Ludwig-Maximilians-Universität München, Department für Physik
Prof. Dr. D. Lüst

10. Übung zur Quantenmechanik II (T5)

(Abgabe 7.1.2008)

33. Aufgabe: Rapidität

Betrachten Sie einen Lorentz-Boost des Koordinatensystems entlang der x-Achse. Aus der Mechanik wissen Sie, daß die Koordinaten des geboosteten Bezugssystems ($x'^\mu = (x'^0 \equiv ct', x'^1, x'^2, x'^3)$) mit denen des ursprünglichen ($x^\mu = (x^0 \equiv ct, x^1, x^2, x^3)$) durch $x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0), x'^2 = x^2, x'^3 = x^3$ zusammenhängen, wobei $\gamma = \sqrt{1-\beta^2}^{-1}$ und $\beta = \frac{v}{c}$ eingeführt wurden. Dies kann man in Matrixschreibweise ausdrücken durch

$$x'^\mu = \Omega^\mu{}_\nu \, x^\nu \ , \quad \text{mit} \quad \Omega^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, daß zwei Boosts entlang der x-Achse (mit Geschwindigkeiten v_1 und v_2) wieder einen Boost entlang der x-Achse ergeben. Wie addieren sich die Geschwindigkeiten?

b) Führen Sie die Rechnung aus Teil a) noch einmal durch unter Benutzung der *Rapidität* ϕ, die durch

$$\tanh(\phi) = \frac{v}{c} \tag{2}$$

definiert ist. Leiten Sie das Additionsgesetz für die Rapidität her.

34. Aufgabe: Kovarianz der Klein-Gordon-Gleichung

Es sei $\varphi(x) \equiv \varphi(\vec{x}, t)$ eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung in einem Bezugssystem S. Betrachten Sie nun ein neues Bezugssystem S', das man aus S mittels einer Lorentz Transformation $\Omega^\mu{}_\nu$ erhält. Zeigen Sie, daß die Funktion $\varphi'(x') \equiv \varphi(x)$ die (freie) Klein-Gordon-Gleichung, ausgedrückt in den neuen Koordinaten x'^μ, erfüllt.

35. Aufgabe: Nichtrelativistischer Limes der Klein-Gordon-Gleichung

a) Zeigen Sie, daß die ebene Welle $\varphi_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ik\cdot x}$, ($k \cdot x = k^\mu x_\mu =$

$k^0x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}$, wobei $\hbar k^\mu$ der Viererimpuls ist) Lösung der (freien) Klein-Gordon-Gleichung ist.

b) Benutzen Sie nun die relativistische Energie-Impuls Beziehung, um zu zeigen, daß im nichtrelativistischen Grenzfall (d.h. für $\frac{\vec{v}^2}{c^2} \ll 1$) $\varphi_k(x) \approx \psi_{\vec{k}}(\vec{x},t)\, e^{-imc^2t/\hbar}$ gilt, wobei $\psi_{\vec{k}}$ Lösung der (freien) Schrödingergleichung ist.

c) Zeigen Sie nun, daß auch die ebene Welle $\tilde{\varphi}_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{ik\cdot x}$ die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt. Was ergibt sich in diesem Fall für den nichtrelativistischen Limes? Erhält man wieder eine Lösung der Schrödingergleichung analog zu Teil b)?

36. Aufgabe: Erhaltung des Viererstroms

Analog zum nichtrelativistischen Fall betrachtet man für die Klein-Gordon-Gleichung eine Viererstromdichte, die im elektromagnetischen Feld die Form

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*\right] - \frac{e}{mc}A^\mu\psi^*\psi \ , \tag{3}$$

annimmt. Hierbei ist $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ das Viererpotential und $\psi(\vec{x},t)$ erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung gekoppelt an ein elektromagnetisches Feld, d.h.

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{c\partial t} - \frac{e}{c}\phi\right)^2\psi(\vec{x},t) = \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2\psi(\vec{x},t) + m^2c^2\psi(\vec{x},t) \ . \tag{4}$$

Zeigen Sie, daß j^μ die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ erfüllt.