mathcal{A}_r)$  durch die  $n$ -Punktkorrelationsfunktionen  $\xi_n$  ausdrücken. Dieser Zusammenhang mit den bedingten Dichten wurde bereits von Mecke (1994) angegeben.

# Literaturverzeichnis

- Abell, G. O., Corwin Jr., H. G., & Olowin, R. P., *A Catalog of Rich Clusters of Galaxies*, Ap. J. Suppl. **70** (1989), 1–138.
- Abell, G. O., *The Distribution of Rich Clusters of Galaxies*, Ap. J. Suppl. **3** (1958), 211–288.
- Abramowitz, M. X. & Stegun, I. A., *Pocketbook of Mathematical Functions*, Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/Main, 1984.
- Adler, R. J., *The geometry of random fields*, John Wiley & Sons, Chichester, 1981.
- Alimi, J.-M., Valls-Gabaud, D., & Blanchard, A., *A cross-correlation analysis of luminosity segregation in the clustering of galaxies*, Astron. Astrophys. **206** (1988), L11–L14.
- Amendola, L., Gottlöber, S., Mücke, J. P., & Müller, V., *Matter Distribution for Power Spectra with Broken Scale Invariance*, Ap. J. **451** (1995), 444–450.
- Andernach, H. & Tago, E., *Current Status of the ACO Cluster Redshift Compilation*, in: *Proc. Large Scale Structure: Tracks and Traces, Potsdam, Germany, Sept. 15–19, 1997* (Singapore) (Müller, V., Gottlöber, S., Mücke, J. P., & Wambsgans, J., eds.), World Scientific, 1998, astro-ph/9710265.
- Arnol'd, V. I., Shandarin, S. F., & Zel'dovich, Ya. B., *The large-scale structure of the universe. I – General properties of one- and two-dimensional models*, Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics **20** (1982), 111–130.
- Atmansbacher, H., Scheingraber, H., & Wiedenmann, G., *Determination of  $f(\alpha)$  for a limited random point set*, Phys. Rev. A **40** (1989), 3954–3963.
- Baddeley, A. J. & Gill, R. D., *Kaplan–Meier Estimators of Interpoint Distance Distributions for Spatial Point Processes*, CWI Report BS–R9315 1993, 1996.
- Baddeley, A. J. & Silverman, B. W., *A Cautionary Example on the Use of Second-Order Methods for Analyzing Point Patterns*, Biometrics **40** (1984), 1089–1093.
- Baddeley, A. J., Moyeed, R. A., Howard, C. V., & Boyde, A., *Analysis of a Three-dimensional Point Pattern with Replication*, Appl. Statist. **42** (1993), 641–668.
- Baddeley, A. J., Kerscher, M., Schladitz, K., & Scott, B., *Estimating the J function without edge correction*, eingereicht bei Statist. Neerlandica, 1997.
- Bahcall, N. A., *Large-scale structure in the Universe indicated by galaxy clusters*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **26** (1988), 631–686.
- Balian, R. & Schaeffer, R., *Scale-invariant matter distribution in the Universe I. Counts in cells*, Astron. Astrophys. **220** (1989), 1–29.
- Balian, R. & Schaeffer, R., *Scale-invariant matter distribution in the Universe II. Bifractal behaviour*, Astron. Astrophys. **226** (1989), 373–414.
- Barber, C., Dobkin, D., & Huhdanpaa, H., *The Quickhull algorithm for convex hulls*, ACM Trans. on Mathematical Software **22** (1996), 469–483.

- Bardeen, J. M., Bond, J. R., Kaiser, N., & Szalay, A. S., *The statistics of peaks of Gaussian random fields*, *Ap. J.* **304** (1986), 15–61.
- Bedford, T. & van den Berg, J., *A Remark on the van Lieshout and Baddeley J-Function for Point Processes*, *Adv. Appl. Prob.* **29** (1997), 19–25.
- Beichman, C. A., Neugebauer, G., Habing, H. J., Clegg, P. E., & Chester, T. J., *IRAS Catalogs and Atlases; Explanatory Supplement*, U. S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1988.
- Beisbart, C., *Morphologie und Dynamik kosmische Materieaggregationen*, Diplomarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1997.
- Bernardeau, F. & van de Weygaert, R., *A new method for accurate estimation of velocity field statistics*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **279** (1996), 693.
- Besag, J. & Diggle, P. J., *Simple Monte Carlo tests for spatial pattern*, *Appl. Statist.* **26** (1977), 327–333.
- Blanchard, A. & Alimi, J.-M., *Practical determination of the spatial correlation function*, *Astron. Astrophys.* **203** (1988), L1–L4.
- Borgani, S., Martinez, V. J., Perez, M. A., & Valdarnini, R., *Is there any scaling in the cluster distribution*, *Ap. J.* **435** (1994), 37–48.
- Borgani, S., *The multifractal behaviour of hierarchical density distributions*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **260** (1993), 537–549.
- Börner, G., *The Early Universe, Facts and Fiction*, 3rd ed., Springer Verlag, Berlin, 1993.
- Broadhurst, T. J., Ellis, R. S., Koo, D. C., & Szalay, A. S., *Large-scale distribution of galaxies at the Galactic poles*, *Nature* **343** (1990), 726.
- Buchert, T. & Ehlers, J., *Averaging Inhomogeneous Newtonian cosmologies*, *Astron. Astrophys.* **320** (1997), 1–7.
- Buchert, T. & Martínez, V. J., *The two-point correlation function in pancake models and the fair sample hypothesis*, *Ap. J.* **411** (1993), 485–500.
- Buchert, T., *Lagrangian theory of gravitational instability of Friedmann-Lemaître cosmologies and the “Zel’dovich approximation”*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **254** (1992), 729–737.
- Burstein, D. & Heiles, C., *H I, galaxy counts, and reddening - Variation in the gas-to-dust ratio, the extinction at high galactic latitudes, and a new method for determining galactic reddening*, *Ap. J.* **225** (1978), 40.
- Coleman, P. H. & Pietronero, L., *The Fractal Structure Of The Universe*, *Physics Rep.* **213** (1992), 311–389.
- Coleman, P. H., Pietronero, L., & Sanders, R. H., *Absence of any characteristic correlation length in the CfA galaxy catalogue*, *Astron. Astrophys.* **200** (1988), L32–L34.
- Coles, P., Davies, A., & Pearson, R. C., *Quantifying the topology of large-scale structure*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **281** (1996), 1375–1384.
- Cressie, N., *Statistics for spatial Data*, John Wiley & Sons, Chichester, 1991.
- Cvitanovic, P., Gunaratne, G. H., & Procaccia, I., *Topological and metric properties of Henon-type Strange attractor*, *Phys. Rev. A* **38** (1988), 1503–1520.
- Daley, D. J. & Vere-Jones, D., *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Springer Verlag, Berlin, 1988.
- Davis, M. & Peebles, P. J. E., *A survey of galaxy redshifts. V. The two-point position and velocity correlations*, *Ap. J.* **267** (1983), 465–481.
- Davis, M., Efstathiou, G., Frenk, C., & White, S., *The end of cold dark matter?*, *Nature* **356**

- (1993), 489–494.
- Davis, M., *Is the Universe Homogeneous on Large Scales?*, in: *Critical Dialogues in Cosmology* (Singapore) (Turok, N., ed.), World Scientific, 1996.
- Diggle, P. J., *Statistical Analysis of spatial Point Patterns*, Academic Press, New York and London, 1983.
- Dominguez-Tenreiro, R. & Martinez, V., *Multidimensional Analysis of the Large-Scale Segregation of Luminosity*, *Ap. J.* **339** (1989), L9–L11.
- Dubrulle, B. & Lachièze-Rey, M., *On the multifractal analysis of galaxy catalogs with box-counting methods*, *Astron. Astrophys.* **289** (1994), 667–672.
- Dubrulle, B. & Lachièze-Rey, M., *The Poisson distribution on a fractal*, *Astron. Astrophys.* **287** (1994), 361–367.
- Einasto, J., Einasto, M., Frisch, P., Gottlöber, S., Müller, V., Saar, V., Starobinsky, A. A., Tago, E., & Andernach, D. T. H., *The Supercluster-Void Network. II. An oscillating cluster correlation function*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **289** (1997), 801–812.
- Einasto, J., Einasto, M., Gottlöber, S., Müller, V., Saar, V., Starobinsky, A. A., Tago, E., Tucker, D., Andernach, H., & Frisch, P., *A 120-Mpc Periodicity in the Three-Dimensional Distribution of Galaxy Superclusters*, *Nature* **385** (1997), 139–141.
- Einasto, M., Tago, E., Jaaniste, J., Einasto, J., & Andernach, H., *The Supercluster-Void Network. I. The Supercluster Catalogue and Large-Scale Distribution*, *Astron. Astrophys. Suppl.* **123** (1997), 119.
- Falconer, K. J., *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, Chichester, 1990.
- Fava, N. A. & Santaló, L. A., *Plate and Line Segment Processes*, *J. Appl. Prob.* **15** (1978), 494–501.
- Fava, N. A. & Santaló, L. A., *Random processes of Manifolds in  $R^n$* , *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **50** (1979), 85–96.
- Federer, H., *Curvature measures*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **93** (1959), 418–491.
- Fetisova, T. S., Yu. Kuznetsov, D., Lipovetskii, V. A., Starobinskii, A. A., & Olovin, R. P., *Features of the spatial distribution of rich clusters of galaxies in the northern and southern Galactic hemispheres*, *Astron. Lett.* **19(3)** (1993), 198–202.
- Fisher, K. B., Davis, M., Strauss, M. A., Yahil, A., & Huchra, J. P., *Clustering in the 1.2 Jy IRAS galaxy redshift survey I. The redshift and real space correlation functions*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **266** (1994), 50–64.
- Fisher, K. B., Huchra, J. P., Strauss, M. A., Davis, M., Yahil, A., & Schlegel, D., *The IRAS 1.2 Jy Survey: Redshift Data*, *Ap. J. Suppl.* **100** (1995), 69.
- Frieden, B., *Probability, Statistical Optics, and Data Testing*, Springer Verlag, Berlin, 1991.
- Gänssler, P. & Stute, W., *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer Verlag, Berlin, 1977.
- Giovanelli, R. & Haynes, M. P., *Redshift surveys of galaxies*, *ARA&A* **29** (1991), 499–541.
- Goenner, H., *Einführung in die Kosmologie*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1994.
- Górski, K. M., Hinshaw, G., Banday, A. J., Bennett, C. L., Wright, E. L., Kogut, A., Smoot, G. F., & Lubin, P. M., *On determining the spectrum of primordial inhomogeneity from the COBE DMR sky maps: Results of two-year data analysis*, *Ap. J. Lett.* **430** (1994), L89–L92.
- Gott III, J. R., Melott, A. L., & Dickinson, M., *The sponge-like topology of large-scale structure in the Universe*, *Ap. J.* **306** (1986), 341–357.
- Gottlöber, S., Mückel, J. P., & Starobinski, A. A., *Confrontation of a Double Inflationary Cosmological Model with Observations*, *Ap. J.* **434** (1994), 417–423.

- Grassberger, P. & Procaccia, I., *Dimensions and entropies of strange attractors from fluctuating dynamics approach*, Physica D **13** (1984), 34–54.
- Gunn, J. E., *The Sloan Digital Sky Survey*, Bull. American Astron. Soc. **186** (1995), no. 44.05, 875.
- Guzzo, L., *Is the Universe Homogeneous? (On Large Scales)*, New Astronomy **2(6)** (1998), 517–532.
- Hadwiger, H. & Schneider, R., *Vektorielle Integralgeometrie*, Elemente der Mathematik **26** (1971), no. 3, 49–72.
- Hadwiger, H., *Altes und Neues über konvexe Körper*, Birkhäuser, Basel, 1955.
- Hadwiger, H., *Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie*, J. reine angew. Math. **194** (1955), 101–110.
- Hadwiger, H., *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer Verlag, Berlin, 1957.
- Halsey, T. C., Jensen, M. H., Kadanoff, L. P., Procaccia, I., & Shraiman, B. I., *Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets*, Phys. Rev. **A33** (1986), 1141.
- Hamilton, A. J. S., *Toward better ways to measure the galaxy correlation function*, Ap. J. **417** (1993), 19–35.
- Hanisch, K.-H., *Some Remarks on Estimators of the Distribution Function of Nearest Neighbour Distance in Stationary Spatial Point Processes*, Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser. Statist. **15** (1984), 409–412.
- Hansen, J. P. & McDonnald, I. R., *Theory of Simple Liquids*, Academic Press, New York and London, 1986.
- Härdle, W., *Smoothing Techniques*, Springer Verlag, Berlin, 1990.
- Hertz, P., *Über den gegenseitigen durchschnittlichen Abstand von Punkten die mit bekannter mittlerer Dichte im Raum angeordnet sind.*, Math. Ann. **67** (1909), 387–398.
- Huchra, J. & Geller, M., *Groups of galaxies. I—Nearby groups*, Ap. J. **257** (1982), 423–437.
- Huchra, J. P., Davis, M., Latham, D., & Tonry, J., *A survey of galaxy redshifts. IV - The data*, Ap. J. Suppl. **52** (1983), 89–119.
- Huchra, J. P., Geller, M. J., De Lapparent, V., & Corwin Jr., H. G., *The CfA redshift survey - Data for the NGP + 30 zone*, Ap. J. Suppl. **72** (1990), 433–470.
- Huchra, J. P., Geller, M. J., & Corwin Jr., H. G., *The CfA Redshift Survey: Data for the NGP + 36 Zone*, Ap. J. Suppl. **99** (1995), 391.
- Icke, V. & van de Weygaert, R., *Fragmenting the Universe I. Statistics of two-dimensional Voronoi foams*, Astron. Astrophys. **184** (1987), 16–32.
- Jones, B. J. T., Martínez, V. J., Saar, E., & Einasto, J., *Multifractal Description of the large-scale Structure of the Universe*, Ap. J. **332** (1988), L1–L5.
- Kaiser, N. & Peacock, J. A., *Power-Spectrum Analysis of One-Dimensional Redshift Surveys*, Ap. J. **379** (1991), 482–506.
- Kanitscheider, B., *Kosmologie*, 2nd ed., Philipp Reclam jun., Stuttgart, 1991.
- Kates, R., Müller, V., Gottlöber, S., Mückel, J. P., & Retzlaff, J., *Large-scale structure formation for power spectra with broken scale invariance*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **277** (1995), 1254–1268.
- Kerscher, M. & Schmalzing, J., *Fluctuations in the IRAS 1.2 Jy catalogue*, in: *Generation of Cosmological Large Scale Structure (Proc. of NATO ASI, Erice, Italy, Nov. 1996)* (Dordrecht) (Schramm, D. N. & Galeotti, P., eds.), Kluwer Academic, 1997.

- Kerscher, M., Schmalzing, J., & Buchert, T., *Analyzing galaxy catalogues with Minkowski functionals*, in: *Mapping, measuring and modelling the Universe* (Valencia) (Coles, P., Martínez, V., & Pons Bordería, M. J., eds.), Astronomical Society of the Pacific, 1996, pp. 247–252.
- Kerscher, M., Schmalzing, J., Buchert, T., & Wagner, H., *The Significance of the Fluctuations in the IRAS 1.2 Jy Galaxy Catalogue*, in: *Proc. 2<sup>nd</sup> SFB workshop on Astro-particle physics Ringberg 1996, Report SFB375/P002* (Ringberg, Tegernsee) (Bender, R., Buchert, T., & Schneider, P., eds.), 1996, pp. 83–98.
- Kerscher, M., Schmalzing, J., Buchert, T., & Wagner, H., *Fluctuations in the 1.2 Jy Galaxy Catalogue*, im Druck A&A , astro-ph/9704028, 1997.
- Kerscher, M., Schmalzing, J., Retzlaff, J., Borgani, S., Buchert, T., Gottlöber, S., Müller, V., Plionis, M., & Wagner, H., *Minkowski functionals of Abell/ACO clusters*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **284** (1997), 73–84.
- Kerscher, M., Pons-Bordería, M. J., Schmalzing, J., Trasarti-Battistoni, R., Martínez, V. J., & Buchert, T., *A global descriptor of spatial pattern interaction in the galaxy distribution*, eingereicht, 1998.
- Kerscher, M., *Regularity in the distribution of superclusters?*, im Druck A&A , astro-ph/9805088, 1998.
- Kerscher, M., *Regularity in the distribution of superclusters*, in: *Proc. Large Scale Structure: Tracks and Traces, Potsdam, Germany, Sept. 15–19, 1997* (Singapore) (Müller, V., Gottlöber, S., Mückel, J. P., & Wambsgans, J., eds.), World Scientific, 1998, astro-ph/9710207.
- Klypin, A. & Holtzman, J., *Particle–Mesh code for cosmological simulations*, Tech. report, Department of Astronomy, New Mexico State University, 1998, <http://astro.nmsu.edu/~aklypin/PM/PMcodes.ps.gz>.
- Klypin, A. & Rhee, G., *The zero-point of the cluster-cluster correlation function: A key test of cosmological power spectra*, Ap. J. **428** (1994), 399–404.
- Kolatt, T., Dekel, A., Ganon, G., & Willick, J. A., *Simulating Our Cosmological Neighborhood: Mock Catalogs for Velocity Analysis*, Ap. J. **458** (1996), 419–434.
- Kopylov, A. I., Yu. Kuznetsov, D., Fetisova, T. S., & Shvartsman, V. F., *Possible Inhomogeneities in the Universe on scales of 100–300 Mpc from observations with the 6-meter telescope*, in: *Large Scale Structure of the Universe* (et al., J. A., ed.), IAU, 1988, pp. 129–137.
- Lachièze-Rey, M. & Luminet, J.-P., *Cosmic Topology*, Physics Rep. **254** (1995), 136–214.
- Landy, S. D. & Szalay, A. S., *Bias and variance of angular correlation functions*, Ap. J. **412** (1993), 64–71.
- Lang, K. R., *Astrophysical Formulae*, 2nd ed., Springer Verlag, Berlin, 1980.
- Lemson, G. & Sanders, R. H., *On the use of the conditional density as a description of galaxy clustering*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **252** (1991), 319–328.
- Leven, R. W., Koch, B.-P., & Pompe, B., *Chaos in dissipativen Systemen*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.
- Likos, C. N., Mecke, K. R., & Wagner, H., *Statistical morphology of random interfaces in microemulsions*, J. Chem. Phys. **102** (1995), 9350+.
- Longair, M. S., *The Physics of Background Radiation*, in: *The Deep Universe* (Berlin) (Sandage, A., Kron, R., & Longair, M., eds.), Saas–Fee Advanced Course Lecture Notes 1993, Swiss

- society for Astrophysics and Astronomy, Springer Verlag, 1995, pp. 317–514.
- Maddox, S., *The 2dF Galaxy Redshift Survey: Preliminary Results*, in: *Proc. Large Scale Structure: Tracks and Traces, Potsdam, Germany, Sept. 15–19, 1997* (Singapore) (Müller, V., Gottlöber, S., Mückel, J. P., & Wambsgans, J., eds.), World Scientific, 1998, astro-ph/9711015.
- Mandelbrot, B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, 1982.
- Mann, R. G., Saunders, W., & Taylor, A. N., *The clustering of warm and cool IRAS galaxies*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **279** (1996), 636–650.
- Marriott, F. H. C., *Barnard's Monte Carlo Tests: How many Simulations*, Appl. Statist. **28** (1978), 75–77.
- Martínez, V. J. & Coles, P., *Correlations and scaling in the QDOT redshift survey*, Ap. J. **437** (1994), 550–555.
- Martínez, V. J., Stoyan, D., Stoyan, H., Saar, E., & Pons-Bordería, M.-J., *Estimating the galaxy correlation function*, submitted, 1997.
- Matsuda, T. & Shima, E., *Topology of Supercluster-Void Structure*, Progr. Theor. Phys. **71** (1984), 855–858.
- Maurogordato, S. & Lachièze-Rey, M., *Void probabilities in the galaxy distribution – Scaling and luminosity segregation*, Ap. J. **320** (1987), 13–25.
- Mazur, S., *Neighborhood partition of the radial distribution function for simple liquids*, J. Chem. Phys. **97** (1992), 9276–9282.
- McCauley, J. L., *Introduction to Multifractals in Dynamical Systems Theory and Fully Developed Fluid Turbulence*, Physics Rep. **189** (1990), 225.
- McCauley, J. L., *Are galaxy distributions scale invariant? A perspective from dynamical systems theory*, eingereicht, astro-ph/9703046, 1997.
- Mecke, K. R. & Wagner, H., *Euler characteristic and related measures for random geometric sets*, J. Stat. Phys. **64** (1991), 843.
- Mecke, K. R., Buchert, T., & Wagner, H., *Robust morphological measures for large-scale structure in the Universe*, Astron. Astrophys. **288** (1994), 697–704.
- Mecke, K. R., *Integralgeometrie in der Statistischen Physik: Perkolation, komplexe Flüssigkeiten und die Struktur des Universums*, Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/Main, 1994.
- Miles, R. E., *A Synopsis of 'Poisson Flats in Euclidian Space'*, in: *Stochastic Geometry* (Harding, E. F. & Kendall, D. G., eds.), John Wiley & Sons, 1974, pp. 202–227.
- Mo, H. J., Deng, Z. G., Xia, X. Y., & Börner, G., *Typical scales in the distribution of galaxies and clusters of galaxies from unnormalized pair counts*, Astron. Astrophys. **257** (1992), 1–10.
- Møller, J., *Random Tessellations in  $\mathbb{R}^d$* , Adv. Appl. Prob. **21** (1989), 38–73.
- Møller, J., *Lectures on Random Voronoi Tessellations*, Lecture Notes in Statistics, Springer Verlag, Berlin, 1994.
- Muche, L., *Distributional Properties of the Three-Dimensional Poisson Delauney Cell*, J. Stat. Phys. **84** (1996), 147–167.
- Muche, L., *Fragmenting the Universe and the Voronoi Tessellation*, Vorabdruck, Freiberg 1997, 1997.
- Neyman, J. & Scott, E. L., *Statistical Approach To Problems in Cosmology*, J. R. Stat. Soc. **20** (1958), 1–43.
- Nguyen, X. X. & Zessin, H., *Ergodic Theorems for Spatial Processes*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **48** (1979), 133–158.

- Ogata, Y. & Katsura, K., *Maximum Likelihood estimators of the fractal dimension for random spatial patterns*, *Biometrika* **87** (1991), 463–674.
- Ohser, J. & Lorz, U., *Quantitative Gefügeanalyse*, Technische Universität Bergakademie Freiberg, Freiberg, 1996.
- Ohser, J. & Tscherny, H., *Grundlagen der quantitativen Gefügeanalyse*, VEB Deutsche Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1988.
- Ohser, J., *On estimators for the reduced second moment measure of point processes*, *Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser. Statist.* **14** (1983), no. 1, 63–71.
- Okabe, A., Boots, B., & Sugihara, K., *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, John Wiley & Sons, Chichester, 1992.
- Oliver, S. J., Rowan-Robinson, M., Broadhurst, T. J., McMahon, R. G., Saunders, W., Taylor, A., Lawrence, A., Lonsdale, C. J., Hacking, P., & Conrow, T., *Large Scale Structure in a new deep IRAS galaxy redshift survey*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **280** (1996), 673–688.
- Padmanabhan, T., *Structure formation in the Universe*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- Peebles, P. J. E., *The Large Scale Structure of the Universe*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1980.
- Peebles, P. J. E., *Principles of physical cosmology*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993.
- Pietronero, L., Montuori, M., & Sylos Labini, F., *On the Fractal Structure of the Visible Universe*, in: *Critical Dialogues in Cosmology* (Singapore) (Turok, N., ed.), World Scientific, 1996.
- Pietronero, L., *The Fractal Structure of the Universe: Correlations of Galaxies and Clusters and the Average Mass Density*, *Phys. Rev. A* **144** (1987), 257–284.
- Plionis, M. & Valdarnini, R., *Evidence for large-scale structure on scales about 300/h Mpc*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **249** (1991), 46–62.
- Plionis, M. & Valdarnini, R., *The one-point cluster distribution function and its moments*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **272** (1995), 869–877.
- Press, W. H. & Schechter, P., *Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation*, *Ap. J.* **187** (1974), 425–438.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., & Vetterling, W. T., *Numerical recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- Rathie, P. N., *On the volume distribution of the typical Poisson–Delauney Cell*, *J. Appl. Prob.* **29** (1992), 740–744.
- Ripley, B. D., *The second-order analysis of stationary point processes*, *J. Appl. Prob.* **13** (1976), 255–266.
- Rivolo, A. R., *The two-point galaxy correlation function of the local supercluster*, *Ap. J.* **301** (1986), 70–76.
- Sahni, V. & Coles, P., *Approximation methods for nonlinear gravitational clustering*, *Physics Rep.* **262** (1995), 1–135.
- Schmalzing, J. & Buchert, T., *Beyond genus statistics: A unifying approach to the morphology of cosmic structure*, *Ap. J. Lett.* **482** (1997), L1–L4.
- Schmalzing, J. & Górski, K. M., *Minkowski Functionals used in the Morphological Analysis of Cosmic Microwave Background Anisotropy Maps*, angenommen bei MNRAS, astro-ph/9710185, 1998.

- Schmalzing, J., Kerscher, M., & Buchert, T., *Minkowski functionals in cosmology*, in: *Proceedings of the international school of physics Enrico Fermi. Course CXXXII: Dark matter in the Universe* (Varenna sul Lago di Como) (Bonometto, S., Primack, J., & Provenzale, A., eds.), Società Italiana di Fisica, 1996, pp. 281–291.
- Schmalzing, J., *Morphologische Maße für kosmische Strukturen*, Diplomarbeit, Ludwig–Maximilians–Universität München, 1996.
- Schneider, R. & Weil, W., *Integralgeometrie*, Bernd G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1992.
- Schneider, R., *Convex bodies: the Brunn–Minkowski theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- Sharp, N., *Holes in the Zwicky catalogue*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **195** (1981), 1857–867.
- Soneira, R. M. & Peebles, P. J. E., *A Computer Model Universe: Simulation Of The Nature Of The Galaxy Distribution In The Lick Catalog*, Ap. J. **83** (1978), 845–861.
- Stompor, R., Gorski, K. M., & Banday, A. J., *COBE–DMR normalization for inflationary flat dark matter models*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **277** (1995), 1225–1234.
- Stoyan, D. & Stoyan, H., *Fraktale, Formen, Punktfelder*, Akademie Verlag, Berlin, 1992.
- Stoyan, D., Bertram, U., & Wendrock, H., *Estimation variances for estimators of product densities and pair correlation functions of planar point processes*, Ann. Inst. Statist. Math. **45** (1993), 211–221.
- Stoyan, D., Kendall, W. S., & Mecke, J., *Stochastic Geometry and its Applications*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Chichester, 1995.
- Stoyan, D., *On Correlations of Marked Point Processes*, Math. Nachr. **116** (1984), 197–207.
- Stratonovich, R. L., *Topics in the theory of random noise*, Vol. 1, Gordon and Breach, New York, 1963.
- Sylos Labini, F., Gabrielli, A., Montuori, M., & Pietronero, L., *Finite size effects on the galaxy number counts: Evidence for fractal behaviour up to the deepest scale*, Physica A **226** (1996), 195–242.
- Sylos Labini, F., Montuori, M., & Pietronero, L., *Scale Invariance of galaxy clustering*, to be published in Physics Reports, 1997.
- Sylos Labini, F., Pietronero, L., & Montuori, M., *Frequently asked questions about fractals*, in: *Proc. 2<sup>nd</sup> SFB workshop on Astro–particle physics Ringberg 1996, Report SFB375/P002* (Ringberg, Tegernsee) (Bender, R., Buchert, T., & Schneider, P., eds.), 1997, pp. 109–135.
- Szalay, A. S., *Walls and Bumps in the Universe*, erscheint in Proc. 18th Texas Symposium of Relativistic Astrophysics, 1997.
- Szapudi, I. & Szalay, A. S., *A New Class of Estimators for the N–point Correlations*, astro-ph/9704241, 1997.
- Torquato, S., Lu, B., & Rubinstein, J., *Nearest–neighbour distribution functions in many–body systems*, Phys. Rev. A **41** (1990), 2059–2075.
- Trasarti-Battistoni, R., *Loose groups of galaxies in the Perseus–Pisces survey*, accepted, 1997.
- Ueda, H., Itoh, M., & Suto, Y., *Quantifying the pattern of galaxy clustering*, Publications of the Astronomical Society of Japan **45** (1993), 7–23.
- van de Kamp, P., *Principles of Astrometry*, W. H. Freeman & Company, San Francisco, London, 1967.
- van de Weygaert, R., *Voids and the Geometry of Large Scale Structure*, Ph.D. thesis, Leiden, 1991.
- van Lieshout, M. N. M. & Baddeley, A. J., *A nonparametric measure of spatial interaction in*

- point patterns*, Statist. Neerlandica **50** (1996), 344–361.
- Waterson, B., *The days are just packed*, Warner Books, London, 1993, p. 101.
- Wegner, G., Haynes, M. P., & Giovanelli, R., *A survey of the Pisces-Perseus supercluster. V - The declination strip +33.5 deg to +39.5 deg and the main supercluster ridge*, A. J. **105** (1993), 1251.
- Weil, W., *Stereology: A survey for geometers*, in: *Convexity and its applications* (Gruber, P. M. & Wills, J. M., eds.), Birkhäuser, Basel, 1983, pp. 360–412.
- Weiß, A. G. & Buchert, T., *High-resolution simulation of deep pencil beam surveys – analysis of quasi-periodicity*, Astron. Astrophys. **274** (1993), 1–11.
- White, S. D. M., *The hierarchy of correlation functions and its relation to other measures of galaxy clustering*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **186** (1979), 145–154.
- Wiedenmann, G., *Statistische Untersuchung der Galaxienverteilung*, Dissertation, Technische Universität München, 1991.
- Zel’dovich, Y. B. & Shandarin, S. F., *The maximum density in heavy-neutrino clouds*, Sov. Astron. Lett. **8** (**3**) (1982), 139–140.
- Zel’dovich, Ya. B., *Fragmentation of a homogeneous medium under the action of gravitation*, Astrophysics **6** (1970), 164–174.
- Zwicky, F., Herzog, E., Wild, P., Karpowicz, M., & Kowal, C., *Catalogue of Galaxies and Clusters of Galaxies*, Vol. 1–6, California Inst. of Technology, Pasadena, 1961–1968.

# Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei Herbert Wagner für sein Interesse, seine Diskussionsbereitschaft und die vielen Anregungen bedanken. Die enge und befruchtende Zusammenarbeit in der Kosmologie–Arbeitsgruppe vor allem mit Thomas Buchert, Jens Schmalzing, Herbert Wagner und später Claus Beisbart hat diese Arbeit wesentlich beeinflusst. Diskussionen mit Roberto Trasarti–Battistoni haben hierzu ebenfalls beigetragen. Die offene und kollegiale Atmosphäre im „3. Stock“ habe ich sehr geschätzt.

Teile dieser Arbeit sind in Kollaborationen entstanden. Ich danke Adrian Baddeley, Stefano Borgani, Stefan Gottlöber, Vicent Martínez, Volker Müller, Manolis Plionis, Maria Jesús Pons–Bordería, Jörg Retzlaff und Bryan Scott für die anregende Zusammenarbeit. Die interessanten Diskussionen mit Joe McCauley, Lutz Mücke, Yoshi Ogata und Dietrich Stoyan waren sehr hilfreich.

Für Anmerkungen und Korrekturen zum Manuskript möchte ich Claus Beisbart, Thomas Buchert, Jens Schmalzing und Sigmund Stintzing danken.

Die Unterstützung und der Rückhalt bei meinen Eltern und bei Claudia Schinharl haben mir sehr geholfen.

Die Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Sonderforschungsbereichs SFB 375 für Astroteilchenphysik gefördert.

# Lebenslauf

## Martin Kerscher

- |                        |  |
|------------------------|--|
| 16. März 1967          | Geburt in München als Sohn von Franz Kerscher und Christine Kerscher, geb. Zahler  |
| 1973 – 1977            | Besuch der Forellen-Grundschule in München   |
| 1977 – 1986            | Besuch des Michaeli-Gymnasiums in München  |
| Juni 1986              | Schulabschluß mit der Allgemeinen Hochschulreife   |
| Okt. 1986 – April 1988 | Zivildienst beim Malteser-Hilfsdienst in München   |
| Oktober 1988           | Studienbeginn an der Ludwig-Maximilians-Universität München im Studiengang Physik-Diplom   |
| November 1994          | Studienabschluß mit dem Diplom im Fach Physik, Diplomarbeit über das Thema „Simulation mehrfachgestreuter polarisierter LIDAR Signale“         |
| ab Februar 1995        | Wissenschaftlicher Angestellter der Sektion für Physik an der Ludwig-Maximilians-Universität München am Lehrstuhl H. Wagner, Promotionsstudium |