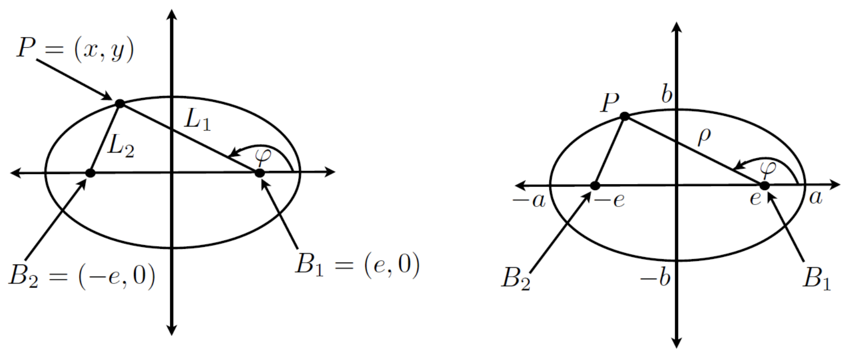
# Ellipse

Die Ellipse ist die Menge aller Punkte $P = (x, y)$, für die die Summe der Entfernungen zu zwei gegebenen festen Punkten $B_1 = (e, 0)$ und $B_2 = (-e, 0)$ konstant ist, d.h.

$$L_1 + L_2 = 2a \ , \tag{1.1}$$

wobei $a$ die Länge der großen Halbachse ist, s. Skizze. Die Punkte $B_1$ und $B_2$ werden *Brennpunkte* genannt.




Die Position der Brennpunkte ist nicht unabhängig von den Längen der großen und kleinen Halbachsen $a$ und $b$. Es gilt vielmehr

$$b^2 = a^2 - e^2 \ . \tag{1.2}$$

Dies kann man leicht sehen, wenn man $P = (0, b)$ betrachtet (d.h. $L_1 = L_2 = a$) und den Satz von Pythagoras anwendet.

Mit Hilfe von (1.2) kann man die Ellipsengleichung in kartesischen Koordinaten herleiten. Der Satz von Pythagoras liefert

$$L_1^2 = y^2 + (x - e)^2 \quad , \quad L_2^2 = y^2 + (x + e)^2 \ . \tag{1.3}$$

Setzt man dies ein in

$$L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2 = 4a^2 \ , \tag{1.4}$$

was aus der definierenden Gleichung (1.1) durch Quadrieren folgt, so folgt nach einfachen Umformungen, unter Benutzung von (1.2),

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \tag{1.5}$$

Wir wollen nun noch die Ellipsengleichung in Polarkoordinaten herleiten. Unser Startpunkt ist

$$L_2^2 - L_1^2 = (L_2 + L_1)(L_2 - L_1) = 2a(L_2 - L_1) \ , \tag{1.6}$$

wobei wir (1.1) benutzt haben. Auf der anderen Seite gilt aber wegen (1.3) auch

$$L_2^2 - L_1^2 = 4ex = 2a\,\frac{2ex}{a} = 2a\,2\varepsilon x \ , \tag{1.7}$$

wobei wir die *Exzentrizität*

$$\varepsilon = e/a \tag{1.8}$$

definiert haben. Durch Vergleich von (1.6) und (1.7) erhalten wir

$$L_2 - L_1 = 2\varepsilon x \ . \tag{1.9}$$

Kombinieren wir dies mit $L_1 + L_2 = 2a$, so folgt

$$L_1 = a - \varepsilon x \ . \tag{1.10}$$

Hierin drücken wir nun $x$ aus durch

$$x = e + L_1 \cos\varphi \ , \tag{1.11}$$

s. Skizze, und sammeln die Terme proportional zu $L_1$. Dies ergibt

$$L_1(1 + \varepsilon\cos\varphi) = a - \varepsilon e = a - \frac{e^2}{a} = \frac{b^2}{a} \equiv p \ , \tag{1.12}$$

wobei wir im vorletzten Schritt (1.2) benutzt haben und im letzten Schritt den *Parameter* $p$ definiert haben. Nun müssen wir nur noch $L_1 = \rho$ setzen (s. Skizze) und erhalten die Darstellung der Ellipse in Polarkoordinaten

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \ . \tag{1.13}$$