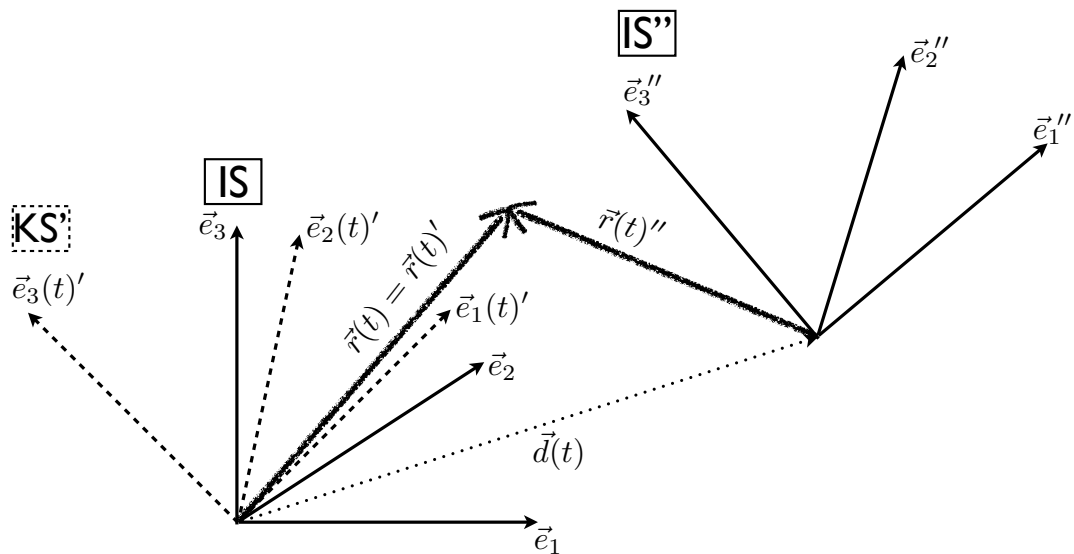


Wiederholung vom 16. Mai

Die Skizze zeigt drei verschiedene Koordinatensysteme, die in der Vorlesung betrachtet wurden, zwei Inertialsysteme IS und IS'' und ein rotierendes Koordinatensystem KS', dessen Ursprung aber mit dem in IS zusammenfällt.



Der Ortsvektor eines Massenpunktes ist in IS und KS' der selbe Vektor, da die Ursprünge übereinstimmen, d.h. $\vec{r}(t) = \vec{r}(t)'$! Aber natürlich unterscheiden sich die Komponenten, wenn man diesen Vektor in die Basisvektoren von IS und KS' zerlegt, d.h.

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 x_i(t)' \vec{e}_i(t)' = \vec{r}(t)', \quad (1.1)$$

wobei $x_i(t) = \vec{r}(t) \cdot \vec{e}_i$ und $x_i(t)' = \vec{r}(t) \cdot \vec{e}_i(t)'$. Beachten Sie, daß die Basisvektoren von KS' zeitabhängig sind (relativ zum Inertialsystem IS), da sich ihre Richtung durch die Rotation zeitlich ändert.

Der Ortsvektor in IS'', $\vec{r}(t)''$, ist tatsächlich ein anderer Vektor (er hat eine andere Richtung und einen anderen Betrag als $\vec{r}(t) = \vec{r}(t)'$). Zerlegt man

ihn in die Basis von IS'' , erhält man die Darstellung

$$\vec{r}(t)'' = \sum_{i=1}^3 x_i(t)'' \vec{e}_i'' . \quad (1.2)$$

Den Zusammenhang mit dem Ortsvektor in IS liest man von der Skizze gemäß

$$\vec{r}(t)'' = \vec{r}(t) - \vec{d}(t) \quad (1.3)$$

ab, wobei $\vec{d}(t)$ von der Form

$$\vec{d}(t) = \vec{v}t + \vec{b} \quad (1.4)$$

sein muß, damit IS'' genauso wie IS ein Inertialsystem darstellt. Die Beziehung (1.3) ist eine Beziehung zwischen Vektoren. Wenn man sie in Koordinaten ausdrücken möchte, muß man beachten, daß man die Vektoren \vec{v} und \vec{b} sowohl in die Basis von IS als auch von IS'' entwickeln kann, d.h.

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i^{(IS)} \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 v_i^{(IS'')} \vec{e}_i'' \quad , \quad \vec{b} = \sum_{i=1}^3 b_i^{(IS)} \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 b_i^{(IS'')} \vec{e}_i'' . \quad (1.5)$$

Die Beziehung zwischen den Koordinaten bezüglich IS'' und IS nimmt damit die folgende Form an:

$$\vec{x}(t)'' = R\vec{x}(t) - \vec{v}^{(IS'')}t - \vec{b}^{(IS'')} , \quad (1.6)$$

wobei

$$\vec{x}(t)'' = \begin{pmatrix} x_1(t)'' \\ x_2(t)'' \\ x_3(t)'' \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

und analog für $\vec{x}(t)$, $\vec{v}^{(IS'')}$ und $\vec{b}^{(IS'')}$.¹ Zusammen mit einer möglichen Verschiebung des Zeitnullpunktes, $t'' = t + t_0$, stellen die Transformationen (1.6) die Galileitransformationen dar, die die allgemeinsten Transformationen zwischen den Koordinaten zweier Inertialsysteme darstellen. Das Galileische Relativitätsprinzip besagt, daß alle grundlegenden physikalischen Gesetze in allen Inertialsystem die selbe Form annehmen. Insbesondere gilt dies für das zweite Newton'sche Axiom, d.h. in allen Inertialsystemen gilt, daß die Beschleunigung relativ zum Bezugssystem einzig durch die physikalischen Kräfte bestimmt ist:

$$m\ddot{\vec{r}}(t)'' = m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F} . \quad (1.8)$$

¹Man bekommt die i -te Komponente von (1.6), indem man (1.3) mit \vec{e}_i'' skalarmultipliziert. Für den ersten Term auf der rechten Seite von (1.6) ist dies nicht offensichtlich, aber es folgt aus $R_{ij} = \vec{e}_i'' \cdot \vec{e}_j$.

Dies gilt nicht im rotierenden Bezugssystem KS' . Beschleunigungen *relativ zu KS'* werden nicht nur durch die physikalischen Kräfte bestimmt, sondern auch durch Scheinkräfte. Für eine konstante Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ haben wir die folgende Formel hergeleitet:

$$m\ddot{\vec{r}}(t)' = \vec{F} - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}(t)') - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}(t)') , \quad (1.9)$$

wobei der zweite Term auf der rechten Seite die *Corioliskraft* darstellt und der dritte die *Zentrifugalkraft*. Ganz wichtig bei der Interpretation dieser Formel ist die Definition von $\ddot{\vec{r}}(t)'$ und $\dot{\vec{r}}(t)'$. Dem Buch von Fließbach folgend, habe ich diese Größen definiert als die Beschleunigung bzw. Geschwindigkeit *relativ zu KS'* , d.h.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t)' &= \left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right)_{KS'} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx_i(t)'}{dt} \right) \vec{e}_i(t)' & (1.10) \\ \ddot{\vec{r}}(t)' &= \left(\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \right)_{KS'} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{d^2x_i(t)'}{dt^2} \right) \vec{e}_i(t)' , \end{aligned}$$

was nicht mit $\frac{d\vec{r}(t)'}{dt}$ bzw. $\frac{d^2\vec{r}(t)'}{dt^2}$ verwechselt werden sollte, da die Zeitableitung in (1.10) nicht auf die Basisvektoren wirkt. Das ist genau damit gemeint, daß die zeitliche Änderung relativ zu KS' ist, in dem ja die Basisvektoren $\vec{e}_i(t)'$ fest sind. Möchte man (1.9) in Koordinaten ausdrücken (indem man die Gleichung mit $\vec{e}_i(t)'$ skalarmultipliziert, s. Fußnote 1), so bekommt man

$$m\ddot{x}(t)' = \vec{F}^{(KS')} - 2m(\vec{\omega}^{(KS')} \times \dot{x}(t)') - m\vec{\omega}^{(KS')} \times (\vec{\omega}^{(KS')} \times x(t)') , \quad (1.11)$$

wobei

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 F_i^{(KS')} \vec{e}_i(t)' , \quad \vec{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i^{(KS')} \vec{e}_i(t)' \quad (1.12)$$

gilt und die in (1.11) auftretenden Vektoren jeweils die Komponenten bezüglich der Basis $\vec{e}_i(t)'$ enthalten, d.h. z.B.

$$\vec{F}^{(KS')} = \begin{pmatrix} F_1^{(KS')} \\ F_2^{(KS')} \\ F_3^{(KS')} \end{pmatrix} . \quad (1.13)$$