Ludwig-Maximilians-Universität München, Department für Physik
Prof. Dr. D. Lüst

11. Übung zur Quantenmechanik II (T5)

(Abgabe 14.1.2008)

37. Aufgabe: Ladungserhaltung

Die Kontinuitätsgleichung für die Stromdichte von Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung lautet

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \ . \tag{1}$$

Nehmen Sie ferner an, daß die Stromdichte einen kompakten Träger hat, d.h. daß in jedem Inertialsystem ein $R \in \mathbb{R}_+$ existiert, so daß $j^\mu(x) = 0$ für $|\vec{x}| > R$ (mit anderen Worten, es gibt keine Ladungen und Ströme im Unendlichen).

a) Benutzen Sie (1), um zu zeigen, daß

$$Q \equiv \int d^3r \rho(\vec{r}, t) = \text{const} \tag{2}$$

gilt, d.h. die Ladung ist zeitunabhängig.

b) Zeigen Sie nun mit Hilfe von (1) und der Tatsache, daß j^μ ein Vierervektor ist, daß die Ladung in allen Inertialsystemen gleich ist.

(*Hinweis:* Man kann die Ladung auch als Integral über den gesamten Minkowskiraum schreiben

$$Q = \frac{1}{c} \int_{t=0} d^3r\, j^0 = \frac{1}{c} \int d^4x\, j^\mu(x) \partial_\mu \Theta(n^\nu x_\nu), \tag{3}$$

wobei Θ die Stufenfunktion ist und n^ν ein geeignet gewählter Vierervektor. Zeigen Sie dies.)

38. Aufgabe: Spinor-Formulierung der Klein-Gordon-Gleichung

In der Vorlesung wird diese Woche die Spinor-Formulierung der Klein-Gordon-Gleichung besprochen. Diese Aufgabe soll dazu dienen, einige der Zwischenschritte nachzuvollziehen.

a) Zeigen Sie, daß sich die Klein-Gordon-Gleichung in Schrödingerform

$$i\hbar \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} = H(e) \underline{\psi} \tag{4}$$

schreiben lässt, wobei

$$\underline{\psi} \;=\; \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} , \tag{5}$$

$$\phi = \frac{1}{2}\Big[\psi + \frac{1}{mc^2}\Big(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi\Big)\psi\Big] \quad , \quad \chi = \frac{1}{2}\Big[\psi - \frac{1}{mc^2}\Big(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi\Big)\psi\Big], \tag{6}$$

$$H(e) = \frac{1}{2m}\Big(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}\Big)^2(\tau_3 + i\tau_2) + mc^2\tau_3 + e\Phi\mathbf{1} \ . \tag{7}$$

Die Matrizen τ_a entsprechen den Paulimatrizen und **1** ist die zweidimensionale Einheitsmatrix.

b) Verifizieren Sie die in der Vorlesung angegebenen Formeln für die Stromdichte, d.h.

$$\begin{aligned} \rho &= \underline{\psi}^\dagger \tau_3 \underline{\psi} \,, \\ \vec{j} &= \frac{\hbar}{2mi}\left[\underline{\psi}^\dagger \tau_3(\tau_3 + i\tau_2)\vec{\nabla}\underline{\psi} - (\vec{\nabla}\underline{\psi}^\dagger)\tau_3(\tau_3+i\tau_2)\underline{\psi}\right] - \frac{e}{mc}\vec{A}\underline{\psi}^\dagger\tau_3(\tau_3+i\tau_2)\underline{\psi}, \end{aligned} \tag{8}$$

wobei $\underline{\psi}^\dagger = (\phi^*, \chi^*)$.

c) Verifizieren Sie $\tau_1(H(e))^*\tau_1 = -H(-e)$.

d) Zeigen Sie, daß

$$\underline{\psi}_{\vec{p}}^{(+)} = \frac{e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_p t)/\hbar}}{2\sqrt{E_p mc^2}\sqrt{V}} \begin{pmatrix} mc^2 + E_p \\ mc^2 - E_p \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{\psi}_{\vec{p}}^{(-)} = \frac{e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_p t)/\hbar}}{2\sqrt{E_p mc^2}\sqrt{V}} \begin{pmatrix} mc^2 - E_p \\ mc^2 + E_p \end{pmatrix} \tag{9}$$

normierte Lösungen der freien Klein-Gordon-Gleichung (d.h. (4), (7) mit $\Phi = 0$, $\vec{A} = \vec{0}$) sind, für die $\int d^3r\,\rho = \pm 1$ gilt (die Teilchen befinden sich in einem Volumen V). Wie üblich haben wir in (9) die Abkürzung $E_p = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ verwendet.

39. Aufgabe: Feshbach-Villars Darstellung

Ein freies Teilchen werde durch die Klein-Gordon-Gleichung in Spinor-Formulierung beschrieben. Gegeben sei nun der Operator

$$U = \frac{E_p + mc^2 + \tau_1(E_p - mc^2)}{2\sqrt{mc^2 E_p}} \,. \tag{10}$$

Bestimmen Sie $U^\dagger$ und zeigen Sie, daß $U^{-1} = \tau_3 U^\dagger \tau_3$ gilt. Benutzen Sie dies um zu verifizieren, daß bei der Transformation $\underline{\phi} = U\underline{\psi}$ die Norm

$$\langle \underline{\psi} | \underline{\psi} \rangle = \int d^3r \underline{\psi}^\dagger \tau_3 \underline{\psi} \tag{11}$$

erhalten bleibt, d.h. $\langle \underline{\psi}|\underline{\psi}\rangle = \langle \underline{\phi}|\underline{\phi}\rangle$. Wie lauten die transformierten $\underline{\phi}$ Spinoren für die Lösungen (9)? Wie lautet der transformierte Hamiltonoperator $H_\phi = UHU^{-1}$, wobei H in (7) mit $\Phi = 0$, $\vec{A} = \vec{0}$ gegeben ist? (Führen Sie die Matrizenmultiplikation mit dem Computer durch, da sie etwas länglich ist.) Die transformierte Klein-Gordon-Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = H_\phi \underline{\phi} \tag{12}$$

wird auch als (freie) Klein-Gordon-Gleichung in der Feshbach-Villars Darstellung bezeichnet.